Sur la structure des ensembles linéaires

publié en commun avec C. Kuratowski dans Studia Math. 4 (1933), p. 95–99.

Soit $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions continues $y = f(x), 0 \leqslant x \leqslant 1$, la distance de deux fonctions f et g étant supposée égale à $\max |f(x) - g(x)|$. Nous allons définir dans cet espace un ensemble linéaire $\mathscr{L}$ qui est un complémentaire analytique non borelien(1).

L'intérêt de cet exemple se rattache, d'une part, au problème de M. Lebesgue de définir un ensemble non borelien jouissant de la propriété de Baire sur tout ensemble parfait(2), problème qui a été résolu dans l'espace des nombres reels; l'ensemble $\mathscr{L}$ que nous définirons répond non seulement aux conditions imposées par M. Lebesgue(3) mais est, en outre, un ensemble *linéaire*. D'autre part, le même exemple présente une contribution à l'étude de la structure des ensembles linéaires au point de vue de leur *classification* (en ensembles boreliens des différentes classes, en ensembles analytiques, projectifs etc.). L'existence des ensembles linéaires fermés ou des E_σ (non fermés) ne présente aucune difficulté; quant aux ensembles G_δ, on prouve que chaque ensemble linéaire de ce genre est toujours fermé (de sorte qu'il n'existe aucun „vrai" ensemble G_δ linéaire); quant aux classes plus élevées, on ne connaît que des résultats partiels: on ne sait rien sur l'existence des „vrais" ensembles (linéaires) de toute classe $\alpha > 1$ (4). Le

---

(1) Un ensemble de fonctions est dit *linéaire* s'il contient avec $f(x)$ chaque fonction de la forme $\lambda f(x) + \mu g(x)$, λ et μ réels. Les ensembles *boreliens* s'obtiennent à partir des ensembles fermés à l'aide des opérations: somme et produit dénombrables. Les images continues des ensembles boreliens sont dits *analytiques*; les complémentaires de ceux-ci sont dits des *complémentaires analytiques*.

(2) [H. Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement*], Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 6e série, 1 (1905), p. 188.

(3) Puisque chaque complémentaire analytique jouit de la propriété de Baire; voir p. ex. E. Szpilrajn [*O mierzalności i warunku Baire'a*], Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa 1929/1930, p. 299.

(4) Voir S. Mazur und L. Sternbach, *Über die Borelschen Typen von linearen Mengen*, Studia Mathematica 4 (1933), p. 48–53 et S. Banach und S. Mazur [*39*] [ce volume, p. 412–415].

problème le plus proche en dehors des ensembles boreliens est celui des ensembles (linéaires) analytiques non boreliens ainsi que celui des complémentaires analytiques non boreliens. Le premier reste ouvert, le deuxième présente bien le sujet de cette note.

L'idée de la construction de l'ensemble $\mathscr{L}$ est fondée sur deux énoncés purement topologiques, qui seront établis dans les NN° 1 et 2; la construction même sera définie au N° 3.

1. Racines de l'équation $f(x) = 0$. En désignant par $R(f)$ l'ensemble des racines de ladite équation, on définit une transformation de l'espace $\mathscr{C}$ en l'espace F (tout entier) des sous-ensembles fermés de l'intervalle 01 ([5]). Cette transformation est *semi-continue supérieurement*([6]), c.-à-d. que f_n étant une suite de fonctions continues uniformément convergente vers f, les conditions $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ et $f_n(x_n) = 0$ impliquent que $f(x) = 0$.

Nous en tirons la conclusion suivante([7]): *étant donnée une famille* $\boldsymbol{E}$ *d'ensembles fermés qui constitue (dans l'espace* $\boldsymbol{F}$*) un complémentaire analytique, l'ensemble* $\mathscr{L}$ *des fonctions* f *telles que* $R(f)\in \boldsymbol{E}$ *est également un complémentaire analytique (dans l'espace* $\mathscr{C}$*); si, en outre* $\boldsymbol{E}$ *n'est pas borelien, il en est encore de même de* $\mathscr{L}$([8]).

En effet, la fonction $R(f)$, comme fonction semi-continue supérieurement, étant mesurable B (de I-re classe)([9]), l'ensemble $\mathscr{L} = R^{-1}(\boldsymbol{E})$ est un complémentaire analytique([10]). D'autre part, chaque élément de l'espace F étant une valeur de la fonction $R(f)$, l'identité évidente $\boldsymbol{E} = RR^{-1}(\boldsymbol{E}) = R(\mathscr{L})$ montre qu'en cas où $\mathscr{L}$ est borelien, l'ensemble $\boldsymbol{E}$, comme image mesurable B de $\mathscr{L}$, est analytique; donc – comme ensemble qui est analytique ainsi que son complémentaire – $\boldsymbol{E}$ serait borelien([11]).

