STEFAN BANACH

ALGEBRA

DLA III KLASY GIMNAZJALNEJ

WYDANIE PIĄTE

KSIĄŻNICA-ATLAS * WROCŁAW—WARSZAWA
1947

STEFAN BANACH

ALGEBRA

DLA III KLASY GIMNAZJALNEJ

WYDANIE PIĄTE

KSIĄŻNICA - ATLAS
WROCŁAW - WARSZAWA
1947

Podręcznik zatwierdzony do użytku szkolnego na r. szk. 1947/8 pismem Min. Oświaty z dn. 29. V 1947 r. Nr VI OC — 1128/47

Nakład: 41.000—55.000 egz. Papier: 61 x 86, gr 80, kl. 7.

Data wydania: sierpień 1947 r.

2666

PAŃSTWOWE ZAKŁADY GRAFICZNE Nr 2, WROCŁAW — 630 F (17241)

Wyrażenia pierwiastkowe

Rozdział I

Pierwiastek kwadratowy

§ 1. Określenie pierwiastka kwadratowego

Często spotykamy się z zadaniem: ile *cm* ma bok kwadratu, którego pole jest znane? Jeżeli pole wynosi np. 16 cm^2, to łatwo odgadniemy, że bok ma 4 *cm*, bo $4^2 = 16$.

Zadanie powyższe prowadzi do następującego zagadnienia arytmetycznego: dana jest jakaś liczba, np. 16; znaleźć liczbę, której kwadrat równa się 16.

Liczbą taką jest 4, bo $4^2 = 16$. Mamy również $(-4)^2 = 16$. Zatem liczba -4 przedstawia także rozwiązanie. (Ujemne rozwiązanie nie ma oczywiście znaczenia dla zadania z polem kwadratu, gdyż długość boku kwadratu wyraża się liczbą dodatnią).

Liczbę 4, jak również liczbę -4, nazywamy *pierwiastkiem kwadratowym* lub *drugim pierwiastkiem* liczby 16.

Ogólnie: *pierwiastkiem kwadratowym liczby a nazywamy każdą liczbę, której kwadrat równa się a.*

Przykłady:

1) 9 ma pierwiastki kwadratowe 3 i -3 bo $3^2 = (-3)^2 = 9$
 25 „ „ „ 5 i -5 „ $5^2 = (-5)^2 = 25$
 $\frac{25}{81}$ „ „ „ $\frac{5}{9}$ i $-\frac{5}{9}$ „ $(\frac{5}{9})^2 = (-\frac{5}{9})^2 = \frac{25}{81}$

2) $25^2 = 625$, więc 25 jest drugim pierwiastkiem liczby 625.
 $(-17)^2 = 289$, więc -17 jest drugim pierwiastkiem liczby 289.

Zadania

1. Podaj pierwiastki kwadratowe następujących liczb:
 a) 1, 49, 121, 225
 b) 0,01, 0,49, 0,0036, 1,44

c) $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{49}{36}$, $\frac{81}{2500}$
d) 100, 10 000, 1 000 000, 100 000 000

2. Jaka to jest liczba, której drugim pierwiastkiem jest *a)* 1, *b)* 5, *c)* -7, *d)* 0,3, *e)* $\frac{2}{5}$?
3. Ile *m* ma bok kwadratu, którego pole wynosi: *a)* 36 m^2, *b)* $\frac{16}{25}$ m^2, *c)* 0,0049 m^2?
4. Jakie musiałby mieć rozmiary plac w kształcie kwadratu, na którym można by umieścić ludność *a)* całej Polski, *b)* całego świata, jeżeli na jednego człowieka przypadałoby $\frac{1}{4}$ m^2 (tj. kwadrat o boku $\frac{1}{2}$ *m*)? Dla prostoty rachunku przyjmij, że ludność Polski wynosi 36 000 000, ludność zaś całego świata 2 500 000 000.

Zajmiemy się w tym ustępie pytaniem, czy każda liczba posiada pierwiastek kwadratowy. Zbadajmy np., czy liczba -4 ma pierwiastek kwadratowy. Mamy więc znaleźć taką liczbę x, aby

$$x^2 = -4.$$

Jest oczywiste, że nie ma takiej liczby x, bo kwadrat jakiejkolwiek liczby nigdy nie jest ujemny. A więc -4 nie ma drugiego pierwiastka. To samo odnosi się do każdej innej liczby ujemnej. Zatem **żadna liczba ujemna nie posiada pierwiastka kwadratowego.**

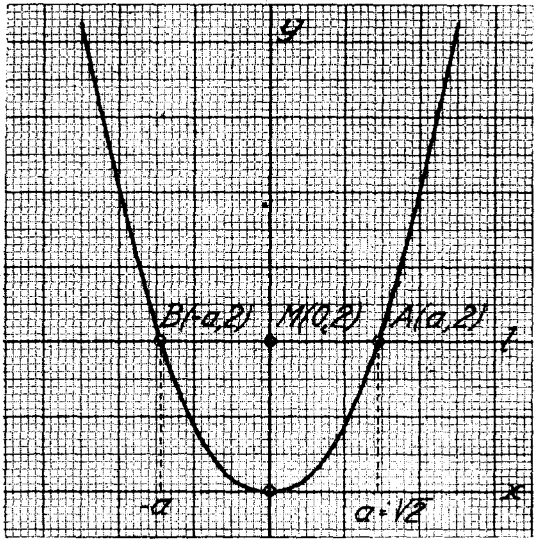
Pozostaje do rozstrzygnięcia, czy każda liczba dodatnia ma pierwiastek kwadratowy. Zbadajmy np., czy liczba 2 posiada drugi pierwiastek. Mamy: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ itd. Widzimy więc, że nie ma liczby całkowitej, której kwadrat równałby się 2.

Można jednak udowodnić, że istnieje pewna liczba dodatnia, której kwadrat równa się 2. Przekonamy się o tym intuicyjnie. Wykreślmy obraz graficzny funkcji $y = x^2$ (tabelka i wykres na następnej stronie).

Poprowadźmy prostą l równoległą do osi x-ów przez punkt M (0, 2). Prosta l przecina prawą część wykresu (położoną w I ćwiartce) w punkcie A o współrzędnych (a, 2). Mamy zatem:

$$2 = a^2.$$

Więc a jest pierwiastkiem kwadratowym liczby 2. Z wykresu odczytujemy, że w przybliżeniu $a = 1{,}4$. Oczywiście nie ma innej liczby dodatniej, której kwadrat wynosiłby 2. Widać to z wykresu, gdyż prosta l przecina tylko w jednym punkcie prawą część



x	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$
y	$6,25$	4	$2,25$	1	$0,25$	0	$0,25$	1	$2,25$	4	$6,25$

wykresu. Możemy to również sprawdzić w następujący sposób: jeżeli $x > a$, wówczas $x^2 > a^2$, czyli $x^2 > 2$. Jeżeli zaś x jest dodatnie i $x < a$, to $x^2 < a^2$, czyli $x^2 < 2$.

