STEFAN BANACH

ALGEBRA

DLA II KLASY GIMNAZJALNEJ

WYDANIE SZÓSTE

KSIĄŻNICA-ATLAS * WROCŁAW—WARSZAWA
1947

STEFAN BANACH

ALGEBRA

DLA II KLASY GIMNAZJALNEJ
(DAWNEJ III)

WYDANIE SZÓSTE

K S I Ą Ż N I C A - A T L A S
WROCŁAW — WARSZAWA
1947

Podręcznik zatwierdzony do użytku szkolnego pismem Ministerstwa Oświaty z dnia 29 maja 1947 Nr VI OC — 1127/47

Nakład: 68.751-73000 egz.	Papier: 61 x 86, gr 60, kl. 7.
Data wydania: listopad 1947 r.	

2609

Państwowe Zakłady Graficzne Nr 4. Wrocław — 195 (F 22709)

Wyrażenia ułamkowe

Rozdział I

Czynniki wielomianów

§ 1. Rozkładanie na czynniki (Powtórzenie)

Wyrazy wielomianu $8x^3+6x^2$ mają wspólny czynnik $2x^2$; mamy bowiem: $8x^3+6x^2=2x^2\cdot 4x+2x^2\cdot 3$.

Wyłączając $2x^2$ przed (za) nawias dostaniemy:

$$8x^3+3x^2 = 2x^2(4x+3) = (4x+3)2x^2.$$

Łatwo zauważyć, że wyrażenie w nawiasie jest ilorazem danego wielomianu przez jednomian $2x^2$. Zatem jednomian, będący wspólnym czynnikiem wyrazów danego wielomianu, wyłączamy przed (za) nawias w następujący sposób: **jednomian piszemy przed (za) nawiasem, w nawiasie zaś iloraz danego wielomianu przez ten jednomian.**

Podobnie wyłączamy -1 przed nawias; np.

$$-x^3+x^2-1 = (-1)(x^3-x^2+1) = -(x^3-x^2+1).$$

W nawiasie mamy iloraz wielomianu przez -1; iloraz ten otrzymujemy zmieniając znaki wyrazów danego wielomianu.

W wielomianie: $\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{3}$ współczynniki są ułamkami. Wspólnym mianownikiem tych ułamków jest 12. Wyłączając $\frac{1}{12}$ przed nawias, dostaniemy:

$$\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}(9x^2-10x+4).$$

W nawiasie mamy iloraz wielomianu przez $\frac{1}{12}$, czyli iloczyn przez 12. W ten sposób przedstawiliśmy wielomian jako iloczyn ułamka i wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Rozważania powyższe mają szczególne zastosowanie wówczas, gdy chcemy wielomian rozłożyć na czynniki, tj. przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopni niższych. Poznamy kilka przypadków, w których taki rozkład można wykonać.

I. Jeżeli wszystkie wyrazy wielomianu mają wspólny czynnik, to czynnik ten możemy wyłączyć przed nawias, np.:

1) Wyrazy wielomianu $6a^3b - 8a^2b^2$ mają wspólny czynnik $2a^2b$. Wyłączając $2a^2b$ przed nawias otrzymamy:

$$6a^3b - 8a^2b^2 = 2a^2b(3a - 4b).$$

2) Rozłożyć na czynniki wielomian:

$$12u^3v^4(x - y^2) - 9u^4v^3(y^2 - x).$$

Zauważmy, że $x - y^2 = -(y^2 - x)$, zatem wyrazy wielomianu mają wspólny czynnik $3u^3v^3(x - y^2)$.

Wyłączając ten czynnik przed nawias otrzymamy:

$$12u^3v^4(x - y^2) - 9u^4v^3(y^2 - x) = 3u^3v^3(x - y^2)(4v + 3u).$$

II. Często rozłożenie wielomianu na czynniki ułatwimy sobie grupując odpowiednio wyrazy, np.:

3) Wielomian $x^2 + yz + xy + xz$ przekształcamy następująco:

$$x^2 + yz + xy + xz = (x^2 + xy) + (yz + xz) = x(x + y) + z(y + x) =$$
$$= (x + y)(x + z)$$

4) $x^3 - ab + ax - bx^2 = (x^3 - bx^2) + (ax - ab) =$
$= x^2(x - b) + a(x - b) = (x^2 + a)(x - b).$

III. Niekiedy należy użyć specjalnych wzorów, jak np.:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ itp.,

5) $16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2 = (4x + 3y)(4x - 3y)$

6) $16x^4 - y^4 = (4x^2 + y^2)(4x^2 - y^2) = (4x^2 + y^2)(2x + y)(2x - y)$

7) $(a - b)^2 - b^2 + a^2 = (a - b)^2 + (a^2 - b^2) = (a - b)^2 +$
$+ (a + b)(a - b) = (a - b)(a - b + a + b) = 2a(a - b)$

8) $a^2 + b^2 - 2ab - 4 = (a - b)^2 - 2^2 = (a - b + 2)(a - b - 2).$

Uwaga: Przypuśćmy, że mamy dany jakiś wielomian, np. $3x^2 - 1$; pomnóżmy go przez jakikolwiek inny wielomian, np. $2x + 1$. Otrzymamy:

$$(3x^2 - 1)(2x + 1) = 6x^3 + 3x^2 - 2x - 1$$

Wielomian $6x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ nazywamy **wielokrotnością** wielomianu $3x^2 - 1$; wielomian zaś $3x^2 - 1$ nazywamy **dzielnikiem** wielomianu $6x^3 + 3x^2 - 2x - 1$.

Pojęcia powyższe są uogólnieniem pojęć znanych nam w zakresie liczb naturalnych.

Jeżeli chcemy znaleźć dzielniki jakiegoś wielomianu, to staramy się go najpierw rozłożyć na czynniki. Rozkładając np. $2x^4 - 8x^2$ na czynniki dostaniemy:

$$2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x + 2)(x - 2)$$

Łatwo zauważyć, że dzielnikiem wielomianu $2x^4-8x^2$ jest każdy czynnik w danym rozkładzie; dzielnikiem jest również iloczyn ilukolwiek czynników. Dzielnikami zatem są np. 2, x, $(x+2)$, $(x-2)$, $2x^2$, $x^2(x+2)$, $(x+2)(x-2)$ itd.

Zadania

1. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

a) $5a+5b$, $7x-7y$, $3a-6x-9z$, $-2x+8x^2+4$;
b) $ax+ay$, $ax-ay$, $-bz-bx$, $ax-ay+ab-az$;
c) $3ab+3ac$, $6x^2y+2ax$, $5xy^2-10x^2y^3+15y$;
d) $20a^2-35ab+45ac$, $16a^3x^2+24ax^3-56a^2x^2$;
e) $21x^2-9x^4+6x^3$, $2a^2-8a^5-6a^8$, $3x^4y-6x^6y+12x^2$;
f) $4x^5y^2-6x^7y^3$, $9a^2b^3-12a^4b^6+6a^5b^9$;
g) $21a^3x^5+14a^5x^3-42a^7x^6$, $22a^2x^3y^5-44a^3x^2y^6+44a^5x^6y^7$.

2. Wyłącz przed nawias (-1):

$-5x+7y$, $3a-4x$, $-5a+3b-7y$, $-4a-3y-5z$.

3. Wyłącz przed nawias:

a) $-x$ z wielomianów: $x^2-3x-2x^3$, $-ax^5+a^2x^4-5x$, $-x^3-x^2-x$, $2x^3+ax^2-3x$;
b) $-3ax$ " $-6a^2x^3-3ax^2-9ax$, $9ab^2x^3-6a^2bx^2+2a^2b^2x$;
c) $-5a^2bx^2$ " $-10a^3b^2x^4-15a^2b^3x^3-a^4bx^2$, $-7a^2bx^5+6a^4b^3x^2$.

4. Przedstaw w postaci iloczynu wielomianu o współczynnikach całkowitych przez jednomian:

a) $\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}y$, $\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b$, $\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{4}xy+\frac{7}{6}y^2$;
b) $\frac{2}{5}ax^2+\frac{1}{3}a^2x$, $\frac{5}{4}x^3y^2-\frac{4}{5}x^2y^3$, $\frac{2}{3}a^2b^2-\frac{5}{4}ab^2$;
c) $-\frac{1}{2}a^2x^7y^6-\frac{2}{5}a^3x^4y^5-\frac{5}{6}a^5x^3y^4$, $\frac{6}{5}a^5b^4-\frac{3}{7}a^2b^3+\frac{3}{4}a^4b^2$.

5. Wyłącz wspólny czynnik za nawias:

a) $2(a+b)+4(a+b)$, $8(x-y)-4(x-y)$;
b) $a(x+2)+b(x+2)$, $14(x-y)-7(x-y)-6(x-y)$.

6. Wyłącz przed nawias $a-b$:

a) $3(a-b)-5(b-a)$, $7(a-b)-8(b-a)-9(b-a)+6(a-b)$,
b) $4(a-b)-(b-a)x+(b-a)y$, $-2x(b-a)-3y(a-b)$.

7. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

a) $3x^2y^2(a-b)-6x^3y^5(b-a)$,
b) $5(x-y)(a-b)-7(y-x)(b-a)$,
c) $4(a-b^2)(x^2-y^2)-6z(b^2-a)(x^2-y^2)+7t(b^2-a)(y^2-x^2)$.

W zadaniach 8 — 12 rozłóż podane wielomiany na czynniki (możliwie najniższego stopnia) i wskaż kilka dzielników.

8. *a)* $xy + bx + ay + ab$, $\quad ab + ay - bx - xy$,
b) $ac + bd + ad + bc$, $\quad ax - by - ay + bx$,
c) $ab + 3a - 2b - 6$, $\quad 6ax - 4ay - 9bx + 6by$,
d) $14ab + 7ay - 2bx - xy$, $\quad 45ab + 63xy - 81ax - 35by$,
e) $40x^2 - 2p + 5x - 16px$, $\quad ax + ay - bx - by + cx + cy$,
f) $x^3 + a^3 + ax^2 + a^2x$, $\quad 6x^4 - 35y^5 + 10x^2y^2 - 21x^2y^3$,
g) $6x^3 - 3ax + 2bx^2 - ab$, $\quad abx + 3ax - 2bx - 6x$,
h) $x^3 + x^2 + x + 1$, $\quad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,

9. *a)* $a^2 - b^2$, $\quad 4a^2 - 9x^2$, $\quad 25x^2 - 16y^2$, $\quad 25a^2 - 36x^4$;
b) $16a^2b^2 - 9x^2y^2$, $\quad \frac{4}{9}x^2 - \frac{25}{16}a^2b^2$, $\quad 16y^6z^2 - 4x^2t^2$;
c) $x^4 - 1$, $\quad 16a^4 - 81x^4$, $\quad 625x^{16} - 16y^{16}$, $\quad a^{32} - x^{32}$;
d) $4a^2b^4c^6 - x^2y^4$, $\quad a^8x^4 - 16b^4y^8$, $\quad a^4b^4c^4 - 81x^4y^4$.

10. *a)* $(a - b)^2 - x^2$, $\quad y^2 - (a + x)^2$, $\quad (x + a)^2 - y^2$;
b) $(2x + 3y)^2 - x^2$, $\quad (5a - 7b)^2 - b^2$, $\quad y^2 - (2x - 3y)^2$;
c) $(a + b)^2 - (a - b)^2$, $\quad (a + x)^2 - (x - a)^2$, $\quad (x - y)^2 - (x + a)^2$;
d) $(3a + 2b)^2 - (2a + 3b)^2$, $\quad (x + y - z)^2 - (x - y + z)^2$;
e) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2)^2$, $\quad (a^2 + 4ab)^2 - (a^2 - 4ab + 3b^2)^2$.

11. *a)* $(6 + x)^2 + 36 - x^2$, $\quad (3x - 2y)^2 + 9x^2 - 4y^2$;
b) $(2 - x)^2 - x^2 + 4$, $\quad (3x - y)^2 - 9x^2 + y^2$;
c) $25 + (x - 5)^2 - x^2$, $\quad -49y^2 - (5 + 7y)^2 + 25$.

12. *a)* $x^2 + 2x + 1 - y^2$, $\quad x^2 - 2xy + y^2 - a^2$;
b) $4x^2 - 8x + 4 - 16z^2$, $\quad 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 25$;
c) $c^2 - a^2 - 2ab - b^2$, $\quad 16y^2 - 25x^2 - 20ax - 4a^2$;
d) $16 - x^2 + 8xy - 16y^2$, $\quad -y^2 + 10xy - 25x^2 + 16$;
e) $x^2 + 2xy + y^2 - a^2 - 2ab - b^2$, $\quad x^2 - 4xy + 4y^2 - 9a^2 + 6a - 1$.

13. Aby obliczyć wartość wielomianu

$$2{,}5 + 4{,}5x - 2{,}3x^2 + 0{,}7x^3 \quad \text{dla} \quad x = 1{,}5$$

należałoby wykonać 5 mnożeń, mianowicie:
$x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, $0{,}7x^3$, $2{,}3x^2$, $4{,}5x$. Liczbę mnożeń można zmniejszyć przedstawiając wielomian w postaci:

$$2{,}5 + x\ [4{,}5 - 2{,}3x + 0{,}7x^2] = 2{,}5 + x\ [4{,}5 - x\ (2{,}3 - 0{,}7x)].$$

Aby obliczyć ostatnie wyrażenie, należy wykonać tylko 3 mnożenia. Otrzymamy na wynik: 6,4375. Oblicz w ten sposób:

$-1{,}4 + 0{,}5x - 3x^2 + 0{,}7x^3$ dla $x = 1{,}3$
$2 + 5x - 4x^2 + 5x^3 - 4x^4$ „ $x = 1{,}5$
$0{,}15 - 3{,}5x + 1{,}4x^2$ „ $x = 2{,}5$
$3 - 5x + 7x^2 - 5x^3$ „ $x = 1{,}4$.

14. Jeżeli od kwadratu liczby całkowitej a odejmiemy iloczyn dwóch liczb całkowitych, których suma równa się $2a$, to otrzymamy na wynik kwadrat liczby całkowitej. Np. $10^2 - 16 \cdot 4 = 6^2$.

15. Z czterech rogów kwadratu o boku a wycięto cztery kwadraty o boku x. Podaj prostokąt o tym samym obwodzie i polu, co otrzymana figura. (Przedstaw pole figury w postaci iloczynu).

16. *a)* Przedstaw następujące liczby jako różnice kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich: 27, 35, 264, 125.
Np. chcemy wyznaczyć x, y tak, by $x^2 - y^2 = 15$. Przedstawmy 15 jako iloczyn dwóch czynników, np. $3 \cdot 5$.
Zatem $(x-y)(x+y) = 3 \cdot 5$. Przyjmując $x - y = 3, x + y = 5$ dostajemy $x = 4$, $y = 1$. A więc $4^2 - 1^2 = 15$. Gdybyśmy 15 przedstawili w postaci iloczynu: $1 \cdot 15$, to postępując jak poprzednio dostalibyśmy $x = 8$, $y = 7$. A więc $8^2 - 7^2 = 15$.

b) Przedstaw na kilka sposobów jako różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich: 45, 245, 20, 24.

c) Dlaczego następujące liczby nie dadzą się przedstawić jako różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych: 10, 14, 18, 22?

§ 2. Miejsca zerowe wielomianów

Przypuśćmy, że mamy dany jakiś wielomian, np. $x^2 - 5x + 6$. Podstawiając $x = 2$ otrzymamy $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$. A więc dla $x = 2$ wielomian przyjmuje wartość 0. Liczbę $x = 2$ nazywamy **miejscem zerowym** wielomianu $x^2 - 5x + 6$.

W wielomianie $3a^2b - 4ab^2 + 10$ podstawmy $a = 1$, $b = 2$; otrzymamy $3 \cdot 1^2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2^2 + 10 = 0$.

Układ liczb $a = 1$, $b = 2$ nazywamy również miejscem zerowym danego wielomianu.

Ogólnie, **miejscem zerowym wielomianu nazywamy każdy układ wartości liter, dla których wielomian przyjmuje wartość zero.**

Np. miejscem zerowym wielomianu $5xy - y^2z + 6$ jest układ liczb $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, mamy bowiem $5 \cdot 2 \cdot 3 = 3^2 \cdot 4 + 6 = 0$.

Zauważmy, że układ liczb $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$ możemy uważać za układ pierwiastków równania: $5xy - y^2z + 6 = 0$.

Możemy więc powiedzieć, że miejscem zerowym wielomianu jest układ pierwiastków równania, które otrzymamy przyrównywając dany wielomian do zera.

Wielomian może mieć kilka miejsc zerowych. Np. miejscami zerowymi wielomianu x^3-7x+6 są liczby 1, 2, -3; mamy bowiem: $1^3-7\cdot 1+6=0$; $2^3-7\cdot 2+6=0$, $(-3)^3-7.(-3)+6=0$.

Zdarzyć się może również, że wielomian nie posiada wcale miejsc zerowych. Np. wielomian x^2+1 nie posiada miejsc zerowych. Dla każdej bowiem liczby x dany wielomian przyjmuje wartość dodatnią.

Niekiedy możemy wyznaczyć miejsca zerowe wielomianu, opierając się na następującej uwadze:

Iloczyn kilku liczb różnych od zera jest też różny od zera. Jeżeli w iloczynie jeden z czynników jest zerem, to wartość iloczynu równa się zeru.

Np. $0\cdot 5=0$, $(-3)\cdot 0=0$, $a\cdot 25\cdot(-3)\cdot 0=0$ itd.

Na odwrót, *jeżeli wartość iloczynu wynosi zero, to przynajmniej jeden z czynników musi być równy zeru.* Np.

1. Jeżeli $a\cdot b\cdot c=0$, to albo $a=0$, albo $b=0$, albo $c=0$.

2. Dla jakich x iloczyn $(3x-6)\cdot(4x+5)$ równa się zeru?

Iloczyn powyższy będzie równy zeru, jeżeli albo $3x-6=0$, albo $4x+5=0$. Rozwiązując te równania otrzymamy z pierwszego $x=2$, z drugiego $x=-\frac{5}{4}$. A więc iloczyn dany będzie równy zeru, jeżeli $x=2$ albo $x=-\frac{5}{4}$.

3. Wyznaczyć miejsca zerowe wielomianu: $x^3-4x=0$. Rozkładając wielomian na czynniki otrzymamy: $x(x+2)(x-2)$. Iloczyn ten będzie równy zeru, jeżeli albo $x=0$, albo $x+2=0$, albo $x-2=0$.

Zatem miejscami zerowymi danego wielomianu są: $x=0$, $x=-2$, $x=2$.

4. Wyznaczyć pierwiastki równania:

$$4x^2-9=0.$$

Przedstawmy lewą stronę równania w postaci iloczynu:

$$(2x+3)\ (2x-3)=0.$$

Równanie będzie spełnione, jeżeli albo $2x+3=0$, albo $2x-3=0$. Rozwiązując te równania otrzymujemy pierwiastki:

$$x=-\tfrac{3}{2} \text{ i } x=\tfrac{3}{2}.$$

5. Rozwiązać równanie:

$$3x^2-x=9-x-22x^2.$$

Przenosząc wszystkie wyrazy na lewą stronę i redukując dostajemy: $25x^2-9=0$ czyli $(5x+3)\ (5x-3)=0$.

Stąd $x=-\frac{3}{5}$, albo $x=\frac{3}{5}$. Sprawdzając równanie przekonamy się, że te liczby są pierwiastkami.

Zadania

17. Dla jakich x przyjmuje wartość zero iloczyn:

a) $x(4x-1)$, *b)* $x^2(2x-1)$,
c) $(x-4)(x+3)$, *d)* $(x-4)^2(2x+5)^3$,
e) $(2x+1)(3x-2)$, *f)* $(x^2-4)(3x+5)^2$.

18. Wskaż miejsca zerowe wielomianów:

a) $4x^2-25$, *b)* $9x^2-36$, *c)* $12-27x^2$,
d) $9x-16x^2$, *e)* $2x^3-8x^2$, *f)* x^3-4x^2+4x,
g) x^3+x^2+x+1, *h)* x^3+x^2-x-1, *i)* x^3-x^2+x-1.

19. Przedstaw w postaci iloczynu i zbadaj, dla jakich x przyjmuje wartość zero wyrażenie:

a) $(x-2)^2-(x+3)^2$, *b)* $(4x+5)(4x-5)+9$,
c) $(4x-3)^2-81$, *d)* $(3x-2)(3x+2)-60$.

20. Zbadaj, które z iloczynów mogą przybierać wartość zero i dla jakich x:

a) $(x^2+1)(x^2+3)$, *b)* $(3x+2)(3x^2+5)(x-2)$,
c) $(x^2-1)(x+4)$, *d)* $(x^2+1)(3x^2+5)$,
e) $(x-1)(2x-3)(3x-4)$, *f)* $x^2(2x^2+1)(4x^2-9)$.

21. Rozwiąż równania:

a) $(3x-1)(5x+7)=0$, *b)* $(2x-1)(x+1)x=0$,
c) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=0$, *d)* $3x^2=\frac{1}{2}(x^2+5)$,
e) $5(x^2+5)=3(x^2+25)$, *f)* $5(x^2+4)=4(x^2+9)$,
g) $x^2+7x=0$, *h)* $3x^2=4x$, *i)* $5x^2=6x$,
j) $5(x^2+3)-(x^2-25)=76$, *k)* $7(x^2-1)-(x^2-9)=56$,
l) $3x^2+(5x+2)^2=20x+32$, *m)* $45+3x=\frac{1}{2}(x+3)^2$.

22. Jeżeli wyrzucimy kamień w górę z prędkością początkową v *m*/sek., to jego odległość od ziemi po t sek. wynosi w *m*:

$$vt-4{,}9\,t^2.$$

Oblicz, po ilu sekundach kamień spadnie, jeżeli $v=40$ *m*/sek.

23. Bok kwadratu wynosi a *cm*, boki zaś prostokąta wynoszą $(a+2x)$ *cm* i $(a-x)$ *cm*. Przy jakim x oba pola są równe?

24. Podaj wielomian stopnia *a)* pierwszego, *b)* drugiego, *c)* trzeciego, którego miejsca zerowe są *a)* 2, *b)* 3, 4, *c)* 2, 7, 5.

25. Jeżeli $a^2+b^2=0$, to $a=0$ i $b=0$. Opierając się na tym, łatwo rozwiążemy równanie $(2x-4)^2+(3y-9)^2=0$. Równanie

będzie spełnione, jeżeli $2x-4=0$ i $3y-9=0$; stąd $x=2$, $y=3$. Rozwiąż w ten sposób równania:

a) $(x-5)^2+(y-7)^2=0$, *b)* $(2x-3)^2+(3y-7)^2=0$,
c) $4x^2-4x+1+y^2+6y+9=0$, *d)* $x^2-4x+y^2-10y+29=0$,
e) $(2x-3y-1)^2+(3x+2y-8)^2=0$,
f) $9x^2+(x-2y+6)^2=0$.

26. Wykaż: jeżeli $(a+b)^2=a^2+b^2$, to jedna z liczb a, b jest równa zeru, jeżeli zaś $(a+b)^2=2(a^2+b^2)$, to $a=b$.

27. Wykaż: jeżeli $(a+b)^3=a^3+b^3$, to albo jedna z liczb a, b jest równa zeru, albo $a+b=0$.

28. *a)* Jeżeli $(a+b)^2=4ab$, to $a=b$.
b) Jeżeli $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=4(ab+bc+cd)$, to $a=b=c=d$. (Przenieś wszystkie wyrazy na jedną stronę, a następnie przedstaw otrzymane wyrażenie w postaci sumy kwadratów).

Rozdział II

Wyrażenia ułamkowe

§ 1. Wartości liczbowe ułamków algebraicznych

Weźmy pod uwagę ułamek algebraiczny

$$\frac{5}{a}.$$

Jeżeli a oznacza liczbę różną od zera, to wyrażenie powyższe posiada wartość liczbową. Np. dla $a=1, 2, -1, -5$ wyrażenie to posiada wartość odpowiednio $5, \frac{5}{2}, -5, -1$. Jeżeli natomiast $a=0$, to wyrażenie dane nic nie oznacza, gdyż mianownik ułamka nie może być zerem. Ułamek algebraiczny:

$$\frac{2x+7}{3x-6}$$

nie posiada wartości liczbowej dla $x=2$; w tym bowiem przypadku wartość mianownika wynosi 0. Dla wartości x różnych od 2 dany ułamek posiada wartość liczbową, gdyż mianownik jest wówczas różny od zera.

Ułamek algebraiczny: $\dfrac{5x-1}{(2x-4)(3x+9)}$

traci sens, jeżeli $(2x-4)(3x+9)=0$, czyli jeżeli $2x-4=0$ lub $3x+9=0$. Rozwiązując te równania widzimy, że dany ułamek nie ma wartości liczbowej dla $x=2$ i $x=-3$.

Ułamek algebraiczny: $\dfrac{3a+b}{a(b-5)}$

traci sens, jeżeli $a(b-5)=0$, czyli jeżeli $a=0$ lub $b-5=0$. Ułamek ten nie ma więc wartości liczbowej, gdy $a=0$ lub $b=5$. Dla $a\neq 0$ i $b\neq 5$ dany ułamek posiada wartość liczbową.

Z podanych przykładów wynika, że ułamek algebraiczny, w którym występują litery, może dla niektórych wartości tych liter tracić sens; ułamek algebraiczny traci mianowicie sens dla miejsc zerowych mianownika.

Uwaga 1: Może się zdarzyć, że ułamek algebraiczny posiada zawsze wartość liczbową, chociaż w mianowniku występują litery. Np. wyrażenie:

$$\frac{3+a}{a^2+5}$$

nigdy nie traci sensu. Jakąkolwiek bowiem liczbę podstawimy za a, to a^2+5 będzie dodatnie.

Uwaga 2: Jeżeli w wyrażeniu algebraicznym, jak np.:

$$\frac{2}{x-3}+\frac{4x}{x-1}$$

występuje kilka ułamków, to wyrażenie dane traci sens, jeżeli którykolwiek z ułamków traci sens. Zatem dane wyrażenie nie posiada wartości liczbowej, jeżeli $x=3$ lub $x=1$.

Zadania

1. Dla jakich a podane wyrażenie nie ma wartości liczbowej:

a) $\dfrac{2a+3}{a-8}$, *b)* $\dfrac{a-1}{a^2-25}$,

c) $\dfrac{7a+2}{a+1}$, *d)* $\dfrac{3a+7}{(2a-3)(100a^2-49)}$,

e) $\dfrac{3}{(a-2)(3a+1)}$, *f)* $\dfrac{1}{25a^2+10a+1}$.

Oblicz wartości liczbowe powyższych wyrażeń dla $a=3, 6, -4, \frac{1}{4}$.

2. Dla jakich wartości x są określone wyrażenia:

a) $\dfrac{3x}{x-4}+\dfrac{1}{x-5}$, *b)* $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x}{x+3}$,

c) $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x+5}{x-4}$, *d)* $\dfrac{2}{x}-\dfrac{8x+7}{x(x-2)}$,

e) $\dfrac{x-1}{x^2+1}+2x$, *f)* $\dfrac{2x}{(x-3)^2+1}+\dfrac{x}{x+1}$.

Podaj wartości liczbowe powyższych wyrażeń dla $x=3, 6, -5, \frac{1}{2}$.

3. Zbadaj, które z poniżej podanych wyrażeń są określone dla wszystkich $x > 0$:

a) $\frac{2x}{x+1}$, *b)* $\frac{2}{(3-x)(x+1)}$,

c) $\frac{3x+5}{2x-3}$, *d)* $\frac{1}{x+2}+\frac{x-1}{x(x^2+1)}$.

4. Podaj kilka wartości liter x, y, dla których podane wyrażenia tracą sens:

a) $\frac{1}{x-y}$, *b)* $\frac{x}{x^2-y^2}$,

c) $\frac{x}{2x+y}$, *d)* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{x^2-9y^2}$,

e) $\frac{2}{x+2y}-\frac{1}{x-2y}$, *f)* $\frac{3x+5y}{x^2+y^2+2xy}$.

5. Za pole kształtu prostokąta, którego jeden bok ma 250 m, drugi zaś jest o x m krótszy, zapłacono w *zł*. Ile płacono za 1 m^2? Dla jakich wartości x otrzymany wzór traci sens? (Wyjaśnij to).

6. Sprawdź przez wymnożenie, że:

$$(1+x^2+x^4+x^6)(1-x^2)=1-x^8.$$

Opierając się na powyższym wzorze powiedz dla jakich wartości x zachodzi równość:

$$1+x^2+x^4+x^6=\frac{1-x^8}{1-x^2}.$$

§ 2. Upraszczanie ułamków algebraicznych

Jak wiemy, wartość ułamka algebraicznego nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę (różną od zera).

A więc: $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$; $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$, gdy $b \neq 0$, $m \neq 0$.

Własności powyższe pozwalają często przedstawić dany ułamek algebraiczny w postaci prostszej.

1. W ułamku algebraicznym: $\frac{5a}{3a}$

występuje w liczniku i mianowniku czynnik a. Jeżeli zatem $a \neq 0$, możemy licznik i mianownik przez a podzielić (czyli ułamek przez a uprościć). Otrzymamy:

$$\frac{5a}{3a}=\frac{5}{3}.$$

Należy pamiętać, że równość powyższa zachodzi tylko wtedy, gdy $a \neq 0$. Jeżeli bowiem $a=0$, lewa strona równości traci sens.

2. Ułamek algebraiczny: $\dfrac{3a(x-5)}{(x-1)\,(x-5)}$

możemy uprościć przez $x-5$ pod warunkiem, że $x-5 \neq 0$, czyli $x \neq 5$. Otrzymamy:

$$\frac{3a(x-5)}{(x-1)\,(x-5)}=\frac{3a}{x-1}.$$

Równość zachodzi tylko wtedy, gdy $x \neq 5$ i $x \neq 1$.

Jeżeli bowiem $x=5$, to lewa strona traci sens; jeżeli zaś $x=1$, to obie strony tracą sens.

3. Ułamek algebraiczny: $\dfrac{2a^2x(x-2)}{a^3(x-2)}$

możemy uprościć przez a^2 oraz przez $x-2$ pod warunkiem, że $a \neq 0$ i $x-2 \neq 0$. Zatem:

$$\frac{2a^2x(x-2)}{a^3(x-2)}=\frac{2x}{a} \quad \text{dla } a \neq 0 \text{ i } x \neq 2.$$

4. Ułamek algebraiczny: $\dfrac{\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{7}{12}}{\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{24}x+\frac{3}{2}}$

możemy przedstawić w postaci ułamka algebraicznego, w którym współczynniki cyfrowe są liczbami całkowitymi. Pomnóżmy w tym celu licznik i mianownik danego ułamka przez 24 (tj. wspólny mianownik współczynników cyfrowych). Otrzymamy:

$$\frac{6x^2-20x+14}{9x^2+5x+36}.$$

Zadania

W zadaniach 7—10 uprość i zbadaj, dla jakich wartości liter ułamek, otrzymany po uproszczeniu, jest równy danemu.

7. Uprość:

a) $\dfrac{12ab}{20ac}$, b) $\dfrac{120x^4y^3t}{16xt}$, c) $\dfrac{9x^2y}{12xy^2}$,

d) $\dfrac{125a^2b^3c}{55a^3c}$, e) $\dfrac{48x^2y^3z}{45x^2y^2z^3}$, f) $\dfrac{57a^3x^2y}{72b^2xy^3}$,

g) $\dfrac{15a^3b^2c^7x^5}{25a^2b^4c^3x^8}$, h) $\dfrac{125ab^2c^3d^4}{150a^4b^3c^2d}$, i) $\dfrac{5a^3b^4c^5xy^2}{7b^4c^3xy^3}$,

j) $\dfrac{14ab^2c^5xy^2z^5}{21a^5b^2cx^5y^2z}$, k) $\dfrac{3a^3bc^4x^5y^2z}{6a^2b^3cx^3y^4z^3}$.

