

Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen

publié en commun avec S. Mazur dans *Studia Math.* 4 (1933), p. 90–94.

Wir beweisen in dieser Note, dass wenn die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume vom Typus (B) erklärter Funktionale eine $G_{\delta\sigma}$ -Menge ist, so ist sie sogar abgeschlossen; dies bildet eine Verschärfung eines Resultates der Herren S. Mazur und L. Sternbach, laut dessen die Menge R nicht genau eine F_σ -Menge sein kann ⁽¹⁾. Als eine leichte Folgerung aus dem obigen Satze ergibt sich, für jeden unendlichvieldimensionalen Raum vom Typus (B) , die Existenz einer linearen Menge die zwar eine $F_{\sigma\delta}$ - aber dabei keine $G_{\delta\sigma}$ -Menge ist. Wir fügen noch gewisse Verallgemeinerungen des oben formulierten Satzes an und geben im Zusammenhang damit einige Beispiele ⁽²⁾.

1. Seien X, Y zwei Räume vom Typus (B) und $\{F_n(x)\}$ eine Folge von linearen in X erklärten Operationen mit den Werten aus Y ; wir bezeichnen mit R die Konvergenzmenge der Folge $\{F_n(x)\}$. Ferner sei x_0 ein Punkt aus R , r_0 eine positive Zahl und S_0 die Menge der $x \in R$, für welche $|x - x_0| \leq r_0$, $|F_n(x) - F_n(x_0)| \leq r_0$ ($n = 1, 2, \dots$). Unter diesen Voraussetzungen gilt der

HILFSSATZ 1. Ist R eine $G_{\delta\sigma}$ -Menge, so ist S_0 von zweiter Kategorie in ihrer abgeschlossenen Hülle \bar{S}_0 , $\bar{S}_0 - S_0$ ist dabei von erster Kategorie in \bar{S}_0 .

Beweis. Sei $R = R_1 + R_2 + \dots$, wo jede der Mengen R_n eine G_δ -Menge ist. Setzt man $|x|^* = \text{obere Grenze } (|x|, |F_1(x)|, |F_2(x)|, \dots)$ für $x \in R$, so wird R bei dieser Normierung zu einem Raume vom Typus (B) ; wir bezeichnen ihn mit R^* . Aus $R^* = R_1 + R_2 + \dots$ folgt, dass eine der Mengen R_n , etwa R_{n_0} , von zweiter Kategorie in R^* und umsomehr in einer Kugel dieses Raumes dicht ist; sei x_0^* ihr Mittelpunkt und r_0^* ihr Radius. Mit Z_0 bezeichnen wir die Menge der Elemente der Form $\frac{r_0}{r_0^*}x + x_0 - x_0^*$, wo $x \in R_{n_0}$; es ist

⁽¹⁾ S. Mazur und L. Sternbach, *Über Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen*, *Studia Mathematica* 4 (1933), S. 54–65, insb. S. 61.

⁽²⁾ Vgl. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932, S. 235 [ce volume, p. 207].

$Z_0 \subset R$. Wie leicht einzusehen, ist die Menge Z_0 dicht in der Kugel vom Mittelpunkt x_0 und Radius r_0 , d. h. in der Menge S_0 . Die Menge $R_0 = Z_0 S_0$ ist also dicht in S_0 im Raume R^* ; wegen $|x| \leq |x|^*$ für $x \in R$, folgt daraus sofort, dass R_0 in S_0 auch im Raume X dicht ist. Wir beschränken uns nun auf die Betrachtung des ursprünglichen Raumes X . Da nach Voraussetzung R_{n_0} eine G_δ -Menge ist, so besitzt die mit ihr homothetische Menge Z_0 dieselbe Eigenschaft; in Anbetracht dessen, dass die Menge R_0 den Durchschnitt der Menge Z_0 und der abgeschlossenen, aus allen $x \in X$, für die $|x - x_0| \leq r_0$ und stets $|F_n(x) - F_n(x_0)| \leq r_0$ gilt, bestehenden Menge bildet, folgern wir, dass auch R_0 eine G_δ -Menge ist. R_0 ist dicht in S_0 , also auch in \bar{S}_0 ; als eine in der abgeschlossenen Menge \bar{S}_0 dichte G_δ -Menge ist R_0 von zweiter und dabei $\bar{S}_0 - R_0$ von erster Kategorie in \bar{S}_0 ; wegen $R_0 \subset S_0$ ist mithin auch $\bar{S} - S_0$ von erster Kategorie in \bar{S}_0 , w. z. b. w.

Wir sagen, dass die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E) besitzt, wenn es Punkte $z_m \in R$ ($m = 1, 2, \dots$) und $z_0 \in X - R$ gibt mit $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = z_0$, $|F_n(z_m)| \leq 1$ ($n, m = 1, 2, \dots$).