Zauważmy, że $(-a)^2 = a^2$, zatem $(-a)^2 = 2$.

Widzimy stąd, że $-a$ (tj. w przybliżeniu: $-1,4$) jest również pierwiastkiem kwadratowym liczby 2.

Wykażemy teraz, że nie ma innej liczby ujemnej, której kwadrat wynosiłby 2. Jeżeli bowiem $x < 0$ i $x^2 = 2$, wówczas również $(-x)^2 = 2$. Zatem $-x$ jest również pierwiastkiem kwadratowym liczby 2. Ponieważ $-x > 0$, zaś a jest jedynym dodatnim pierwiastkiem kwadratowym liczby 2, więc $-x = a$, czyli $x = -a$. A więc istnieje tylko jedna liczba ujemna. tj. $-a$, której kwadrat równa się 2. Widać to również z wykresu, gdyż prosta l przecina lewą część wykresu tylko w jednym punkcie B $(-a, 2)$.

Widzimy zatem, że liczba 2 posiada tylko dwa pierwiastki kwadratowe, równe w przybliżeniu 1,4 i $-1,4$.

W podobny sposób intuicyjny można się przekonać, że **każda liczba dodatnia posiada dokładnie dwa pierwiastki kwadratowe; pierwiastki te mają moduły równe, znaki zaś przeciwne.**

Pierwiastkiem kwadratowym liczby 0 jest oczywiście 0, bo $0^2=0$.

Ponieważ kwadrat liczby różnej od zera jest różny od zera, więc 0 posiada tylko jeden pierwiastek kwadratowy, równy 0.

Jeżeli m jest liczbą dodatnią, wówczas dodatni pierwiastek kwadratowy liczby m oznaczamy symbolem:

$$\sqrt{m}$$

Np. $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, $\sqrt{9}=3$ itd.

Pierwiastek ujemny liczby m wynosi zatem:

$$-\sqrt{m}$$

A więc liczba dodatnia m ma pierwiastki kwadratowe:

$\sqrt{m}$ i $-\sqrt{m}$ lub, jak krótko piszemy, $\pm\sqrt{m}$.

Np. 16 ma pierwiastki kwadratowe $\pm\sqrt{16}$, a więc $+4$ i -4.
25 ma pierw. kwadr. $\pm\sqrt{25}$, a więc $+5$ i -5.

Pierwiastek kwadratowy liczby 0 oznaczamy również symbolem $\sqrt{0}$. A więc $\sqrt{0}=0$.

Jeżeli m jest liczbą ujemną, wówczas wyrażenie $\sqrt{m}$ nic nie oznacza, bo liczba ujemna nie ma pierwiastka kwadratowego.

Np. Wyrażenia $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-2}$ itd. nic nie oznaczają.

Z określenia pierwiastka kwadratowego wynika natychmiast:

1. $(\sqrt{a})^2=a$ jeżeli $a\geq 0$

   Np. $(\sqrt{16})^2=16$, $(\sqrt{25})^2=25$, $(\sqrt{3})^2=3$.

   Jeżeli $a<0$, wówczas nie zachodzi równość $(\sqrt{a})^2=a$; lewa bowiem strona równości nic nie oznacza, gdyż symbol $\sqrt{a}$ traci sens dla $a<0$.

2. Jeżeli $\sqrt{a}=b$, wówczas $b^2=a$.

   Np. $\sqrt{x}=3$, więc $x=3^2=9$

   $\sqrt{17}=x$ „ $17=x^2$.

3. Jeżeli $b^2=a$, wówczas b jest pierwiastkiem kwadratowym liczby a.

   Jeżeli więc $b\geq 0$, wówczas $b=\sqrt{a}$, jeżeli $b\leq 0$, wówczas $b=-\sqrt{a}$. W obu przypadkach mamy:

$$\sqrt{a}=|b|.$$

Np. $3^2 = 9$, więc $3 = \sqrt{9}$; $(-3)^2 = 9$, więc $-3 = -\sqrt{9}$;

$x^2 = 25$, więc albo $x = \sqrt{25} = 5$, albo $x = -\sqrt{25} = -5$.

4. Pierwiastkami kwadratowymi liczby a^2 są: $+a$ i $-a$. Mamy bowiem: $(+a)^2 = (-a)^2 = a^2$, zatem

$\sqrt{a^2} = a$, jeżeli $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$, jeżeli $a \leq 0$. W obu przypadkach mamy: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Np. $\sqrt{35^2} = 35$, $\sqrt{(-16)^2} = |-16| = 16$

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|.$$

Zadania

5. Podaj pierwiastki i sprawdź:

a) $\sqrt{25}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{625}$, $\sqrt{169}$;

b) $\sqrt{0{,}01}$, $\sqrt{0{,}25}$, $\sqrt{0{,}0016}$, $\sqrt{1{,}96}$;

c) $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{36}{81}}$, $\sqrt{\frac{16}{225}}$, $\sqrt{\frac{49}{400}}$;

d) $\sqrt{100}$, $\sqrt{10\,000}$, $\sqrt{1\,000\,000}$, $\sqrt{100\,000\,000}$.

6. Rozwiąż równania:

a) $x^2 = 9$, $x^2 = 64$, $x^2 = \frac{4}{25}$, $x^2 = 0{,}01$,

b) $3x^2 = 27$, $5x^2 = 80$, $4x^2 = 9$, $16x^2 = 25$.

7. Rozwiąż równania:

a) $\sqrt{x} = 3$, $\sqrt{x} = 0{,}1$, $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$,

b) $3\sqrt{x} = 2$, $\frac{2}{3}\sqrt{x} = 1$, $\frac{1}{4}\sqrt{x} = 5$.

8. Dla jakich wartości x następujące wyrażenia nic nie oznaczają:

a) $\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$, $\sqrt{x-5}$, $\sqrt{x+1}$,

b) $\sqrt{2x-6}$, $\sqrt{3x+9}$, $\sqrt{\frac{5}{x}}$, $\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$,

c) $\sqrt{-x^2}$, $\sqrt{-(x-1)^2}$, $\sqrt{-x^2+4x-4}$.

9. Sprawdź, że:

a) $\sqrt{x} < x$ jeżeli $x > 1$

b) $\sqrt{x} > x$ „ $0 < x < 1$.

dla *a)* $x = 4, 9, 16$, *b)* $x = \frac{4}{9}, \frac{16}{25}, 0{,}04$.