8. Uprość:

a) $\frac{2ab}{a^2+ab}$, $\frac{x^2y^2}{x^2-x^2y^2}$, $\frac{a^2-ab}{a^2+ab}$, $\frac{x^2+ax}{x^2-a^2}$;

b) $\frac{x+5}{x^2-25}$, $\frac{3x-2}{9x^2-4}$, $\frac{(x-1)(x-3)}{x^2-9}$;

c) $\frac{(x-2)^3\,(x+2)}{(x^2-4)\,(x-4)}$, $\frac{(4x^2-25)\,(3x+1)^2x^2}{(2x+5)^2\,(9x^2-1)\,(x+1)}$.

9. Uprość:

a) $\frac{(x-1)^2\,(2x+5)}{x(x-1)}$, b) $\frac{6\,(x-5)^2\,(2x+1)^3\,(x+2)}{10\,(2x+1)^4\,(x+2)\,(3x-15)}$,

c) $\frac{(3x-2)^3\,(x-2)^2x^4}{(x-2)^3\,(3x-2)\,x^2}$, d) $\frac{72\,(4x+3)^2\,(2x-1)^3\,(6x+9)}{(2x+3)^2\,(14x-7)\,(12x+9)}$,

e) $\frac{(4x+4)\,(x-5)^2}{(x+1)^3\,(7x-35)}$, f) $\frac{8\,(4x+10)\,(2x+5)\,(3x-1)^3}{(12x-4)\,(8x+20)^2x^2}$.

10. Uprość:

a) $\frac{20a^5b^2-24a^2b^6}{28a^7b^2-32^2b^8}$, b) $\frac{21a^3b^2c^2-15a^2b^3c^2+9a^2b^2c^3}{18a^4b^2c^2+24a^2b^4c^2-6a^2b^2c^4}$,

c) $\frac{18a^4-12a^2b^2}{36a^2b^2-24b^4}$, d) $\frac{7x^2y^4-42x^2y^2p^2z^2}{70x^2y^4-42x^2y^2p^2z^2}$.

11. Dla jakich wartości a zachodzi równość:

a) $\frac{a}{a}=1$, b) $\frac{a^2-9}{a-3}=a+3$, c) $\frac{(a+1)^2\,(a-5)^3}{(a+1)^3\,(a-5)}=\frac{(a-5)^2}{a+1}$

12. Jeden prostopadłościan ma wymiary a *cm*, b *cm*, b *cm*, drugi a *cm*, a *cm*, b *cm*; ile wynosi stosunek ich objętości, a ile stosunek ich powierzchni?

13. Przedstaw w postaci ułamka algebraicznego, w którym współczynniki cyfrowe są liczbami całkowitymi:

a) $\frac{\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}x+\frac{3}{2}}$, b) $\frac{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}x}{\frac{5}{6}x}$, c) $\frac{2a-\frac{1}{3}y}{\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}a}$,

d) $\frac{\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}ax+\frac{4}{9}a^2}{\frac{5}{9}y^2-\frac{1}{3}by+\frac{7}{18}b^2}$, e) $\frac{\frac{2}{5}a^2b-\frac{3}{10}ab-\frac{4}{15}b^3}{\frac{2}{3}xy+\frac{3}{8}ax+\frac{7}{12}a^2}$.

14. Oznaczmy 5 literą a. Zatem mamy równość:

$$a=5.$$

Pomnóżmy obie strony tej równości przez $a-3$. Więc:

$$a\,(a-3)=5\,(a-3), \text{ czyli } a^2-3a=5a-15.$$

Przenosząc $-3a$ na prawą stronę, $5a$ na lewą, dostaniemy:

$$a^2-5a=3a-15, \text{ czyli } a\,(a-5)=3\,(a-5).$$

Podzielmy obie strony tej równości przez $a-5$. Zatem:

$$\frac{a\,(a-5)}{a-5}=\frac{3\,(a-5)}{a-5}.$$

Upraszczając przez $a-5$ otrzymamy:

$$a=3.$$

Ponieważ założyliśmy, że $a=5$, więc z otrzymanej równości wynika: $5=3$. Gdzie jest błąd?

15. Obierzmy dowolną liczbę i oznaczmy ją literą a; połóżmy $b=\frac{3}{5}a$. Mnożąc tę równość przez 10 otrzymamy $10\,b=6\,a$, czyli $15b-5b=9a-3a$. Odejmując od obu stron $9a$ i dodając $5b$ dostajemy $15b-9a=5b-3a$, czyli $3\,(5b-3a)=5b-3a$. Dzieląc obustronnie przez $5b-3a$ i upraszczając otrzymamy $3=1$. Wyjaśnij tę sprzeczność.

§ 3. Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych

Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych wykonywa się podobnie, jak mnożenie i dzielenie ułamków zwyczajnych. A więc:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \text{dla } b\neq 0,\ d\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \qquad \text{dla } b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0.$$

$$\frac{a-x}{b}\cdot\frac{2x+1}{4x-8}=\frac{(a-x)\,(2x+1)}{b(4x-8)} \qquad (b\neq 0,\ 4x-8\neq 0).$$

Przed obliczeniem iloczynu upraszczamy, jeśli można. Np.:

$$\frac{2\,a^3\,(3-x)}{5\,b^5\,(7-y)}\cdot\frac{3\,b^7\,(7-y)^2}{7\,a^2\,(3-x)^2}.$$

Upraszczamy najpierw przez $3-x$, następnie przez a^2, potem przez b^5, a w końcu przez $7-y$. Otrzymamy:

$$\frac{2\,a}{5}\cdot\frac{3\,b^2\,(7-y)}{7\,(3-x)}=\frac{6\,ab^2\,(7-y)}{35\,(3-x)},$$

zatem: $$\frac{2\,a^3\,(3-x)}{5\,b^5\,(7-y)}\cdot\frac{3\,b^7\,(7-y)^2}{7\,a^2\,(3-x)^2}=\frac{6\,ab^2\,(7-y)}{35\,(3-x)}.$$

Równość ta zachodzi, gdy $a\neq 0$, $b\neq 0$, $y\neq 7$ i $x\neq 3$.

Iloraz zamieniamy na iloczyn; przed obliczeniem iloczynu upraszczamy, jeśli można, np.:

$$\frac{3\,(x-2)^5}{b\,(x-3)^3}:\frac{5\,a\,(x-2)^2}{2\,b^3\,(x-3)}=\frac{3\,(x-2)^5}{b\,(x-3)^3}\cdot\frac{2\,b^3\,(x-3)}{5\,a\,(x-2)^2}.$$

Upraszczamy przez $(x-2)^2$, następnie przez b, w końcu przez $(x-3)$ ·

Otrzymamy: $\dfrac{3(x-2)^3}{(x-3)^2} \cdot \dfrac{2b^2}{5a} = \dfrac{6b^2(x-2)^3}{5a(x-3)^2}$.

Zatem: $\dfrac{3(x-2)^5}{b(x-3)^3} : \dfrac{5a(x-2)^2}{2b^3(x-3)} = \dfrac{6b^2(x-2)^3}{5a(x-3)^2}$

dla $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 3$ i $x \neq 2$.

Zadania

16. Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $\dfrac{2a}{3c} \cdot \dfrac{3c}{4a}$, $\dfrac{5a^2}{6bc} \cdot \dfrac{3b^2}{10ca}$, $\dfrac{a}{c} : \dfrac{c}{d}$, $\dfrac{2a^2}{bc} : \dfrac{3ab}{c^2}$;

b) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{bd}{ac}$, $\dfrac{a^2}{bc} \cdot \dfrac{b^2}{ca} \cdot \dfrac{c^2}{ab}$, $\left(\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{a}{b}\right) : \dfrac{c}{a}$, $\left(\dfrac{a^2}{b^2} \cdot \dfrac{b^2}{c^2}\right) : \dfrac{c^2}{a^2}$;

c) $\dfrac{2a}{bc} \cdot \dfrac{2b}{ca} \cdot \dfrac{2c}{ab}$, $\dfrac{2x^3}{3yz} \cdot \dfrac{3y^2}{5xz} \cdot \dfrac{5z^3}{2xy}$, $\dfrac{3axy^3}{5b^2} : \dfrac{6ay^3}{10b^2x}$;

d) $\dfrac{5a^2bc}{3b^2c^2a} : \dfrac{5a^2bc^2}{3ab^2c^3}$, $\left(\dfrac{a^2d^3}{5bc^4} \cdot \dfrac{15b^2cd^2}{28a^5}\right) : \dfrac{6bd^4}{7a^2c^3}$.

17. Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $\dfrac{x-1}{x-2} \cdot \dfrac{x-2}{x-3} \cdot \dfrac{x-3}{x-4}$, *b)* $\dfrac{x+1}{(x+2)^2} \cdot \dfrac{x+2}{(x+3)^2} \cdot \dfrac{x+3}{(x+1)^2}$,

c) $\dfrac{x^2-3x+5}{x-5} \cdot \dfrac{(x-5)^2}{x^2-3x+5}$ *d)* $\dfrac{a-b}{a} \cdot \dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{(a+b)^2}{ab}$,

e) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2} \cdot \dfrac{xy}{(x+y)^2}$.

18. Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $(2x+1) \cdot \dfrac{x}{2x+1}$, *b)* $(x+1) \cdot \dfrac{4}{x^2-1}$,

c) $(3x-4) \cdot \dfrac{x+1}{(3x-4)^2}$, *d)* $(9x^2-16) \cdot \dfrac{2x}{3x+4}$,

e) $3x^2(2x-1)^2 \cdot \dfrac{x-4}{x(2x-1)^3}$, *f)* $x(4x^2-25) \cdot \dfrac{3x-1}{(2x+5)^2x^2}$,

19. Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $\dfrac{x-5}{2x+4} \cdot \dfrac{2x}{(x-5)^2}$, *b)* $\dfrac{(x-1)^2(2x+1)}{6x^2(3x-2)} : \dfrac{(x-1)(2x+1)^3}{16x(9x-6)}$,

c) $\dfrac{3x-6}{x} \cdot \dfrac{2x^2}{9(x-2)}$, *d)* $\dfrac{x^2-1}{x+3} : \dfrac{x+1}{(x+3)^2}$,

e) $\frac{(x-7)(x-4)}{x(x+2)} \cdot \frac{(x+2)(x+1)}{(x-7)(x+5)}$ f) $\frac{9x^2-25}{x^2-16} : \frac{3x-5}{x+4}$.

20. Sprowadź do najprostszej postaci:

a) $\frac{8x^2(4x-7)(2x+1)}{(x^2+5)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)^2(2x^2+10)}{10x^3(2x+1)^2}$,

b) $\frac{24(6x-4)(x^2-4)}{7(3x+1)^2(x^2+1)} \cdot \frac{21(9x^2-1)(x^4-1)}{16(3x-2)(x+2)}$,

c) $\frac{(x^6-1)(x^2-1)^2}{(3x+1)^3(x-3)^2} : \frac{(x^3-1)(x+1)^3}{(9x^2-1)^2(x-3)^2}$,

d) $\frac{(x-1)(3x-2)}{(2x+1)(x+3)} \cdot \frac{(2x+1)(x+3)^2}{(x-1)^2(3x+2)}$,

e) $\frac{6x}{25(x-3)(x^2-1)} : \frac{9x^2}{20(x^2-9)(x+1)}$.

21. Kupiec zmieszał a *kg* kawy po x *zł* z $2a$ *kg* po y *zł*; następnie zmieszał b *kg* po x *zł* z $3b$ *kg* po y *zł*. Ile razy jest droższa pierwsza mieszanka od drugiej?

22. Pociąg robi m *km* w a godz. i b min.; piechur przechodzi n *km* w c godz. i d min. Ile razy jest większa prędkość pociągu od prędkości piechura?

23. Jakim procentem liczby a jest liczba b?

§. 4. Wspólna wielokrotność wielomianów

W s p ó l n ą w i e l o k r o t n o ś c i ą kilku wielomianów nazywamy wielomian, który jest wielokrotnością każdego z nich. Np.:

1) Wielomian x^3-4x jest wspólną wielokrotnością wielomianów: $x+2$ i $x-2$. Mamy bowiem:

$$x^3-4x=x(x+2)(x-2).$$

2) Jednomian: $12x^2y^3z^4$ jest wspólną wielokrotnością jednomianów: $3x^2yz^2$, $4xy^3z$ i $6xy^2z^4$, gdyż:

$$12x^2y^3z^4=3x^2yz^2\cdot 4y^2z^2=4xy^3z\cdot 3xz^3=6xy^2z^4\cdot 2xy.$$

Iloczyn kilku wielomianów jest oczywiście wspólną wielokrotnością tych wielomianów.

Np. iloczyn $(3x+5y)(7x-3y)$ jest wspólną wielokrotnością wielomianów $3x+5y$, $7x-3y$.

Czasem można wyznaczyć wspólną wielokrotność, będącą wielomianem niższego stopnia niż iloczyn danych wielomianów. Udaje się to wówczas, gdy dane wielomiany mają wspólny dzielnik, który jest wielomianem co najmniej stopnia pierwszego. Np.:

3) Wyznaczyć wspólną wielokrotność jednomianów:

$$4a^3b^5c,\ 2a^6b^2c^3,\ 6ab^3c^4.$$

Najmniejszą wspólną wielokrotnością współczynników jest 12.

Zauważmy, że w jednomianach tych występują czynniki a, b, c w rozmaitych potęgach.

Najwyższymi potęgami, w których te czynniki występują, są a^6, b^5, c^4. Jako wspólną wielokrotność obrać możemy $12a^6b^5c^4$. Łatwo się przekonać, że iloczyn danych jednomianów jest wyższego stopnia niż wyznaczona wspólna wielokrotność.

4) Wyznaczyć wspólną wielokrotność wielomianów:

$$2x^3yz^3 - 6x^2yz^3,\ 5x^3y^3z^2 - 45xy^3z^2,\ 3x^5y^2z - 18x^4y^2z + \\ + 27x^3y^2z.$$

Rozkładając dane wielomiany na czynniki otrzymamy:

$$2x^2yz^3(x-3);\ 5xy^3z^2(x+3)(x-3);\ 3x^3y^2z(x-3)^2.$$

W iloczynach powyższych występują czynniki x, y, z, $(x+3)$, $(x-3)$. Jako wspólną wielokrotność obieramy iloczyn:

$$30x^3y^3z^3(x+3)(x-3)^2.$$

Sprowadzanie do wspólnego mianownika

Jeżeli mamy kilka ułamków algebraicznych, to możemy je przedstawić w postaci ułamków o równych mianownikach, czyli sprowadzić do wspólnego mianownika. Jako wspólny mianownik obieramy wspólną wielokrotność mianowników danych ułamków. Np:

1) Sprowadzić do wspólnego mianownika ułamki:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \qquad (b \neq 0,\ d \neq 0).$$

Wspólną wielokrotnością mianowników jest iloczyn bd.

Mnożąc licznik i mianownik pierwszego ułamka przez d, drugiego przez b, otrzymamy:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$$

2) Sprowadzić do wspólnego mianownika ułamki:

$$\frac{11x}{6a^5bc^3}, \frac{2y}{9a^2b^4c}, \frac{5z}{4ab^2c^5} \qquad a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

Wspólną wielokrotnością mianowników jest $36a^5b^4c^5$. Ponieważ $36a^5b^4c^5 : 6a^5bc^3 = 6b^3c^2$, więc mnożymy licznik i mianownik pierwszego ułamka przez $6b^3c^2$. Podobnie mnożymy licznik i mianownik drugiego ułamka przez $4a^3c^4$, trzeciego przez $9a^4b^2$.

Otrzymamy: $\dfrac{66b^3c^2x}{36a^5b^4c^5}, \dfrac{8a^3c^4y}{36a^5b^4c^5}, \dfrac{45a^4b^2z}{36a^5b^4c^5}.$

3) Sprowadzić do wspólnego mianownika ułamki:

$$\frac{5a^2}{6b^3(x-3)^2(2x+1)^4}, \quad \frac{3b^2}{4a^2(x-3)^3(2x+1)^2}.$$

Zakładamy, że mianowniki tych ułamków są różne od zera. Wspólną wielokrotnością mianowników jest:

$$12a^2b^3(x-3)^3(2x+1)^4.$$

Przedstawiając dane ułamki jako ułamki o powyższym mianowniku otrzymamy:

$$\frac{10a^4(x-3)}{12a^2b^3(x-3)^3(2x+1)^4}, \quad \frac{9b^5(2x+1)^2}{12a^2b^3(x-3)^3(2x+1)^4}.$$

Zadania

24. Wyznacz wspólną wielokrotność (możliwie najniższego stopnia):
a) a^3b^2, a^2b^3; *b)* abc^2, a^2bc^3; *c)* $9ab^3$, $6a^2b^3$;
d) $24a^3b^3x^4$, $60a^2b^4x^6$; *e)* $9a^2b^3x^4y^5$, $8x^3y^6$;
f) $3x^2yz^3$, $15xy^3z^2$, $10x^2y^2z^2$.

25. Wyznacz wspólną wielokrotność (możliwie najniższego stopnia).
a) $6ab(a+b)^2$, $4a^2b(a+b)$ *b)* a^2-b^2, $(a+b)^2$,
c) $3xy(x+z)$, $4xz(x+y)$, $6x^2y$ *d)* $a^2+ab^4-b^2$, a^2-b^2;
e) $4x^2(x^2+a^2)$, $8a^2(x^2-a^2)$, $3(a^4-ab^4)$.

26. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika:

a) $\frac{2x}{a^2bc^3}, \frac{3y}{ab^3c}, \frac{2z}{a^2c^3}$; *b)* $\frac{5u}{2a^4bx^2y^2}, \frac{7v}{3a^2b^3y^3}, \frac{1}{6bx^6y}$;

c) $\frac{5a}{12x^2yz^4}, \frac{7b}{18xy^5z}, \frac{3c}{20y^4z^3}$; *d)* $\frac{1}{5kl^2x^3}, \frac{1}{4k^2xz^3}, \frac{1}{10k^3yz}$;

e) $\frac{6x}{6abc^3x^3}, \frac{3y}{4a^3b^3x}, \frac{2xy}{5a^3cx^3}$; *f)* $\frac{x}{2ab}, \frac{y}{3a(a+b)}$;

g) $\frac{x}{4abc}, \frac{y}{2ac(a-b)}, \frac{z}{3b(a-b)^2}$; *h)* $\frac{a}{15x^2}, \frac{b}{10xy(x+y)^2}, \frac{c}{24xy^2}$.

27. Przedstaw:

a) $\frac{1}{x-y}$ jako ułamek o mianowniku $x^2-2xy+y^2$

b) $\frac{1}{x+y}$ „ „ „ „ x^2-y^2

c) $\frac{x}{x-1}$ „ „ „ „ x^2-1

d) $\frac{2x+3}{(x-1)(x+4)}$ „ „ „ „ $(x-1)^2(x+4)x$

e) $\frac{2x}{(x^2-4)(x+1)}$ „ „ „ „ $(x+2)^2(x-2)(x+1)^3$

28. Przedstaw w postaci ułamków o mianowniku $a)$ n, $b)$ $a-b$ następujące wyrażenia: $1, n, m, a+b, a-b$.

29. Sprowadź do wspólnego mianownika:

a) $\frac{x}{y(x+y)}, \frac{y}{x(x+y)}$, b) $\frac{2x}{x+2y}, \frac{x-y}{x-2y}, \frac{1}{x^2-4y^2}$;

c) $\frac{x+y}{(x+y)^2}, \frac{2x-3y}{4(x-y)}$, d) $\frac{x}{3(x+y)^2}, \frac{y}{9(x-y)}, \frac{5}{6x(x^2-y^2)}$,

e) $\frac{4x-y}{9(x^2-y^2)}, \frac{2x+y}{6(x+y)}$, f) $\frac{7x+2y}{(x-2y)(y+1)}, \frac{x}{(x+2y)(y^2-1)}$.

30. Sprowadź do wspólnego mianownika:

a) $\frac{1}{x-1}, \frac{3}{x-2}, \frac{5}{x-4}$; b) $\frac{x}{x-1}, \frac{3x-1}{(x-1)^2}, \frac{2}{x}$;

c) $\frac{x}{2(x+5)}, \frac{x-1}{3(x-4)}, \frac{x+1}{10(x+5)(x-4)}$;

d) $\frac{2x}{9(x+3)}, \frac{x-1}{12(x-3)}, \frac{1}{18(x^2-9)}$;

e) $\frac{4x+1}{6x(x-4)}, \frac{3x+5}{8(x-4)(x+2)}, \frac{2x-3}{9(x+2)x}$;

f) $\frac{x+1}{(x+2)^2(x-1)}, \frac{x-1}{(x-2)^2 x}, \frac{x}{(x^2-4)(x-1)^2}$.

§ 5. Suma i różnica ułamków algebraicznych

Sumę ułamków algebraicznych o równych mianownikach obliczamy podobnie, jak ułamków zwyczajnych.

A więc: $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$; $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ $\quad (c \neq 0.)$

Jeżeli mamy dodać ułamki o różnych mianownikach, to sprowadzamy je najpierw do wspólnego mianownika. Np.:

1. Obliczyć sumę: $\frac{3c}{4a^2b}+\frac{5d}{6ab^2}$ $\quad (a \neq 0, \; b \neq 0)$.

Wspólnym mianownikiem jest $12a^2b^2$. Sprowadzając do wspólnego mianownika otrzymamy:

$$\frac{9bc}{12a^2b^2}+\frac{10ad}{12a^2b^2}=\frac{9bc+10ad}{12a^2b^2}.$$

2. Obliczyć sumę: $\frac{2a}{3x^2y(x-y)}-\frac{3d}{2xy^2(x^2-y^2)}$.

Zakładamy, że mianowniki są różne od zera. Wspólnym mianownikiem jest $6x^2y^2(x^2-y^2)$.

Sprowadzając do wspólnego mianownika dostaniemy:

$$\frac{4ay(x+y)}{6x^2y^2(x^2-y^2)}-\frac{9dx}{6x^2y^2(x^2-y^2)}=\frac{4ay(x+y)-9dx}{6x^2y^2(x^2-y^2)}.$$

3. Obliczyć sumę: $\quad 3x+\frac{a-3xy}{y} \qquad (y \neq 0).$

Jednomian $3x$ możemy przedstawić w postaci: $\frac{3x}{1}$.

Wspólnym mianownikiem jest żatem: y. Sprowadzając do wspólnego mianownika dostaniemy

$$\frac{3xy}{y}+\frac{a-3xy}{y}=\frac{a}{y}.$$

4. Przedstawić następującą sumę w postaci ułamka:

$$\frac{2x}{3a^2bc^3}-\frac{5y}{9a^4b^2c^2}+\frac{7z}{6ab^5c} \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0).$$

Wspólnym mianownikiem jest: $18a^4b^5c^3$. Sprowadzając do wspólnego mianownika otrzymamy:

$$\frac{12a^2b^4x}{18a^4b^5c^3}-\frac{10b^3cy}{18a^4b^5c^3}+\frac{21a^3c^2z}{18a^4b^5c^3}=$$

$$=\frac{12a^2b^4x-10b^3cy+21a^3c^2z}{18a^4b^5c^3}.$$

5. Przedstawić następującą sumę w postaci ułamka:

$$2x+3+\frac{2x}{3(x-1)(x+1)^2}-\frac{3x}{2(x-1)^2(x+1)} \qquad (x \neq 1,\ x \neq -1).$$

Dwumian: $2x+3$ możemy przedstawić w postaci: $\frac{2x+3}{1}$.

Wobec tego wspólnym mianownikiem będzie: $6(x-1)^2(x+1)^2$. Sprowadzając do wspólnego mianownika otrzymamy:

$$\frac{6(2x+3)(x-1)^2(x+1)^2}{6(x-1)^2(x+1)^2}+\frac{4x(x-1)}{6(x-1)^2(x+1)^2}-$$

$$-\frac{9x(x+1)}{6(x-1)^2(x+1)^2}=$$

$$=\frac{(12x^5+18x^4-24x^3-36x^2+12x+18)+(4x^2-4x)-(9x^2+9x)}{6(x-1)^2(x+1)^2}=$$

$$=\frac{12x^5+18x^4-24x^3-41x^2-x+18}{6(x-1)^2(x+1)^2}.$$

Zadania

31. Wykonaj działania:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $\frac{5}{a}-\frac{7}{b}$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$;

b) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$, $\frac{4x}{3}-\frac{3a^2}{x}$, $\frac{a}{4b}+\frac{x}{8b}$, $\frac{y}{ax}-\frac{y}{bx}$;

c) $3+\frac{b}{y}$, $x+\frac{a}{b}$, $\frac{x}{y}-z$, $a+\frac{x}{5}$, $1-\frac{a}{b}$;

d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, $\frac{3}{a}-\frac{5}{b}-\frac{2}{c}$, $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}$;

e) $\frac{a-3b}{6a}+\frac{4a-b}{2b}+\frac{5a+3x}{9x}-\frac{a^2-bx}{2ax}-\frac{2a}{b}$;

f) $\frac{3a-5b}{15ab}-\frac{a-7c}{12ac}-\frac{5b-4c}{20bc}+\frac{3}{4a}+\frac{3}{5b}+\frac{4}{3c}$;

g) $\frac{3}{2a}-\frac{1}{2b}-\frac{2a+3}{6a^2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{3a-2b}{6ab}$;

h) $\frac{2}{a^3b^2}-\frac{3}{a^2b^3}$, $\frac{2x}{abc^2}-\frac{y}{a^2bc^3}$, $\frac{1}{9ab^3}+\frac{1}{6a^2b}$;

i) $\frac{5a}{4x^4y}+\frac{3b}{10xy^3}$, $\frac{5}{24a^3b^3x^4}-\frac{7y}{60a^2b^4x^6}$;

j) $\frac{2x}{ab^3}-\frac{3y}{a^2bc}+\frac{2z}{abc^2}$, $\frac{5a}{3x^2yz^3}+\frac{2b}{15xy^3z^2}-\frac{3c}{10x^2y^2z^2}$;

k) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$, $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}$, $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}$;

l) $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$, $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}$, $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$;

m) $\frac{x}{x+2a}+\frac{2a}{x-2a}$, $\frac{3}{x^2-y}-\frac{2}{x^2+y}$, $\frac{a}{a-3b}-\frac{b}{a+3b}$;

n) $\frac{a^2}{a^2-x^2}-\frac{x^2}{a^2+x^2}$, $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{a}-\frac{2}{a+1}+\frac{1}{a+2}$.

32. **Wykonaj działania:**

a) $x+\frac{1}{x}$, $a+1+\frac{1}{a-1}$, $2x+5+\frac{1}{2x-5}$;

b) $3+\frac{5-3x^2}{x^2-4}$, $x+\frac{2x}{x-2}-\frac{3x^2}{(x-2)^2}$, $x^2+2x+1+\frac{x+1}{x-1}$;

c) $a+\frac{b^2}{a-b}-\frac{a^2}{a+b}+b$, $1+\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$.

33. **Wykonaj działania:**

a) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$, *b)* $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{4y^2}{x^2-y^2}$,

c) $\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, *d)* $\frac{2x+1}{x+1}-\frac{3x-1}{x-1}+\frac{x(x+3)}{x^2-1}$,

e) $\frac{3x+5}{6x-9}-\frac{2x^2+5x-1}{4x^2-9}+\frac{1}{2x+3}$,

f) $\frac{5}{x-1}-\frac{3x-4}{x^2-2x+1}+\frac{2x+5}{x^2-1}$, g) $\frac{1+x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x^2}+\frac{2}{1+x}$.

34. Wykonaj działania:

a) $\frac{3x+1}{4x-10}+\frac{5x-1}{6x-15}$, b) $\frac{4x-3}{2x+1}+\frac{8x^2+2x+1}{4x^2+4x+1}$,

c) $\frac{x+1}{8x-12}+\frac{2x-5}{16x-24}$, d) $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-6x+9}+\frac{x-2}{x^2-3x}$,

e) $\frac{2(x+15)}{x+3}+\frac{6(x+3)}{x^2-9}$,

f) $\frac{x-1}{(x+2)^2(x^2-6x+9)}+\frac{4x+5}{(x+2)(x^2-9)}$.

Sprawdź wynik podstawiając $x=1, \frac{3}{4}, -\frac{1}{3}$.

35. Wykonaj działania:

a) $\frac{3}{x^2-1}+\frac{6}{2-2x}$, b) $\frac{x}{x^2-2x+1}-\frac{1}{3(1-x^2)}$,

c) $\frac{4x+1}{4(x+2)}-\frac{13}{4(x^2-4)}$, d) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-4x+4}$.

36. Wykonaj działania:

a) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{2ab}{a^2-b^2}$, $\left(\frac{x}{y}-1\right):\frac{x^2-y^2}{2ay}$, $\left(1+\frac{a}{x-a}\right)\left(a-\frac{b}{x}\right)$,

b) $\left(1+\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{a^2-x^2}\cdot\left(\frac{a}{x}-1\right)$, $\left(a+\frac{3x^2}{a}\right)\left(\frac{a^2}{3x^2}-1\right):\frac{a}{x^2}$,

c) $\left(\frac{x}{1+x}+\frac{1-x}{x}\right):\left(\frac{x}{1+x}-\frac{1-x}{x}\right)$, $\frac{x+2a}{a-2x}-\frac{a+2x}{x-2a}$,

d) $\frac{3}{2ax}-\frac{1}{a-x}$, $\frac{x^2-y^2}{3x^3}\cdot\left(1+\frac{2y}{x-y}\right)^2:\frac{(x+y)^3}{x^3-x^2y}$.

37. Ułamek

$$\frac{\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x}}{\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x}},$$

w którego liczniku i mianowniku występują ułamki, ma sens, jeżeli wszystkie mianowniki są różne od zera. Zakładamy więc, że:

$$x+1\neq 0,\quad x\neq 0,\quad \frac{5}{x+1}+\frac{3}{x}\neq 0.$$

Ponieważ $\frac{5}{x+1}+\frac{3}{x}=\frac{8x+3}{x(x+1)}$, jeżeli $x+1 \neq 0$ i $x \neq 0$, zatem ułamek dany ma sens, jeżeli: $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq -\frac{3}{8}$.

Przy tym założeniu możemy ułamek sprowadzić do prostszej postaci w dwojaki sposób:

1. Wykonywamy naznaczone działania w liczniku i mianowniku, a następnie dzielimy. Otrzymamy:

$$\frac{\frac{2x-1}{x(x+1)}}{\frac{8x+3}{x(x+1)}}=\frac{2x-1}{8x+3}$$

2. Mnożymy licznik i mianownik przez wspólny mianownik ułamków: $x(x+1)$. Dostajemy:

$$\frac{x(x+1)\,\frac{3}{x+1}-x(x+1)\frac{1}{x}}{x(x+1)\,\frac{5}{x+1}+x(x+1)\,\frac{3}{x}}=\frac{3x-(x+1)}{5x+3(x+1)}=\frac{2x-1}{8x+3}$$

Podobnie przekształć następujące wyrażenia:

a) $\dfrac{x-1}{x-\frac{1}{x}}$, *b)* $\dfrac{1+\frac{x-2}{x+2}}{1-\frac{x-2}{x+2}}$, *c)* $\dfrac{5-\frac{x+1}{x}}{2+\frac{x+2}{x}}$,

d) $\dfrac{x}{\frac{x}{x-1}}$, *e)* $\dfrac{\frac{x}{x+1}-1}{x-1}$, *f)* $\dfrac{1-\frac{a+b}{a-b}}{1-\frac{a-b}{a+b}}$,

g) $\dfrac{x+2}{3+\frac{1}{x}}$, *h)* $\dfrac{\frac{a-1}{a+1}+1}{\frac{a-1}{a+1}-1}$, *i)* $\dfrac{\frac{x}{x-1}+1}{x-1}$,

j) $\dfrac{x+y}{x-\frac{x^2+y^2}{x-y}}$, *k)* $\dfrac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$, *l)* $\dfrac{\frac{2a+3b}{a}+\frac{a-2b}{b}}{\frac{3a+b}{a}-\frac{a+3b}{b}}$,

m) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$, *n)* $\dfrac{\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}}$, *o)* $\dfrac{\frac{1}{1+2x}+\frac{2x}{1-2x}}{\frac{1}{1-2x}-\frac{2x}{1+2x}}$, *p)* $\dfrac{2}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}+\dfrac{y}{1-\frac{y}{x}}-\dfrac{x}{1-\frac{x}{y}}$, *q)* $1+\dfrac{1}{1+\frac{2}{x-2}}$, *r)* $x+\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}$.