([5]) L'espace F est supposé métrisé par la formule de M. Hausdorff (*Mengenlehre*, § 28). On admet d'habitude que les éléments de cet espace sont des ensembles fermés non vides; mais rien n'empêche de lui adjoindre l'ensemble vide en le plaçant à distance égale à l'unité de tous les autres éléments de F (ce qui est plus conforme à notre but).

([6]) dans le sens établi par M. Kuratowski dans *Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés*, Fundamenta Mathematicae 18 (1931), p. 148–159.

([7]) valable, lorsque l'espace des x est un espace compact arbitraire.

([8]) Il en résulte que chacune des familles de fonctions suivantes est un complémentaire analytique non borélien: fonctions qui ne s'annulent qu'une infinité dénombrable de fois au plus, fonctions qui ne s'annulent en aucun point irrationnel, fonctions dont l'ensemble des zéros est bien ordonné (selon leur grandeur croissante). Car chacune des trois familles correspondantes d'ensembles fermés constitue (dans l'espace F) un complémentaire analytique non borélien. Voir p. ex. W. Hurewicz [*Zur Theorie der analytischen Mengen*], Fundamenta Mathematicae 15 (1930), p. 4–17, ainsi que C. Kuratowski et E. Szpilrajn [*Sur les cribles fermés et leur applications*], Fundamenta Mathematicae 18 (1931) [p. 160–170], p. 169.

([9]) Op. cit. ([6]), Fundamenta Mathematicae 18, p. 152.

([10]) Voir p. ex. op. cit. ([8]), Fundamenta Mathematicae 18, p. 162 (II).

([11]) d'après un théorème de Souslin [*Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis*], Comptes Rendus [de l'Académie des Sciences (Paris)] 164 (1917) [p. 89].

2. Classe des entourages fermés d'un ensemble non-dense. Un ensemble X est dit entourage de l'ensemble A, lorsque chaque point de A est un point intérieur de X. Il est à remarquer que, A étant un ensemble non-dense (situé dans l'intervalle $I = 01$ ou, plus généralement, dans un espace métrique séparable), à chaque point p qui n'appartient pas à A correspond un entourage fermé de A pour lequel p n'est pas un point intérieur. Car, l'ensemble A étant non-dense, il existe une suite d'intervalles fermés $I_1, I_2, \ldots$ (de longueur tendant vers 0) situés en dehors de A et convergeant vers p; l'intervalle I diminué des points intérieurs des intervalles $I_1, I_2, \ldots$ est un entourage fermé de A, et p, comme point d'accumulation des intervalles enlevés, n'est pas un point intérieur de cet entourage.

Ceci étant, nous en concluons que, *A étant un ensemble non-dense analytique et non borelien, la famille* $\mathbf{E}$ *de ses entourages fermés constitue (dans l'espace* $\mathbf{F}$*) un complémentaire analytique non borelien.*

Désignons à ce but par le symbole $\sum\limits_p$ l'opérateur logique: „il existe un p tel que...". Le fait (qui n'est d'ailleurs qu'une modification de la définition de $\mathbf{E}$) que, pour que l'ensemble fermé X n'appartienne pas à $\mathbf{E}$, il faut et il suffit qu'il existe un point p de A qui n'est pas un point intérieur de X, — s'exprime alors par l'équivalence

$$\{X \notin \mathbf{E}\} \equiv \sum_p [(p \in A) \cdot (p \in \overline{I - X})].$$

La fonction $\overline{I-X}$ étant semi-continue inférieurement ([12]) (de la variable X), l'ensemble $\underset{p,X}{\mathrm{E}}(p \in \overline{I-X})$ est un G_δ ([13]). L'ensemble $\underset{p,X}{\mathrm{E}}[(p \in A) \cdot (p \in \overline{I-X})]$ $= \underset{p,X}{\mathrm{E}}(p \in A) \cdot \underset{p,X}{\mathrm{E}}(p \in \overline{I-X})$ étant analytique, sa projection l'est également. Mais celle-ci coïncide avec le complémentaire de l'ensemble $\mathbf{E}$ ([14]). Il est ainsi établi que $\mathbf{E}$ est un complémentaire analytique.