10. Przedstaw w prostszej postaci:

a) $(2\sqrt{2})^2$, $(3\sqrt{5})^2$, $(4\sqrt{7})^2$, $(2\sqrt{\tfrac{7}{2}})^2$,

b) $(3\sqrt{2x})^2$, $(4\sqrt{x^2+1})^2$, $(2a\sqrt{bx})^2$, $(2\sqrt{1-x})^2$,

c) $(4\sqrt{x})^2+(3\sqrt{x})^2+(4\sqrt{a-b})^2+(5\sqrt{b-x})^2$,

d) $(4\sqrt{a})^2+(3\sqrt{b})^2+(2\sqrt{7b-4a})^2-(6\sqrt{b})^2$.

11. Oblicz:

a) $\sqrt{4}+\sqrt{9}$, $3\sqrt{16}+2\sqrt{25}$, $\sqrt{64}-4\sqrt{49}$,

b) $8\sqrt{4}-\sqrt{16}+2$, $5\sqrt{9}-4\sqrt{16}-2\sqrt{1}$,

c) $\dfrac{\sqrt{25}-\sqrt{4}}{3\sqrt{16}+\sqrt{49}}$, $\dfrac{2+\sqrt{64}}{3\sqrt{64}-\sqrt{25}}$, $\sqrt{4+\sqrt{25}}$,

d) $\sqrt{\sqrt{16}}$, $\sqrt{2+\sqrt{4}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}$, $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

12. Odczytaj z rys. na str. 5 przybliżone wartości $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2\tfrac{1}{2}}$, $\sqrt{3\tfrac{1}{2}}$, $\sqrt{4\tfrac{1}{2}}$, $\sqrt{5\tfrac{1}{2}}$.

13. Oblicz następujące pierwiastki, przyjmując $b=1$, $c=2$, $d=3$, $x=4$, $y=5$, $z=6$.

a) $\sqrt{2bc}$, $\sqrt{4cdz}$, $\sqrt{2cd^2y^2}$, $\sqrt{3cd^2z}$,

b) $\sqrt{\dfrac{c^3z}{d}}$, $\sqrt{\dfrac{3cxy}{5z}}$ $\sqrt{\dfrac{2d^2xyz^2}{5c^3}}$,

c) $\sqrt{4d+xz}$, $\sqrt{12xy-11bc^2}$, $\sqrt{3dy+2dx-11bc^2}$.

14. Oblicz następujące wyrażenia:

a) $\sqrt{x^3}-\sqrt{y}+2\sqrt{z^4}$ dla $x=4$, $y=9$, $z=2$

b) $\sqrt{x^2+y^2}-5\sqrt{3xy}$ „ $x=3$, $y=4$

c) $\dfrac{2+\sqrt{5+a^2}}{4+\sqrt{a^2+2b}}$ „ $a=2$, $b=6$

d) $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ dla $a=5$, $b=16$.

15. Która z liczb jest większa?

a) 3, $\sqrt{2}$; 5, $3\sqrt{3}$; 12, $5\sqrt{5}$

b) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$; $4\sqrt{7}$, $7\sqrt{2}$; $5\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $4\sqrt{\tfrac{5}{11}}$

c) $\sqrt{5}$, 5; $\sqrt{\tfrac{2}{7}}$, $\tfrac{2}{7}$; $\sqrt{0,1}$, $0,1$.

Aby zbadać, która z liczb, np. $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, jest większa, porównywamy ich kwadraty; ta liczba jest większa, której kwadrat jest większy. Ponieważ $(2\sqrt{5})^2 = 4.5 = 20$, $(3\sqrt{2})^2 = 9.2 = 18$, więc $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$.

16. Wykaż, że jeżeli w wyrażeniu $\sqrt{x^2+y^2}$ zastąpimy x przez p^2-q^2, zaś y przez $2pq$, otrzymamy p^2+q^2. Korzystając z tego wyznacz kilka par całkowitych liczb x, y, dla których $\sqrt{x^2+y^2}$ jest liczbą całkowitą.

17. Czy z równości
$$x^2 = y^2$$
wynika równość $x = y$? Podaj przykłady liczbowe.

18. Ktoś udowadniał, że $3 = 5$, w następujący sposób: połóżmy $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$. Zatem
$$a = c - b$$
stąd
$$a - c = -b\,.$$
Mnożąc obie równości stronami dostaniemy:
$$a(a-c) = -(c-b)b, \text{ czyli } a^2 - ac = b^2 - bc.$$
Zatem, dodając do obu stron $\frac{c^2}{4}$ otrzymamy
$$a^2 - ac + \frac{c^2}{4} = b^2 - bc + \frac{c^2}{4}\,,$$
a więc
$$\left(a - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2.$$
Zatem $\sqrt{\left(a-\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(b-\frac{c}{2}\right)^2}$, czyli $a - \frac{c}{2} = b - \frac{c}{2}$.

Więc $a = b$, czyli $3 = 5$. Gdzie jest błąd?

§ 3. Uwagi o liczbach niewymiernych

Poprzednio zauważyliśmy, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą całkowitą. Przekonamy się teraz, że $\sqrt{2}$ nie jest również ułamkiem. Załóżmy bowiem, że
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \tag{1}$$
gdzie p i q są liczbami naturalnemi.

Możemy nadto przyjąć, że p i q nie mają wspólnego podzielnika; każdy bowiem ułamek można przez uproszczenie sprowadzić do ułamka, w którym licznik i mianownik są względem siebie pierwsze. Na mocy (1)

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \text{ czyli } \frac{p^2}{q^2} = 2\text{ , a więc}$$

$$p^2 = 2q^2. \qquad (2).$$

Ponieważ $2q^2$ jest liczbą parzystą, więc p^2 jest również liczbą parzystą; zatem i p jest liczbą parzystą, bo kwadrat liczby nieparzystej jest zawsze liczbą nieparzystą. Połóżmy $p = 2k$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Podstawiając w (2) dostaniemy

$$4k^2 = 2q^2.$$

Dzieląc obie strony równości przez 2 otrzymamy:

$$2k^2 = q^2.$$

Rozumując, jak poprzednio, dochodzimy stąd do wniosku, że q jest również liczbą parzystą. Zatem liczby p i q mają wspólny podzielnik 2, wbrew założeniu. A więc $\sqrt{2}$ nie jest ułamkiem. Ponieważ $\sqrt{2}$ nie jest ułamkiem, więc $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Można ogólnie udowodnić, że pierwiastek kwadratowy liczby naturalnej, która nie jest kwadratem zupełnym (tzn. nie jest kwadratem liczby naturalnej), jest liczbą niewymierną. Zatem liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ itp. są liczbami niewymiernymi.

Liczby niewymierne są nam już znane z geometrii. Wiadomo np., że bok i przekątna kwadratu są odcinkami niewspółmiernymi. Wynika stąd, że jeżeli bok kwadratu przyjmiemy za jednostkę, to długość przekątnej wyraża się liczbą niewymierną. Udowodniono również, że iloraz długości obwodu koła i średnicy, który zwykle oznaczamy przez π, jest także liczbą niewymierną.