38. Oblicz różnicę między ułamkiem $\frac{a}{b}$ a ułamkiem, który otrzymasz dodając do licznika i mianownika tę samą liczbę x. Zbadaj, kiedy oba ułamki są równe ($b \neq 0$).

39. Uczeń uprościł ułamek $\dfrac{2x-5y}{4x^2-25y^2}$ w ten sposób: $\dfrac{2x-5y}{4x^2-25y^2}=\dfrac{2-5}{4x-5y}=-\dfrac{3}{4x-5y}$. Jaki przy tym błąd popełnił? Uprość ten ułamek poprawnie i oblicz różnicę między prawdziwym a powyższym wynikiem dla $x=3$, $y=1$.

40. Oblicz: $1+\dfrac{x^2+y^2-z^2-t^2}{2(xy+zt)}$, a następnie przedstaw licznik otrzymanego ułamka w postaci iloczynu dwu czynników.

41. Odejmując ułamek $\dfrac{2ab}{a+b}$ od $\dfrac{a+b}{2}$ wykaż, że pierwszy ułamek jest niewiększy od drugiego, gdy $a+b>0$. Kiedy są równe?

42. Wykaż, że $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$. Oblicz przy pomocy tego wzoru *a)* $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}$, *b)* $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}$,
c) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$.

43. Jeżeli do liczby dodatniej dodamy jej odwrotność, to otrzymamy liczbę co najmniej równą 2. Dlaczego? (Odejmij od tej sumy 2 i przedstaw wynik w postaci ułamka).

44. Dwaj posłańcy wychodzą równocześnie naprzeciw siebie z dwóch miast, odległych od siebie o d *km*.
a) Pierwszy przebywa w jednej godzinie u *km*, drugi v *km*; kiedy się spotkają i w jakich odległościach od miast?
b) Pierwszy przebywa 1 *km* w l min., drugi w k min. Kiedy się spotkają i w jakich odległościach od miast?

45. Piechur odbył drogę d *km* w a godz.; pierwszą połowę przeszedł w x godzinach; o ile *km* więcej na godzinę przebywał w pierwszej połowie niż w drugiej?

46. Jeden piechur przeszedł a *km* w ciągu b godzin, drugi o x *km* więcej w czasie o y godzin krótszym; jaka jest różnica ich

prędkości? O ile więcej czasu zużywa na przebycie 1 *km* pierwszy piechur niż drugi?

47. Jeden cyklista robi a okrążeń toru na godzinę, drugi o x okrążeń więcej. O ile czasu więcej potrzebuje pierwszy cyklista niż drugi na jedno okrążenie?

48. Jeden robotnik wykonałby pewną pracę w a dniach, drugi tę samą pracę w b dniach; w jakim czasie wykonają tę pracę obaj robotnicy pracując równocześnie?

49. Kupiec zmieszał a *kg* kawy po x *zł* z b *kg* kawy po y *zł*; jaką ilość mieszaniny można otrzymać za 1 *zł*?

50. Kupiec sprzedał a *kg* towaru po x *zł* za *kg* i b *kg* po y *zł* za *kg*; ile przeciętnie zarabiał na 1 *kg*, jeżeli sam kupił a *kg* po y *zł*, zaś b *kg* po x *zł*?

51. Kupiec wlał do beczki a *l* wina po 3 *zł* i b *l* wina po 4 *zł*; następnie sprzedał b *l* mieszaniny i dolał b *l* wina po 4 *zł*. Ile będzie kosztował teraz 1 *l* mieszaniny?

52. Z beczki zawierającej a *l* wina odlano $\frac{1}{m}$ zawartości, z reszty $\frac{1}{n}$, a z tego,co pozostało, jeszcze $\frac{1}{p}$. Oblicz: *a)* ile *l* pozostało na końcu? *b)* ile odlano?

53. W obliczeniach często, aby uniknąć dzielenia, zastępuje się ułamek $\frac{1}{1+x}$ przez $1-x$, gdy x jest małą liczbą. Oblicz:
a) błąd, jaki się przez to popełnia?
b) jakim procentem dokładnej wartości jest ten błąd?
c) ile procent wynosi błąd, jeżeli x wynosi 0,2, 0,3, 0,05?

§ 6. Podstawienia literowe

Często się zdarza, że w danym wyrażeniu mamy za pewne litery podstawić nowe wyrażenia.

1. W wyrażeniu $3x^2-2xy+5y^2+y$ podstawić $y=x-5$.

Piszemy w danym wyrażeniu zamiast y wszędzie: $x-5$. Wyrażenie $x-5$ bierzemy w nawias. Dostaniemy:

$$3x^2-2x(x-5)+5(x-5)^2+(x-5).$$

Po uwolnieniu od nawiasów i po redukcji otrzymamy w końcu

$$6x^2-39x+120.$$

2. W wyrażeniu: $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$

podstawić $a=x+y$, $b=x-y$.

Podstawiając dostajemy:

$$\frac{(x+y)+(x-y)}{(x+y)-(x-y)}-\frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)+(x-y)}.$$

Po wykonaniu działań otrzymamy:

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{x^2-y^2}{xy}.$$

3. W wyrażeniu: $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ podstawić $x=y$.

Piszemy zamiast x wszędzie y. Dostaniemy:

$$\frac{y+y}{y^2+y\cdot y+y^2}=\frac{2y}{3y^2}=\frac{2}{3y}.$$

Uwaga: W przypadku 2. i 3. podane postępowanie ma sens tylko wtedy, gdy mianowniki są różne od zera.

4. W wyrażeniu: $3x^2-x+1$ zamiast x podstawić $x+1$.

Piszemy zamiast x wszędzie $x+1$. Otrzymamy:

$$3(x+1)^2-(x+1)+1.$$

Po wykonaniu działań dostaniemy $3x^2+5x+3$.

Zadania

Po podstawieniu sprowadź wynik do najprostszej postaci:

54. *a)* $x+y$; $x=a+2b-3c$, $y=b+2c-3a$,

b) $x^2+y^2+z^2$; $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$,

c) p^2-2q; $p=x+y$, $q=xy$,

d) x^2-y^2; $x=a+2b$, $y=a-2b$,

e) $\frac{x+y}{2}h$; $x=a+2b$, $y=a-2b$, $h=4b$,

f) $(x+y)(x^2+y^2)$; $x=a+1$, $y=1-a$.

55. *a)* $x^2-15x-126$; $x=y+\frac{5}{y}$,

b) x^2-y^2; $x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $y=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$,

c) x^2+xy+y^2; $x=\frac{a}{1+a}$, $y=\frac{1}{1-a}$,

d) $2x^2-xy-y^2$; $x=\frac{1+y}{1-y}$, *e)* $(x-a)^2+(y-b)^2;\quad x=a+\dfrac{t-1}{t+1},\quad y=b+\dfrac{2t}{t+1},$

f) $xy+yz+zx;\quad x=\dfrac{a+z}{a-z},\quad y=\dfrac{z}{a}.$

56. *a)* $\dfrac{2x+3y+1}{4x-2y+3};\quad x=a+b,\quad y=a-b,$

b) $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2};\quad x=2t-1,\quad y=t+3,$

c) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2};\quad x=3a-2,\quad y=1,$

d) $\dfrac{ax+(1-a)y}{x^2+y^2};\quad x=a,\quad y=1+a,$

e) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2};\quad x=a(m+1),\quad y=b(n-1),$

f) $\dfrac{x}{y};\quad x=\dfrac{2s+1}{s-1},\quad y=\dfrac{s}{2s-2},$

g) $\dfrac{x+2y}{x-y};\quad x=\dfrac{z+2y}{z-y},$

h) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2};\quad x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\dfrac{2t}{1+t^2},$

i) $\dfrac{x^2-y^2}{1+2xy};\quad x=\dfrac{w-z}{w+z},\quad y=\dfrac{z}{w+z}.$

57. Wykonaj podstawienie $y=tx$ w następujących ułamkach algebraicznych i sprowadź do najprostszej postaci: $(x\neq 0,\ y\neq 0,\ t\neq 0)$:

a) $\dfrac{4x^2-3xy+y^2}{5x^2+xy-3y^2},$ *b)* $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+3xy^2+y^3},$ *c)* $\dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^4+y^4}.$

58. Powierzchnia walca o promieniu r i wysokości w wynosi $2r^2\pi+2r\pi w$. Jaka jest powierzchnia walca równobocznego (tj. takiego, w którym $w=2r$)?

59. Objętość walca wynosi przy tych samych oznaczeniach $r^2\pi w$. Ile wynosi objętość walca równobocznego?

60. Ile wynosi średnia arytmetyczna wyrażeń: $a=2x^2-3x+1$, $b=2x^2+3x-1$?

61. W wielomianie x^2-6x+8 podstaw $x=y-a$. Jak należy obrać a, aby w otrzymanym wielomianie nie było wyrazu stopnia pierwszego ze względu na y? 73

62. Zrób to samo z wielomianami:
$x^2-8x+12, \qquad 4x^2-24x+20, \qquad 6x^2+5x+1.$

63. Wykaż, że podstawiając w wielomianie x^3+ax^2+bx+c $x=y-\frac{a}{3}$, otrzymuje się nowy wielomian, w którym brak drugiej potęgi y.

64. Wykaż, że wyrażenie: x^3+y^3-axy dla $x=\frac{at}{1+t^3}$, $y=\frac{at^2}{1+t^3}$ jest równe zeru, jeżeli $1+t^3 \neq 0$.

65. Przekonaj się, że podstawiając $x=z+3$, $y=t-4$ w wyrażeniu: $x^2+y^2-6x+8y-12$, otrzymasz wyrażenie nie zawierające pierwszych potęg z i t.

66. Wykaż, że jeżeli liczba w spełnia równanie:

$$x^5-7x^4+x^3-x^2+7x-1=0,$$

to liczba $\frac{1}{w}$ również je spełnia.

67. Sprawdź, że wykonywając w wyrażeniu $x^2-2x+1-t^2$ podstawienie *a)* $x=1+t$, *b)* $x=1-t$, otrzymamy zero.

68. Przekonaj się, że jeżeli liczby x, y spełniają równanie:

$$x^2+y^2-10x+9=0,$$

to liczby: $\frac{9x}{x^2+y^2}$, $\frac{9y}{x^2+y^2}$ również je spełniają.

69. Przekonaj się, że jeżeli liczba w spełnia równanie $x^2+bx+c=0$, to liczba *a)* $-b-w$, *b)* $\frac{c}{w}$ również spełnia to równanie. Sprawdź to na przykładach: $x^2-3x^2+2=0$, $w=1$; $6x^2+x-1=0$, $w=\frac{1}{3}$; $x^2-x+\frac{3}{16}=0$, $w=\frac{3}{4}$.

70. Przekonaj się, że zastępując w wyrażeniu $xt-yz$, x przez $x+mz$, zaś y przez $y+mt$, otrzymasz to samo wyrażenie.

71. Przekonaj się, że zastępując w wyrażeniu x^2+y^2, x przez $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y$, zaś y przez $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y$, otrzymasz to samo wyrażenie.

72. Wykaż, że wyrażenia $x=a\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2bt}{1+t^2}$ spełniają równanie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

73. Matematyk hinduski Brahmagupta znalazł w VI w. przed Chr. następujący wzór na kwadrat pola trójkąta o bokach a, b, c:

$$P^2=s(s-a)(s-b)(s-c),$$

gdzie $s = \frac{a+b+c}{2}$. Podstaw za s to wyrażenie i zbadaj, jaką postać przybiera ten wzór dla trójkąta: *a*) równoramiennego, *b*) równobocznego?

74. W wyrażeniu $\frac{1}{1-x}$ podstaw $x = \frac{1}{1-y}$, a w otrzymanym wyrażeniu (po sprowadzeniu do prostszej postaci) podstaw $y = \frac{1}{1-t}$ $(x \neq 1, y \neq 1,\ y \neq 0,\ t \neq 1)$.

75. Przekonaj się, że pisząc w wyrażeniu $-\frac{x+1}{x}$ zamiast x wyrażenie $-\frac{x+1}{x}$, a w otrzymanym wyrażeniu pisząc znowu zamiast x wyrażenie $-\frac{x+1}{x}$, otrzymasz x, $(x \neq 0,\ x \neq -1)$.

76. Pewnemu uczniowi ktoś powiedział, że suma kwadratów liczb naturalnych $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ wynosi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Chcąc sprawdzić ten wzór, którego nie potrafił udowodnić, zastąpił w tym wyrażeniu n przez $n+1$ i od nowego wyrażenia odjął pierwotne. Co powinien był otrzymać na wynik? Sprawdź!

Rozdział III

Równania ułamkowe o jednej i więcej niewiadomych

§ 1. Rozwiązywanie równań

Zajmiemy się teraz rozwiązywaniem równań, w których występują ułamki zawierające niewiadomą w mianowniku.

Przykład 1. Rozwiązać równanie:

$$\frac{7}{2x} - \frac{4}{3x} = \frac{1}{6x} + 2.$$

Przyjmujemy, że to równanie posiada pierwiastek i że x oznacza ten pierwiastek. Aby uwolnić się od mianowników, mnożymy obie strony równości przez wspólny mianownik $6x$. Otrzymamy:

$$6x \cdot \frac{7}{2x} - 6x \cdot \frac{4}{3x} = 6x \cdot \frac{1}{6x} + 2 \cdot 6x.$$

Upraszczamy i redukujemy:

$$13 = 1 + 12x, \text{ stąd } x = 1.$$

Sprawdzając przekonywamy się, że $x=1$ jest pierwiastkiem.

Przykład 2. Rozwiązać równanie:

$$\frac{3}{2(x+3)}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+3}.$$

Wspólnym mianownikiem jest $2(x+3)(x+4)$.

Mnożąc obie strony przez wspólny mianownik i upraszczając otrzymamy: $3(x+4)-2(x+3)=2(x+4)$, stąd $x=-2$.

Sprawdzając stwierdzamy, że $x=-2$ jest pierwiastkiem.

Przykład 3. Rozwiązać układ równań:

$$\frac{x+3y}{x-y}=8, \qquad \frac{7x-13}{3y-5}=4.$$

Mnożymy obustronnie pierwsze równanie przez $x-y$, drugie przez $3y-5$; dostajemy $x+3y=8(x-y)$, $\quad 7x-13=4(3y-5)$.

Rozwiązując te równania jedną ze znanych metod dostajemy $x=11$, $y=7$. Łatwo sprawdzić, że te wartości spełniają dany układ równań.

Przykład 4. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x}{x-2}=3+\frac{8-3x}{x-2}.$$

Podobnie jak poprzednio, mnożymy obie strony przez wspólny mianownik $x-2$ i dostajemy:

$$x=3(x-2)+8-3x. \text{ Stąd } x=2.$$

Podstawiając zauważamy, że dla znalezionej wartości $x=2$ obie strony równania nie mają sensu. A więc wartość ta nie spełnia danego równania.

Ponieważ, jak wynika z naszego rachunku, jedynie $x=2$ mogłoby być pierwiastkiem tego równania, przeto dane równanie nie ma pierwiastka.

Z przykładu tego widzimy, że należy zawsze sprawdzić, czy znaleziona wartość spełnia równanie, bo może się zdarzyć, że tak nie jest.

Przykład 5. Niekiedy ułatwiamy sobie rozwiązanie równania wprowadzając tzw. pomocniczą niewiadomą. Niech np. dane będzie równanie:

$$\frac{1}{3x-1}+\frac{3(3x-1)+2}{5(3x-1)}=\frac{2}{5}-\frac{7}{3(3x-1)}.$$

Widzimy, że tutaj niewiadoma x występuje zawsze w połączeniu: $3x-1$. Połóżmy $3x-1=u$. Otrzymamy wówczas prostsze równanie na niewiadomą pomocniczą u:

$$\frac{1}{u}+\frac{3u+2}{5u}=\frac{2}{5}-\frac{7}{3u}.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy: $u=-\frac{56}{3}$.
Ale $u=3x-1$. Zatem x musi spełniać równanie:

$$3x-1=-\tfrac{56}{3}. \text{ Stąd } x=-\tfrac{53}{9}.$$

Sprawdzając przekonywamy się, że wyszukana wartość jest pierwiastkiem danego równania.

P r z y k ł a d 6. Wprowadzanie niewiadomych pomocniczych można stosować również przy układach równań. Niech dany będzie np. układ równań:

$$\frac{1}{x-4}+\frac{1}{y-2}=\frac{3}{2}, \quad \frac{3}{x-4}-\frac{2}{y-2}=2.$$

Kładąc: $\frac{1}{x-4}=u$, $\frac{1}{y-2}=v$, dostajemy:

$$u+v=\tfrac{3}{2},\ 3u-2v=2.$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $u=1$, $v=\frac{1}{2}$. Zatem:

$$\frac{1}{x-4}=1, \frac{1}{y-2}=\frac{1}{2}.$$

Stąd $x=5$, $y=4$.
Sprawdzając przekonywamy się, że $x=5$, $y=4$ jest układem pierwiastków danego równania.

Zadania

Rozwiąż równania:

1. a) $\frac{1}{x}=6$; b) $\frac{5}{x}=-10$; c) $7=\frac{3}{-x}$ d) $\frac{2}{3x}+5=4$;

e) $\frac{4}{x}+3=\frac{11}{x}-\frac{1}{2}$; f) $\frac{6}{x}+7=\frac{36}{5x}+6\frac{3}{5}$; g) $\frac{12}{x}-4=\frac{9}{4x}+5\frac{3}{4}$;

h) $\frac{9}{x}-\frac{4}{3x}=3\frac{5}{6}$; i) $\frac{3}{2x}-\frac{5}{3x}=\frac{1}{6}$; j) $\frac{8}{3x}-\frac{9}{2x}=\frac{11}{12}$;

k) $\frac{7}{x}-\frac{14}{3x}=\frac{1}{3}$; l) $\frac{20}{3x}+6\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+5\frac{1}{5}$; m) $\frac{2}{x}-\frac{3}{2x}-\frac{1}{3x}=\frac{1}{3}$;

n) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=6+\frac{3}{4x}$; o) $\frac{7}{3}+\frac{13}{5x}=\frac{13x-24}{3x}-\frac{37}{20}+\frac{10}{x}$.

2. a) $\frac{17}{x+1}=5$, b) $\frac{8}{2x+1}=4$, c) $\frac{6+x}{6-x}=2$, d) $\frac{2x-1}{3x-2}=\frac{9}{11}$,

e) $\frac{4}{x+1}+\frac{1}{3}=\frac{16}{3(x+1)}$, *f)* $\frac{6}{x+2}+\frac{3}{4}=\frac{33}{4(x+2)}$,

g) $\frac{3}{2x+7}-\frac{3}{5}=\frac{9}{10x+35}$, *h)* $\frac{5}{x}=\frac{1}{x-4}$, *i)* $\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x+6}$,

j) $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x-1}$, *k)* $\frac{x}{x-2}=\frac{x-3}{x-4}$, *l)* $\frac{1}{x-7}-\frac{15}{x}=0$,

m) $\frac{5}{x+3}-\frac{7}{x+5}=0$, *n)* $\frac{3}{2x-1}-\frac{2}{x-1}=0$.

3. *a)* $\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}$,

b) $\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+8}$,

c) $\frac{1}{4x+6}+\frac{1}{6x+4}=\frac{2}{2x+3}$, *d)* $\frac{1}{3x+9}+\frac{2}{5x+1}=\frac{2}{x+3}$,

e) $\frac{5}{x^2-4}=\frac{11}{x+2}-\frac{1}{x-2}$, *f)* $\frac{12}{4x^2-9}-\frac{2}{2x+3}=\frac{1}{2x-3}$,

g) $\frac{1}{9x+4}-\frac{2}{81x^2-16}+\frac{1}{9x-4}=0$, *h)* $\frac{4}{6x-1}=\frac{11}{36x^2-1}+$

$+\frac{3}{6x+1}$, *i)* $\frac{8}{x+8}+\frac{7}{x-7}=\frac{102}{(x+8)\,(x-7)}$,

j) $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{4-x}=\frac{19}{(x+3)\,(4-x)}$, *k)* $\frac{4}{2x+1}-\frac{7}{3x+2}=$

$=\frac{3}{(2x+1)\,(3x+2)}$, *l)* $\frac{2}{4x-5}=\frac{9}{(4x-5)\,(2x-1)}+$

$+\frac{1}{1-2x}$, *m)* $\frac{6}{x+1}=\frac{4(x+2)}{(x+1)\,(x+3)}+\frac{3}{x+3}$,

n) $\frac{1}{x+4}=\frac{2}{2x-7}+\frac{15(x+3)}{(7-2x)\,(x+4)}$.

4. *a)* $\frac{5}{x-1}-\frac{3x-4}{x^2-2x+1}=\frac{2x+5}{x^2-1}$, *b)* $\frac{1+x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x^2}=$

$=\frac{2}{1+x}$, *c)* $\frac{4x-3}{2x+1}-\frac{8x^2+2x+1}{4x^2+4x+1}=0$,

d) $\frac{4x^2-7}{2x+3}-\frac{1}{2x}=2x-3$, *e)* $\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3(z^2-1)}=$

$=\frac{z}{z^2-2z+1}$, *f)* $\frac{3}{y^2-4}-\frac{1}{y^2-4y+4}=\frac{2}{y^2+4y+4}$,

g) $\frac{x-1}{x^2-x+1}=\frac{x+1}{x^2+x-1}$, *h)* $\frac{1}{x+4}+\frac{2}{x+6}=\frac{3}{x+5}$.

5. Rozwiąż równania:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\dfrac{2}{x}+1\frac{1}{3}}{\dfrac{4}{x}+7\frac{1}{4}}$, c) $1-\dfrac{2}{3-\dfrac{4}{x}}=3$,

b) $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}=3$, d) $7+\dfrac{7}{7+\dfrac{7}{x}}=8$.

6. Sprawdź, że następujące równania nie posiadają pierwiastków

a) $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}$, b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{3}{4}$,

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$, d) $\dfrac{4x^2-9}{2x-3}=6$.

7. Rozwiąż, wprowadzając niewiadomą pomocniczą:

a) $\dfrac{24}{5x-3}+\dfrac{96}{7(5x-3)}=\dfrac{22}{7}$, b) $\dfrac{9}{2x+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{15}{2(2x+1)}$,

c) $3\left(\dfrac{4}{5-x}+5\right)-\dfrac{6}{5-x}=4\left(\dfrac{2}{5-x}+5\right)-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5-x}-5\right)$,

d) $\dfrac{17}{6(3x-2)+5}-\dfrac{10}{3(3x-2)-16}=\dfrac{1}{3-2(3x-2)}$,

e) $\dfrac{11}{12(5x+4)-1}=\dfrac{7}{4(5x+4)+3}-\dfrac{5}{6(5x+4)-1}$,

f) $\dfrac{3}{\dfrac{1}{x}-2}-\dfrac{10}{\dfrac{1}{x}+1}=\dfrac{9}{\left(\dfrac{1}{x}-2\right)\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}$,

g) $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-2}{\dfrac{x}{x+1}+3}-\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-2}{\dfrac{2x}{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

8. Rozwiąż układy równań:

a) $\dfrac{1}{3x+8y}=\dfrac{1}{5-8y}$, $\dfrac{19}{28y-5x}=1$,

b) $\dfrac{1}{5x+1}=-\dfrac{2}{7y+2}$, $\dfrac{2}{4x+3y}+\dfrac{1}{x+y+1}=0$,

c) $\dfrac{5}{x+2y}=\dfrac{7}{2x+y}$, $\dfrac{7}{3x-2}=\dfrac{5}{6-y}$,

d) $\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{15}{8}$, $9x-\dfrac{3x+44}{7}=100$

e) $\dfrac{5x+7y}{3x+11}=\dfrac{13}{7}$, $\dfrac{11x+27}{7x+5y}=\dfrac{10}{11}$, *f)* $\dfrac{7-2x}{5-3y}=\dfrac{3}{2}$, $y-x=4$, *g)* $\dfrac{x+2y+1}{2x-y+1}=2$, $\dfrac{3x-y+1}{x-y+3}=5$,

h) $\dfrac{x-1}{x+15}=\dfrac{y-6}{y+2}$, $\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{y-4}{y-1}$, *i)* $\dfrac{7+8x}{10}-\dfrac{3x-6y}{2x-8}=4-\dfrac{9-4x}{5}$. $\dfrac{6y+9}{4}=\dfrac{13}{4}+\dfrac{3y+4}{2}-\dfrac{3y+5x}{4y-6}$.

9. Rozwiąż, wprowadzając niewiadome pomocnicze:

a) $\dfrac{12}{x}-\dfrac{2}{y}=1$, $\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=2\frac{1}{6}$, *b)* $\dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{y}=3$, $\dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{y}=4$, *c)* $\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{y}=0{,}4$ $\dfrac{11}{x}-\dfrac{1}{2y}=1$,

d) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{y}=2$, $3y+2x=13xy$, *e)* $x+8y=\dfrac{12xy}{5}$, $3x-2y=\dfrac{7xy}{10}$, *f)* $\dfrac{x}{5}-2y=\dfrac{xy}{10}$, $\dfrac{x}{10}\left(3-\dfrac{y}{2}\right)=5y$.

Wskazówki: Podziel przez xy: w *d)* obie strony drugiego równania, w *e)*, *f)* obu równań zakładając, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Następnie zbadaj, czy może być $x=0$, $y=0$.

10. Rozwiąż, wprowadzając niewiadome pomocnicze:

a) $\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{9}{y+2}=5$, $\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{9}{y+2}=-1$, *b)* $\dfrac{6}{x+2}-\dfrac{5}{y-1}=8$, $\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{6}{y-1}=\dfrac{17}{2}$,

c) $\dfrac{6}{3x-y}-\dfrac{5}{x+y}=8$, $\dfrac{5}{3x-y}+\dfrac{6}{x+y}=27$; *d)* $\dfrac{10}{3x+2y}+\dfrac{9}{y}=8$, $\dfrac{8}{3x+2y}+\dfrac{3}{y}=5$.

§ 2. Układanie równań

11. Jeżeli do licznika i mianownika pewnego ułamka dodam 7, to otrzymam ułamek o wartości $\frac{2}{3}$; jeżeli zaś od licznika i mianownika odejmę 11, to otrzymam ułamek o wartości $\frac{1}{6}$. Oblicz licznik i mianownik tego ułamka.

12. W liczbie dwucyfrowej pierwsza cyfra jest o 5 większa od drugiej. Jeżeli przestawimy cyfry i nową liczbę podzielimy przez pierwotną, otrzymamy $\frac{3}{8}$. Co to za liczba?

13. Wyszukaj dwie liczby, których różnica i iloraz są równe 7.

14. Jeżeli pewną liczbę dwucyfrową podzielisz przez sumę jej cyfr, otrzymasz 7. Jeżeli zaś odejmiesz od niej 27, to otrzymasz liczbę o tych samych cyfrach w innym porządku. Co to za liczba?

15. Uczeń uprościł ułamek $\frac{7x+2}{2x+1}$ w ten sposób: $\frac{7x+2}{2x+1} = \frac{7+2}{2+1} = 3$. Aby sprawdzić ten wynik, podstawił za x pewną wartość, przy czym okazało się, że prawdziwy wynik jest o $1/2$ mniejszy. Ile podstawił za x?

16. Suma dwóch liczb podzielona przez ich różnicę daje na wynik 3; suma ich odwrotności wynosi 0,5. Co to za liczby?

17. Księgarz sprzedał 600 egzemplarzy książki po 3 *zł* i resztę nakładu po 2 *zł*. Jaki był nakład, jeżeli średnia cena egzemplarza wypadła na $2\frac{2}{3}$ *zł*?

18. Oszust dolał do 5 *l* dobrego mleka pewną ilość wody, tak że ciężar właściwy, wynoszący pierwotnie 1,04, obniżył się na 1,02. Ile *l* wody dolał?

19. Ile *l* wody należy usunąć (przez destylację) z 66 *l* alkoholu 48%, by otrzymać alkohol 64%?

20. Pewna instytucja postanowiła rozdzielać 1 stycznia każdego roku 1800 *zł* w równych częściach między ubogich. W następnym roku liczba obdarowanych była o połowę większa, tak że każdy dostał o 20 *zł* mniej niż za pierwszym razem. Ilu ubogich otrzymało zapomogi w pierwszym roku?

21. Pewien kapitał przynosi w jednym roku 240 *zł* dochodu. Drugi kapitał, oprocentowany o 3% wyżej, przynosi w tym samym czasie 210 *zł*. Gdyby oba kapitały wypożyczono razem, to przyniosłyby one w jednym roku również 450 *zł*, przy oprocentowaniu o 1% wyższym niż poprzednio dla pierwszego kapitału. Na ile procent był wypożyczony pierwszy kapitał? Ile wynosiły oba kapitały?

22. W pewnym mieście kosztuje 5 biletów tramwajowych z przesiadaniem tyle, co 6 biletów wprost. Konduktor sprzedał 202 biletów, mianowicie biletów wprost za 28,75 *zł*, zaś biletów z przesiadaniem za 26,10 *zł*. Ile kosztował bilet wprost, a ile z przesiadaniem? Ile biletów każdego rodzaju sprzedał konduktor?

23. Pewien towar sprzedają w paczkach 1 *kg* oraz w paczkach większych. 8 paczek większych i 2 mniejsze kosztują razem 54 *zł*; natomiast 2 paczki większe i 8 paczek mniejszych kosztuje 36 *zł*. Jaka jest cena 1 *kg* towaru i ile zawiera większa paczka?

24. Pierwszy pociąg przebywa drogę *AB* w czasie o dwie godziny krótszym niż drugi. Jeżeli drugi pociąg jedzie za pierwszym w tym samym kierunku, to ich odległość zwiększa się o 30 *km* na godzinę. Jeżeli zaś oba pociągi jadą w przeciwnych kierunkach, to ich odległość zwiększa się o 150 *km* na godzinę. W jakim czasie każdy pociąg przebywa drogę *AB*? Jaka jest długość tej drogi?

25. Pociąg osobowy przebywa w pewnym czasie 200 *km*, pociąg pośpieszny w tym samym czasie 320 *km*, pociąg towarowy w czasie o 5 godzin dłuższym 270 *km*. Jakie są prędkości tych pociągów, jeżeli prędkość pociągu pośpiesznego jest równa sumie prędkości pociągu osobowego i towarowego?

26. Trzej bracia składali co miesiąc tę samą kwotę do kasy oszczędności, przy czym najstarszy brat składał tyle, co dwaj pozostali razem. Po pewnym czasie oszczędności najmłodszego wynosiły 100 *zł*, w dwa miesiące później oszczędności najstarszego wynosiły 420 *zł*, a po dalszym miesiącu oszczędności średniego wynosiły 320 *zł*. Ile składał co miesiąc każdy z braci?

27. 1 *m* płótna *I* gatunku kosztuje tyle, ile 1 *m* płótna *II* gatunku i 1 *m* płótna *III* gatunku razem. Kupując za 16 *zł* płótna *I* gatunku, za 7 *zł* płótna *II* gatunku, a za 9 *zł* płótna *III* gatunku, dostajemy *III* gatunku o 2 *m* więcej niż *II*, zaś *I* gatunku o 1 *m* więcej niż *II*. Jaka jest cena każdego gatunku płótna?