HILFSSATZ 2. *Besitzt die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E), so ist S_0 von erster Kategorie in \bar{S}_0 .*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass S_0 mit der Menge aller $x \in R$, für die $|x| \leq 1$, $|F_n(x)| \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) gilt, identisch ist. Nehmen wir an, dass S_0 von zweiter Kategorie in \bar{S}_0 ist. Bei natürlichen p, q sei S_{pq} die Menge der $x \in X$, für die $|x| \leq 1$, $|F_n(x)| \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$) und $|F_i(x) - F_k(x)| \leq 1/q$ ($i, k = p, p+1, \dots$); offenbar ist $S_0 = (S_{11} + S_{21} + \dots)(S_{12} + S_{22} + \dots) \dots$. Daraus folgt, dass $\bar{S}_0(S_{1q} + S_{2q} + \dots)$ von zweiter Kategorie in \bar{S}_0 ist, also – da die Mengen $\bar{S}_0 S_{pq}$ abgeschlossen in \bar{S}_0 sind –, dass für ein natürliches p_q die Menge $W_q = \bar{S}_0 S_{p_q q}$ einen Punkt x_q enthält, der ein innerer Punkt von W_q in \bar{S}_0 ist; wie leicht einzusehen ist $\frac{1}{2}x_q$ auch ein innerer Punkt von W_q in \bar{S}_0 ($q = 1, 2, \dots$). Nach Voraussetzung besitzt die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E); es gibt also Punkte $z_m \in R$ ($m = 1, 2, \dots$) und $z_0 \in X - R$, so dass $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = z_0$, $|F_n(z_m)| \leq 1$ ($n, m = 1, 2, \dots$); man kann annehmen, dass stets $|z_m| \leq \frac{1}{4}$, $|F_n(z_m)| \leq \frac{1}{4}$. Wir setzen $z_{qmr} = \frac{1}{2}x_q + z_m - z_r$, $z_{qm} = \frac{1}{2}x_q + z_m - z_0$ ($q, m, r = 1, 2, \dots$); wegen $|x_q| \leq 1$, $|F_n(x_q)| \leq 1$ ($q, n = 1, 2, \dots$) ist stets $|z_{qmr}| \leq 1$, $|F_n(z_{qmr})| \leq 1$ und da ausserdem $z_{qmr} \in R$, so ist $z_{qmr} \in S_0$; aus $z_{qm} = \lim_{r \rightarrow \infty} z_{qmr}$ folgt nun $z_{qm} \in \bar{S}$ ($q, m = 1, 2, \dots$). Da $\lim_{m \rightarrow \infty} z_{qm} = \frac{1}{2}x_q$ und $\frac{1}{2}x_q$ ein innerer Punkt von W_q in \bar{S}_0 ist, gibt es eine natürliche Zahl m_q , so dass $z_{qm_q} \in W_q$ ($q = 1, 2, \dots$). Es ist stets $z_0 = \frac{1}{2}x_q + z_{m_q} - z_{qm_q}$ und folglich

$$|F_i(z_0) - F_k(z_0)| \leq \frac{1}{2}|F_i(x_q) - F_k(x_q)| + |F_i(z_{m_q}) - F_k(z_{m_q})| + |F_i(z_{qm_q}) - F_k(z_{qm_q})|;$$

aus $x_q \in W_q$ folgt $|F_i(x_q) - F_k(x_q)| \leq 1/q$, ebenso ergibt sich aus $z_{qm_q} \in W_p$ die Ungleichung $|F_i(z_{qm_q}) - F_k(z_{qm_q})| \leq 1/q$ ($i, k = p_q, p_q + 1, \dots; q = 1, 2, \dots$). Wir

haben also

$$|F_i(z_0) - F_k(z_0)| \leq \frac{3}{2q} + |F_i(z_{m_q}) - F_k(z_{m_q})|$$

($i, k = p_q, p_q + 1, \dots; q = 1, 2, \dots$);

wegen $z_{m_q} \in R$ folgt hieraus sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{obere Grenze } |F_i(z_0) - F_k(z_0)|] \leq \frac{3}{2q} \quad (q = 1, 2, \dots),$$

$i, k = n, n+1, \dots$

was schliesslich $z_0 \in R$ ergibt, in Widerspruch mit dem Vorangehenden.

Wir beweisen jetzt den

SATZ. *Ist die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume X vom Typus (B) erklärter Funktionale $\{F_n(x)\}$ eine $G_{\delta\sigma}$ -Menge, so ist sie abgeschlossen.*

Beweis. Angenommen, es sei R nicht abgeschlossen; nach einem Satze der Herren S. Mazur und L. Sternbach besitzt dann die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E)⁽³⁾. Behalten wir die vorige Bezeichnungsweise bei, so ist nach dem Hilfssatze 2 die Menge S_0 von erster Kategorie in \bar{S}_0 ; also nach dem Hilfssatze 1 kann R nicht eine $G_{\delta\sigma}$ -Menge sein, entgegen der Voraussetzung.