Liczby niewymierne nie są liczbami niedokładnymi. Przeciwnie, np. dodatni pierwiastek kwadratowy z 2 jest w zupełności określoną liczbą, mianowicie tą jedyną liczbą dodatnią, której kwadrat równa się 2; podobnie stosunek boku i przekątnej kwadratu lub π są w zupełności określonymi liczbami.

Liczba niewymierna nie jest ułamkiem; nie możemy jej tym bardziej przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego. Możemy natomiast zawsze wyznaczyć ułamek dziesiętny, który się od danej liczby niewymiernej dowolnie mało różni.

Pokażemy to na przykładzie $\sqrt{2}$.

Ponieważ $1^2 < 2 < 2^2$, więc $1 < \sqrt{2} < 2$.

Aby otrzymać $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,1, obliczamy kwadraty liczb: 1,1, 1,2, 1,3 ..., 1,9. Mamy $1{,}1^2 = 1{,}21$, $1{,}2^2 = 1{,}44$, $1{,}3^2 = 1{,}69$, $1{,}4^2 = 1{,}96$, $1{,}5^2 = 2{,}25$. Stąd $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$, a więc

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5.$$

Zatem 1,4 (lub 1,5) przedstawia $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,1. Aby otrzymać $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,01, obliczamy $1{,}41^2$, $1{,}42^2$, $1{,}43^2$, ..., $1{,}49^2$. Mamy $1{,}41^2 = 1{,}9881$, $1{,}42^2 = 2{,}0164$. Zatem:

$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2; \quad \text{a więc} \quad 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42.$$

Wynika stąd, że 1,41 (lub 1,42) przedstawia $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,01. Postępując podobnie dalej otrzymujemy:

$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 \quad \text{itd.}$$

Liczby 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142 przedstawiają $\sqrt{2}$ z coraz to większą dokładnością, a mianowicie odpowiednio do 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 itd.

Jest rzeczą jasną, że w powyższy sposób możemy wyznaczyć pierwiastek kwadratowy każdej liczby dodatniej z dowolnym przybliżeniem. Postępowanie to wymaga jednak wielu prób i zabiera wiele czasu, jeżeli się chce uzyskać kilka miejsc dziesiętnych. Zazwyczaj używa się innego sposobu, znacznie szybszego, który poznamy w następnym ustępie.

Do działań na liczbach niewymiernych stosują się także prawa poprzednio poznane dla liczb wymiernych, j. np. prawo przemienności i łączności sumy, iloczynu itp. Na przykład

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \quad \text{itd.}$$

Wyrażenia zatem, w których występują liczby niewymierne, możemy przekształcać w sposób poznany w poprzednich klasach.

Działania na liczbach niewymiernych wykonywamy w ten sposób, że zastępujemy dane liczby niewymierne przez przybliżenia dziesiętne, na których przeprowadzamy rachunek. Wynik tego rachunku będzie tym dokładniejszy, im dokładniejszych przybliżeń dziesiętnych użyjemy. Ponieważ rachujemy liczbami przybliżonymi, więc wyniki zaokrąglamy w sposób poznany w poprzednich klasach.

Przykład:

Obliczyć $\quad \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}, \quad \sqrt{2} : \sqrt{3}.$

Przyjmując z dokładnością do 0,01, że $\sqrt{2}=1,41$ i $\sqrt{3}=1,73$, mamy: $1,41+1,73=3,14$; więc

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=3,14 \text{ (w przybliżeniu)}$$

$1,41\cdot 1,73=2,4393$. Ponieważ 1,41 i 1,73 mają III stopień dokładności, wynik zaokrąglamy do III stopnia dokładności. Zatem

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=2,44 \text{ (w przybliżeniu)}$$

$1,41:1,73=0,815$. Zatrzymujemy się przy III stopniu dokładności. Zatem

$$\sqrt{2}:\sqrt{3}=0,815 \text{ (w przybliżeniu).}$$

Niekiedy można wynik działania na liczbach niewymiernych otrzymać bez posługiwania się przybliżeniami.

Np. $\quad 5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=15.\,(\sqrt{2})^2=15\cdot 2=30.$

Zadania

19. Oblicz $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ z dokładnością do 0,01.

20. Oblicz:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $3\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{3}\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}\sqrt{5}-3$, $\sqrt{5}-\sqrt{2}\sqrt{3}$, $7\sqrt{2}-5\sqrt{3}$;

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$, $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$,

przyjmując z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych

$\sqrt{2}=1,41$, $\sqrt{3}=1,73$, $\sqrt{5}=2,24$, $\sqrt{6}=2,45$.

21. Oblicz:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\qquad$ *b)* $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{4}{5\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{5\sqrt{6}}$.

Uwaga: Pomnóż przedtem licznik i mianownik przez pierwiastek znajdujący się w mianowniku. Np.

$$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Unikamy w ten sposób dzielenia przez liczbę trójcyfrową. Wartości pierwiastków są podane w poprzednim zadaniu.

§ 4. Obliczanie pierwiastka kwadratowego

Zajmiemy się najpierw obliczaniem pierwiastka kwadratowego z liczb całkowitych. Jeżeli liczba pierwiastkowana jednocyfrowa lub dwucyfrowa jest kwadratem zupełnym, to pierwiastek możemy od razu wyznaczyć. Np. $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{36}=6$, $\sqrt{81}=9$. Jeżeli jednak dana liczba jedno lub dwucyfrowa nie jest kwadratem zupełnym, to jej pierwiastek jest liczbą niewymierną, której część całkowitą łatwo wyznaczyć drogą prób. Np. częścią całkowitą $\sqrt{3}$ jest 1, bo $1^2<3<2^2$. Podobnie częścią całkowitą $\sqrt{24}$ jest 4, $\sqrt{87}$ jest 9 itp.

Jeżeli liczba pierwiastkowana ma więcej cyfr, wówczas jej pierwiastek, względnie jego część całkowitą, można znaleźć w następujący sposób. Niech daną liczbą będzie np. 529. Ponieważ $20^2=400$, $30^2=900$, więc $20<\sqrt{529}<30$. Mamy zatem $\sqrt{529}=20+x$, gdzie $0<x<10$. Podnosząc do kwadratu otrzymujemy:

$$529=400+40x+x^2=400+(40+x)x$$

a stąd $$x=\frac{529-400}{40+x}=\frac{129}{40+x}.$$

Mamy oczywiście $\frac{129}{40+x}<\frac{129}{40}$. Drugi bowiem ułamek ma mianownik mniejszy, gdyż $x>0$.

Zatem $x<\frac{129}{40}$. Ponieważ $\frac{129}{40}=\frac{12{,}9}{4}=3\frac{0{,}9}{4}$, więc $x<3\frac{0{,}9}{4}$. A więc cyfra jednostek szukanego pierwiastka wynosi co najwyżej 3.