28. W liczbie trzycyfrowej środkowa cyfra jest średnią arytmetyczną obu innych cyfr. Jeżeli odwrócimy porządek cyfr, otrzymamy liczbę o 198 mniejszą. Jeżeli zaś podzielimy ją przez sumę cyfr, otrzymamy 48. Co to za liczba?

29. Do zbiornika prowadzą 3 rury. Jeżeli woda dopływać będzie równocześnie pierwszą i drugą rurą, lub drugą i trzecią, lub wreszcie pierwszą i trzecią rurą, to zbiornik napełni się odpowiednio w 84, 28, 30 minutach. W jakim czasie napełni się zbiornik, jeżeli otwarta będzie tylko pierwsza, tylko druga, lub tylko trzecia rura?

30. Z trzech metali można otrzymać stop o ciężarze właściwym 8,4, biorąc 3 g pierwszego metalu, 4 g drugiego metalu i 5 g trzeciego metalu. Jeżeli się stopi 4 g pierwszego metalu, 5 g drugiego metalu i 3 g trzeciego, otrzyma się stop o ciężarze właściwym 8. Jeżeli wreszcie stopimy 5 g pierwszego metalu, 3 g drugiego i 4 g trzeciego, to ciężar właściwy stopu będzie wynosił 8,1. Oblicz ciężary właściwe poszczególnych metali.

31. Z trzech naczyń, zawierających wodę o temperaturze odpowiednio 25^0, 40^0 i 72^0, pobrano pewne ilości wody, które następnie zmieszano. Z trzeciego naczynia pobrano tyle, co z pierwszych dwu razem. Temperatura mieszaniny wynosiła 53^0. Potem dolano 60 g wody z pierwszego naczynia, przez co temperatura mieszaniny obniżyła się o $10{,}5^0$. Ile wody pobrano na początku z każdego naczynia?

Rozdział IV

Proporcja. Wielkości proporcjonalne

§ 1. Proporcja

Równość taką, jak np.:

$$8:4=12:6, \qquad a:5=9:x, \qquad \frac{a}{7}=\frac{b}{6} \quad \text{itd.}$$

wyrażającą, że dwa ilorazy są równe, nazywamy **proporcją**. Oczywiście w ilorazach tych dzielniki muszą być różne od zera.

Proporcję: $a:b=c:d$ $\qquad (b \neq 0,\ d \neq 0)$

czytamy: „a jest w takim stosunku do b, jak c do d.

Liczby a, d nazywamy **wyrazami skrajnymi**, liczby b, c **wyrazami środkowymi**.

Napiszmy powyższą proporcję w postaci:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Sprowadzając obie strony do wspólnego mianownika bd otrzymamy równość:

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}.$$

Ponieważ mianowniki są równe, więc z równości ułamków wynika równość liczników. Zatem $ad=bc$.

A więc **w proporcji iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów środkowych.**

Np. z proporcji $8:4=12:6$ wynika $8\cdot 6=4\cdot 12$
„ $x:6=7:3$ „ $3x=6\cdot 7$, więc $x=14$ itp.

Na odwrót, jeżeli iloczyny ad i bc są równe ($b\neq 0$, $d\neq 0$), to zachodzi proporcja:

$$a:b=c:d$$

Jeżeli bowiem $ad=bc$, wówczas dzieląc obustronnie przez bd otrzymamy:

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}.$$

Stąd po uproszczeniu dostaniemy:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ czyli } a:b=c:d.$$

Np. proporcja $6{,}8:4=8{,}5:5$ jest prawdziwa, gdyż
$$6{,}8\cdot 5=8{,}5\cdot 4=34.$$

Proporcja: $2{,}1:1{,}4=2{,}4:1{,}5$ nie jest prawdziwa, gdyż
$$2{,}1\cdot 1{,}5=3{,}15 \text{ zaś } 1{,}4\cdot 2{,}4=3{,}36.$$

Przypuśćmy, że liczby a, b, c, d są różne od zera i że zachodzi proporcja:

$$a:b=c:d \tag{1}$$

Zatem
$$ad=bc \tag{2}$$

Przestawmy wyrazy skrajne ze sobą. Otrzymamy:

$$d:b=c:a.$$

Ta proporcja jest prawdziwa, gdyż na mocy (2) $da=bc$.

Przestawiając w proporcji (1) wyrazy środkowe ze sobą, otrzymamy proporcję $a:c=b:d$. Proporcja ta jest prawdziwa, gdyż na mocy (2) $ad=cb$.

Przestawmy wreszcie w proporcji (1) wyrazy skrajne z wyrazami środkowymi. Otrzymamy:

$$b:a=d:c.$$

Proporcja powyższa zachodzi, gdyż na mocy (2): $bc=ad$. Widzimy stąd, że *w proporcji (której wszystkie wyrazy są różne od zera) możemy przestawić wyrazy a) skrajne ze sobą, lub b) środkowe ze sobą, lub c) skrajne ze środkowymi i otrzymamy nową proporcję prawdziwą.*

Np. $2:1=8:4$, zatem $4:1=8:2$, $2:8=1:4$, $1:2=4:8$.

Uwaga 1. Przy poprzednich przekształceniach konieczne jest założenie, że wyrazy proporcji są różne od zera.

Np. mamy proporcję: $0:1=0:2$, gdyż oba ilorazy są równe zeru. Przestawiając ze sobą wyrazy skrajne dostaniemy:

$$2:1=0:0,$$

co nie jest prawdziwe, bo prawa strona nic nie oznacza.

Uwaga 2: Jeżeli w proporcji dane są 3 wyrazy, to czwarty możemy wyznaczyć. Np.:

1. Rozwiązać proporcję $3:x=8:7$ (czyli wyznaczyć x). Przypuszczając, że x oznacza liczbę spełniającą daną proporcję, otrzymamy: $8x=3\cdot7$. Stąd $x=\frac{21}{8}$. Sprawdzając przekonywamy się, że $x=\frac{21}{8}$ spełnia daną proporcję.

2. Rozwiązać proporcję $(x-3):4=(x+7):9$. Postępując jak poprzednio, dostaniemy: $9(x-3)=4(x+7)$, stąd $x=11$. Sprawdzając przekonywamy się, że $x=11$ spełnia daną proporcję.

Mówimy, że liczby a, b, c, d są do siebie w takim stosunku, jak liczby A, B, C, D, jeżeli iloraz dwóch liczb pierwszej grupy jest zawsze równy ilorazowi odpowiednich liczb drugiej grupy tj., jeżeli:

$$a:b=A:B,\ a:d=A:D,\ c:b=C:B \text{ itd.}$$

Mówimy również, że liczby a, b, c, d są (wprost) proporcjonalne do liczb A, B, C, D.

Zapisujemy to krótko: $a:b:c:d=A:B:C:D$. (1)

(Oczywiście liczby te muszą być różne od zera).

Ponieważ $a:b=A:B$ więc $a:A=b:B$,
podobnie $a:c=A:C$ „ $a:A=c:C$,
$a:d=A:D$ „ $a:A=d:D$.

Zatem: $$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}=\frac{d}{D} \qquad (2)$$

Na odwrót, jeżeli liczby różne od zera a, b, c, d i A, B, C, D spełniają związki (2), wówczas z proporcji $a:A=b:B$ wynika, $a:b=A:B$. Podobnie otrzymamy $a:c=A:C$, $b:d=B:D$ itd.

Zatem $a:b:c:d=A:B:C:D$.

Z rozważań powyższych wynika, że jeżeli liczby różne od zera spełniają związek (1), to spełniają również związek (2) i na odwrót.

Np.: $8:4:2:1=64:32:16:8$, zatem $\frac{8}{64}=\frac{4}{32}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$.
$\frac{5}{15}=\frac{20}{60}=\frac{25}{75}$; stąd wynika $5:20:25=15:60:75$.

Uwaga. 1. Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć liczby x, y, z spełniające związek:

$$x:y:z=3:5:6 \qquad (1)$$

Obierzmy z dowolnie, np. połóżmy $z=4$.
Ze związku (1) otrzymamy:

$$x:z=3:6,\ y:z=5:6, \text{ czyli}$$
$$x:4=3:6,\ y:4=5:6.$$

Stąd $x=2$, $y=\frac{10}{3}$. Sprawdzając przekonywamy się, że:

$$2:\tfrac{10}{3}:4=3:5:6.$$

2. Wyznaczyć x, y, z tak, by zachodziły związki

$$x:y:z=3:5:6 \tag{2}$$

$$x+y+z=28. \tag{3}$$

Ze związku (2) dostajemy: $x:z=3:6$, $y:z=5:6$.

Stąd $x=\frac{z}{2}$, $y=\frac{5z}{6}$; wstawiając te wyrażenia w równanie (3) otrzymamy:

$$\frac{z}{2}+\frac{5z}{6}+z=28.$$

Stąd $z=12$. Więc $x=6$, $y=10$. Sprawdzając przekonywamy się, że liczby wyznaczone spełniają związki (2), (3).

Zadania

1. Sprawdź proporcje:
   a) $8:20=14:35$, *b)* $(-12):16=15:(-20)$,
   c) $1\frac{1}{7}:\frac{3}{7}=12:4\frac{1}{2}$. *d)* $2{,}4:1{,}6=2{,}1:1{,}4$.

2. Utwórz przez zmianę porządku wyrazów wszystkie proporcje wynikające z: *a)* $a:3=8:7$, *b)* $3:5=a:b$.

3. Wykaż, jeżeli $a:b=c:d$, to: *a)* $ac:bd=c^2:d^2$,
   b) $(2a+3c):(3a+2c)=(2b+3d):(3b+2d)$,
   c) $a^2:c^2=(a^2-b^2):(c^2-d^2)$,
   d) $(3a^2+4b^2):(6a^2-5b^2)=(3c^2+4d^2):(6c^2-5d^2)$.

   Zakładamy przy tym, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, a ponadto, że wyrazy proporcyj *b)*, *c)*, *d)* są różne od zera.

4. Zbadaj prawdziwość proporcyj:
   a) $(a^2+2ab+b^2):(a^2-b^2)=(a+b):(a-b)$,
   b) $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3):(x^3-x^2y-xy^2+y^3)=$
   $=(x-y):(x+y)$.

5. Utwórz z równości $xy=uv$ wszystkie proporcje prawdziwe.

6. Rozwiąż proporcje:
   a) $x:12=15:47$, *b)* $18:11=12:x$,
   c) $3:x=17:10$, *d)* $7:9=x:11$.

7. Rozwiąż proporcje:
   a) $x:5=(x+1):6$, *b)* $x:4=(x+1):5$,
   c) $3:y=2:(1-y)$, *d)* $(1+x):(1-x)=(6+x):(6-x)$,
   e) $(y-1):(y+3)=(y-2):(y+4)$,
   f) $(2x+13):(x+10)=(x-1):(x-2)$.

8. Rozwiąż proporcje:
   a) $x:(x+5)=2:3$, *b)* $(5x+9):(9x+5)=7:11$,

c) $(2x - 3) : (3x + 4) = 3 : 4$,
d) $(2x - 3) : (2x + 3) = (4x - 3) : (4x + 11)$,
e) $(3x + 1) : x = 27 : 2$, *f)* $(2x - 7) : (3x - 2) = (2x + 1) : 3x$,
g) $(5x + 9) : (9x + 5) = 7 : 11$, *h)* $0{,}34 : x = 7{,}15 : (2x - 1)$.

9. Sprawdź:
a) $12 : 20 : 28 = 15 : 25 : 35$, *b)* $\frac{7}{4} : \frac{1}{2} : \frac{5}{4} = 14 : 4 : 10$,
c) $3{,}9 : 1{,}3 : 5{,}2 : 6{,}5 = 4{,}8 : 1{,}6 : 6{,}4 : 8$,
d) $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} : \frac{5}{8} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{5}{12} : \frac{1}{2}$.

10. Wykaż, że jeżeli $a : b : c : d = A : B : C : D$, to również $d : c : b : a = D : C : B : A$.

11. Rozwiąż układy równań, które otrzymasz ze związku:
a) $4 : x : y = 2 : 3 : 8$, *b)* $x : y : \frac{5}{2} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} : \frac{2}{3}$,
c) $x : 3{,}2 : y : t = 1{,}2 : 5{,}3 : 1{,}7 : 2$,
d) $x : y : z : \frac{3}{8} = 3\frac{1}{5} : 2\frac{3}{8} : 4 : \frac{1}{5}$.

12. Rozwiąż układy równań wynikające ze związków:
a) $x : y : z = 3 : 5 : 12$, $x + y + z = 360$ *b)* $x : y : z = 5 : 8 : 7$, $x - y + z = 56$,
c) $(x - y + 1) : (x - y - 1) = 7 : (-3)$
$(x + 6) : (x - 7) = (y + 4) : (y - 4)$.

13. Przedstaw liczbę 180 jako sumę dwóch liczb, które są do siebie w takim stosunku, jak $13 : 7$.

14. Dwie liczby, różniące się o 25, są do siebie w takim stosunku, jak $3 : 8$. Jakie to liczby?

15. W pewnem towarzystwie złożonem z 32 osób liczba mężczyzn jest do liczby kobiet, jak $5 : 3$. Ilu było mężczyzn, a ile kobiet?

16. *a)* Obwód trójkąta wynosi 36 *cm*, boki są do siebie w takim stosunku, jak $3 : 5 : 4$. Ile wynoszą boki?
b) Kąty trójkąta są do siebie w takim stosunku, jak $7 : 10 : 8$. Ile wynoszą kąty?

17. Ojciec ma 45 lat, syn 20 lat. Po ilu latach stosunek wieku ojca do wieku syna będzie $11 : 6$?

§ 2. Wielkości proporcjonalne

Wykładnik stosunku (Powtórzenie)

Jeżeli odcinki a i b mają odpowiednio np. 3 *cm* i 5 *cm*, to iloraz $3 : 5 = \frac{3}{5}$ nazywamy wykładnikiem stosunku długości tych odcinków. Zapisujemy to: $a : b = 3 : 5$ i czytamy: „odcinki a, b są do siebie w takim stosunku, jak 3 do 5.“

Wykładnikiem stosunku dwóch pól 4 cm^2 i 7 cm^2 jest iloraz 4 : 7 lub $\frac{4}{7}$.

Wykładnikiem stosunku dwóch ciężarów $3^1/_2$ *kg* i $7^1/_2$ *kg* jest iloraz $3^1/_2 : 7^1/_2$, czyli $\frac{7}{15}$.

Wykładnikiem stosunku dwóch wielkości tego samego rodzaju nazywamy iloraz miar tych wielkości przy tej samej jednostce. Iloraz ten nie zależy od wyboru jednostki.

Mówimy, że jakieś wielkości a, b, c, d, tego samego rodzaju, np. odcinki, są do siebie w takim stosunku, jak liczby np. 2, 4, 7, 8, jeżeli wykładnik stosunku dowolnych dwóch z tych wielkości równy jest ilorazowi odpowiednich liczb. A więc, jeżeli:

$$a : b = 2 : 4, \quad a : d = 2 : 8, \quad c : a = 7 : 2 \text{ itd.}$$

Zapisujemy to: $a : b : c : d = 2 : 4 : 7 : 8$.

Powiadamy też, że wielkości a, b, c, d są wprost proporcjonalne do liczb 2, 4, 7, 8.

Np. pola 4 cm^2, 8 cm^2, 16 cm^2 są do siebie w takim stosunku, jak liczby 1, 2, 4.

Przykład. Podzielić kapitał 3500 *zł* między trzech wspólników w stosunku 2 : 3 : 5. Oznaczmy przez x, y, z udziały w *zł* poszczególnych wspólników.

Mamy:
$$x : y : z = 2 : 3 : 5$$
$$x + y + z = 3500.$$

Stąd po rozwiązaniu otrzymujemy $x = 700$, $y = 1050$, $z = 1750$.

Zadania

18. Ojciec postanowił rozdzielić sumę 600 *zł* pomiędzy 3 synów proporcjonalnie do wieku. Pierwszy syn miał 20 lat, drugi 15, trzeci 25. Ile każdy z nich dostał?

19. Wycieczka, złożona z 5 dorosłych i 4 dzieci, zapłaciła za bilety kolejowe 56 *zł*. Ile wypada na osobę dorosłą, a ile na dziecko, jeżeli dzieci płaciły połowę biletu?

20. Kwas węglowy zawiera 12 części węgla i 32 części tlenu (na wagę). Ile węgla i ile tlenu zawiera $\frac{3}{4}$ *g* kwasu węglowego?

21. Powietrze składa się z 21 części tlenu i 79 części azotu (pomijając drobne domieszki innych gazów). Ile tlenu i azotu zawiera pokój o długości 4,4 *m*, szerokości 3,8 *m* i wysokości 2,4 *m*?

22. *A* włożył w pewne przedsiębiorstwo 450 *zł*, *B* 375 *zł*. Po

pewnym czasie przedsiębiorstwo przyniosło 135 *zł* zysku. Jak należy rozdzielić ten zysk?

23. *A* włożył w pewne przedsiębiorstwo 284 *zł* na przeciąg trzech miesięcy, zaś *B* 454 *zł* na przeciąg 2 miesięcy. Jak należy rozdzielić zysk w kwocie 237 *zł*? (Rozdziel w stosunku 3 · 285 : 2 · 454).

24. Trzy osoby *A, B, C* kupiły wspólnie los loterii klasowej za 50 *zł*, przy czym *A* dał 25 *zł*, *B* 15 *zł*, *C* resztę. Jak rozdzielić wygraną 40000 *zł*?

25. Tzw. nowe srebro jest aliażem 53,4% miedzi, 29,1% cynku i 17,5% niklu. Ile potrzeba każdego z tych metali do 45 *kg* nowego srebra, jeżeli przy stapianiu traci się 1% na wadze?

26. *A, B* i *C* stracili na wspólnym przedsiębiorstwie 15% włożonego kapitału. Ich udziały są w stosunku, jak 2 : 3 : 5, zaś kapitał pozostały po potrąceniu straty wynosi 15720 *zł*. Oblicz, ile każdy otrzymuje z powrotem oraz ile każdy stracił.

27. *A* pracuje przez 5 dni po 8 godzin dziennie, zaś *B* przez 7 dni po 6 godzin dziennie. Jak rozdzielić wspólny zarobek, wynoszący 74,30 *zł*?

28. Trzy grupy robotników, zajętych przy pewnej budowie, zarobiły razem 2487 *zł*. W pierwszej grupie było 5 robotników, którzy pracowali przez 9 dni po 8 godzin dziennie, w drugiej grupie 8 robotników, którzy pracowali przez 7 dni po 7 godzin dziennie, w trzeciej zaś grupie 12 robotników, którzy pracowali przez 6 dni po 9 godzin dziennie. Oblicz, ile zarobił robotnik pierwszej, drugiej i trzeciej grupy, jeżeli każdy otrzymywał to samo wynagrodzenie za godzinę pracy.

Wielkości wprost proporcjonalne (Powtórzenie)

Jeżeli 1 *l* mleka kosztuje 20 *gr*, to 2 *l* mleka kosztuje 40 *gr*, 4 *l* mleka 80 *gr*. Iloraz 4 : 2 jest wykładnikiem stosunku dwóch ilości mleka, iloraz 80 : 40 jest wykładnikiem stosunku odpowiednich cen. Oba wykładniki są równe, bo 4 : 2 = 80 : 40 = 2.

Ilość mleka i odpowiednia cena są wielkościami tak ze sobą związanymi, że wykładnik stosunku dwóch ilości mleka równa się zawsze wykładnikowi stosunku odpowiednich cen.

Dwa rodzaje wielkości (np. ilość mleka i odpowiednia cena) nazywamy **wprost proporcjonalnymi**, jeżeli są ze sobą tak związane, że wykładnik stosunku dwóch wielkości pierwszego rodzaju równa się zawsze wykładnikowi stosunku odpowiednich wielkości drugiego rodzaju.

Dla wielu towarów ilość i cena są wielkościami wprost proporcjonalnymi (nie uwzględniając rabatu, skonta itp.).

Wielkościami wprost proporcjonalnymi są np.:

a) zarobek robotnika i ilość dni roboczych (przy stałej dziennej płacy),

b) droga przebyta przez ciało poruszające się i czas (przy stałej prędkości),

c) ciężar np. żelaza (ołowiu etc.) i jego objętość (przy stałej temperaturze).

Zagadnienia na wielkości wprost proporcjonalne

Weźmy pod uwagę dwie wielkości wprost proporcjonalne, np. cenę i ilość mleka; jeżeli A *l* mleka kosztuje a *gr*, zaś B *l* mleka b *gr*, to:
$$a : b = A : B.$$

Jeżeli znamy trzy liczby w tej proporcji, to czwartą możemy obliczyć. Na tym polega możliwość stosowania proporcyj do zagadnień na wielkości proporcjonalne. Np.:

1. 7 *m* sukna kosztuje 140 *zł*; ile kosztuje 12 *m* sukna?

Rozwiązanie: Oznaczamy cenę 12 *m* sukna przez x *zł*.

Zapiszmy zadanie w sposób następujący:

$$\begin{array}{rcl} 7\ m & — & 140\ zł \\ 12\ „ & — & x\ „ \end{array}$$

Ponieważ cena sukna jest wprost proporcjonalna do ilości sukna, więc:
$$12 : 7 = x : 140, \text{ stąd } 7x = 12 \cdot 140, \text{ zatem } x = 240.$$

A więc 12 *m* sukna kosztuje 240 *zł*.

2. Pociąg przebył 165 *km* jadąc ze stałą prędkością. Gdyby jechał o 20 *km/godz.* prędzej, to w tym samym czasie przejechałby 225 *km*. Z jaką prędkością pociąg jechał?

Oznaczmy prędkość pociągu przez x *km/godz.* Zapiszmy zadanie w sposób następujący:

$$\begin{array}{rcl} x\ km/godz. & — & 165\ km \\ x+20\ \ „ & — & 225\ „ \end{array}$$

Ponieważ droga przebyta w pewnym czasie jest wprost proporcjonalna do prędkości, więc:
$$x : (x+20) = 165 : 225. \text{ Stąd } 165(x+20) = 225x. \text{ Zatem } x = 55$$

A więc pociąg jechał z prędkością 55 *km/godz.*

Wielkości odwrotnie proporcjonalne (Powtórzenie).

Jeżeli 1 *m* sukna kosztuje 5 *zł*, to za 60 *zł* można kupić 12 *m* sukna; jeżeli 1 *m* sukna kosztuje 15 *zł*, to za 60 *zł* można kupić 4 *m* sukna. Iloraz 15 : 5 jest wykładnikiem cen za 1 *m* dwóch gatunków sukna, iloraz 4 : 12 jest wykładnikiem stosunku odpowiednich ilości sukna, które można kupić za tę samą kwotę (60 *zł*). Wykładnik pierwszy równa się odwrotności wykładnika drugiego, bo

$$15 : 5 = 12 : 4.$$

Dwa rodzaje wielkości nazywamy odwrotnie proporcjonalnymi, jeżeli są ze sobą tak związane, że wykładnik stosunku dwóch wielkości pierwszego rodzaju równa się zawsze odwrotności wykładnika stosunku odpowiednich wielkości drugiego rodzaju.

A więc cena 1 *m* sukna i odpowiednia ilość sukna, którą można kupić za 60 *zł*, są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi są np.:

a) liczba robotników i liczba dni potrzebnych do wykonania pewnej pracy,

b) prędkość i czas potrzebny do przebycia pewnej drogi,

c) długość i szerokość prostokąta przy danym polu.

Zagadnienia na wielkości odwrotnie proporcjonalne

Jeżeli a i b oznaczają w *zł* ceny 1 *m* dwóch gatunków sukna, zaś A i B odpowiednią ilość *m*, które można kupić zą pewną kwotę, to:

$$a : b = B : A.$$

Znając w tej proporcji trzy liczby możemy czwartą wyznaczyć.

Przykład:

Pewną pracę wykonałoby 6 robotników w 20 dniach; w ilu dniach wykona tę pracę 10 robotników?

Oznaczmy przez x niewiadomą liczbę dni. Zapiszmy zadanie:

6 robotników — 20 dni
10 „ — x „

Ponieważ liczba robotników jest odwrotnie proporcjonalna do liczby dni potrzebnych do wykonania pewnej pracy, więc

$$6 : 10 = x : 20, \quad \text{stąd} \quad x = 12.$$

Zadania

29. Pewna liczba robotników wykona pracę w 6 dniach; gdyby było o 4 robotników więcej, to pracę ukończonoby w 4 dniach. Ilu było robotników?

30. Za 3 paczki cukru i 2 *kg* cukru zapłacono razem 23,80 *zł*, a za 2 paczki cukru i 3 *kg* cukru zapłacono 18 *zł* 20 *gr*. Ile *kg* cukru zawiera paczka?
31. Zapas żywności wystarczy dla pewnej liczby osób na 40 dni. Gdyby było o 8 osób mniej, to ten sam zapas wystarczyłby na 60 dni. Ile było osób?
32. Z dwu kół zębatych, zachodzących na siebie, drugie ma o 27 zębów więcej niż pierwsze. Podczas gdy pierwsze koło wykonało 240 obrotów, drugie obróciło się tylko 150 razy. Ile zębów ma każde koło?
33. Kilku uczniów odbyło wycieczkę. Koszta podróży wynosiły po 8,50 *zł*. Ponieważ jednak dwu uczniów nie miało pieniędzy, każdy z pozostałych zapłacił po 11,90 *zł*. Ilu było uczniów?
34. Odległość dwu miejscowości na mapie o podziałce 1 : 25000 jest o 2,7 *cm* większa niż na mapie o podziałce 1 : 40000. Oblicz odległość tych miejscowości na pierwszej i drugiej mapie oraz ich rzeczywistą odległość.
35. Pewien kapitał umieszczony na 6% przynosi w 1 roku ten sam dochód, co kapitał o 50 *zł* większy, umieszczony na 5%. Ile wynosi ten kapitał?
36. Ojciec rozdzielił pewną sumę pieniędzy między dwu synów proporcjonalnie do wieku. Starszy, który liczył 25 lat, otrzymał dwa razy tyle, co młodszy, 12 letni, i jeszcze 3 *zł*. Ile dostał każdy?
37. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 9. Jeżeli cyfry przestawimy, otrzymamy liczbę, która jest do pierwotnej w takim stosunku, jak 5 : 6. Co to za liczba?
38. Dwaj posłańcy wyszli równocześnie z miasta *A* do *B*. Pierwszy z nich przebywał 1 *km* w 12 minutach, drugi w 15 minutach. Pierwszy przybył do *B* o 20 minut wcześniej niż drugi. Jak odległe są te miasta od siebie?
Wskazówka: Oblicz najpierw, jak długo szedł jeden z posłańców.
39. Pociąg pośpieszny przebywa pewną drogę w czasie o 15 minut krótszym, niż pociąg osobowy. Prędkość pociągu pośpiesznego wynosi 75 *km/godz.*, osobowego zaś 55 *km/godz.* Oblicz *a)* czas, w którym każdy z pociągów ją przebył, *b)* długość tej drogi.
40. Posłaniec, wysłany z miejscowości *A* do miejscowości *B*, przebył pewną część drogi, która do reszty drogi jest w takim stosunku, jak 3 : 4. Gdyby przebył jeszcze 400 *m*, to ten stosunek zmieniłby się na 4 : 3. Oblicz odległość tych miejscowości.

Funkcja

Rozdział V

Pojęcie funkcji

§ 1. Zmienna

1. Jeżeli L oznacza obwód koła w cm, zaś r długość promienia w cm, to:

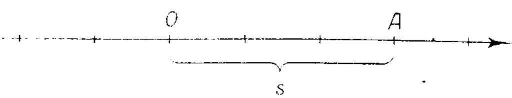
$$L = 2\pi r.$$

Litera π oznacza tutaj ściśle określoną liczbę 3,14... Litery L i r oznaczać mogą rozmaite liczby, zależnie od wielkości koła.

O literach, które w danym zagadnieniu oznaczać mogą rozmaite liczby, będziemy mówić, że oznaczają zmienne, lub krótko, że są zmiennymi.

A więc litery L i r są w naszym przypadku zmiennymi. Zmienna L w tym zagadnieniu przybierać może dowolne wartości dodatnie, podobnie jak zmienna r. Natomiast L i r nie może być liczbą ujemną ani zerem, bo nie ma koła o promieniu ujemnym ani o promieniu zero.

2. Obierzmy na prostej początek, zwrot dodatni i jednostkę długości.



Rys. 1.

Jeżeli jakiś punkt A mą współrzędną s, to długość odcinka OA, przy obranej jednostce, wynosi: $|s|$, tj. bezwzględną wartość s.

Jeżeli np. $s = +1, +2, -1, -2$ i t. d., to długość odcinka OA wynosi odpowiednio: $|+1| = 1$, $|+2| = 2$, $|-1| = 1$, $|-2| = 2$ i t. d.

W tym przykładzie zmienna s oznaczać może dowolną liczbę dodatnią, ujemną lub zero.

3. Jeżeli ze zwoju sukna o długości 15 m sprzedano x m, to reszta wynosi w m: $15 - x$. Tutaj zmienna x oznaczać może dowolną liczbę, zawartą między 0 a 15. Piszemy to: $0 \leqslant x \leqslant 15$.

Z podanych przykładów widzimy, że nie zawsze każda liczba może być wartością danej zmiennej. Zależy od natury zagadnienia, jakie może wartości dana zmienna przyjmować.

Zadania

1. Jeżeli pole koła wynosi $P\ cm^2$, zaś promień $r\ cm$, to $P = \pi r^2$. Które z liter oznaczają zmienne?
2. Jeżeli $v\ cm^3$ żelaza waży $Q\ g$, zaś $d\ g/cm^3$ oznacza ciężar właściwy żelaza, to $Q = vd$. Które z liter oznaczają zmienne?
3. Ktoś mając 50 *zł* zapłacił za x *kg* towaru po 3 *zł*, za 4 *kg* innego towaru po 2 *zł*. Ile mu zostało *zł*? Jakie wartości może przyjmować zmienna x?
4. W prostokącie o obwodzie L *cm* jeden bok wynosi x *cm*, drugi jest o 5 *cm* krótszy. Jakie wartości może przyjmować zmienna x, a jakie zmienna L?

§ 2. Funkcja

1. Pole kwadratu jest określone przez podanie długości jego boku. Jeżeli y oznacza pole kwadratu w cm^2, zaś x długość jego boku w *cm*, to: $$y = x^2.$$
Jeżeli np. $x = 2$, to odpowiednia wartość $y = 4$; jeżeli $x = 5$ to odpowiednia wartość $y = 25$ i t. d.

Każdej więc wartości zmiennej x odpowiada jedna tylko wartość zmiennej y.

Zdanie to wyrażamy jeszcze inaczej, mówiąc: zmienna y *jest funkcją zmiennej* x.

Z uwagi na to, że y oznacza pole kwadratu, zaś x długość jego boku, mówimy: pole kwadratu jest funkcją długości jego boku.

W tym zagadnieniu zmienna x może przyjmować tylko wartości dodatnie, gdyż długość boku jest liczbą dodatnią.

2. Jeżeli wiemy, że 1 *kg* pewnego towaru kosztuje 2 *zł*, to możemy obliczyć cenę ilukolwiek *kg* tego towaru. Oznaczając przez x ilość *kg* towaru, przez y cenę w *zł*, możemy napisać:
$$y = 2x.$$
Jeżeli np. $x = 3$, to odpowiednia wartość $y = 6$, jeżeli $x = 7$, to odpowiednia wartość $y = 14$ itd.

A więc i w tym przykładzie każdej wartości zmiennej x odpowiada tylko jedna wartość zmiennej y. Mówimy i teraz: zmienna y jest funkcją zmiennej x; cena towaru jest funkcją ilości *kg* tego towaru.

Zmienna x może tu przyjmować dowolne wartości dodatnie.