En second lieu, mettons en termes logiques la remarque faite au début de ce N°, d'aprés laquelle la condition $p \notin A$ équivaut à l'existence d'un $X \in \mathbf{E}$ tel que $p \in \overline{I-X}$:

$$\{p \notin A\} \equiv \sum_X [(X \in \mathbf{E}) \cdot (p \in \overline{I-X})].$$

([12]) Op. cit. ([6]), Fundamenta Mathematicae 18, p. 154.

([13]) Voir ([9]) et C. Kuratowski [*Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points à l'aide des symboles logiques*], Fundamenta Mathematicae 17 (1931) [p. 249–272], p. 260 (i).

([14]) D'une façon générale, $\varphi(x, y)$ étant une relation entre les variables x et y, l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}} \sum\limits_y \varphi(x, y)$ est la projection („parallèle à l'axe Y") de l'ensemble $\underset{xy}{\mathrm{E}}\, \varphi(x, y)$. Dans le cas considéré, la condition entre crochets [ ] exprime une relation entre les variables p et X. Voir C. Kuratowski et A. Tarski [*Les opérations logiques et les ensembles projectifs*], Fundamenta Mathematicae 17 (1931) [p. 240–248], p. 243 (12).

Si l'on supposait que l'ensemble E soit borelien, on en conclurait en raisonnant comme auparavant que le complémentaire de A est analytique. Mais alors l'ensemble A serait borelien ([11]) – contrairement à l'hypothèse.

3. Définition de l'ensemble $\mathscr{L}$. Soit, dans l'intervalle 01, A un ensemble non-dense analytique et non borelien. $\mathscr{L}$ désigne l'ensemble des fonctions continues f telles que chaque point de A est un point intérieur de l'ensemble des racines de l'équation $f(x) = 0$. En termes des NN° précédents:

$$\mathscr{L} = \underset{f}{\mathrm{E}}\,[R(f) \in E] = R^{-1}(E).$$

D'aprés les énoncés des NN° 1 et 2 les ensembles E et $\mathscr{L}$ sont des *complémentaires analytiques non boreliens.* Enfin $\mathscr{L}$ est *linéaire* en vertu des inclusions faciles à vérifier:

$$R(f)\cdot R(g) \subset R(f+g),$$
$$R(f) \subset R(\lambda f) \quad \text{quel que soit } \lambda \text{ réel}.$$

4. Remarques. (i) La méthode précédente permet de définir des ensembles linéaires de *toute classe projective de la forme CPC...* ([15]) qui ne sont pas de classe inférieure. Il suffit à ce but de considérer comme A un ensemble de classe *PC...* qui n'est pas *CPC...*

D'une façon analogue, en prenant pour A un ensemble non projectif, on parvient à un ensemble *linéaire non projectif.*

(ii) La propriété de l'espace $\mathscr{C}$ des fonctions continues de contenir un complémentaire analytique linéaire et non borelien appartient à *chaque espace V vectoriel, normé, complet et de dimension infinie.*

Soit, en effet, conformément à un théorème de M. Banach, φ une transformation linéaire, biunivoque et continue de l'espace $\mathscr{C}$ en un sous-ensemble de V. L'ensemble $\varphi(\mathscr{L})$ est alors l'ensemble demandé en vertu de la proposition générale suivante: *$\varphi(x)$ étant une fonction biunivoque et continue qui transforme un espace complet séparable X en un sous-ensemble d'un espace complet séparable Y, et L étant un complémentaire analytique non borelien, l'ensemble $\varphi(L)$ l'est également.*

Pour démontrer cette dernière proposition, remarquons que 1° l'ensemble $\varphi(X)$, comme image biunivoque et continue d'un espace complet, est borelien ([16]), et 2° $\varphi(X-L)$, comme image continue de l'ensemble analytique $X-L$, est analytique. Il en résulte que l'ensemble $\varphi(L) = \varphi(X)-\varphi(X-L)$ est un complémentaire analytique. Il n'est pas borelien, car autrement l'identité $L = \varphi^{-1}[\varphi(L)]$ conduirait à la conclusion que L, comme image biunivoque et mesurable B de l'ensemble borelien $\varphi(L)$, serait borelien ([16]), – contrairement à l'hypothèse.

([15]) Voir N. Lusin, *Ensembles analytiques,* Paris 1930, p. 276.

([16]) M. Souslin, op. cit.

(*Reçu par la Rédaction le 22. 6. 1933*)