Przyjmijmy, że cyfrą jednostek jest 3. Aby zbadać, jaki błąd przez to popełniamy, należy od 529 odjąć $23^2=(20+3)^2=400+$ $+40.3+3^2=400+(40+3)3=400+43.3$. Ponieważ $500-$ $-400=129$, więc od reszty 129 należy jeszcze odjąć $43.3=129$, co daje na wynik zero. A więc $\sqrt{529}=23$.

Praktycznie liczymy tak:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{5|29}=23 \\
\ \ 4 \\
\hline
\ \ 129\ |\ 43.3 \\
\ \ 129 \\
\hline
\hline
\end{array}$$

A więc: dzielimy liczbę kreskami na klasy po 2 cyfry od prawej strony ku lewej. Następnie wyznaczamy część całkowitą dla $\sqrt{5}$, tj. 2, którą piszemy po znaku równości jako pierwszą cyfrę wyniku. Podnosimy 2 do kwadratu i podpisujemy wynik 4 pod 5. Odejmując dostajemy resztę 1, do której dopisujemy następne dwie cyfry 29. Ostatnią cyfrę liczby 129 odcinamy i dzielimy 12 przez podwójną liczbę znalezioną, tj. 4. Wynik 3 dopisujemy po znaku równości jako drugą cyfrę szukanego pierwiastka. Oprócz tego dopisujemy 3 do 4 i liczbę 43 mnożymy przez 3. Otrzymany iloczyn podpisujemy pod 129 i odejmujemy. W naszym przypadku reszta wynosi zero, tzn. 23 jest wartością pierwiastka.

Obliczmy $\sqrt{2|92}$. Rachunek przedstawia się następująco:

$$\begin{array}{l} \sqrt{2|92} = 17 \\ \underline{1} \\ 19|2 \mid 27.7 \\ \underline{189} \\ = 3 \end{array} \qquad\qquad 292 = 17^2 + 3.$$

Przy wyznaczaniu drugiej cyfry obliczamy, jak poprzednio, iloraz 19 : 2. Otrzymujemy 9 z resztą. A więc druga cyfra wynosi co najwyżej 9. Przyjmując, że druga cyfra jest 9, należy od 192 odjąć $29.9 = 261$. Więc 9 jest za dużo. Przyjmując 8 mamy $28.8 = 224$, więc jeszcze za dużo. Biorąc 7 dostajemy $27.7 = 189$. A więc druga cyfra wynosi 7. Zatem część całkowita $\sqrt{292}$ wynosi 27. Sprawdzając dostajemy $17^2 + 3 = 292$. Obliczenia 29.9, 28.8, 27.7 należy w przybliżeniu przeprowadzić w pamięci lub na boku; dopiero po stwierdzeniu, że cyfra 7 jest dobra, wpisujemy 7.

Podobnie postępujemy, gdy liczba pierwiastkowana ma więcej cyfr.

Obliczmy $\sqrt{82438}$. Obliczamy najpierw $\sqrt{824}$, jak poprzednio.

$$\begin{array}{l} \sqrt{8|24} = 28 \\ \underline{4} \\ 42|4 \mid 48.8 \\ \underline{384} \\ 40 \end{array} \qquad\qquad 824 = 28^2 + 40$$

Możemy więc napisać: $28^2 < 824 < 29^2$

Ponieważ $824 < 29^2$, zatem również $824{,}38 < 29^2$

więc $\qquad 28^2 < 824{,}38 < 29^2$.

Stąd, mnożąc przez $10^2 = 100$, otrzymamy:

$$28^2 \cdot 10^2 < 82438 < 29^2 \cdot 10^2, \text{ czyli}$$

$$(28 \cdot 10)^2 < 82438 < (29 \cdot 10)^2, \text{ zatem}$$

$$280^2 < 82438 < 290^2 .$$

Mamy zatem $82438 = (280 + x)^2$, gdzie $0 < x < 10$. Stąd:

$$82438 = 280^2 + 2 \cdot 280\, x + x^2$$

czyli $$82438 = 78400 + (560 + x)\, x$$

więc $$x = \frac{82438 - 78400}{560 + x} = \frac{4038}{560 + x} .$$

Mamy oczywiście: $x < \frac{4038}{560}$ (gdyż $x > 0$).

Ponieważ $\frac{4038}{560} = \frac{403{,}8}{56} = 7 + \frac{11{,}8}{56}$, więc $x < 7 + \frac{11{,}8}{56}$.

A więc cyfra jednostek szukanego pierwiastka wynosi co najwyżej 7. Przyjmujemy, że cyfra jednostek jest 7 i badamy, jaki błąd przez to popełniamy. Obliczamy więc różnicę:

$$82438 - (280 + 7)^2$$

Lecz $$(280 + 7)^2 = 280^2 + 2 \cdot 280 \cdot 7 + 7^2 = 78400 + (560 + 7) \cdot 7 =$$
$$= 78400 + 567 \cdot 7$$

więc otrzymujemy:

$$82438 - 78400 - 567 \cdot 7 = 4038 - 567 \cdot 7 = 4038 - 3969 = 69$$

zatem $$82438 = 287^2 + 69$$

Rachunek zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{8|24|38} = 287 \\
\;\;4 \\
\hline
\;\;42|4 \quad |48 \cdot 8 \\
\;\;384 \\
\hline
=403|8 \quad |567 \cdot 7 \\
\;\;\;3969 \\
\hline
\;\;= 69
\end{array}$$

A więc: dzielimy liczbę na klasy po dwie cyfry, począwszy od ręki prawej. Wyznaczamy dwie pierwsze cyfry (tj. 28), jak poprzednio. Do otrzymanej reszty 40 dopisujemy ostatnią klasę. Odcinamy ostatnią cyfrę, dzielimy przez podwójną znalezioną, tj. 56. Sprawdzamy w pamięci, że wynik będzie 7. Dopisujemy 7 do 56 i mnożymy 567 przez 7. Wynik odejmujemy od 4038 otrzymując na resztę 69. Ponieważ wyczerpaliśmy już wszystkie klasy, więc 287 jest częścią całkowitą szukanego pierwiastka. Rachunek sprawdzamy:

$$287^2 + 69 = 82438.$$

Podobnie:

$$\sqrt{76|48|23|52} = 8745$$

$$\begin{array}{l}
64 \\
\hline
124|8 \quad | 167 \cdot 7 \\
1169 \\
\hline
= 792|3 \,|\, 1744 \cdot 4 \\
\quad 6976 \\
\hline
= 9475|2 \,|\, 17485 \cdot 5 \\
\quad 87425 \\
\hline
\quad = 7327
\end{array}$$

A więc częścią całkowitą dla $\sqrt{76482352}$ jest 8745.