3. Cenę biletu kolejowego III kl. pociągu osobowego możemy wyznaczyć znając długość drogi, na jaką bilet został wystawiony. Oznaczmy przez s długość drogi w *km*, zaś przez z cenę odpowiedniego biletu w *zł*. Ceny biletów wskazuje tabelka:

s *km* od	1—6	7—9	10—12	13—15	16—17	18—20	21—23	24—26	27—29
z *zł*	0,40	0,60	0,80	1	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00

Jeżeli np. $s = 19$, to odpowiednia wartość $z = 1{,}40$, jeżeli $s = 28$, odpowiednia wartość $z = 2$ itd.

A więc każdej wartości zmiennej s odpowiada jedna tylko wartość zmiennej z. Podobnie jak poprzednio mówimy, że zmienna z jest funkcją zmiennej s; cena biletu jest funkcją długości drogi, na jaką ten bilet jest wystawiony.

W tym przykładzie zmienna x może przyjmować tylko wartości dodatnie.

4. Przypuśćmy, że po osi porusza się punkt. Obierzmy dowolną chwilę za początkową, a za jednostkę czasu 1 *sek*. Niechaj t oznacza liczbę względną, określającą chwilę, w której punkt ruchomy obserwujemy, zaś s współrzędną punktu ruchomego w tej chwili.

Przypuśćmy, że położenie punktu w rozmaitych chwilach zapisano w tabelce:

t	-2	-1	0	$+1$	$+2$
s	-3	0	$+1$	0	-1

Z tabelki tej odczytujemy, że jeżeli np. $t = +1$, to odpowiednia wartość $s = 0$, jeżeli $t = -2$, to odpowiednia wartość $s = -3$ i t. d. Również i tutaj każdej wartości zmiennej t odpowiada jedna tylko wartość zmiennej s. Zmienna s jest funkcją zmiennej t. Współrzędna punktu jest funkcją czasu.

W tym przykładzie zmienna t może przyjmować wartości dodatnie, ujemne lub zero.

Gdyby punkt był w spoczynku, wówczas zmienna s przyjmowałaby tę samą wartość dla każdej wartości zmiennej t. W tym przypadku zmienna s jest również funkcją zmiennej t.

Podobnie jak w podanych przykładach, *ilekroć dwie zmienne, np. x i y, są tak ze sobą związane, że każdej wartości zmiennej x odpowiada tylko jedna wartość zmiennej y, mówimy, że zmienna y jest* f u n k c j ą z m i e n n e j x.

Jeżeli wartościami zmiennej x mogą być np. tylko liczby dodatnie, to wyrażamy to mówiąc, że funkcja określona jest dla

x dodatnich (lub krótko dla $x > 0$); podobnie mówimy, że funkcja określona jest dla wszystkich x, dla $x < 0$, dla $x \neq 0$, dla $3 \leqslant x \leqslant 15$ itp.

Ponieważ wartość zmiennej y zależy od wartości zmiennej x, dlatego zmienną x nazywamy zmienną niezależną, zmienną zaś y zmienną zależną.

Dla zaznaczenia, że zmienna y jest funkcją zmiennej x piszemy:

$$y = f(x).$$

Zamiast litery f używamy również innych liter (w szczególności, gdy występuje kilka funkcyj), np. F, V, W itp. A więc piszemy:

$$y = F(x), \quad y = V(x), \quad y = W(x), \quad y = U(x) \text{ itd.}$$

Uwaga 1. Jeżeli $y = f(x)$ i jeżeli każdej wartości zmiennej x odpowiada ta sama wartość zmiennej y, wówczas mówimy, że dana funkcja jest funkcją stałą.

Uwaga 2. *a)* Dwa prostokąty o równych podstawach mogą mieć różne pola (jeżeli wysokości są różne). Znajomość więc podstawy prostokąta nie wystarcza do obliczenia pola. A więc pole prostokąta nie jest funkcją podstawy,

b) Znajomość ceny biletu kolejowego nie wystarcza do oznaczenia długości drogi, na jaką bilet był wystawiony. Jeżeli np. wiemy, że cena biletu wynosi 1,40 *zł*, to długość drogi może wynosić 18 *km*, 19 *km*, 20 *km*. A więc długość drogi, na jaką bilet kolejowy jest wystawiony, nie jest funkcją ceny.

Wynika stąd na mocy przykładu 3, że jeżeli $y = f(x)$, to nie każdej wartości zmiennej y odpowiada jedna jedyna wartość zmiennej x. Innymi słowy, jeżeli $y = f(x)$, to zmienna x nie musi być funkcją zmiennej y.

Zadania

5. Wyjaśnij, dlaczego pierwsza zmienna jest funkcją drugiej:
   a) Objętość sześcianu, długość krawędzi,
   b) Powierzchnia sześcianu, długość krawędzi,
   c) Pole koła, obwód koła,
   d) Pole prostokąta o podstawie 5 *cm*, długość wysokości,
   e) Objętość 1 *kg* żelaza, jego temperatura,
   f) Temperatura pewnego człowieka, czas (w którym ją mierzono),
   g) Wysokość pewnego człowieka, jego wiek.

   W których z podanych przykładów potrafisz podać odpowiedni wzór?

6. Wyjaśnij, dlaczego pierwsza zmienna nie jest funkcją drugiej:
a) Pole trójkąta, długość jego podstawy,
b) Czas, temperatura chorego w tym czasie,
c) Waga paczki (brutto), ciężar towaru (netto).
d) Objętość prostopadłościanu, jego wysokość.

7. Którą ze zmiennych uważać można za funkcję drugiej:
a) Obwód kwadratu, jego bok,
b) Liczba, jej odwrotność,
c) Dzielna, dzielnik, jeżeli iloraz wynosi 100,
d) Liczba, jej kwadrat,
e) Liczba ludności Polski, odpowiedni rok (1918—1934),
f) Cena 1 *kg* towaru, ilość *kg* tego towaru, którą można kupić za 60 *zł*.

8. Ponumerowano uczniów w klasie wedle alfabetu. Czy numer ucznia można uważać za funkcję jego wysokości, jeżeli *a)* nie ma dwóch uczniów o równej wysokości, *b)* są dwaj uczniowie, mający równy wzrost.

9. Kupiec sprzedaje 1 *kg* towaru po 2 *zł*; kupującemu więcej niż 100 *kg* daje 5% rabatu. Czy cena tego towaru jest funkcją ilości *kg* tego towaru? Czy ilość *kg* tego towaru jest funkcją jego ceny?

10. Do x *l* spirytusu dolano 1 *l* wody. Oznaczmy przez y ilość spirytusu w 1 *l* tej mieszaniny. Czy y jest funkcją zmiennej x? Podaj odpowiedni wzór.

11. Z miejscowości A wyjeżdża pociąg o *godz.* 12 i przyjeżdża do miejscowości B o *godz.* 17. Odległość obu miejscowości wynosi x *km*. Jeżeli v oznacza przeciętną prędkość pociągu, czy v jest funkcją x? Czy x jest funkcją v? Podaj odpowiednie wzory?

12. Ważąc 1 cm^3 wody (na wadze sprężynowej) w różnych punktach ziemi, przekonywamy się, że ciężar jego się zmienia. Największy ciężar jest na biegunach, najmniejszy na równiku. Pomiary pokazały, że ciężar 1 cm^3 jest funkcją szerokości geograficznej. Czy ciężary 1 cm^3 wody w dwóch punktach na tym samym równoleżniku są równe?

13. Jeżeli na końcu nitki uwiążesz ciężarek, to otrzymasz t. zw. wahadło. Jeżeli wahadło wychylisz z położenia pionowego o pewien kąt, to wahadło pocznie się wahać. Pomiary pokazały, że dwa wahadła równej długości, np. 1 *m*, wychylone

o ten sam kąt, wykonywają jedno wahnienie w tym samym czasie. Czy można powiedzieć, że czas wahnienia wahadła o długości 1 *m* jest funkcją kąta wychylenia?

§ 3. Funkcje określone wzorami

Jeżeli y oznacza pole kwadratu w cm^2, zaś x długość jego boku w *cm* to, jak wiemy, zmienna y jest funkcją zmiennej x.

Możemy więc napisać $y=f(x)$. W tym wypadku znamy wzór:

$$y=x^2,$$

który pozwala dla każdej wartości zmiennej x obliczyć odpowiednią wartość zmiennej y. Z wzoru tego otrzymujemy np. dla $x=2$, $y=4$, dla $x=3$, $y=9$, dla $x=4$, $y=16$. Dla zaznaczenia, że np. dla $x=2$ odpowiednia wartość $y=4$, piszemy krótko $f(2)=4$. Możemy więc w naszym przypadku napisać:

$$f(3)=9,\ f(4)=16,\ f(1{,}2)=1{,}44 \text{ itd.}$$

Jeżeli a oznacza liczbę daną, to $f(a)=a^2$.

Często określamy funkcję wprost przy pomocy wzoru. Jeżeli np. mamy wzór:

$$y=2x+7, \tag{1}$$

to widzimy, że dla $x=0$, $y=7$, dla $x=-2$, $y=3$ itd. Każdej więc wartości zmiennej x odpowiada jedna wartość zmiennej y, podana przez powyższy wzór. Zatem zmienna y jest funkcją zmiennej x. Funkcja ta określona jest wzorem (1) dla wszystkich x. Jeżeli funkcję tę oznaczymy np. $y=f(x)$, to $f(0)=7$, $f(1)=9$, $f(-1)=5$ itd.

Podobnie określają funkcje wzory:

$$y=3x-7,\ y=x^2-2x+3,\ y=\frac{x-5}{x^2+1}.$$

Funkcje te są określone dla wszystkich x.

Wzór $y=\dfrac{1}{x}$ określa funkcję tylko dla $x\neq 0$.

Wzór $y=\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-3)}$ określa funkcję dla wszystkich x różnych od 2 i 3.

Uwaga 1. Zamiast mówić funkcja określona wzorem $y=3x-6$, mówimy krótko funkcja $y=3x-6$, lub funkcja $f(x)=3x-6$.

Uwaga 2. Weźmy pod uwagę funkcję określoną wzorem $y=0\cdot x+5$. Widzimy, że dla każdej wartości zmiennej x odpowiednia wartość zmiennej y wynosi 5. Dany wzór określa zatem funkcję stałą. Podobnie funkcjami stałymi są:

$$y=2-0\cdot x,\ y=0\cdot x,\ y=-5+0\cdot x \text{ itp.}$$

Zadania

14. Dla funkcji $y=f(x)$ określonej wzorem:
a) $y=3x-1$, *b)* $y=2x$, *c)* $y=x^2$, *d)* $y=x^2-3x+2$,
e) $y=\frac{x}{x^2+1}$, *f)* $y=\frac{x+2}{x(x-5)}$, *g)* $y=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-6}$,
oblicz $f(0), f(1), f(-1), f(2), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(-\frac{1}{2}), f(a), f(a+1)$
(a oznacza liczbę daną).

15. Dla jakich wartości zmiennej x są określone funkcje:
a) $y=\frac{3}{x}$, *b)* $y=\frac{3}{x-1}$, *c)* $y=\frac{x}{x+1}$, *d)* $y=\frac{1}{x^2-1}$
e) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$.

16. Dla funkcji:
a) $y=3x-5$, *b)* $y=5x-7$, *c)* $y=\frac{2x+1}{3x-5}$
wyznacz tę wartość zmiennej x, dla której odpowiednia wartość y wynosi 1, 0, 12, -5.

17. Dla funkcji:
a) $y=5x-8$, *b)* $y=\frac{x^2-3x+1}{x+2}$
wyznacz taką wartość zmiennej x, aby odpowiednia wartość y była jej równa.

18. Wyznacz taką wartość zmiennej x, aby odpowiednia wartość zmiennej y była dla obu funkcyj ta sama:
a) $y=3x+5$, $y=2x+6$, *b)* $y=5x-6$, $y=-3x+10$.

19. Dla funkcji $y=f(x)$, określonej wzorem:
a) $y=mx^2+nx+l$, *b)* $y=5x^3-mx+n$,
gdzie l, m, n, oznaczają dane liczby, mamy:
a) $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(-1)=7$, *b)* $f(2)=37$, $f(0)=-1$.
Ile wynoszą *a)* l, m, n, *b)* m, n?

20. Dla funkcji $y=f(x)$, określonej wzorem:
$$y=\frac{x+|x|}{2}$$
a) oblicz: $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$;
b) dla jakich wartości zmiennej x, odpowiednia wartość $y=0$?

21. Dana jest funkcja $y=f(x)$, określona wzorem $y=mx+n$, gdzie m, n oznaczają liczby dane, przyczem $m\neq 0$.
a) Oblicz: $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{m-n}{m}\right)$, $f\left(-\frac{n}{m}\right)$,

b) Sprawdź, że dla dowolnych liczb *a*, *b*, *c*, (byleby tylko $c \neq b$) zachodzi związek:

$$\frac{f(c)-f(a)}{f(c)-f(b)}=\frac{c-a}{c-b},$$

c) Ile wynoszą *m* i *n*, jeżeli $f(2)=5$, $f(-2)=-7$?

22. Przekonaj się, że funkcja:
a) $f(x)=x^2$, *b)* $F(x)=x^3$
ma tę własność, że dla każdej liczby *m* jest:
a) $f(m)=f(-m)$, *b)* $F(m)=-F(-m)$.
Podaj przykłady liczbowe.

23. Podaj, dla jakiej wartości zmiennej *x* zmienna *y* przyjmuje najmniejszą wartość i jaką?
a) $y=x^2$, *b)* $y=5+x^2$, *c)* $y=(x-1)^2+4$,
d) $y)=x^2-6x+9$, *e)* $y=x^4-2x^2+1$.

24. Podaj, dla jakiej wartości zmiennej *x* zmienna *y* przyjmuje największą wartość i jaką?

a) $y=\frac{1}{x^2+1}$, *b)* $y=\frac{3}{(x-1)^2+5}$, *c)* $\frac{4}{(x^2-4)^2+1}$.

25. Dla jakich wartości zmiennej *x* funkcje

$$y=x+|x| \text{ i } y=2x$$

przyjmują te same wartości?

Rozdział VI

Tablice

§ 1. Tablice matematyczne

W zastosowaniach pożyteczna jest możliwość szybkiego i łatwego wyznaczania wartości zmiennej *y*, odpowiadających danym wartościom zmiennej *x*. Do tego celu służą 1) tablice, 2) wykresy.

Tablicę (tabelkę) funkcji otrzymujemy, pisząc pod dowolnie obranymi wartościami zmiennej *x* odpowiednie wartości zmiennej *y*. Np. Tabelką funkcji $y=3x-7$ jest:

x	−1	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	−10	−9,4	−8,8	−8,2	−7,6	−7	−6,4	−5,8	−5,2	−4,6	−4,0

W pierwszym wierszu umieszczone są wartości zmiennej *x* od −1 do +1 co 0,2, w drugim zaś wierszu odpowiednie wartości zmiennej *y*, obliczone z podanego wzoru.

Tabelka zawierać może tylko skończoną liczbę wartości zmiennej x i odpowiednich wartości zmiennej y. Wybór wartości zmiennej x i ilość tych wartości zależy od celu, do jakiego służy tabelka. Zazwyczaj podajemy wartości zmiennej x w równych odstępach, np., jak w poprzednim przykładzie, co 0,2. Nie jest to jednak konieczne; wartości zmiennej x mogą być zupełnie dowolnie obrane.

Często podajemy w tabelce tylko przybliżone wartości zmiennej y.

Np. w tabelce dla funkcji $y = \frac{3x}{x^2+1}$:

x	—0,5	—0,4	—0,3	—0,2	—0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y	—1,20	—1,03	—0,83	—0,58	—0,30	0	0,30	0,58	0,83	1,03	1,20

podane są wartości zmiennej y z błędem mniejszym od 0,01.

Poprzednie tablice otrzymaliśmy w ten sposób, że z wzoru obliczaliśmy wartości zmiennej y. Są to tak zwane tablice *matematyczne*. Do tablic matematycznych należą np. tablice podające odwrotności liczb, kwadraty liczb, sześciany liczb itp. Są to tablice funkcyj $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$ itp. Poniżej jest podana tablica odwrotności liczb, tablica kwadratów i tablica sześcianów. Kwadraty i sześciany liczb są podane dokładnie, odwrotności liczb z dokładnością do czterech miejsc dziesiętnych.

x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$
1	1	1	1,0000
2	4	8	0,5000
3	9	27	0,3333
4	16	64	0,2500
5	25	125	0,2000
6	36	216	0,1667
7	49	343	0,1429
8	64	512	0,1250
9	81	729	0,1111
10	100	1000	0,1000
11	121	1331	0,0909
12	144	1728	0,0833
13	169	2197	0,0769
14	196	2744	0,0714
15	225	3375	0,0667
16	256	4096	0,0625

x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$
17	289	4913	0,0588
18	324	5832	0,0556
19	361	6859	0,0526
20	400	8000	0,0500

§ 2. Tablice empiryczne (fizyczne i statystyczne)

Oprócz tablic matematycznych istnieją tzw. tablice *empiryczne,* które podają wartości zmiennej zależnej, otrzymane przy pomocy pomiarów. Wartości te w tablicach empirycznych są z natury rzeczy przybliżone. Wielkość błędu zależy od tego, do jakiego celu służy tablica i od dokładności, jaką można było uzyskać przy pomiarach.

1. Oznaczmy przez y największą ilość gramów soli, którą można rozpuścić w 100 g wody o danej temperaturze t. Ilość ta jest funkcją temperatury. Wartości tej funkcji, uzyskane przy pomocy pomiarów, podane są w tabelce:

t^0C	0^0	10^0	15^0	20^0	40^0	60^0	80^0	100^0
y	35,7	35,8	35,9	36,0	36,6	37	38	39

2. Oznaczmy przez t temperaturę wrzenia wody, przez h wysokość ponad poziomem morza w m. Temperatura t jest funkcją wysokości h. Przy pomocy pomiarów otrzymano następującą tabelkę tej funkcji:

h	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$t^0\,C$	100,00	99,67	99,33	98,99	98,65	98,34	97,99	97,67	97,32	97,00

3. W życiu praktycznym spotykamy się często z tablicami statystycznymi. Taką jest np. tablica przedstawiająca liczbę milionów kwintali żyta (y), zebranego w Polsce w poszczególnych latach (x):

x	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933
y	58,9	61,1	70,1	69,6	57,0	61,1	70,7

4. Podobnie tablicą statystyczną jest tablica podająca liczbę urodzin (y), skonów (z) na 1000 mieszkańców w poszczególnych latach (x) w Polsce:

x	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1626	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933
y	30,5	32,2	32,7	35,2	35,6	34,6	35,2	33,0	31,6	32,3	32,0	32,3	30,2	28,7	26,5
z	26,4	26,3	20,7	19,8	17,3	17,9	16,7	17,8	17,4	16,4	16,7	15,6	15,5	15,0	14,2

Zadania

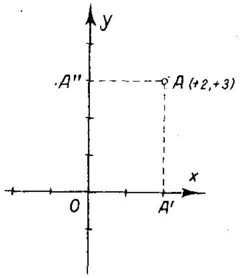
1. Sporządź tabelkę funkcyj:
   a) $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=3x+7$, $y=x-4$,
   dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$, co 0,2,
   b) $y=2x-4$, $y=3x+1$, $y=4x-6$,
   dla $0 \leqslant x \leqslant 10$, co 0,5,
   c) $y=2x^2$, $y=2x^2+1$, $y=x^3$,
   dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$, co 0,1.
2. Oblicz przy pomocy podanych tablic:
   a) $0{,}2^2$, $1{,}4^2$, $0{,}7^3$, $1{,}5^3$, $0{,}43^2$,
   b) $0{,}2^2+1{,}4^3$, $1{,}3^3-1{,}2^2$, $1{,}4^2+0{,}5^3-0{,}7^2-1{,}2^2$,
   c) $\frac{1}{0{,}3}$, $\frac{1}{1{,}4}$, $\frac{1}{0{,}17}$, $\frac{1}{0{,}4^2}$,
   d) $0{,}9^3-\frac{1}{0{,}12}+0{,}7^3$, $0{,}4^3-0{,}17^2+\frac{1}{0{,}15}-\frac{1}{0{,}13}$.
3. Posługując się tablicami matematycznymi sporządź tabelkę (co 0,1) dla funkcyj
   a) $y=x^2-3$, $(1 \leqslant x \leqslant 2)$ *b)* $y=x^3+x^2+1, (-1 \leqslant x \leqslant 1)$,
   c) $y=x^2-2x+4, (1 \leqslant x \leqslant 3)$, *d)* $y=\frac{x+1}{x}$, $(1 \leqslant x \leqslant 2)$,
   e) $y=\frac{x^2+1}{x}$, $(1 \leqslant x \leqslant 2)$, *f)* $y=\frac{x^4+x^3+x^2+1}{x}$, $(0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5)$,
   g) $y=\frac{x}{x+1}$, $(-0{,}5 \leqslant x \leqslant 1)$, *h)* $y=\frac{2x+9}{x+5}$, $(-4 \leqslant x \leqslant -3)$.
   Wzory od *d)* do *h)* przekształć najpierw w dogodny sposób. Np. $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}$, $\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$,
   $$\frac{2x+9}{x+5}=2-\frac{1}{x+5}.$$
4. Sporządź tabelkę statystyczną, podającą przyrost naturalny na 1000 mieszkańców w Polsce w latach od 1919 do 1933. W którym roku przyrost był najmniejszy, a w którym największy? Oprzyj się na podanej tabeli statystycznej (str. 57).

Rozdział VII
Wykresy funkcyj

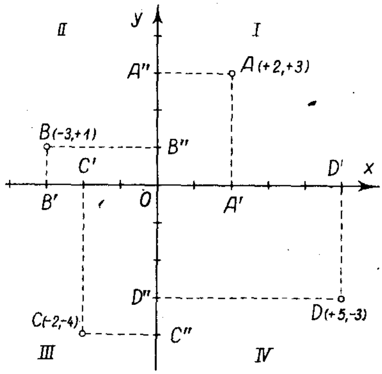
§ 1. Prostokątny układ współrzędnych

Narysujmy dwie proste wzajemnie prostopadłe X i Y. Zaznaczmy na nich kierunki dodatnie, a jako początek obierzmy na obu osiach ich punkt przecięcia. Przyjmijmy dowolną jednostkę długości.

Osie X i Y nazywamy *prostokątnym układem współrzędnych.* Z dowolnego punktu A (położonego w płaszczyźnie osi X, Y) poprowadźmy proste prostopadłe do osi układu, przecinające oś X w punkcie A' oś Y w punkcie A''. (Rys. 2).



Rys. 2.



Rys. 3.

Współrzędną punktu A na osi X oznaczamy przez x, współrzędną zaś punktu A'' na osi Y oznaczamy przez y.

W naszym przypadku $x = +2$, $y = +3$.

Liczby x i y nazywamy współrzędnymi punktu A. Współrzędną x nazywamy odciętą, współrzędną y rzędną punktu A.

Współrzędne punktu A zaznaczamy pisząc A $(+2, +3)$.

Każdemu więc punktowi na płaszczyźnie odpowiadają dwie liczby x, y, zwane jego współrzędnymi. Na odwrót, współrzędne punktu określają jego położenie. Znając bowiem współrzędne x, y, możemy wyznaczyć punkty A' i A''. Kreśląc następnie przez punkty A' i A'' proste prostopadłe odpowiednio do osi X i Y, otrzymujemy punkt A jako punkt przecięcia się tych prostych.

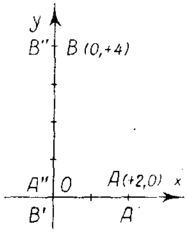
Osie X i Y tworzą cztery kąty proste; pola tych kątów nazywamy ćwiartkami. Ćwiartki oznaczamy: I, II, III, IV. (Rys. 3).

Jeżeli punkt A leży:

w ćwiartce	I	to	$x > 0$,	$y > 0$
„	II	„	$x < 0$,	$y > 0$
„	III	„	$x < 0$,	$y < 0$
„	IV	„	$x > 0$,	$y < 0$

A więc znaki współrzędnych określają ćwiartkę, w której dany punkt leży.

Jeżeli punkt A leży na osi X, to jego rzędna $y = 0$. Jeżeli punkt A leży na osi Y, to jego odcięta $x = 0$. Początek układu O ma współrzędne $x = 0$, $y = 0$ (Rys. 4).



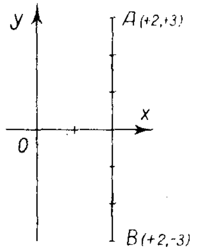
Rys. 4.

Uwaga 1. Z rys. 2. widzimy, że $OA'' = A'A''$. Zatem punkt A $(+2, +3)$ możemy otrzymać wyznaczając na osi X punkt A' o współrzędnej $x = +2$, a następnie kreśląc do góry z punktu A' odcinek prostopadły do osi X o długości 3 (Rys. 5).

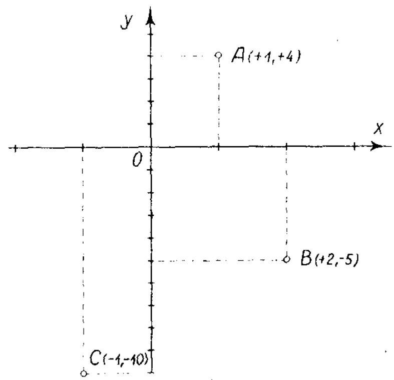
Punkt B $(+2, -3)$ otrzymamy wyznaczając na osi X punkt B' o współrzędnej $+2$ i kreśląc z niego na dół odcinek prostopadły do osi X o długości 3. (Rys. 5).

Wygodną jest rzeczą rysunki tego rodzaju sporządzać na papierze kratkowanym (milimetrowym).

Uwaga 2. Często zdarza się, że na osiach X i Y obieramy różne jednostki długości. Np. na rys. 6 na osi X obraliśmy jednostkę trzy razy dłuższą niż na osi Y.



Rys. 5.



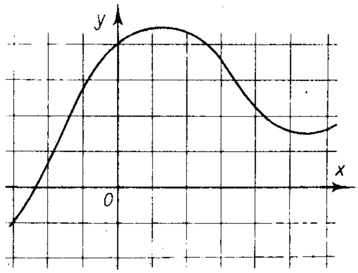
Rys. 6.

Zadania.

1. Narysuj punkt A (2,4), B (—3,5,) C (—4, —3), D (1, —2), E (0,3), F (—1,0), G (—5,0).
2. Rozstrzygnij bez wykonania rysunku, w których ćwiartkach leżą punkty A (—1, 2), B $(\frac{3}{4}, 3)$, C $(18, -\frac{1}{2})$, D $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{8})$.
3. Gdzie leżą wszystkie punkty: *a)* o odciętej $+3$, *b)* o rzędnej -4?.
4. Narysuj prostą przechodzącą przez punkty A (1, —3), B (2,1) i zbadaj, które z punktów P (0,1), Q (2,1), R (0, —6,5), S (3,5) leżą na tej prostej.
5. Narysuj prostą łączącą punkty A (—3, 2), B (2,5). Odczytaj współrzędne trzech punktów dowolnie obranych na tej prostej.

6. Narysuj koło o środku $S(-1, 2)$ i o promieniu wynoszącym 5 jednostek. Odczytaj rzędne punktów tego koła o odciętej *a)* 0, 2, 3, *b)* —6, +4. Ile jest takich punktów?

7. Narysuj pięciokąt o wierzchołkach A (0, 0), B (2, 0), C (3, 6), D (1, 7), E (—2, 1,5).



Rys. 7.

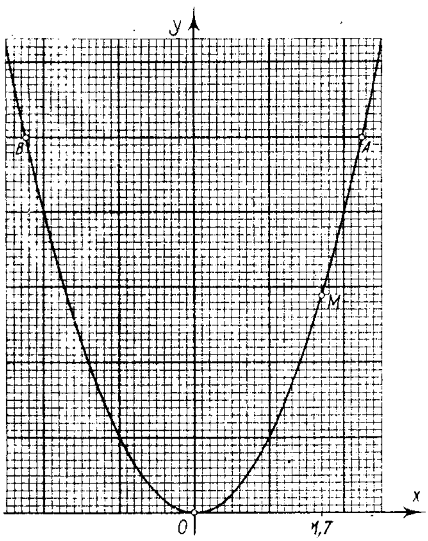
8. *a)* Wyznacz na krzywej (Rys. 7) punkty o odciętych — 3, 2, 5, — 1, 0 i odczytaj rzędne tych punktów; *b)* wyznacz punkty o rzędnych 4, 5, —1, 0, 2 i odczytaj ich odcięte Ile jest takich punktów? *c)* Obierz na tej krzywej dowolnie 3 punkty i odczytaj ich współrzędne.

§ 2. Wykresy.

Oprócz tablic służą do przedstawienia funkcyj **w y k r e s y**.

1. Wykres funkcji np. $y = x^2$ sporządzamy (najwygodniej na papierze kratkowanym) w następujący sposób. Sporządzamy najpierw tabelkę tej funkcji:

x	—2,5	—2	—1,5	—1	—0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25



Rys. 8.

Obierając dowolny układ współrzędnych zaznaczamy punkty o współrzędnych: (—2,5, 6,25), (—2, 4) itd. Zaznaczamy więc punkty o współrzędnych (x, y), gdzie x i y tworzą odpowiednie pary wartości. (Rys. 8).

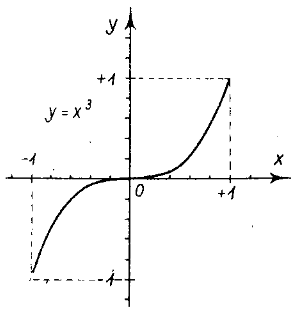
Gdybyśmy mogli wszystkie takie punkty zaznaczyć na płaszczyźnie, to utworzyłyby one pewną linię krzywą, zwaną *wykresem* funkcji $y = x^2$. Linię tę dostaniemy w przybliżeniu, łącząc odręcznie zaznaczone już punkty. Tak otrzymany rysunek przedstawia (w przybliżeniu) wykres funkcji $y = x^2$; dokładniej mówiąc, przedstawia wykres dla x, zawartych między —2,5 a +2,5, co piszemy: dla $-2{,}5 \leq x \leq +2{,}5$.

Gdybyśmy tabelkę funkcji obliczyli gęściej, np. co 0,2, to zaznaczone punkty wypadłyby gęściej i rysunek byłby dokładniejszy.

Wykres funkcji przedstawia nam przejrzyście przebieg zmienności funkcji. Z rysunku widzimy, że gdy x zmienia się od $-2{,}5$ do 0, to odpowiednie wartości y maleją od 6,25 do 0. Gdy x przebiega wartości od 0 do 2,5, to wartości y rosną od 0 do 6,25. Najmniejsza wartość y wynosi 0, dla $x=0$. Z wykresu możemy odczytać w przybliżeniu wartość zmiennej y nawet dla takiej wartości zmiennej x, która nie była umieszczona w tabelce.

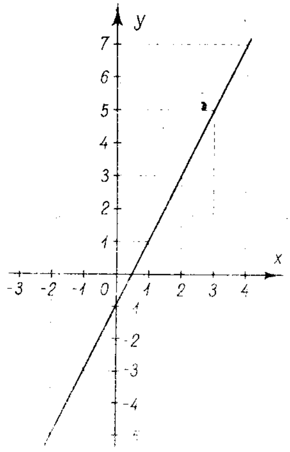
Chcąc np. odczytać dla $x=1{,}7$ odpowiednią wartość zmiennej y, wyznaczamy na wykresie punkt o odciętej 1,7. Punkt ten oznaczony jest na rysunku literą M. Odczytujemy, że rzędna punktu M wynosi w przybliżeniu 2,9. A więc dla $x=1{,}7$ odpowiednia wartość y równa się w przybliżeniu 2,9 (dokładna wartość jest 2,89).