2. Der im vorigen Abschnitte gegebene Satz behält seine Gültigkeit, wenn $\{F_n(x)\}$ eine Folge linearer Operationen ist, deren Werte einem Raume Y vom Typus (B) von folgender Eigenschaft angehören: ist $y_n \in Y, |y_n| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$), so gibt es eine reelle Zahlenfolge $\{t_n\}$, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ divergiert und dabei ihre Teilsummenfolge beschränkt ist. Der Beweis verbleibt übrigens ohne Änderung, da bei den in Rede stehenden Voraussetzungen die Folge $\{F_n(x)\}$ noch die Eigenschaft (E) besitzt⁽⁴⁾.

Aus den Hilfssätzen 1 und 2 folgt noch die

Bemerkung. *Ist die Konvergenzmenge R einer Folge linearer in einem Raume X vom Typus (B) erklärter Operationen $\{F_n(x)\}$, mit Werten aus einem ebensolchen Raume Y , eine $G_{\delta\sigma}$ -Menge, so ist sie schon eine F_{σ} -Menge. — In der Tat sei R_p die Menge der $x \in R$, für welche stets $|F_n(x)| \leq p$ ($p = 1, 2, \dots$); offenbar ist $R = R_1 + R_2 + \dots$. Wir behaupten, dass jede der Mengen R_p abgeschlossen ist. Anderenfalls gibt es nämlich Punkte $z_m^* \in R_p$ ($m = 1, 2, \dots$) und $z_0^* \in X - R_p$, so dass $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m^* = z_0^*$. Es ist $|F_n(z_m^*)| \leq p$ ($n, m = 1, 2, \dots$), also auch stets $|F_n(z_0^*)| \leq p$; folglich $z_0^* \in R$. Setzt man $z_m = \frac{1}{p} z_m^*$ ($m = 1, 2, \dots$), $z_0 = \frac{1}{p} z_0^*$, so ist $z_m \in R$ ($m = 1, 2, \dots$), $z_0 \in X -$*

⁽³⁾ Siehe die unter ⁽¹⁾ zitierte Arbeit, S. 60.

⁽⁴⁾ Siehe die unter ⁽¹⁾ zitierte Arbeit, S. 62.

– R , $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = z_0$ und $|F_n(z_m)| \leq 1$ ($n, m = 1, 2, \dots$); die Folge $\{F_n(x)\}$ besitzt also die Eigenschaft (E). Von da aus folgt alles wie beim Beweise von Satz 1.

3. Wir bringen jetzt einige Anwendungen der vorigen Sätze. Zuerst zeigen wir, dass es in jedem unendlichviel-dimensionalen Raume X vom Typus (B) eine lineare Menge R gibt, die zwar eine $F_{\sigma\delta}$ - aber dabei keine $G_{\delta\sigma}$ -Menge ist. Sei $\{F_n(x)\}$ eine Folge linearer in X erklärter Funktionale derart, dass die Konvergenzmenge R dieser Folge nicht abgeschlossen ist⁽⁵⁾. Als Konvergenzmenge einer Folge stetiger Funktionen ist R eine $F_{\sigma\delta}$ -Menge; aus dem im vorigen Abschnitte bewiesenen Satze folgt aber, dass R keine $G_{\delta\sigma}$ -Menge ist. Z. B. bildet also die Menge R aller Punkte $x = \{\xi_n\}$ des Hilbertschen Raumes (l^2), für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ konvergiert, eine $F_{\sigma\delta}$ - aber dabei keine $G_{\delta\sigma}$ -Menge. Betrachten wir jetzt im Raume X der stetigen Funktionen von der Periode 1 die Menge R , die aus allen stetig-differenzierbaren Funktionen besteht. Setzt man $F_n(x) = n[x(t+1/n) - x(t)]$ für $x \in X$, ($n = 1, 2, \dots$), so sind $F_n(x)$ lineare Operationen in X , mit den wieder diesem Raume angehörenden Werten, und R ist mit der Konvergenzmenge der Folge $\{F_n(x)\}$ identisch. R ist eine $F_{\sigma\delta}$ - aber keine $G_{\delta\sigma}$ -Menge, da ersichtlich die Folge $\{F_n(x)\}$ die Eigenschaft (E) besitzt. Die Menge der stetig-differenzierbaren Funktionen von der Periode 1 ist im Raume aller stetigen Funktionen von der Periode 1 eine $F_{\sigma\delta}$ - dabei aber keine $G_{\delta\sigma}$ -Menge.

⁽⁵⁾ S. Mazur und L. Sternbach, Über die Borelschen linearen Mengen, Studia Mathematica 4 (1933), S. 48–53, insb. S. 48.