Sprawdzenie: $8745^2 + 7327 = 76482352.$

Przypuśćmy, że mamy obliczyć drugi pierwiastek liczby dziesiętnej, np. $\sqrt{478{,}245}$. Chcąc ten pierwiastek obliczyć z dokładnością np. do 4 miejsc dziesiętnych, przedstawiamy 478,245 w kształcie ułamka zwyczajnego o mianowniku $(10^4)^2 = 10^8$. A więc:

$$478{,}245 = \frac{47824500000}{10^8}.$$

Obliczając pierwiastek licznika jak poprzednio, otrzymamy *a)*:

a)

$$\sqrt{4|78|24|50|00|00} = 218688$$

$$\begin{array}{l}
4 \\
\hline
= 7|8 \,|\, 41 \cdot 1 \\
\quad 41 \\
\hline
\quad 372|4 \,|\, 428 \cdot 8 \\
\quad 3424 \\
\hline
\qquad 3005|0 \,|\, 4366 \cdot 6 \\
\qquad 26196 \\
\hline
\qquad\quad 38540|0 \,|\, 43728 \cdot 8 \\
\qquad\quad 349824 \\
\hline
\qquad\qquad 355760|0 \,|\, 437368 \cdot 8 \\
\qquad\qquad 3498944 \\
\hline
\qquad\qquad\quad 58656
\end{array}$$

b)

$$\sqrt{4|78,|24|50|00|00} = 21{,}8688$$

$$\begin{array}{l}
4 \\
\hline
= 7|8 \,|\, 41 \cdot 1 \\
\quad 41 \\
\hline
\quad 372|4 \,|\, 428 \cdot 8 \\
\quad 3424 \\
\hline
\qquad 3005|0 \,|\, 4366 \cdot 6 \\
\qquad 26196 \\
\hline
\qquad\quad 38540|0 \,|\, 43728 \cdot 8 \\
\qquad\quad 349824 \\
\hline
\qquad\qquad 355760|0 \,|\, 437368 \cdot 8 \\
\qquad\qquad 3498944 \\
\hline
\qquad\qquad\quad 58656
\end{array}$$

A więc

$$47824500000 = 218688^2 + 58656. \qquad (1)$$

Zatem $218688^2 < 47824500000 < 218689^2$.

A więc po podzieleniu przez 10^8 mamy:

$$\frac{218688^2}{10^8} < 478{,}245 < \frac{218689^2}{10^8}$$

czyli

$$\left(\frac{218688}{10^4}\right)^2 < 478{,}245 < \left(\frac{218689}{10^4}\right)^2$$

lub

$$(21{,}8688)^2 < 478{,}245 < (21{,}8689)^2.$$

A więc $\sqrt{478{,}245} = 21{,}8688$ z dokładnością do czterech miejsc dziesiętnych.

Dzieląc obie strony równości (1) przez 10^8 otrzymamy po podobnych przekształceniach:

$$478{,}245 = 21{,}8688^2 + 0{,}00058656.$$

Rachunek zapisujemy, jak pod *b*). A więc, jeżeli chcemy obliczyć $\sqrt{478{,}245}$ z dokładnością do 4 miejsc dziesiętnych, dopisujemy po ostatniej cyfrze dziesiętnej tyle zer, aby wszystkich miejsc dziesiętnych było $2 \cdot 4$, tj. 8. Następnie dzielimy liczbę na klasy po dwie cyfry, począwszy od ręki prawej. Ponieważ miejsc dziesiętnych jest parzysta ilość (8), więc podział wypadnie przez przecinek dziesiętny. Dlatego zazwyczaj od razu dzielimy liczbę na klasy po dwie cyfry, poczynając od przecinka na lewo i na prawo, tworząc (przez dopisywanie zer) tyle klas po przecinku, ile chcemy w wyniku mieć miejsc dziesiętnych.

Następnie rachujemy w poznany sposób (jak gdyby nie było przecinka dziesiętnego). W wyniku dajemy przecinek przed dopisaniem pierwszej klasy po przecinku dziesiętnym liczby pierwiastkowanej.

Wyznaczmy $\sqrt{0{,}00000824}$ z dokładnością do 5 miejsc dziesiętnych. Rachunek przedstawi się następująco:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{0,|00|00|08|24|00} = 0{,}00287 \\
\qquad\quad 4 \\
\hline
\qquad\quad 42|4 \quad | \; 48 \cdot 8 \\
\qquad\quad 384 \\
\hline
\qquad\quad\;\; 400|0 \quad | \; 567 \cdot 7 \\
\qquad\quad\;\; 3969 \\
\hline
\qquad\qquad\;\; 31
\end{array}$$

Sprawdzenie: $0{,}00000824 = 0{,}00287^2 + 0{,}0000000031$

Rachunek powyższy możemy uzasadnić, jak w poprzednim przykładzie. Jeżeli więc liczba pierwiastkowana jest mniejsza od jedności, to po podzieleniu jej na klasy piszemy w wyniku najpierw 0 całych i przecinek dziesiętny. Następnie piszemy tyle zer, ile jest na początku klas dziesiętnych, zawierających same zera. (W naszym przypadku dwa zera).

W końcu wyznaczamy dalsze miejsca tak, jak gdybyśmy obliczali pierwiastek liczby całkowitej 82400.

Podobnie postępując możemy również wyznaczyć pierwiastek z liczby całkowitej z dowolną dokładnością. Np. obliczmy $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,001.

$$\begin{array}{l}
\sqrt{2,|00|00|00} = 1,414 \\
1 \\
\hline
1\,00 \mid 24 \cdot 4 \\
\;\;96 \\
\hline
= 400 \mid 281 \cdot 1 \\
\;\;281 \\
\hline
\;\;11900 \mid 2824 \cdot 4 \\
\;\;11296 \\
\hline
\;\;\;\;604
\end{array}$$

$$1,414^2 + 0,000604 = 2$$

Uwaga. Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć pierwiastek kwadratowy liczby, dla której znamy tylko wartość przybliżoną. W tym przypadku obliczamy pierwiastek wartości przybliżonej; wyznaczamy przy tym co najwyżej tyle cyfr, aby wynik był w tym samym stopniu dokładności, co wartość przybliżona. Obliczanie dalszych cyfr jest bezcelowe, gdyż są niepewne.

Przykłady:

1. Jeżeli 0,00275 jest liczbą przybliżoną w III stopniu dokładności, wówczas $\sqrt{0,00275}$ obliczamy co najwyżej w III stopniu dokładności. Otrzymamy $\sqrt{0,00275} = 0,0524$. Dalszych cyfr nie wyznaczamy, gdyż są niepewne.