Z wykresu możemy również łatwo odczytać, dla jakiej wartości zmiennej x zmienna y równa się np. 5. Wyznaczamy w tym celu na wykresie punkty, których rzędna wynosi 5. Punktami tymi są A i B. Odczytujemy, że odcięte ich równe są odpowiednio (w przybliżeniu) $+2{,}3$, $-2{,}3$. Zatem w przybliżeniu dla $x=+2{,}3$ i $x=-2{,}3$ jest $y=5$. Sprawdzając mamy $(+2{,}3)^2=(-2{,}3)^2=5{,}29$.

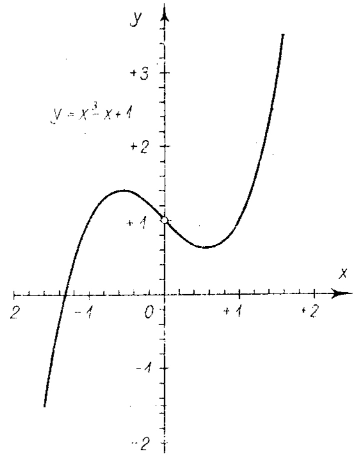


Rys. 9.

2. Na rys. 9. mamy wykres funkcji $y=x^3$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Wartości zmiennej y wzięte są z tabeli podanej na str. 56.



Rys. 10.



Rys. 11.

3. Na rys. 10. mamy wykres funkcji $y = 2x - 1$ dla $-2 \leqslant x \leqslant 4$.

x	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y	-5	-3	-1	$+1$	3	5	7

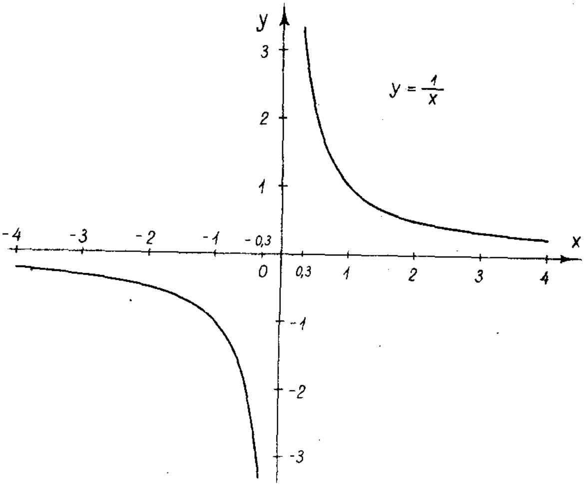
4. Na rys. 11 mamy wykres funkcji:

$$y = x^3 - x + 1$$

dla $-1{,}6 \leqslant x \leqslant +1{,}6$. Przy pomocy tabel matematycznych, podanych na str. 56, sporządzono tabelkę:

x	$-1{,}6$	$-1{,}4$	$-1{,}2$	-1	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$-0{,}4$	$-0{,}2$	
y	$-1{,}5$	$-0{,}3$	$+0{,}9$	$+1{,}0$	$+1{,}3$	$+1{,}4$	$+1{,}3$	$+1{,}2$	
x	0	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}6$	$0{,}8$	1	$1{,}2$	$1{,}4$	$1{,}6$
y	$1{,}0$	$0{,}8$	$0{,}7$	$0{,}6$	$0{,}7$	$1{,}0$	$1{,}5$	$2{,}3$	$3{,}5$

5. Rys. 12. przedstawia wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$
dla $-4 \leqslant x \leqslant -0{,}3$ i $0{,}3 \leqslant x \leqslant 4$.
Wartości zmiennej y wzięte są z tabeli na str. 56.



Rys. 12.

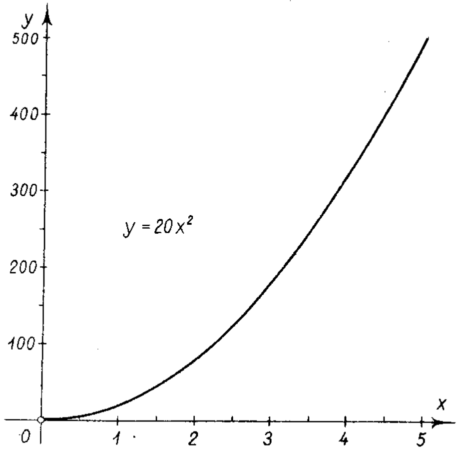
6. Jeżeli chcemy przedstawić na wykresie funkcję $y = 20x^2$ dla $0 \leqslant x \leqslant 5$, to możemy na osi x-ów obrać jako jednostkę np. 1 *cm*; na osi y-ów musimy obrać mniejszą jednostkę, bo w przeciwnym razie rozmiary rysunku byłyby za duże. Największa wartość zmiennej y wynosi tu 500, możemy zatem za jednostkę na osi y-ów obrać np. 0,1 *mm*. (Rys. 13)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	0	5	20	45	80	125	180	245	320	405	500

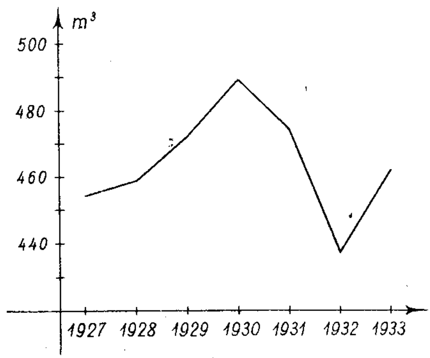
7. Czasem zdarza się, że na wykresie nie możemy umieścić osi współrzędnych. Np. należy przedstawić na wykresie produkcję gazu ziemnego w Polsce według tabeli (w milionach m^3):

1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933
454	459	467	489	474	437	462

W tym przypadku postępujemy w ten sposób, że nie umieszczamy osi współrzędnych na rysunku, lecz zamiast nich dwie proste do nich równoległe. Na prostej równoległej do osi x-ów umieszczamy kolejno liczby 1927,...,1933, na prostej równoległej do osi y-ów liczby od np. 430 do 500, obierając, jak w przykładach poprzednich, różne jednostki na obu prostych. (Przy wy-



Rys. 13.



Rys. 14.

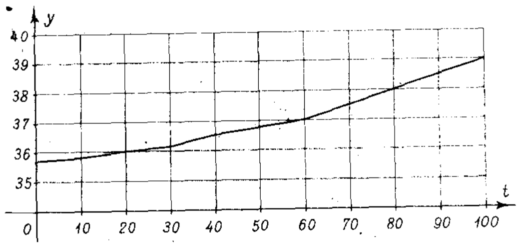
kresach statystycznych, a często również przy empirycznych, łączymy zaznaczone punkty odcinkami, jak na rys. 14).

8. Chcąc przedstawić (Rys. 15) na wykresie największą ilość gramów soli, ktorą można rozpuścić w 100 g wody, jako funkcję temperatury wody (por. str. 57), zaznaczamy oś y-ów na rysunku, jednak zamiast osi t-ów rysujemy prostą do niej równoległą. Przy tym obieramy na osi y-ów większą jednostkę niż na osi t.

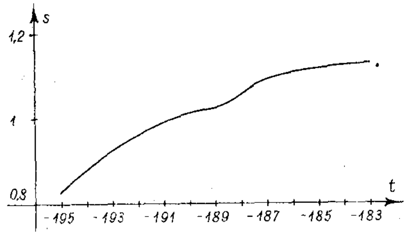
9. Ciężar właściwy skroplonego powietrza jest funkcją temperatury, dla której otrzymano następujące wartości:

t	—195°	—193°	—191°	—189°	—187°	—185°	—182°
s	0,826	0,919	0,995	1,025	1,092	1,118	1,130

Wykonywając wykres tej funkcji umieszczamy zamiast osi s-ów i t-ów proste do nich równoległe, Na osi s-ów obieramy dość dużą jednostkę, aby uwydatnić nieznaczne zmiany ciężaru właściwego. (Rys. 16).



Rys. 15.



Rys. 16.

Zadania

9. Wykonaj wykresy funkcyj:
$a)\ y = x + 2$ $\qquad b)\ y = 3x + 5$
$c)\ y = 2x$ $\qquad d)\ y = \frac{3}{2}x - 1$
Odczytaj rzędne punktów o odciętych $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 2{,}5$ oraz odcięte punktów o rzędnych $y = -1{,}5,\ -0{,}8,\ 0{,}5,\ 1{,}2$.

10. Wykonaj wykresy funkcyj:
$a)\ y = \frac{x^2}{2},$ $\qquad b)\ y = -\frac{x^2}{3},$
$c)\ y = 2x^2 - 3x$ $\qquad d)\ y = -x^2 + 2x + 1.$

11. Wykonaj wykresy funcyj zadania 3, str. 58.

12. Wykonaj wykresy funkcyj:
$a)\ y = -\frac{1}{x},$ $\qquad b)\ y = \frac{1}{x+1},$
$c)\ y = \frac{2}{x} + 3x,$ $\qquad d)\ y = -\frac{3}{2x+1} + \frac{x}{2}.$

13. Wykonaj wykresy funkcyj w podanych przedziałach, obierając różne jednostki na obu osiach:
$a)\ y = 3x$ dla $-30 \leqslant x \leqslant +20,$ $\qquad b)\ y = x^2$ dla $0 \leqslant x \leqslant 10$
$c)\ y = 40x^2$ „ $-2 \leqslant x \leqslant +3$ $\qquad d)\ y = \frac{1}{x}$ „ $0{,}01 \leqslant x \leqslant 0{,}1.$

14. Wykonaj wykresy funkcyj w podanych przedziałach, zastępując jedną lub obie osie współrzędnych przez proste równoległe i obierając odpowiednio jednostki:
$a)\ y = 4x + 35$ dla $2 \leqslant x \leqslant 5$ $\qquad b)\ y = 0{,}4x$ dla $10 \leqslant x \leqslant 20$
$c)\ y = \frac{6}{x+1}$ dla $100 \leqslant x \leqslant 200.$

15. Wykonaj na tym samym rysunku wykresy funkcyj:

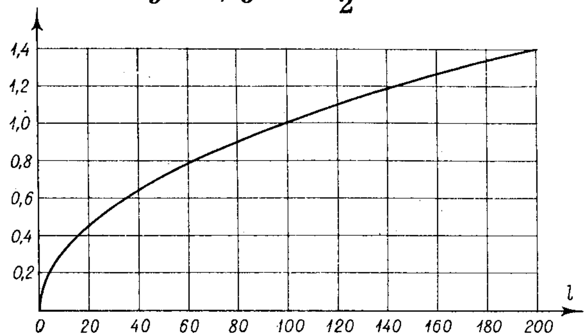
a) $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (x co 0,1),
b) $y=-x^2+x+1$, $y=2x-5$ dla $0 \leqslant x \leqslant 5$ (x co 0,5).
Jakie współrzędne ma punkt przecięcia tych wykresów?

16. Wykonaj wykres funkcji $y=2x+3$. Narysuj koło o środkn M (1,5) i o promieniu 2. Odczytaj z rysunku współrzędne punktów, w których wykres przecina to koło.

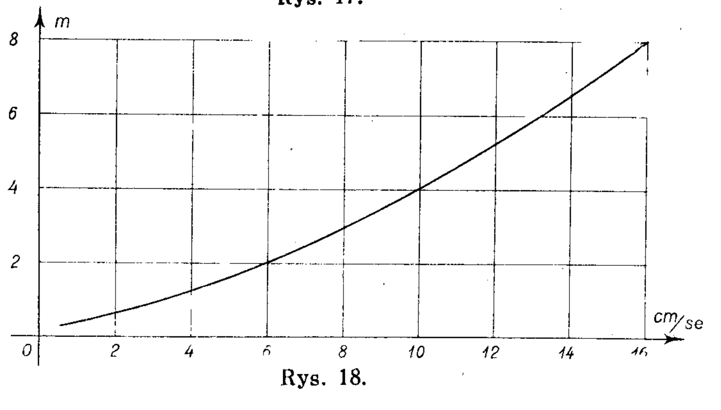
17. Wykonaj wykres funkcji $y=x^3-x$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (x co 0,1). Na osi x jako jednostkę obierz 2 *cm*, na osi y jako jednostkę 1 *dcm*. Odczytaj z wykresu, jakie są odcięte punktów, których rzędne wynoszą *a)* $+0,2$, *b)* $-0,2$.

18. Wykonaj wykres funkcyj (na jednym rysunku):

$$y=x, \quad y=\frac{x+|x|}{2}.$$



Rys. 17.



Rys. 18.

19. Czas wahania wahadła, tj. czas, w którym wahadło wykonywa jedno wahnienie, jest funkcją długości tego wahadła, którą przedstawia wykres na rys. 17. Odczytaj na tym wy-

kresie *a)* czas wahania wahadła o długości 60 *cm*, 100 *cm*, 125 *cm*, *b)* długość wahadła o czasie wahania 0,5, 0,8, 1 sek.

20. Pod wpływem wiatru powstają na wodzie fale. Wysokość fali jest funkcją prędkości wiatru, którą przedstawia wykres na rys. 18. Odczytaj *a)* wysokość fal dla prędkości wiatru 2, 5, 15 *cm/sek*, *b)* prędkość wiatru, przy której wysokość fal wynosi 1 *m*, 2 *m*, 5 *m*.

21. Temperatura chorego wynosiła w pewnym dniu:

o godz.	6	8	10	12	14	16	18	20
t^0C	37,2⁰	37,4⁰	38⁰	38,1⁰	38,3⁰	38,7⁰	38,7⁰	38,5⁰

Przedstaw przebieg temperatury przy pomocy wykresu.

22. W pewnym dniu temperatura powietrza była:

o godz.	4	6	8	10	12	14	16	18	20
t^0C	$3{,}2^0$	$2{,}9^0$	$3{,}8^0$	$5{,}2^0$	$9{,}5^0$	$11{,}9^0$	$10{,}4^0$	$6{,}8^0$	5^0

Przedstaw przebieg temperatury przy pomocy wykresu.

23. Barometr wskazuje w danej wysokości ponad poziomem morza w *mm* rtęci przeciętnie:

wysokość *m*	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
stan barometru	760	751	742	733	724	716	707	699	690	682	674

wysokość *m*	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900
stan barometru	666	658	650	642	635	627	620	612	605

Przedstaw na wykresie stan barometru jako funkcję wysokości.

24. Opierając się na tabelce (str. 57) wykonaj na jednym rysunku wykres urodzin i skonów w Polsce w latach od 1919 do 1933. Wykonaj również wykres przedstawiający naturalny przyrost ludności.

25. Obrót oszczędnościowy w P. K. O. wynosił w milionach złotych:

Rok	1928	1929	1930	1931	1932	1933
Wpłaty	167	209	315	425	503	551
Wypłaty	130	164	236	344	388	487

(Wykonaj wykres na jednym rysunku).

Równania stopnia pierwszego o współczynnikach literowych

Rozdział VIII

Równania o jednej niewiadomej

§ 1. Rozwiązywanie równań

1. Rozwiązać równanie:

$$7x - a - 3 = 1 + 5x + 2b + a,$$

w którym x oznacza niewiadomą zaś a i b pewne liczby dane. Równanie takie rozwiązujemy, jak poprzednio. Przypuszczamy zatem, że istnieje rozwiązanie i że x oznacza to rozwiązanie. Przy tym założeniu równanie przechodzi w równość, którą możemy przekształcać Przenosząc niewiadome na lewą stronę, wiadome zas na prawą, otrzymamy:

$$7x - 5x = 3 + 1 + 2b + a + a,$$

czyli $2x = 4 + 2b + 2a.$

Dzieląc obustronnie przez 2 dostaniemy: $x = 2 + b + a.$

A więc rozwiązaniem danego równania może być tylko $x = 2 + b + a$. Sprawdźmy równanie; podstawmy zatem w równaniu zamiast x wyrażenie $2 + b + a$. Otrzymamy:

$$7(2 + b + a) - a - 3 = 1 + 5(2 + b + a) + 2b + a.$$

Wykonywając mnożenia po obu stronach i redukując dostaniemy: $11 + 7b + 6a = 11 + 7b + 6a.$

Zatem $x = 2 + b + a$ spełnia równanie.

Jeżeli np. $a = 5$, $b = 3$, to dane równanie przybierze postać:

$$7x - 5 - 3 = 1 + 5x + 6 + 5.$$

Rozwiązaniem jest: $x = 2 + 3 + 5 = 10.$

2. Rozwiązać równanie: $ax = b$, gdzie x oznacza niewiadomą, zaś a, b liczby dane. Przyjmujemy, że równanie posiada rozwiązanie i że x oznacza to rozwiązanie. Gdyby a było różne od zera, to moglibyśmy obie strony podzielić przez a.

Załóżmy więc najpierw, że $a \neq 0$. Dzieląc obie strony przez a dostaniemy:

$$x = \frac{b}{a} \cdot$$

Innych pierwiastków równanie nie posiada.

Sprawdzając równanie otrzymujemy: $a \cdot \frac{b}{a} = b$.

Równość zachodzi, więc $x = \frac{b}{a}$ jest pierwiastkiem równania.

Załóżmy teraz, że $a = 0$. Równanie nasze przyjmie w tym przypadku następującą postać: $0 \cdot x = b$.

Jeżeli $b \neq 0$, to równanie nie posiada rozwiązania, bo dla każdej wartości x mamy $0 \cdot x = 0$.

Jeżeli natomiast $b = 0$, to dostajemy równanie: $0 \cdot x = 0$.

Równanie to spełnia każda liczba. Zatem każda liczba jest pierwiastkiem równania.

Uwaga: Równanie, które nie posiada rozwiązania, nazywamy równaniem sprzecznym. Równanie, dla którego każda liczba jest pierwiastkiem, nazywamy równaniem tożsamościowym lub krótko tożsamością.

Zbierając razem otrzymane wyniki dla równania $ax = b$ możemy powiedzieć:

a) Jeżeli $a \neq 0$, to równanie posiada tylko jedno rozwiązanie:

$$x = \frac{b}{a} \cdot$$

b) Jeżeli $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie jest sprzeczne.

c) Jeżeli $a = 0$ i $b = 0$, to równanie jest tożsamością.

Np. równanie $5x = 3$ ma pierwiastek $x = \frac{3}{5}$; równanie $0 \cdot x = 1$ jest sprzeczne.

3. Rozwiązać równanie

$$a^2(x-1) - 4(x+1) = 4a(1-x) - x(a^2+4) \qquad (1)$$

Załóżmy, że x oznacza pierwiastek tego równania.

Uwalniając od nawiasów i przenosząc wiadome na jedną stronę, niewiadome na drugą, dostaniemy:

$$a^2x - 4x + 4ax + a^2x + 4x = 4a + a^2 + 4.$$

Redukując lewą stronę ze względu na x, prawą zaś przedstawiając w postaci kwadratu, otrzymamy:

$$2a(a+2)x = (a+2)^2 \qquad (2)$$

Jeżeli $2a(a+2) \neq 0$, czyli, jeżeli $a \neq 0$ i $a \neq -2$, to:

$$x = \frac{(a+2)^2}{2a(a+2)} = \frac{a+2}{2a} \cdot$$

Sprawdzając przekonywamy się, że znaleziona wartość x jest pierwiastkiem równania.

Rozpatrzymy teraz po kolei przypadki, gdy $a=0$ lub $a=-2$.

Jeżeli $a=0$, to równość (2) przybiera postać $0 \cdot x = 4$, czyli $0=4$. Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem równanie (1) nie posiada rozwiązania.

Jeżeli $a=-2$, to równość (2) ma kształt $0 \cdot x = 0$. W tym przypadku równanie (1) przyjmuje postać:

$$4(x-1)-4(x+1)=-8(1-x)-8x.$$

Wykonywając mnożenia i redukując przekonywamy się, że każda liczba spełnia równanie.

Przykład. Podstawiając w równaniu (1) $a=3$ otrzymamy równanie $9(x-1)-4(x+1)=12(1-x)-13x$. Ponieważ w naszym przypadku $a \neq 0$ i $a \neq -2$, więc rozwiązaniem jest:

$$x=\frac{3+2}{2 \cdot 3}=\frac{5}{6}.$$

4. Rozwiązać równanie:

$$\frac{a}{bx}+\frac{b}{ax}=a^2+b^2 \qquad (3)$$

Zauważmy, że jeżeli $a=0$ lub $b=0$, to równanie nie ma rozwiązania, bo lewa strona nie ma sensu. Przyjmijmy więc, że $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Mnożąc obustronnie przez wspólny mianownik abx, otrzymamy po uproszczeniu:

$$a^2+b^2=(a^2+b^2)\,abx.$$

Ponieważ $(a^2+b^2)\,ab \neq 0$, gdyż założyliśmy, że $a \neq 0$, $b \neq 0$, zatem i $a^2+b^2 \neq 0$, więc dzieląc obustronnie przez $(a^2+b^2)\,ab$ dostajemy:

$$x=\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)\,ab}=\frac{1}{ab} \qquad (4)$$

Po sprawdzeniu przekonywamy się, że znaleziona wartość jest pierwiastkiem równania.

Przykład. Jeżeli w równaniu (3) podstawimy $a=5$, $b=6$, otrzymamy równanie: $\frac{5}{6x}+\frac{6}{5x}=61 \cdot$ Pierwiastkiem tego równania jest na mocy (4) $x=\frac{1}{5 \cdot 6}=\frac{1}{30}$.

5. Rozwiązać równanie:

$$\frac{2a}{x^2-a^2}+\frac{1}{x-a}=\frac{3}{x+a}.$$

Wspólnym mianownikiem jest $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$.

Mnożąc przez wspólny mianownik i upraszczając otrzymamy:

$$2a + x + a = 3(x - a) \text{ zatem } x = 3a.$$

Sprawdzając otrzymujemy:

$$\frac{2a}{8a^2} + \frac{1}{2a} = \frac{3}{4a}.$$

Jeżeli $a \neq 0$, to równość zachodzi. Jeżeli natomiast $a = 0$, to obie strony nie mają sensu; w tym przypadku równanie nie posiadą pierwiastka.

Przykład: Jeżeli $a = 2$, otrzymujemy równanie:

$$\frac{4}{x^2 - 4} + \frac{1}{x - 2} = \frac{3}{x + 2}.$$

Pierwiastkiem jest $x = 3 \cdot 2 = 6$.

Zadania

1. Rozwiąż równania:

a) $2x - b = 2a + b$, *b)* $3b + 7x = 31b$,
c) $3x - a = 3a + 4b$, *d)* $5x - 8a = 20a$,
e) $x + a(x+1) = b(a+1) - 1$, *f)* $(a - x) - (x - b) = a - b$,
g) $a(x - a) + b(x + b) = 0$, *h)* $a(ax - b^2) - b(bx + a^2) = 0$,
i) $a^2x + b(a-b) = b^2x + (a - b)(a+2b)$, *j)* $(ax+b)^2 - (ax-b)^2 = a^2$.

2. Rozwiąż równania:

a) $\frac{7a - 5(2 + x)}{a - x} = a$, *b)* $a\frac{2x - a}{a + 2b} + b\frac{2x - b}{b + 2a} = x$,

c) $a\frac{a - x}{b} - b\frac{b + x}{a} = x$, *d)* $\frac{x}{a + b} + abx = a + b + \frac{1}{ab}$,

e) $a^2b - \frac{a+x}{b} = ab^2 - \frac{b+x}{a}$, *f)* $\frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x} = \frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x}$.

3. Rozwiąż równania:

a) $ax + bx = 5$, *b)* $bx + x = ab + a$,
c) $x + ax = ab$, *d)* $x - ax = 1 - a$,
e) $a + bx = 0$, *f)* $bx + a = x + 6$.

Podstaw w tych przykładach: *a)* $a = 2$, $b = 3$ i $a = 4$, $b = -4$; *b)* $a = 1$, $b = 2$ i $a = 3$, $b = -1$; *c)* $a = 0$, $b = 1$ i $a = -1$, $b = 0$; *d)* $a = -1$ i $a = +1$; *e)* $a = 2$, $b = \frac{2}{3}$ i $a = 1$, $b = 0$, *f)* $a = \frac{3}{4}$, $b = 2$ i $a = 6$, $b = 1$.

4. Rozwiąż równania:

a) $(a + b)x - a^2 = b^2$, *b)* $2x(a + b) - 3ab = a(2x - b) - b^2$.
c) $(a-b)x + 2ab = (a+b)^2$, *d)* $(x - a)^2 - (x - b)^2 = (a - b)^2$,

e) $a^2x - b^2x - b = a$, *f)* $\frac{x-c}{a} - \frac{x-a}{b} = \frac{1}{a}(b-c)$,

g) $\frac{x-a}{1-ax} = b$, *h)* $\frac{ax}{b(x+1)} - \frac{bx}{a(x+1)} = 1$,

i) $\frac{1}{ab-ax} + \frac{1}{bc-bx} = \frac{1}{ac-ax}$, *j)* $\frac{ax-2a}{ax+2b} = \frac{ax+2b}{ax+2a}$.

Następnie podstaw: *a)* $a=3$, $b=-2$; $a=5$, $b=-5$; $a=0$, $b=0$; *b)* $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{2}{3}$; $a=4$, $b=0$; *c)* $a=0{,}4$, $b=-1$; $a=2$, $b=2$; $a=0$, $b=0$; *d)* $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{2}$; $a=1$, $b=1$; *e)* $a=3$, $b=1{,}2$; $a=2$, $b=2$; $a=3$, $b=-3$; *f)* $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{4}$; $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$; *g)* $a=0{,}1$, $b=0{,}2$; $a=1$, $b=-1$; $a=\frac{1}{3}$, $b=-3$; *h)* $a=3$, $b=4$; $a=0$, $b=0$; *i)* $a=1$, $b=2$, $c=4$; $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{5}$, $c=-1$; *j)* $a=1$, $b=2$; $a=\frac{1}{2}$, $b=0$.

5. Rozwiąż równania:

a) $a(x-a) = 1-x$, *b)* $\frac{1}{x-a+1} + \frac{1}{x+a-1} = \frac{2}{x-a-1}$,

c) $\frac{x+a}{x-1} + \frac{x+1}{x-a} = 2$, *d)* $\frac{a^2}{a+x} + \frac{1}{1+x} = a+1$.

6. Rozwiąż proporcje:

a) $(x+a):(x-b) = a:b$,

b) $(x+a):(x+b) = (x+b):(x-a)$,

c) $(x^2+x+a):(ax^2+x-a) = 1:a$,

d) $(1-x):a^2 = (x-a):a$.

§ 2. Układanie równań

1. Znaleźć liczbę posiadającą tę własność, że jeżeli ją podzielimy przez a, to otrzymamy to samo, co gdybyśmy od niej odjęli a.

Niech x będzie szukaną liczbą. Zatem:

$$\frac{x}{a} = x - a.$$

Nato, by zagadnienie posiadało sens, musi być $a \neq 0$. Rozwiązując to równanie w znany sposób, dostajemy:

$$x = ax - a^2, \text{ stąd } x(1-a) = -a^2.$$

Jeżeli $1 - a \neq 0$, czyli, jeżeli $a \neq 1$, to otrzymujemy: $x = \frac{-a^2}{1-a} = \frac{a^2}{a-1}$. Jak łatwo sprawdzić, wyrażenie to spełnia nasze równanie. Dla $a=1$ otrzymamy $x \cdot 0 = -1$, a więc równanie sprzeczne. Widzimy zatem, że nasze zagadnienie posiada dokładnie jedno rozwiązanie, z wyjątkiem przypadków $a=0$ i $a=1$, w których jest pozbawione sensu, względnie prowadzi do sprzecznego równania.

Np. dla $a = 2$ jest $x = 4$ i mamy: $\frac{4}{2} = 4 - 2$.

2. Kupiec sprzedaje 1 *kg* towaru po a *zł* i zarabia przy tym p%. Ile sam płacił za 1 *kg* tego towaru?

Oznaczmy szukaną cenę przez x *zł*. Zarobek kupca wynosi p% tej liczby, czyli $\frac{px}{100}$ *zł*. A więc:

$$x + \frac{px}{100} = a.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy:

$$x = \frac{100a}{100 + p},$$

przy założeniu, że $100 + p \neq 0$, czyli $p \neq -100$. W naszym zagadnieniu p jest oczywiście liczbą dodatnią, zatem to założenie jest spełnione. Jak łatwo sprawdzić, znalezione wyrażenie spełnia równanie. Np. dla $a = 4{,}28$, $p = 7$ otrzymujemy $x = 4$.

3. Jeden piechur przebywa w godzinie a *km*, drugi b *km*. Obaj idą drogą w tym samym kierunku. Ich początkowa odległość wynosi s *km*. Przyjmując, że pierwszy idzie za drugim, obliczyć, po jakim czasie pierwszy dogoni drugiego.

Oznaczmy szukany czas przez x godzin. Pierwszy piechur przebył w tym czasie ax *km*, drugi bx *km*. Przy tym droga przebyta przez pierwszego jest o s *km* dłuższa. Mamy zatem równanie:

$$ax = bx + s,$$

stąd: $$x = \frac{s}{a - b}, \text{ jeżeli } a - b \neq 0, \text{ czyli } a \neq b.$$

Jeżeli $a = b$, to równanie jest sprzeczne dla $s \neq 0$, tożsamością zaś dla $s = 0$. Istotnie, jeżeli prędkości są te same, a początkowa odległość jest różna od zera, to oczywiście nigdy pierwszy piechur drugiego nie dogoni; jeżeli zaś $s = 0$, to obaj są stale razem.

Np. jeżeli $a = 4{,}5$, $b = 4$, $s = 2$, to $x = 4$; jeżeli $a = 4$, $b = 5$, $s = 3$, otrzymamy $x = -3$. Ponieważ w naszym zagadnieniu x oznacza liczbę dodatnią, zagadnienie nie ma rozwiązania w drugim przypadku. Jest zresztą od razu widoczne, że jeżeli pierwszy piechur ma mniejszą prędkość, to nigdy drugiego nie dogoni.

Jak widzimy, może się zdarzyć, że dla pewnych wartości danych liczb równanie posiada rozwiązanie, które dla zagadnienia nie ma znaczenia.

Zadania

7. Jeżeli odejmę m-tą część pewnej liczby od a, to otrzymam b. Jaka to liczba? Np. $m=4$, $a=20$, $b=12$.

8. W liczbie dwucyfrowej różnica pierwszej i drugiej cyfry wynosi r. Jeżeli sumę cyfr pomnożymy przez 4, otrzymamy liczbę utworzoną z tych samych cyfr w przeciwnym porządku. Co to za liczba? Wyznacz wszystkie wartości zmiennej r, dla których zagadnienie posiada rozwiązanie.

9. Trzej bracia mają dzisiaj a, b i c lat. Oblicz, po ilu latach pierwszy będzie miał tyle lat, co obaj inni razem. W otrzymanym wzorze podstaw $a=12$, $b=3$, $c=4$, oraz $a=18$, $b=14$, $c=9$. Jakie znaczenie ma wynik w drugim wypadku?

10. W głosowaniu brało udział n posłów. Wniosek przeszedł większością a głosów. Ilu posłów głosowało za wnioskiem, ilu przeciw? Podstaw $n=435$, $a=19$.

11. Na łące pasą się owce i gęsi. Razem mają a głów i b nóg. Ile jest owiec, a ile gęsi. Podstaw $a=35$, $b=94$.

12. Do zbiornika prowadzą dwie rury. Jeżeli tylko pierwsza będzie otwarta, zbiornik zapełni się w a godzinach, jeżeli zaś tylko druga, to w b godzinach. W jakim czasie napełni się zbiornik, jeżeli obie rury będą otwarte?

13. Jeżeli A da n *zł* B, to obaj będą mieli równo. Jeżeli jednak B da n *zł* A, to B będzie miał dwa razy mniej niż A. Ile zł ma każdy? Podstaw $n=8$.

14. A zapłacił za szklankę kawy i dwa ciastka a *gr*, B zaś za dwie szklanki kawy i trzy ciastka b *gr*. Ile kosztowała szklanka kawy, a ile ciastko? Podstaw $a=80$, $b=140$.