2. Aby obliczyć pierwiastek ułamka $\frac{2}{23}$, zamieniamy ułamek na liczbę dziesiętną. Chcąc obliczyć pierwiastek np. w drugim stopniu dokładności, obliczamy iloraz $2:23$ w drugim stopniu dokładności. Mamy $2:23 = 0,087$. Teraz obliczamy $\sqrt{0,087}$ w drugim stopniu dokładności. Otrzymamy na wynik 0,29. Zatem $\sqrt{\frac{2}{23}} = 0,29$ w drugim stopniu dokładności.

3. Aby obliczyć wyrażenie $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ np. w trzecim stopniu dokładności, obliczamy najpierw $\sqrt{3}$ i $\sqrt{5}$ w trzecim stopniu dokładności. Dostaniemy $\sqrt{3}=1{,}73$, $\sqrt{5}=2{,}23$. Zatem $\sqrt{3}+\sqrt{5}=3{,}96$, więc $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\sqrt{3{,}96}=1{,}98$ w trzecim stopniu dokładności.

Zadania

22. Oblicz, a następnie sprawdź:

a) $\sqrt{484}$, *b)* $\sqrt{676}$, *c)* $\sqrt{1089}$, *d)* $\sqrt{2209}$, *e)* $\sqrt{1849}$,

f) $\sqrt{6724}$, *g)* $\sqrt{116964}$, *h)* $\sqrt{12321}$, *i)* $\sqrt{40401}$.

23. Oblicz całkowitą część pierwiastka i sprawdź:

a) $\sqrt{129}$, *b)* $\sqrt{496}$, *c)* $\sqrt{894}$, *d)* $\sqrt{2512}$, *e)* $\sqrt{8002}$,
f) $\sqrt{15744}$, *g)* $\sqrt{48311}$, *h)* $\sqrt{200067}$, *i)* $\sqrt{7900825}$.

24. Oblicz z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych:

a) $\sqrt{5}$, *b)* $\sqrt{17}$, *c)* $\sqrt{29}$, *d)* $\sqrt{456}$, *e)* $\sqrt{8714}$, *f)* $\sqrt{24992}$.

25. Oblicz z dokładnością do trzech miejsc dziesiętnych:

a) $\sqrt{2{,}135}$, *b)* $\sqrt{12{,}72}$, *c)* $\sqrt{287{,}15}$, *d)* $\sqrt{31{,}2}$,

e) $\sqrt{2584{,}1612}$, *f)* $\sqrt{189{,}2462}$.

26. Oblicz z dokładnością do trzech miejsc dziesiętnych:

a) $\sqrt{0{,}345}$, *b)* $\sqrt{0{,}3428}$, *c)* $\sqrt{0{,}45892}$,

d) $\sqrt{0{,}01254}$, *e)* $\sqrt{0{,}0038271}$, *f)* $\sqrt{0{,}0004852}$.

27. Oblicz z dokładnością do trzech miejsc dziesiętnych:

a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$, *b)* $\sqrt{\frac{7}{8}}$, *c)* $\sqrt{\frac{17}{25}}$, *d)* $\sqrt{\frac{37}{63}}$, *e)* $\sqrt{\frac{17}{11}}$, *f)* $\sqrt{\frac{160}{27}}$.

28. Oblicz w III stopniu dokładności:

a) $\sqrt{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt{5}}$, $\sqrt{\sqrt{3}+2}$;

b) $\sqrt{\sqrt{\frac{3}{8}}}$, $\sqrt{\sqrt{2{,}7}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$.

29. Oblicz:

a) $\sqrt{1{,}7}+\sqrt{2{,}3}$, $\dfrac{\sqrt{7{,}6}-\sqrt{2{,}3}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{0{,}014}+\sqrt{0{,}025}}{2{,}5}$

b) $\sqrt{\sqrt{5{,}2}}$, $\sqrt{\sqrt{6{,}1}+\sqrt{3{,}5}}$, $\sqrt{\sqrt{0{,}071}-\sqrt{0{,}021}}$

c) $\sqrt{\frac{3{,}3-\sqrt{5{,}6}}{2{,}4}}$, $\sqrt{\frac{\sqrt{7{,}5}-\sqrt{3{,}2}}{5{,}2}}$, $5{,}7\cdot\sqrt{\sqrt{2{,}7^2+3}+3{,}6}$.

(Liczby występujące są przybliżone, przy czym błąd jest mniejszy od jednostki ostatniego rzędu.)

30. Oblicz dla $x=2$ wartości wyrażeń:

a) $\sqrt{x+1}$, *b)* $\sqrt{3x-1}$, *c)* $\sqrt{x^2+x+1}$,

d) $\sqrt{2x^3+1}$, *e)* $\sqrt{\frac{1}{x+3}}$, *f)* $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$;

31. Oblicz dla $x=2$, $y=1$ wartości wyrażeń:

a) $\sqrt{x+y}$, *b)* $\sqrt{3x-y}$, *c)* $\sqrt{x^2+3y^2}$

d) $\sqrt{\frac{x}{5y}}$, *e)* $\sqrt{\frac{2x+3y}{x+y}}$, *f)* $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{2xy}}$.

32. Prostokąt o bokach $a=5{,}7$ *cm*, $b=3{,}2$ *cm* zamieniono na kwadrat o równym polu. Jaki jest bok kwadratu? (1 m. dzies.).

33. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego wynoszą $a=3{,}7$ *cm*, $b=4{,}3$ *cm*. Oblicz przeciwprostokątną (2 m. dzies.).

34. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego wynosi $c=8{,}2$ *cm*, przyprostokątna $a=3{,}7$ *cm*. Oblicz drugą przyprostokątną (2 m. dzies.).

35. Przekątne rombu wynoszą 12,4 i 6,8 *cm*. Oblicz bok kwadratu o tym samym polu (1 m. dzies.).

36. Boki równoległe trapezu wynoszą 5,3 i 2,5 *cm*, wysokość 3,1 *cm*. Oblicz bok kwadratu o tym samym polu (1 m. dzies.).

37. Powierzchnia sześcianu wynosi 24,9696 m^2. Oblicz objętość.

38. Oblicz promień koła znając pole $P=12{,}41$ m^2.

39. Czas spadania ciała z wysokości w *m* wyraża się (w sekundach) wzorem $t=\sqrt{\frac{2w}{9{,}81}}$, przy czym pomija się opór powietrza.

Oblicz czas spadania z wysokości *a)* 20 *m*, *b)* 85 *m*, *c)* 120 *m*.

40. Boki czworokąta, ośmiokąta i dwunastokąta foremnego, wpisanego w kole o promieniu r, wyrażają się wzorami:

$$b_4=r\sqrt{2}\,,\ b_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}\,,\ b_{12}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$$

Oblicz je dla koła o promieniu $r=1$ *cm*.