15. Kupiec miał dwa gatunki herbaty w cenie po a *zł* i po b *zł* za 1 *kg*. Pewnego dnia sprzedał ogółem m *kg* herbaty za p *zł*. Ile sprzedał z każdego gatunku? Podstaw $a=48$, $b=30$, $m=3{,}7$, $p=136{,}20$.

16. W prostokącie o obwodzie 72 *cm* jeden bok jest o a *cm* dłuższy od drugiego. Oblicz boki i powierzchnię tego prostokąta. Co otrzymasz dla $a=15$, dla $a=40$?

17. Obwód trójkąta równoramiennego wynosi a *cm*. Podstawa jest o b *cm* krótsza od ramienia. Oblicz boki tego trójkąta. Podstaw $a=54$, $b=6$.

18. Dokoła kwadratowego budynku biegnie chodnik o szerokości

s m i o polu a m^2. Oblicz długość budynku. Jaki warunek muszą spełniać zmienne a, s? Podstaw $a = 05$, $s = 1{,}5$.

19. Przekrój rowu ma kształt trapezu równoramiennego, którego pole wynosi p dcm^2. Szerokość rowu wynosi u góry s *dcm*, głębokość g *dcm*. Oblicz szerokość dna rowu. Jaki warunek muszą spełniać zmienne p, s, g, by istniało rozwiązanie? Podstaw $p = 400$, $s = 30$, $g = 16$.

20. Złodziej ukradł rower i uciekł, jadąc z prędkością 12 *km/godz*. Po m minutach właściciel zauważył kradzież i puścił się w pościg na motocyklu, poruszając się z prędkością 40 *km/godz*. Kiedy dogonił złodzieja?

21. Z miejscowości A wyjeżdża pociąg osobowy z prędkością 60 *km godz*. Równocześnie wyjeżdża z B w przeciwnym kierunku pociąg ciężarowy z prędkością 25 *km/godz*. Oblicz, kiedy spotkają się te pociągi, przyjmując, że odległość miejscowości A, B wynosi a *km*.

22. Przednie koło wozu ma obwód 3,5 *m*, tylne 4 *m*. Przy przebyciu drogi od A do B przednie koło wykonało o a obrotów więcej niż tylne. Oblicz odległość AB.

23. Dwa punkty poruszają się po obwodzie koła o promieniu r *cm* w przeciwnych kierunkach. Pierwszy przebywa w sekundzie a *cm*, drugi b *cm*. Początkowo znajdują się w tym samym miejscu. Oblicz, po jakim czasie się spotkają. Podstaw $r = 35$, $a = 7$, $b = 3$.

24. Turysta wybrał się na wycieczkę. W jednym dniu przebywał a *km*. Jego przyjaciel, który wyszedł w m dni później, postanowił go dogonić, przebywając dziennie b *km*. Kiedy go dogonił? W jakiej odległości od punktu wyjścia?

25. Dwa automobile wyjeżdżają równocześnie z miejscowości A, B odległych o a *km*, w tym samym kierunku. Pierwszy przebywa u *km/godz*, drugi v *km/godz*. Kiedy i gdzie się spotkają? Kiedy zagadnienie nie posiada rozwiązania?

26. Kupiec sprzedał towar za a *zł*, tracąc na nim p%. Ile go ten towar kosztował?

27. Kupiec zarobi p%, jeżeli sprzeda towar za a *zł*. Ile % zarobi sprzedając ten sam towar za b *zł*? W otrzymanym wzorze podstaw $p = 8$, $a = 54$, $b = 57$, oraz $p = 6$, $a = 53$, $b = 48$. Co oznacza wynik w drugim przypadku?

28. Jeżeli kupiec sprzeda towar za a *zł*, to straci na nim p%. Za ile ma go sprzedać, by zyskać q%?

29. Ciężar netto towaru wynosi a *kg*, tara wynosi p % ciężaru brutto. Oblicz ciężar brutto. Podstaw $a = 598$, $p = 8$.
30. Kupiec posiadał pewien kapitał. Po pewnym czasie powiększył go o p%, później jednak stracił q% powiększonego kapitału, tak że pozostało mu a *zł*. Ile miał z początku?
31. Ktoś chce uzyskać a *l* alkoholu p% przez zmieszanie alkoholu 65% i 90%. Ile *l* musi wziąć z każdego gatunku? Czy to zadanie posiada zawsze rozwiązanie? Postaw $a = 45$, $p = 72$.
32. Ile *kg* wody o temperaturze 100° *C* trzeba dolać do 12 *kg* wody o temperaturze 65° *C*, aby otrzymać wodę o temperaturze c^0 *C*? Jakie wartości może przybierać c w tym zagadnieniu? Podstaw $c = 80$.
33. Ktoś chce uzyskać a *kg* wody o temperaturze t^0 przez zmieszanie wody o temperaturze 0° z wodą o temperaturze 100°. Ile potrzeba *kg* wody każdego rodzaju? Jakie wartości może przyjmować t w tym zagadnieniu? Podstaw $a = 50$, $t = 18$.
34. Kupiec ma dwa gatunki herbaty. Kilogram pierwszego gatunku kosztuje a *zł*, kilogram drugiego b *zł*. Ile ma wziąć z każdego, by otrzymać m *kg* mieszaniny w cenie c *zł* za kilogram? W otrzymanych wzorach podstaw $a = 24$, $b = 30$, $c = 26$, $m = 12$. Co otrzymasz zastępując wartość $c = 26$ przez $c = 20$ lub $c = 32$? Jaki warunek musi spełniać c, by zagadnienie miało rozwiązanie?
35. Dwa ciała o tej samej objętości ważą razem a *kg*. Ich gęstości wynoszą d i d'. Oblicz ciężar każdego z nich.

Rozdział IX

Równania o dwóch niewiadomych

§ 1. Jedno równanie o dwóch niewiadomych

Przypuśćmy, że mamy rozwiązać równanie:

$$ax + by = c \tag{1}$$

gdzie a, b, c są liczbami danymi, zaś x, y niewiadomymi.

Obierzmy za y dowolną liczbę. Możemy teraz uważać równanie (1) za równanie o jednej niewiadomej x.

Jeżeli $a \neq 0$, to rozwiązując otrzymamy:

$$x = \frac{c - by}{a} \tag{2}$$

Jeżeli zatem $a \neq 0$, to wszystkie rozwiązania równania (1) otrzymamy obierając y dowolne, x zaś wyznaczając z wzoru (2).

Np. rozwiązać równanie: $2x + 3y = 8$.

Obierając za y dowolną liczbę otrzymamy $x = \frac{8-3y}{2}$. A więc rozwiązaniami równania są np. $y = 0$, $x = 4$; $y = 1$, $x = \frac{5}{2}$; $y = 2$, $x = 1$ itd.

Rozwiązać równanie: $3x + 0 \cdot y = 6$.

Podstawiając za y dowolną liczbę dostajemy $3x = 6$, stąd $x = 2$. A więc rozwiązaniami równania są np. $y = 0$, $x = 2$; $y = 1$, $x = 2$; $y = \frac{3}{2}$, $x = 2$ itd. Zatem y jest dowolne, zaś x wynosi zawsze 2.

Jeżeli w równaniu (1) podstawimy za x dowolną liczbę, to przy założeniu $b \neq 0$, otrzymamy:

$$y = \frac{c - ax}{b} \tag{3}$$

Jeżeli zatem $b \neq 0$, to wszystkie rozwiązania otrzymamy obierając x dowolne, y zaś wyznaczając z wzoru (3).

Np. rozwiązać równanie $5x + 2y = 4$. Przyjmując za x dowolną liczbę otrzymamy $y = \frac{4-5x}{2}$. Rozwiązaniami są więc np. $x = -2$, $y = 7$; $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$; $x = 2$, $y = -3$ itp.

Rozwiązać równanie $0 \cdot x + 7y = 5$. Obierając za x dowolną liczbę otrzymamy $7y = 5$, stąd $y = \frac{5}{7}$. Rozwiązaniami są więc np. $x = -3$, $y = \frac{5}{7}$; $x = 0$, $y = \frac{5}{7}$; $x = 5$, $y = \frac{5}{7}$ itd. Zatem x jest dowolne, y wynosi zawsze $\frac{5}{7}$.

Widzimy zatem: *jeżeli w równaniu $ax + by = c$ jeden ze współczynników a lub b jest różny od zera, to równanie posiada nieskończenie wiele rozwiązań.*

Załóżmy teraz, że $a = 0$ i $b = 0$. Równanie $ax + by = c$ przyjmuje w tym przypadku postać: $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$.

Jeżeli $c \neq 0$, to równanie nie posiada rozwiązania, bo podstawiając jakiekolwiek liczby za x i y otrzymamy zawsze $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$.

Np. równania $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$, $0 \cdot x + 0 \cdot y = 7$ itp. są równaniami sprzecznymi.

Jeżeli $c = 0$, to otrzymujemy równanie: $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$.

W tym przypadku każda para liczb x, y spełnia równanie.

Uwaga. Równania, w których $a \neq 0$ i $b \neq 0$, możemy rozwiązywać jednym lub drugim sposobem.

Np. rozwiązać równanie $3x+2y=7$.

a) Możemy obrać y dowolnie, wówczas $x=\frac{7-2y}{3}$.

Otrzymamy jako rozwiązania: $y=1, x=\frac{5}{3}$; $y=2, x=1$ itd.

b) Możemy x obrać dowolnie, wówczas $y=\frac{7-3x}{2}$.

Rozwiązaniami są np. $x=1$, $y=2$; $x=2$, $y=\frac{1}{2}$ itd.

Zadania

1. Wyznacz rozwiązania równań *a)* — *f)* przyjmując:
I) $x=-3, -2, 0, +1, +2$ II) $y=-2, -1, 0, +\frac{2}{3}, +4$.
Czy to jest zawsze możliwe?
a) $2x+y=5$, *b)* $3x-2y=4$, *c)* $2x+3{,}5\,y=6$
d) $4x+0.y=7$ *e)* $0{,}5x-2{,}1y=3{,}2$, *f)* $0.x+4{,}3y=5$,

2. Podaj kilka rozwiązań równań:
a) $3x-y=4$, *b)* $2x+y=7$, *c)* $-x-3y=4$,
d) $\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y=1$, *e)* $0{,}5x-0{,}4y=0{,}3$, *f)* $\frac{7}{5}x-1{,}4y=0{,}7$,
g) $0\cdot x+3y=6$, *h)* $5x+0\cdot y=1$, *i)* $0\cdot x+0\cdot y=0$.

3. Podaj kilka rozwiązań:
a) $\frac{2+x}{3-y}=7$, *b)* $\frac{2x-3y}{5x-2y}=1$ *c)* $\frac{x-y}{x+y+7}=1$.

4. Podaj kilka rozwiązań:
a) $2x-y+7=3x-2+y$, *b)* $2(x-y)+3y=7-5x$,
c) $5x-2(y+3x)=3(y-x)+4(x+1)$
d) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+1=\frac{x}{6}+\frac{y}{12}$.

5. Podaj kilka rozwiązań:
a) $x+y=a$, *b)* $ax+y=a^2$, *c)* $ax-by=a^2+b^2$,
d) $(a+b)x-ay=ab+b^2$, *e)* $a(x+y)+b(x-y)=2a$.
Np. w przykładzie *a)* dla $x=5$, $y=a-5$; $x=2$, $y=a-1$ itd.

6. Sprawdź, że jeżeli równanie $ax+by=c$ spełniają liczby $x=p$, $y=q$, to rozwiązaniami są również liczby $x=p-bt$, $y=q+at$, gdzie t jest dowolną liczbą.
Np. mamy równanie $2x+3y=8$. Podstawiając $x=1$ dostajemy $y=2$. Kładąc $x=1-3t$, $y=2+2t$ otrzymamy dla każdej wartości na t rozwiązanie danego równania, np. dla $t=1$, $x=-2$, $y=4$, dla $t=-1$, $x=4$, $y=0$ itd.
Sprawdź, że pary (2, 4) i (4, 0) spełniają dane równanie.

Postępując w ten sposób, podaj kilka rozwiązań:
a) $2x-3y=-1$, *b)* $5x+2y=9$, *c)* $3x-y=5$.

7. Dla jakich liczb a, b równania nie mają rozwiązań:
a) $(a-3b)x+(5a-4b-44)y=1$
b) $a(x+y)+b(x-y)=7x+5(y-1)$.

8. Przedstaw ułamek $\frac{24}{35}$ w postaci sumy dwóch ułamków o mianownikach 7 i 5.

9. Równanie $ax+by=0$ ma zawsze rozwiązania, jakiekolwiek byłyby liczby a i b. Dlaczego?

§ 2. Układ równań o dwóch niewiadomych

Mamy rozwiązać układ równań o dwóch niewiadomych:

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned} \tag{1}$$

Przypuśćmy, że układ równań posiada rozwiązanie i że x, y oznaczają liczby spełniające te równania. Przy tym założeniu równania (1) przechodzą w równości. Pomnóżmy obie strony pierwszej równości przez b', drugiej przez b i odejmijmy następnie strony równości drugiej od odpowiednich stron równości pierwszej. Otrzymamy:

$$\begin{array}{c} ab'x+bb'y=cb' \\ \underline{a'bx+bb'y=c'b} \\ (ab'-a'b)x=cb'-c'b \end{array} \tag{2}$$

Pomnóżmy teraz obie strony pierwszej równości przez a', zaś drugiej przez a i odejmijmy strony równości pierwszej od odpowiednich stron równości drugiej. Otrzymamy:

$$\begin{array}{c} a'ax+a'by=ca' \\ \underline{a'ax+ab'y=c'a} \\ (ab'-a'b)y=c'a-ca' \end{array} \tag{3}$$

Załóżmy teraz, że $ab'-a'b\neq 0$. Z (2) i (3) dostaniemy:

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}, \qquad y=\frac{c'a-ca'}{ab'-a'b}. \tag{I}$$

Widzimy zatem, jeżeli $ab'-a'b\neq 0$, to układem pierwiastków równań (1) mogą być tylko liczby x, y, określone wzorami (I).

Łatwo się również przekonamy, że jeżeli $ab'-a'b\neq 0$, to wzory (I) określają rzeczywiście układ pierwiastków. Podstawiając bowiem w równaniu pierwszym dostajemy:

$$a\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}+b\frac{c'a-ca'}{ab'-a'b}=c.$$

Równość zachodzi, gdyż lewa strona wynosi:

$$\frac{a(cb'-c'b)+b(c'a-ca')}{ab'-a'b}=\frac{acb'-ca'b}{ab'-a'b}=\frac{c(ab'-a'b)}{ab'-a'b}=c.$$

Podobnie sprawdzamy równanie drugie.

Wyrażenie $ab'-a'b$ nazywamy **wyznacznikiem** układu równań (1). Możemy więc powiedzieć:

Jeżeli wyznacznik układu równań (1) jest różny od zera, wówczas istnieje tylko jedno rozwiązanie, określone wzorami (I).

Załóżmy teraz, że $ab'-a'b=0$.

Przyjmijmy, że jeden z współczynników przy niewiadomych jest różny od zera, np. $a \neq 0$.

Obierzmy x, y tak, aby było spełnione równanie pierwsze, tj. aby zachodziła równość $ax+by=c$.

Pomnóżmy obie strony tej równości przez taką liczbę, aby po pomnożeniu współczynnik przy niewiadomej x wynosił a'. Ponieważ $a'=\frac{a'}{a}\cdot a$, więc mnożymy obie strony równości przez $\frac{a'}{a}$.

Otrzymamy:

$$\frac{a'}{a}\,ax+\frac{a'}{a}\,by=\frac{a'}{a}\,c \tag{4}$$

Ponieważ $ab'-a'b=0$, więc $ab'=a'b$, zatem $b'=\frac{a'}{a}\,b$.

A więc równość (4) przyjmie postać:

$$a'x+b'y=\frac{a'}{a}\,c \tag{5}$$

Jeżeli $\frac{a'}{a}\,c=c'$, to mamy stąd:

$$a'x+b'y=c'.$$

A więc w tym przypadku każde rozwiązanie równania pierwszego spełnia równanie drugie.

Jeżeli natomiast $\frac{a'}{a}\,c \neq c'$, to na mocy (5):

$$a'x+b'y \neq c'.$$

Zatem w tym przypadku żadne rozwiązanie równania pierwszego nie spełnia równania drugiego. Układ nie posiada więc rozwiązania.

Widzimy stąd: *jeżeli układ równań (1) ma wyznacznik $ab'-a'b=0$ i jeżeli jedna z niewiadomych ma współczynnik różny od zera, to układ albo jest sprzeczny, albo posiada nieskończenie wiele rozwiązań, przy czym nie każda para liczb jest roz-*

wiązaniem. Rozwiązania te otrzymamy z tego równania, w którym jedna z niewiadomych ma współczynnik różny od zera.

Który z tych przypadków zachodzi, stwierdzamy w następujący sposób: mnożymy obie strony jednego z równań przez odpowiednią liczbę tak, aby otrzymać po lewej stronie to samo, co w drugim równaniu. Jeżeli wówczas także prawe strony będą równe, to układ posiada rozwiązania, jeżeli zaś prawe strony będą różne, to układ jest sprzeczny.

Zostaje jeszcze do rozpatrzenia przypadek, gdy wszystkie współczynniki przy niewiadomych są zerami. W tym przypadku mamy układ:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = c \qquad 0 \cdot x + 0 \cdot y = c'.$$

Jeżeli $c \neq 0$, to równanie pierwsze jest sprzeczne, jeżeli $c' \neq 0$, to równanie drugie jest sprzeczne; w obu przypadkach układ nie ma rozwiązania. Jeżeli $c = 0$ i $c' = 0$, to oba równania mają postać $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$; w tym przypadku każda para liczb spełnia dany układ.

Uwaga. Zbierając otrzymane wyniki widzimy, że *układ równań:* $\quad ax + by = c, \quad a'x + b'y = c'$
ma tylko wtedy jedno rozwiązanie, gdy wyznacznik jest różny od zera. Jeżeli wyznacznik jest równy 0, to układ jest sprzeczny, albo posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykłady. Rozwiązać układ równań:

1.
$$2x - 3y = 11$$
$$5x + y = 19.$$

Mamy tutaj $a = 2$, $b = -3$, $c = 11$, $a' = 5$, $b' = 1$, $c' = 19$. Zatem wyznacznik $ab' - a'b = 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-3) = 17$. Ponieważ wyznacznik jest różny od zera, więc istnieje tylko jedno rozwiązanie. Rozwiązanie możemy otrzymać przy pomocy jednej ze znanych metod: podstawienia, porównania, równych współczynników. Rozwiązanie otrzymamy również wprost z wzorów (I):

$$x = \frac{11 \cdot 1 - 19 \cdot (-3)}{17} = 4, \qquad y = \frac{19 \cdot 2 - 11 \cdot 5}{17} = -1.$$

2.
$$a^2 x - 6y = a$$
$$4x + 3y = 7.$$

Wyznacznik wynosi $3 \cdot a^2 + 6 \cdot 4 = 3(a^2 + 8)$.

Ponieważ $a^2 + 8 \neq 0$, więc równanie posiada jedno rozwiązanie przy dowolnym a. Rozwiązując dostajemy:

$$x = \frac{a + 14}{a^2 + 8}; \qquad y = \frac{a(7a - 4)}{3(a^2 + 8)}.$$

3.
$$x+3y=2$$
$$2x+6y=4.$$

Wyznacznik wynosi $1\cdot6-2\cdot3=0$. Mnożąc obie strony równania pierwszego przez 2 dostaniemy równanie drugie. A więc układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Każde rozwiązanie jednego równania spełnia drugie.

4.
$$4x+6y=7$$
$$6x+9y=2.$$

Wyznacznik wynosi $4\cdot9-6\cdot6=0$. Mnożąc obie strony równania pierwszego przez $\frac{6}{4}$ dostaniemy:
$$6x+9y=10\tfrac{1}{2} \qquad (1)$$
Widzimy stąd, że jeżeli jakieś liczby spełniają równanie pierwsze, to spełniają również równanie (1), a więc nie spełniają drugiego równania układu. Układ zatem nie posiada rozwiązania.

5.
$$(2-a)x-3y=6$$
$$ax+2y=b.$$

Wyznacznik wynosi $2(2-a)-(-3)a=a+4$.

Jeżeli $a+4\neq0$, czyli $a\neq-4$, to układ posiada jedno rozwiązanie. Rozwiązując układ w tym przypadku dostajemy:
$$x=\frac{3(b+4)}{a+4}, \quad y=\frac{2b-6a-ab}{a+4}.$$
Jeżeli $a+4=0$, czyli $a=-4$, to układ przyjmuje postać:
$$6x-3y=6$$
$$-4x+2y=b.$$

Mnożąc obie strony równania pierwszego przez $-\frac{4}{6}$ dostajemy:
$$-4x+2y=-4.$$

Jeżeli zatem $b=-4$, to układ posiada rozwiązania, które otrzymamy np. z równania pierwszego. Jeżeli $b\neq-4$, to układ jest sprzeczny.

6. Układ
$$ax+a^2y=3a$$
$$2ax-a^3y=0$$

posiada wyznacznik: $a\cdot(-a^3)-2a\cdot a^2=-a^4-2a^3=-a^3(a+2)$. Wyznacznik ten jest równy zeru tylko dla $a=0$, lub $a=-2$. Jeżeli więc $a\neq0$ i $a\neq-2$, to układ posiada jedno rozwiązanie. Dla $a=0$ oba równania przyjmują postać: $0\cdot x+0\cdot y=0$. W tym więc przypadku każda para liczb spełnia równania.

Dla $a=-2$ dostajemy:
$$-2x+4y=-6$$
$$-4x+8y=0.$$

Mnożąc obie strony pierwszego równania przez 2 otrzymamy $-4x+8y=-12$. Ponieważ lewa strona jest ta sama, co w dolnym równaniu, a prawa nie, więc układ jest w tym przypadku sprzeczny.

Zadania

10. Rozwiąż następujące układy równań:

a) $4x-3y=7$, $x+y=2$, *b)* $3x+5y=16$, $4x-y=6$;

c) $2x-y=7$, $0\cdot x+4y=5$, *d)* $\frac{3}{5}x-\frac{2}{3}y=\frac{3}{2}$, $6x+10y=\frac{5}{2}$.

11. Zbadaj, które z układów są sprzeczne, a które posiadają nieskończenie wiele rozwiązań, i podaj w drugim przypadku 3 rozwiązania:

a) $15x-12y=7$, $20-16y=1$, *b)* $25x+35y=8$, $-15x-21y=3$;

c) $18x+16y=40$, $27x+24y=60$, *d)* $\frac{3}{8}x-\frac{2}{3}y=\frac{4}{3}$; $9x-16y=32$;

e) $2{,}1x-3{,}5y=5{,}6$, $-3x+5y=-8$, *f)* $14{,}4x-1{,}8y=6{,}3$, $12x-1{,}5y=3{,}2$;

g) $0\cdot x+3y=6$, $0\cdot x-2y=-4$, *h)* $2x+0\cdot y=4$, $5x+0\cdot y=6$;

i) $0\cdot x+0\cdot y=1$, $2x+3y=4$, *j)* $2x+5y=7$, $0\cdot x+0\cdot y=0$.

12. Rozwiąż następujące układy równań:

a) $ax+by=ab$, $x+y=a$, *b)* $x-y=a$, $ax+by=0$,

c) $(a+b)x-(a-b)y=2b$, $x+y=2$ *d)* $ax-cy=c^2$, $cx+ay=2ac$.

Obierz za a, b, c takie wartości, aby układ stał się sprzeczny lub miał nieskończenie wiele rozwiązań.

13. Czy można obrać a w ten sposób, aby układ równań:

$$(a-1)x+ay=8$$
$$ax+(a+1)y=12$$

stał się sprzeczny lub posiadał nieskończenie wiele rozwiązań?

14. Zbadaj, dla jakich wartości c układ równań:

$$cx-2y=4c+2$$
$$\tfrac{1}{2}x-cy=1$$

nie posiada dokładnie jednego rozwiązania, a następnie, ile rozwiązań istnieje dla każdej ze znalezionych wartości.

15. I) Rozwiąż następujące układy równań i zbadaj, dla jakich wartości a, b nie ma rozwiązania lub istnieje nieskończenie wiele rozwiązań:

a) $ax + y = 1$
$x + y = a$

b) $(1 - a)x + 3y = 2$
$x + 3y = 5$

c) $ax - 2y = a$
$(a - 1)x - y = 1$

d) $2x + ay = 4$
$3x - (1 - a)y = 6$

e) $2x + ay = b$
$3x - (1 - a)y = 6$

f) $(1 - a)x + 3y = 2$
$x + 3y = b$.

II) Rozwiąż układy równań:

a) $x + y = a$
$x - y = b$,

b) $x + y = 2(a^2 + b^2)$
$x - y = 4ab$

c) $ax + y = b$
$bx + y = a$

d) $x + ay = b$
$bx + y = a$

e) $ax + by = a^2 + 2ab - b^2$
$ax - by = a^2 + b^2$

f) $ax - by = 0$
$x - y = a$

g) $a(x + y) - b(x - y) = 2a$
$a(x - y) - b(x + y) = 2b$

h) $(a + b)x - (a - b)y = 4ab$
$(a - b)x + (a + b)y = 2a^2 - 2b^2$

i) $ax + by = 2(a^2 - b^2)$
$$\frac{y}{a - b} - \frac{x}{a + b} = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

j) $$ax - by = \frac{a^2 + b^2}{2}$$
$(a - b)x = (a + b)y$

k) $$\frac{x + y - 1}{x - y + 1} = a$$
$$\frac{y - x + 1}{x - y + 1} = ab$$

l) $$\frac{x}{a + b} - \frac{y}{a - b} = \frac{1}{a + b}$$
$$\frac{x}{a + b} + \frac{y}{a - b} = \frac{1}{a - b}.$$

§ 3. Układanie równań

Mając zagadnienie, w którym obok niewiadomych występują liczby dane, oznaczone literami, staramy się najpierw znaleźć równania, które muszą spełniać niewiadome; następnie rozwiązujemy te równania w znany sposób; uwzględniamy przy tym wartości danych liczb, dla których układ jest sprzeczny lub posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Np. Dwie liczby mają następującą własność: jeżeli do pierwszej dodamy 10, otrzymamy liczbę a razy większą od drugiej liczby. Jeżeli zaś do drugiej dodamy 16, otrzymamy liczbę $4a$ razy większą od pierwszej liczby. Co to za liczby?

Oznaczmy szukane liczby przez x, y. Muszą one spełniać równości:

$$\begin{aligned} x+10&=ay \\ y+16&=4ax, \end{aligned} \quad \text{czyli} \quad \begin{aligned} x-ay&=-10 \\ -4ax+y&=-16. \end{aligned}$$

Wyznacznik tego układu wynosi $1-4a^2$.

Jeżeli zatem $4a^2 \neq 1$, to układ ma jedno rozwiązanie:

$$x=\frac{16a+10}{4a^2-1}, \quad y=\frac{40a+16}{4a^2-1}.$$

Jeżeli zaś $4a^2-1=0$, czyli $(2a+1)(2a-1)=0$, to albo $a=-\frac{1}{2}$, albo $a=+\frac{1}{2}$. Podstawiając otrzymamy w pierwszym przypadku układ:

$$x+\tfrac{1}{2}y=-10 \qquad 2x+y=-16.$$

Mnożąc obie strony pierwszego równania przez 2 dostaniemy $2x+y=-20$. Układ jest więc sprzeczny. Podstawiając $a=\frac{1}{2}$ mamy: $x-\frac{1}{2}y=-10, \quad -2x+y=-16.$

Mnożąc obie strony pierwszego równania przez -2 przekonywamy się znowu, że układ jest sprzeczny.

Zadania

16. Wartość ułamka wynosi $\frac{3}{4}$. Jeżeli do licznika dodamy a, do mianownika zaś dodamy b, to wartość otrzymanego ułamka wynosi $\frac{4}{5}$. Oblicz licznik i mianownik tego ułamka. Podstaw $a=2$, $b=1$.

17. Wartość ułamka wynosi $\frac{3}{5}$. Jeżeli do licznika dodamy a, zaś od mianownika odejmiemy a, otrzymamy ułamek równy $\frac{4}{5}$. Oblicz licznik i mianownik tego ułamka. Podstaw $a=5$, $a=40$. Jakie ma być a, żeby to zagadnienie miało rozwiązanie (licznik i mianownik mają być liczbami całkowitymi).

18. Liczba dwucyfrowa jest a razy większa od sumy swych cyfr. Jeżeli od niej odejmiemy liczbę m, otrzymamy liczbę dwucyfrową o tych samych cyfrach w przeciwnym porządku. Co to za liczba? Podstaw $a=7$, $m=27$.

19. Ojciec mówi do syna: Przed a laty miałem a razy więcej lat od ciebie, zaś po b latach będę miał b razy więcej lat od ciebie. Ile lat miał każdy? Podstaw $a=7$, $b=3$.

20. Chłopiec ma 4 *zł* w monetach dwudziestogroszowych i dziesięciogroszowych, przy czym monet dziesięciogroszowych jest a razy więcej. Ile ma monet każdego rodzaju? Wyznacz wszystkie całkowite wartości a, dla których istnieją rozwiązania, i podaj te rozwiązania.

21. Dwóch przyjaciół założyło się o a *zł*. Jeżeli pierwszy wygra

zakład, to będzie miał 3 razy tyle co drugi. Jeżeli zaś przegra zakład, to będzie miał tylko 2 razy tyle. Ile miał każdy?

22. Jeżeli załogę twierdzy powiększy się o a żołnierzy, to zapas żywności wystarczy na m dni krócej. Jeżeli zaś załogę zmniejszy się o a żołnierzy, to zapas wystarczy na n dni dłużej. Ilu żołnierzy liczy załoga i na jak długo starczy zapas? Podstaw $a=3000$, $m=30$, $n=48$.

23. Obwód prostokąta wynosi a *cm*. Różnica dwu boków, wychodzących z tego samego wierzchołka, wynosi r *cm*. Oblicz boki prostokąta. Podstaw $a=36$, $r=7$; $a=18$, $r=10$. Co otrzymałeś w drugim wypadku? Przy jakich a, r zagadnienie ma rozwiązanie?

24. Jeżeli podstawę trójkąta powiększymy o a *cm*, a wysokość zmniejszymy o a *cm*, to pole wzrośnie o 144 cm^2. Jeżeli jednak zmniejszymy podstawę o a *cm*, a powiększymy wysokość o $2a$ *cm*, to pole się nie zmieni. Oblicz podstawę i wysokość. Podstaw $a=4$.

25. Jeżeli długość prostokąta wzrośnie o a *cm*, szerokość o b *cm*, to pole powiększy się o 37 *cm*. Jeżeli zaś długość zmniejszymy o b *cm*, a szerokość o a *cm*, to pole zmniejszy się o 28 cm^2. Oblicz boki tego prostokąta. Podstaw $a=2$, $b=3$.

26. Dwaj cykliści wyjeżdżają równocześnie, pierwszy z miejscowości A, drugi z miejscowości B. Odległość tych miejscowości wynosi d *km*. Jeżeli będą jechać naprzeciw siebie, spotkają się po a godzinach. Jeżeli zaś będą jechać w kierunku AB, to pierwszy doścignie drugiego po b godzinach. Oblicz ich prędkości. Podstaw $d=14$, $a=\frac{1}{2}$, $b=3\frac{1}{2}$. Czy to zadanie ma rozwiązanie dla dowolnych dodatnich a, b, d?

27. Łódź motorowa przebyła a *km* z prądem i b *km* przeciw prądowi w t godzinach. Innym razem ta sama łódź przebyła a' *km* z prądem i b' *km* przeciw prądowi w t' godzinach. Oblicz prędkość łodzi w stojącej wodzie i prędkość prądu.

Wskazówka: W otrzymanym układzie równań wprowadź odpowiednie niewiadome pomocnicze.

28. Odległość dwu stacyj kolejowych wynosi d *km*. Z obu stacyj wyjeżdżają równocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi. Po 1 godzinie są jeszcze odległe o 15 *km*, po dalszych 20 minutach, podczas których nastąpiło skrzyżowanie, odległość

wynosi 10 *km*. Wyznacz prędkości pociągów. Wykaż, że otrzymany układ równań jest sprzeczny albo posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Przy jakim d istnieją rozwiązania? Podaj kilka z nich?

29. Po obwodzie koła o długości l *m* poruszają się dwa punkty, które spotykają się co a sekund, jeżeli ich kierunki są te same, zaś co b sekund, jeżeli kierunki są przeciwne. Oblicz prędkość każdego z nich.

Wskazówka: Załóż, że w chwili początkowej oba punkty są w tym samym miejscu. Podstaw $l=80$, $a=30$, $b=5$.

30. Kapitał przynosi a *zł* dochodu rocznie. Gdyby stopa procentowa wynosiła o 2% więcej, dochód roczny powiększyłby się o m *zł*. Oblicz kapitał i stopę. Podstaw $a=135$, $m=90$.

31. Pierwszy kapitał jest o a *zł* większy od drugiego. Ponieważ jednak przynosi o $\frac{1}{2}$% mniej, dochody z obu kapitałów są równe. Gdyby jednak umieszczono pierwszy kapitał na ten sam procent, co drugi, a drugi na ten sam procent, co pierwszy, to dochód roczny z pierwszego kapitału wynosiłby o b *zł* więcej niż dochód z drugiego kapitału. Oblicz te kapitały. Podstaw $a=400$, $b=30$.

32. Ktoś złożył część swoich pieniędzy na p%, resztę na q% i otrzymywał rocznie a *zł* odsetek. Gdyby złożył pierwszą część na q%, a drugą na p%, dochód roczny wynosiłby b *zł*. Oblicz *a)* ile miał razem pieniędzy, nie wyznaczając przedtem poszczególnych części, *b)* ile wynosiły te części. Podstaw $p=5$, $q=6$, $a=337$, $b=345$.

33. Do zbiornika prowadzą dwie rury. Jeżeli pierwsza rura będzie otwarta przez a minut, druga przez b minut, to wpłynie 340 l wody. Jeżeli zaś pierwsza rura będzie otwarta przez b minut a druga przez a minut, to wpłynie tylko 310 l. Ile l wpływa każdą rurą w 1 minucie? Podstaw $a=5$, $b=8$. Przy jakich a, b otrzymany układ równań jest sprzeczny?

34. Ciężary właściwe dwu metali wynoszą a, b. Ile *kg* każdego z tych ciał trzeba wziąć, aby otrzymać m *kg* aliażu o ciężarze właściwym c? Podstaw $a=8{,}9$, $b=7{,}1$, $c=8{,}3$ (miedź, cynk, mosiądz), $m=10$.

35. Jeżeli się stopi a *g* pewnego metalu i b *g* innego metalu, to ciężar właściwy stopu wynosi s. Jeżeli zaś stopi się a' *g* pierwszego metalu i b' *g* drugiego metalu, otrzymamy stop

o ciężarze właściwym s'. Ile wynoszą ciężary właściwe tych metali? Podstaw $a=36$, $b=35,2$, $s=7,91$; $a'=86,4$, $b'=220$, $s'=8,28$.

36. Dwa zbiorniki zawierają wodę. Jeżeli zmieszamy a l wody z pierwszego zbiornika i b litrów wody z drugiego zbiornika, otrzymamy wodę o temperaturze 48^0. Jeżeli zaś weźmiemy z pierwszego zbiornika o 60 l mniej, z drugiego o 60 l więcej, otrzymamy wodę o temperaturze 36^0. Jaką temperaturę ma woda w każdym zbiorniku? Podstaw $a=240$, $b=260$.

ROZDZIAŁ X

Wykresy równań o dwóch niewiadomych

§ 1. Wykres funkcji liniowej

Zajmiemy się teraz wykresami takich funkcyj, jak $y=2x+3$, $y=-5x+7$, $y=2x$ i t. d. Są to funkcje kształtu $y=mx+n$, gdzie m, n oznaczają liczby dane, zaś x, y zmienne. Zbadamy najpierw wykres funkcji $y=mx$. Załóżmy, że $m>0$.

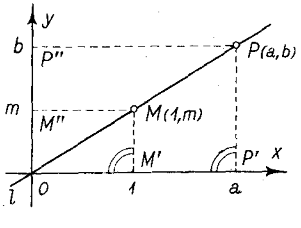
Jeżeli $x=0$, to $y=0$, jeżeli $x=1$, to $y=m$. Obierzmy prostokątny układ i zaznaczmy punkty $O\,(0,0)$, $M\,(1,m)$, które oczywiście leżą na wykresie funkcji $y=mx$ (Rys. 19).

Poprowadźmy przez punkty O i M prostą l. Wykażemy, że ta prosta jest wykresem naszej funkcji. Prosta l przechodzi przez I i III ćwiartkę. Obierzmy na prostej l w I ćwiartce dowolny punkt P. Współrzędne punktu P oznaczmy literami a, b. Więc $a>0$ i $b>0$ ponadto $OP'=a$, $OP''=b$.

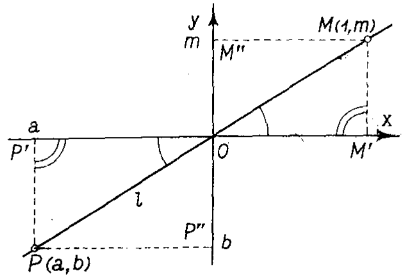
Zauważmy, że trójkąty MOM' i POP' są podobne.

Mają bowiem $\sphericalangle O$ wspólny, kąty zaś $\sphericalangle M'$ i $\sphericalangle P'$ są równe, jako kąty proste. Z podobieństwa tych trójkątów wynika:

$$\frac{PP'}{MM'}=\frac{OP'}{OM'}.$$



Rys. 19.



Rys. 20.

Ponieważ $PP' = OP'' = b$, $MM' = OM'' = m$, $OP' = a$, $OM' = 1$ więc . $\frac{b}{m} = \frac{a}{1}$ stąd $b = ma$.

Zauważmy, że dla funkcji $y = mx$ wartości $x = a$ odpowiada $y = ma$. Zatem punkt o współrzędnych (a, ma) należy do wykresu. Ponieważ $ma = b$, więc punktem tym jest P. Zatem punkt P należy do wykresu. Lecz punkt P obraliśmy dowolnie na prostej l w ćwiartce I. A więc wykazaliśmy, że cała część prostej l, leżąca w ćwiartce I, należy do wykresu funkcji $y = mx$.

Obierzmy teraz na prostej l dowolny punkt P w ćwiartce III (Rys. 20). Oznaczając, jak poprzednio, współrzędne punktu P literami a, b, mamy: $a < 0$, $b < 0$ i $OP' = -a$, $OP'' = -b$, gdyż OP' i OP'' są liczbami dodatnimi.

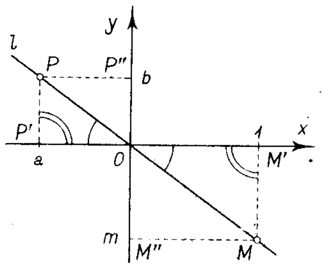
Podobnie jak poprzednio stwierdzamy, że trójkąty MOM' i POP są podobne. Z podobieństwa dostajemy:

$$\frac{PP'}{MM'} = \frac{OP'}{OM'}, \text{ czyli } \frac{-b}{m} = \frac{-a}{1}, \text{ stąd } b = ma.$$

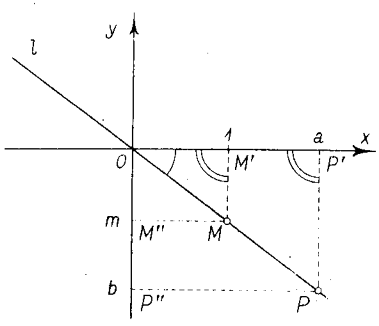
Rozumując jak poprzednio, dochodzimy do wniosku, że punkt P należy do wykresu funkcji $y = mx$.

A więc ta część prostej l, która leży w ćwiartce III, należy także do wykresu. Ponieważ punkt O znajduje się na wykresie, więc cała prosta l mieści się w wykresie naszej funkcji. Z drugiej strony, wykres nie może zawierać punktów poza prostą l. Na każdej bowiem prostopadłej do osi X leży tylko jeden punkt wykresu; więc punktem tym musi być punkt przecięcia się tej prostej z prostą l. Zatem prosta l jest wykresem funkcji $y = mx$.

Przypuśćmy teraz, że $m < 0$. Wyznaczając prostą l przez punkty O $(0,0)$, $M(1, m)$ przekonywamy się, że prosta l przechodzi przez ćwiartki II i IV. Postępując jak poprzednio (obierając najpierw punkt P w ćwiartce II rys 21, potem w ćwiartce IV rys. 22), do-



Rys. 21.



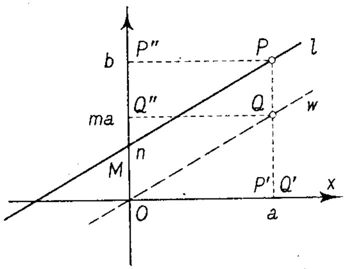
Rys. 22.

chodzimy do wniosku, że i w tym przypadku prosta l jest wykresem funkcji $y = mx$.

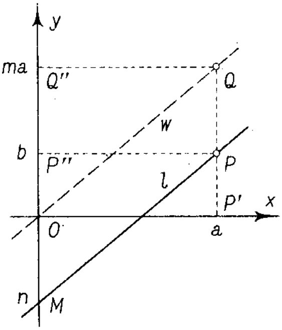
Przypuśćmy w końcu, że $m = 0$, zatem $y = 0 \cdot x$. Łatwo zauważymy, że dla każdej wartości x odpowiednia wartość $y = 0$. Zatem punktami wykresu są punkty o współrzędnych: x dowolne, $y = 0$. Punkty te tworzą oś X. Zatem oś X jest wykresem.

Możemy więc powiedzieć: wykresem funkcji $y = mx$ jest linia prosta przechodząca przez początek układu.

Przejdźmy teraz do wykresu funkcji $y = mx + n$. Załóżmy na razie, że $n > 0$. (Rys. 23).



Rys. 23.



Rys. 24.

Narysujmy najpierw wykres funkcji $y = mx$. Będzie to prosta w, przechodząca przez początek układu. Przez punkt $M(0, n)$, leżący na osi Y, poprowadźmy prostą l równoległą do w. Wykażemy, że prosta l jest wykresem funkcji $y = mx + n$.

Obierzmy w tym celu na prostej l dowolny punkt P; współrzędne punktu P oznaczmy literami a, b. Zaznaczmy na prostej w punkt Q o odciętej a.

Ponieważ punkt Q leży na wykresie funkcji $y = mx$, więc jego rzędna wynosi ma. A więc punkt Q ma współrzędne (a, ma).

Mamy: $QP = Q''P''$, $QP = OM$; więc:

$$Q''P'' = OM = n.$$

Ponieważ rzędna punktu Q'' wynosi ma, zaś punkt P'' leży o n jednostek ponad punktem Q'', zatem rzędna punktu P'' równa się $ma + n$. A więc $b = ma + n$.

Zauważmy, że dla funkcji $y = mx + n$ wartości $x = a$ odpowiada $y = ma + n$. Więc punkt o współrzędnych $(a, ma + n)$ leży na wykresie funkcji $y = mx + n$. Ponieważ $ma + n = b$, więc punktem tym jest punkt P. Zatem punkt P należy do wykresu funkcji $y = mx + n$. Lecz punkt P był dowolnym punktem prostej l. A więc prosta l jest wykresem funkcji $y = mx + n$.

Jeżeli $n < 0$, to postępując jak poprzednio (rys. 24), przekonamy się również, że wykresem funkcji $y = mx + n$ jest prosta l.

(Różnica w dowodzie będzie następująca: ponieważ $n < 0$, więc punkt P'' leży poniżej punktu Q''; współrzędna punktu P będzie wynosiła $ma - (-n) = ma + n$).

A więc wykresem funkcji $y = mx + n$ jest linia prosta.

Dlatego funkcję $y = mx + n$ nazywamy funkcją *liniową.*

Uwaga 1. Jeżeli chcemy wykonać wykres funkcji np. $y = 2x + 3$, to ponieważ wiemy, że wykresem będzie linia prosta, więc wystarczy zaznaczyć dwa punkty wykresu i połączyć je prostą. W naszym przypadku mamy np. dla $x = 1$, $y = 5$, dla $x = 2$, $y = 7$. Zatem wykresem będzie prosta przechodząca przez punkty $A(1,5)$, $B(2,7)$.

Uwaga 2. Wykres funkcji $y = mx + n$ jest równoległy do prostej będącej wykresem funkcji $y = mx$.

Jeżeli więc dwie funkcje $y = mx + n'$ i $y = mx + n''$ mają współczynniki przy zmiennej x równe, to proste będące wykresami tych funkcyj są równoległe, gdyż obie są równoległe do wykresu funkcji: $y = mx$. Np. wykresy funkcyj $y = 2x - 5$ i $y = 2x + 6$ są prostymi równoległymi.

Jeżeli dwie funkcje $y = m'x + n'$ i $y = m''x + n''$ mają współczynniki przy zmiennej x różne, tj. $m' \neq m''$, to wykresy ich nie są równoległe. Wykresy tych funkcyj są bowiem równoległe do wykresów funkcyj $y = m'x$, względnie $y = m''$, tj. do dwóch prostych przecinających się w punkcie O.

Np. wykresy funkcyj $y = 2x + 3$ i $y = 5x + 3$ nie są równoległe.

Uwaga 3. Gdybyśmy obrali na osiach różne jednostki, to wykresem funkcji $y = mx + n$ będzie również linia prosta. Dowód w niczym nie różni się od poprzedniego.

Zadania

1. Wykonaj wykresy funkcyj liniowych:

a) $y = x$, *b)* $y = -x$, *c)* $y = \frac{3}{5}x$,

d) $y = -\frac{2}{3}x$, *e)* $y = 1{,}3x + 2$, *f)* $y = -3x + 7$.

g) $y = \dfrac{3x + 4}{5}$, *h)* $y = \dfrac{-2x + 3}{4}$, *i)* $y = -\dfrac{3x}{2} + 2$.

2. Cyklista jedzie z prędkością 15 *km/godz.* Przedstaw drogę przebytą jako funkcję czasu i wykonaj wykres tej funkcji. Odczytaj z wykresu:
a) drogę przebytą w 35 minutach, w 1 godz. 25 min., w 2 godz. 50 min.
b) w jakim czasie cyklista przebywa 20 *km*, 35 *km*, 40 *km*. Sprawdź wynik rachunkiem.

3. Przy termometrach używano dawniej skali Reaumura, w której punkt zerowy jest ten sam, co w skali Celsjusza, zaś $100^0 C$ odpowiada $80^0 R$. Przedstaw liczbę stopni skali Celsjusza, odpowiadającą x^0 skali Reaumura jako funkcję zmiennej x, i wykonaj wykres tej funkcji. Odczytaj i sprawdź:
a) ile stopni Celsjusza odpowiada -15^0, $+4^0$, $+87^0$ Reaumura?
b) ile stopni Reaumura odpowiada -35^0, -42^0, $+65^0$ Celsjusza?

4. Jedna marka niemiecka kosztuje 2,12 *zł*. Przedstaw wartość w *zł* x marek niemieckich jako funkcję zmiennej x i wykonaj wykres tej funkcji. Odczytaj *a)* ile *zł* kosztuje 15, 24, 45 marek, *b)* ile marek można dostać za 30, 45, 60 *zł*.

5. Księgarnia otrzymuje od nakładcy książkę po cenie o 30% niższej od ceny sprzedaży. Wykonaj wykres, pozwalający wyznaczać cenę płaconą przez księgarnię z ceny sprzedaży, i naodwrót. Odczytaj, ile płaci księgarnia za książkę, która kosztuje 5,20, 7,80, 15,40 *zł*?

6. Prędkość głosu w powietrzu wynosi okrągło 330 *m/sek*. Przedstaw na wykresie drogę przebytą przez głos jako funkcję czasu, dla wartości czasu od 0 do 20 sek., obierając odpowiednie jednostki na osiach.

7. Pociąg pośpieszny wyjeżdża ze stacji A o godzinie 15^{30}. Prędkość pociągu wynosi 60 *km*/godz. W najbliższej stacji B zatrzymuje się o godz. 17^{45}. Przedstaw odległość pociągu od stacji A jako funkcję czasu i wykonaj wykres tej funkcji. Odczytaj z wykresu odległość stacyj A, B.

8. Na podstawie wykresu z poprzedniego zadania odpowiedz na następujące pytania: *a)* W jakiej odległości od stacji A znajduje się pociąg o godz. 16?, *b)* o której godzinie odległość ta wynosić będzie 100 *km*? *c)* o której godzinie pociąg będzie w połowie drogi? Następnie sprawdź wyniki przy pomocy wzoru otrzymanego poprzednio.

§ 2. Wykres równania $ax + by = c$.

Przypuśćmy, że mamy równanie o dwóch niewiadomych, np.:

$$4x + 2y = 6. \tag{1}$$

Aby otrzymać rozwiązania, obierzmy np. x dowolnie a y wyznaczmy z równania. Dostaniemy:

$$y = \frac{6 - 4x}{2}, \quad \text{czyli } y = -2x + 3.$$

Podstawiając za x rozmaite liczby otrzymamy szereg rozwiązań, które przedstawia tabelka:

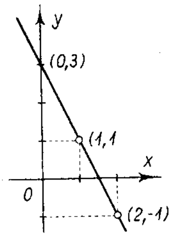
x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
y	7	6	5	4	3	2	1	0	-1

Obierzmy dowolny prostokątny układ współrzędnych.

Gdybyśmy zaznaczyli wszystkie punkty o współrzędnych x,y, które spełniają równanie (1), otrzymalibyśmy pewną linię zwaną w y k r e s e m r ó w n a n i a (1).

Linię tę dostaniemy (w przybliżeniu) przedstawiając graficznie wyżej podaną tabelkę (rys. 25).

A więc jeżeli jakiś punkt leży na wykresie równania (1), to współrzędne jego (x,y) spełniają równanie (1); na odwrót, jeżeli współrzędne (x,y) jakiegoś punktu spełniają równanie (1), to punkt ten leży na wykresie równania (1).



Rys. 25.

Zauważmy, że każdą parę liczb spełniających równanie (1) możemy uważać za odpowiadające sobie wartości zmiennych x, y funkcji $y = -2x + 3$. Wynika stąd, że wykres równania (1) będzie równocześnie wykresem funkcji $y = -2x + 3$.

A zatem wykres równania $4x + 2y = 6$ jest linią prostą. Aby więc otrzymać wykres danego równania, wystarczy zaznaczyć na płaszczyźnie dwa punkty wykresu i przeprowadzić przez nie linię prostą. Dwa rozwiązania dostaniemy najprościej podstawiając najpierw $x = 0$, następnie $y = 0$. Otrzymamy w ten sposób rozwiązania: $(0,3)$, $(\frac{3}{2},0)$.

Podobnie postępując, przekonamy się, że wykresem równania np. $2x - 3y = 6$ jest linia prosta. Kładąc $x = 0$ otrzymamy $y = -2$, kładąc $y = 0$ otrzymamy $x = 3$. Zaznaczając na płaszczyźnie punkty $(0, -2)$ i $(3,0)$ i przeprowadzając przez nie linię prostą, otrzymujemy wykres danego równania.

Weźmy teraz pod uwagę równanie:

$$ax + by = c \tag{2}$$

gdzie a, b, c są liczbami danymi, zaś x, y oznaczają niewiadome.

1) Jeżeli $b \neq 0$, to podstawiając za x dowolną liczbę, dostaniemy:
$$y = \frac{c - ax}{b}, \text{ czyli } y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

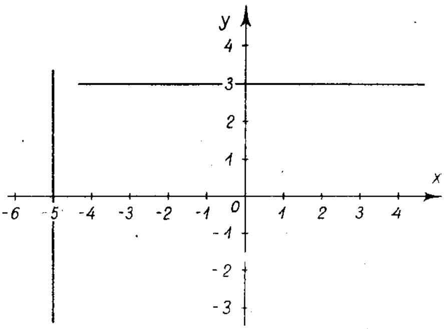
Kładąc $-\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{b} = n$ otrzymujemy:
$$y = mx + n \tag{3}$$

Każda para liczb (x, y), spełniająca równanie (2), spełnia rowność (3) i na odwrót. Możemy zatem (jak poprzednio) uważać układ liczb x, y, spełniających równanie (2), za parę odpowiadających sobie wartości zmiennych x, y funkcji $y = mx + n$. Zatem wykres równania $ax + by = c$ jest równocześnie wykresem funkcji $y = mx + n$. Wynika stąd, że jeżeli $b \neq 0$, to wykresem równania $ax + by = c$ jest linia prosta.

Uwaga. Jeżeli $b \neq 0$, zaś $a = 0$, to równanie (2) ma postać $0 \cdot x + by = c$. Rozwiązaniami są pary liczb: x dowolne, $y = \frac{c}{b}$. Wykresem jest linia prosta równoległa do osi X i przecinająca oś Y w punkcie o rzędnej $\frac{c}{b}$.

Np. równanie $0 \cdot x + 2y = 6$ ma rozwiązania: x dowolne, $y = 3$. Wykresem będzie linia prosta prostopadła do osi Y, przecinająca tę oś w punkcie o rzędnej 3 (Rys. 26.)

2) Przypuśćmy teraz, że $b = 0$. Równanie (2) przyjmie postać:
$$ax + 0 \cdot y = c. \tag{4}$$
Jeżeli $a \neq 0$, to rozwiązaniami równania są: $x = \frac{c}{a}$, y dowolne. Wykresem równania (4) będzie zatem zatem linia prosta prostopadła do osi X w punkcie o odciętej $x = \frac{c}{a}$.



Rys. 26.

Np. równanie: $2x + 0 \cdot y = -10$ ma rozwiązania: $x = -5$, y dowolne. Wykresem będzie więc prosta (rys. 26) prostopadła do osi X w punkcie o odciętej -5.

Zbierając możemy powiedzieć: **jeżeli w równaniu $ax + by = c$ jedna z niewiadomych ma współczynnik różny od zera, to wykresem równania jest prosta.**

W szczególnych przypadkach: 1) jeżeli $a \neq 0$, $b = 0$, to wykresem jest prosta prostopadła do osi X, 2) jeżeli $b \neq 0$, $a = 0$, to wykresem jest prosta prostopadła do osi Y, 3) jeżeli $a \neq 0$, $b \neq 0$, to wykresem jest prosta nie prostopadła (ani zatem równoległa) do żadnej osi.

3) Jeżeli $a = 0$, $b = 0$, to równanie (2) ma postać $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$.

Jeżeli $c \neq 0$, to równanie nie posiada rozwiązania, zatem nie ma wykresu.

Jeżeli $c = 0$, to każda para liczb spełnia równanie. W tym przypadku całą płaszczyznę moglibyśmy uważać za wykres danego równania.

Zadania

9. Wykonaj wykres równań:

a) $3x - 4y = 7$ *b)* $2x + 5y = 14$ *c)* $\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}y = 1$
d) $5{,}2x + y = 10$ *e)* $4y = 7$ *f)* $2x = 5$
g) $y + 2x = 9$ *h)* $2x + 7y = 11$. *i)* $-\frac{3}{4}y = \frac{7}{8}$.

Odczytaj wartości y, odpowiadające $x = -2, -1, 0, \frac{2}{3}, 4$, oraz wartości x, odpowiadające $y = -\frac{4}{5}, -\frac{3}{2}, 0, 2, \frac{5}{8}$; czy we wszystkich przykładach istnieją takie wartości?

10. W których punktach wykres równania przecina oś X i oś Y?

a) $x + 2y = 8$ *b)* $4x - 3y = 7$ *c)* $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y = \frac{1}{10}$
d) $3{,}2x - 4{,}3y = 5{,}8$ *e)* $5{,}2x = 4{,}3$ *f)* $7{,}2y = 4$.

11. Wykaż, że prosta, będąca wykresem równania $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$), przecina oś X w punkcie $(a, 0)$, oś Y w punkcie $(0, b)$. Korzystając z tego, wykonaj wykres równań:

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ *b)* $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$ *c)* $-\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$.

12. Sporządź wykresy równań: $ax + by = 5$ $bx - ay = 4$
dla *a)* $a = 1$, $b = 2$ *b)* $a = 2$, $b = -1$
c) $a = -3$, $b = -2$.

Jaki kąt tworzą tworzą proste w przypadkach *a)*, *b)* i *c)*.

13. Sporządź (na jednym rysunku) wykres równania:

$$a(x - 2) + b(y - 3) = 0$$

dla $a = 3$, $b = 2$ $a = -1$, $b = 0$, $a = 0$, $b = 2$, $a = -1$, $b = -1$. Przez jaki punkt przechodzą te proste?

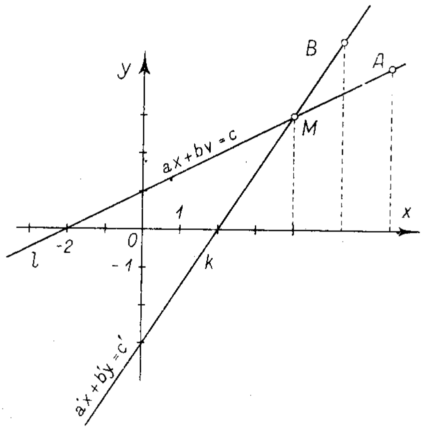
§ 3. Wykres układu równań.

Mamy układ równań: $ax + by = c$

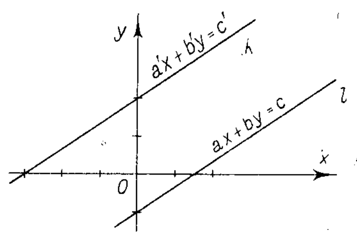
$$a'x + b'y = c'.$$

Załóżmy, że w każdym równaniu przynajmniej jeden ze współczynników przy niewiadomych jest różny od zera.

Wykresami tych równań będą dwie proste l i k. Proste l, k albo przecinają się w jednym punkcie (rys. 27), albo są równoległe (rys. 28), albo są identyczne (rys. 29).

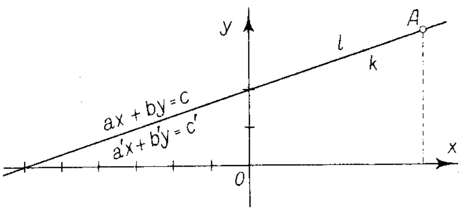


Rys. 27.



Rys. 28.

Przypuśćmy, że proste l i k przecinają się w jednym punkcie, jak na rys. 27. Jeżeli obierzemy dowolny punkt A na prostej l, to współrzędne jego spełniają równanie pierwsze. Jeżeli obierzemy jakiś punkt, np. B na prostej k, to współrzędne jego spełniają równanie drugie.



Rys. 29.

Wynika stąd, że współrzędne punktu M przecięcia prostych l i k spełniają oba równania. Zatem współrzędne punktu M dają nam rozwiązanie układu (1). Innego rozwiązania układ nie posiada, bo tylko punkt M ma tę własność, że leży na obu prostych równocześnie.

Np. mamy układ: $x - 2y = -2, \quad 3x - 2y = 6$.

Ponieważ wyznacznik wynosi $1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2) = 4 \neq 0$, więc układ równań posiada jedno tylko rozwiązanie.

Na rys. 27 mamy wykresy obu równań układu. Są to wykresy funkcyj $y = \frac{1}{2}x + 1$ i $y = \frac{3}{2}x - 3$. Proste te nie są równoległe, bo współczynniki $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{2}$ są różne; przecinają się w punkcie M (4, 3).

Przypuśćmy teraz, że proste l i k są równoległe (rys. 28). Jeżeli jakiś punkt leży na prostej l, to nie leży na prostej k i na odwrót. Zatem para liczb spełniająca równanie pierwsze nie spełnia drugiego i na odwrót. A więc układ nie ma rozwiązania.

Np. $6x - 9y = 9, \quad 2x - 3y = -6.$

Wyznacznik wynosi $6 \cdot (-3) - 2 \cdot (-9) = 0$.

Mnożąc obie strony równania drugiego przez 3 dostaniemy:

$$6x - 9y = -18.$$

A więc układ jest sprzeczny.

Na rys. 28 mamy wykresy obu równań układu. Są to wykresy funkcyj $y = \frac{2}{3}x - 1$ i $y = \frac{2}{3}x + 2$. Proste te są równoległe, gdyż obie są równoległe do prostej $y = \frac{2}{3}x$.

Załóżmy teraz, że proste l i k są identyczne (Rys. 29). A zatem każdy punkt, który leży na prostej l, leży na prostej k i na odwrót. W tym przypadku każde rozwiązanie równania pierwszego jest równocześnie rozwiązaniem równania drugiego i na odwrót.

Np. $\frac{1}{3}x - y = -2, \quad x - 3y = -6.$

Wyznacznik wynosi $\frac{1}{3} \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 = 0$. Mnożąc obie strony równania pierwszego przez 3 otrzymujemy równanie drugie; zatem każde rozwiązanie równania pierwszego jest równocześnie rozwiązaniem drugiego i na odwrót. Na rys. 29 mamy wykresy obu równań układu. Jest to wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Na odwrót widzimy stąd, jeżeli układ (1) posiada jedno tylko rozwiązanie, to proste l i k przecinają się w jednym punkcie; jeżeli układ jest sprzeczny, to proste l i k są równoległe; jeżeli układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań, to proste l i k są identyczne.

Zadania

14. Zbadaj rachunkiem, czy wykresy równań są prostymi przecinającymi się, równoległymi lub identycznymi. Sporządź również wykresy:

a) $x + y = 5$, $y = x$ *b)* $x - y = 2$, $y = 2x$ *c)* $x + y = 2$, $x - y = 2$

d) $2x + 3y = 2$, $6x + 5y = 4$ *e)* $15x + 10y = 4$, $6x + 4y = 1$ *f)* $18x - 24y = 11$, $24x - 3y = \frac{44}{3}$

g) $2{,}3 - 4{,}3y = -1{,}8$ $\quad 1{,}4x + 2{,}5y = 4{,}2$
h) $\frac{3}{4}x + 2y = 5$ $\quad 2x + \frac{5}{8}y = 9$
i) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = \frac{1}{2}$ $\quad 18x - 16y = 15$

k) $12x - 15y = 1{,}2$ $\quad 4x - 5y = 0{,}4$
l) $6{,}3x - 3{,}5y = 1$ $\quad 1{,}8x - y = \frac{2}{7}$
m) $\frac{3}{8}x + \frac{7}{6}y = 1$ $\quad 9x + 38y = 5.$

15. Przedstaw na wykresie układ równań dla podanych wartości liczby m:

a) $mx + y = 2m$ $\quad 2mx - y = m + 1$
b) $m^2x - my = 4$ $\quad -mx + y = 1$

c) $mx - 2y = m + 2$ $\quad -2x + my = m^2 - 4$
d) $(m+1)x - (m-1)y = m$ $\quad -(m+1)^2x + (m^2-1)y = m^3$

a) $m = 0,\ 1$ *b)* $m = 1,\ -4$ *c)* $m = 0,\ -2,\ +2$ *d)* $m = 0,\ 1.$

Spis treści

Wyrażenia ułamkowe

Funkcje

Rozdział V.

Rozdział VI.

Rozdział VII.

Równania stopnia pierwszego o współczynnikach literowych

Rozdział VIII.

Rozdział IX.

Równania o dwóch niewiadomych

Rozdział X.

Wykresy równań o dwóch niewiadomych