41. Aby się przekonać, czy dana liczba a jest liczbą pierwszą, wystarczy sprawdzić, że nie jest podzielna przez liczby pierwsze niewiększe od $\sqrt{a}$, bo jeżeli $a = b \cdot c$, to jeden z czynników musi być mniejszy lub równy $\sqrt{a}$; inaczej bowiem byłoby $b \cdot c > \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$. Korzystając z tej uwagi zbadaj, które z liczb: 101, 367, 1457, 1643, 1877 są liczbami pierwszymi.

42. Jeżeli belki wagi nie są równej długości, wówczas ważąc raz na jednej, drugi raz na drugiej szalce, otrzymujemy różne wyniki a, b. Wykazano, że prawdziwy ciężar wynosi: $\sqrt{ab}$. Oblicz prawdziwy ciężar, jeżeli wyniki obu ważeń wynoszą: *a*) 25,3, 25,8, *b*) 12,1, 12,4, *g*.

43. Wahadło o długości l *cm*, wychylone o mały kąt, wykonuje jedno wahanie w czasie $\pi\sqrt{\frac{l}{981}}$ *sek*. Oblicz czas jednego wahania dla wahadła o długości 25 *cm*.

Rozdział II

Pierwiastki o wykładnikach naturalnych

§ 1. Określenie pierwiastka o wykładniku naturalnym

Podobnie jak drugi pierwiastek, określamy pierwiastki wyższych stopni.

Trzecim pierwiastkiem (lub pierwiastkiem sześciennym) jakiejś liczby a nazywamy każdą liczbę, której sześcian równa się a. Np.:

Trzecim pierwiastkiem liczby	8	jest	2, bo	2^3	$= 8$
„ „ „	64	„	4 „	4^3	$= 64$
„ „ „	-27	„	-3 „	$(-3)^3$	$= -27$.

Czwartym pierwiastkiem jakiejś liczby a nazywamy każdą liczbę, której czwarta potęga równa się a. Np.:

Czwartymi pierwiastkami	16	są	2 i -2, bo	$2^4 = (-2)^4 = 16$
„ „	81	„	3 i -3 „	$3^4 = (-3)^4 = 81$.

Ogólnie, **jeżeli** n **oznacza dowolną liczbę naturalną, wówczas** n**-tym pierwiastkiem lub pierwiastkiem** n**-tego stopnia jakiejś liczby** a **nazywamy każdą liczbę, której** n**-ta potęga równa się** a. Np.

piątym pierwiastkiem liczby	243	jest	3, bo	3^5	$= 243$
siódmym „ „	128	„	2 „	2^7	$= 128$
szóstym „ „	4096	„	4 „	4^6	$= 4096$
piątym „ „	-32	„	-2 „	$(-2)^5$	$= -32$

Jeżeli $b^n = a$, wówczas b jest n-tym pierwiastkiem liczby a. Np. $0{,}3^4 = 0{,}0081$, więc 0,3 jest czwartym pierwiastkiem liczby 0,0081.

Uwaga: Jeżeli b jest n-tym pierwiastkiem liczby a, wówczas liczbę n nazywamy **stopniem** lub **wykładnikiem** pierwiastka.

Zadania

1. Podaj trzecie pierwiastki następujących liczb:
   a) 1, 64, -64, 125, -125
   b) 1000, $\frac{1}{27}$, $-\frac{125}{64}$, $\frac{343}{729}$, $\frac{8}{125}$
   c) 0,008, 0,064, $-0{,}343$, 0,000027
2. Podaj czwarte pierwiastki następujących liczb:
   a) 16, 625, 810 000, 10 000
   b) 0,0001, 0,0256, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$
3. Podaj
   a) piąte pierwiastki liczb : 1, -1, $\frac{32}{243}$
   b) szóste „ „ : 64, $\frac{1}{64}$, 1 000 000
   c) ósme „ „ 256, $\frac{1}{256}$, 6 561
4. Objętość sześcianu wynosi *a)* 216 cm^3, *b)* 125 000 cm^3, *c)* 0,064 m^3. Podaj długość krawędzi.

§ 2. Istnienie pierwiastka

Można wykazać, że (tak, jak dla drugiego pierwiastka) **każda liczba dodatnia posiada zawsze dokładnie jeden dodatni pierwiastek danego stopnia.**

Np. *a)* 16 posiada tylko jeden dodatni pierwiastek czwartego stopnia, mianowicie 2, bo $2^4 = 16$. Nie ma innej liczby dodatniej (tj. różnej od 2), której czwarta potęga równałaby się 16.

b) Liczba 4 posiada dokładnie jeden pierwiastek dodatni trzeciego stopnia. Pierwiastek ten nie jest liczbą całkowitą. Aby go wyznaczyć z dokładnością np. do 0,01, możemy postąpić tak, jak przy pierwiastku kwadratowym. Mamy

$$1^3 < 4 < 2^3$$

Obliczamy teraz $1{,}1^3$, $1{,}2^3$,... Otrzymamy:

$$1{,}5^3 < 4 < 1{,}6^3.$$

Obliczamy teraz $1{,}51^3$, $1{,}52^3$,... Otrzymamy:

$$1{,}58^3 < 4 < 1{,}59^3.$$

Liczby 1, 1,5, 1,58 przedstawiają przybliżenia dziesiętne z dokładnością odpowiednio do 1, 0,1, 0,01 trzeciego pierwiastka (dodatniego) liczby 4.

Dalsze badanie dotyczące pierwiastka przeprowadzimy oddzielnie dla stopnia parzystego i nieparzystego.

1) Stopień pierwiastka parzysty

Załóżmy, że n jest liczbą naturalną parzystą. Jeżeli x oznacza dowolną liczbę dodatnią lub ujemną, wówczas $x^n > 0$. Jeżeli więc a jest liczbą ujemną, to nie ma takiej liczby x, aby $x^n = a$.

A zatem żadna liczba ujemna nie posiada pierwiastka stopnia parzystego.

Załóżmy teraz, że a jest liczbą dodatnią. Oznaczamy przez b dodatni n-ty pierwiastek liczby a. Zatem

$$b^n = a.$$

Ponieważ $$(-b)^n = b^n = a$$

więc $-b$ jest ujemnym n-tym pierwiastkiem liczby a.

Wykażemy teraz, że a posiada tylko jeden ujemny pierwiastek. Przypuśćmy bowiem, że a ma jeszcze inny pierwiastek ujemny, np. $c \neq -b$. Mielibyśmy zatem

$$c^n = a, \quad c < 0.$$

Ponieważ $(-c)^n = c^n = a$ i ponadto $-c > 0$, więc $-c$ byłoby dodatnim pierwiastkiem stopnia n liczby a. Ponieważ a ma tylko jeden dodatni pierwiastek, który oznaczyliśmy literą b, więc mielibyśmy $-c = b$, czyli $c = -b$, wbrew założeniu.

Możemy więc powiedzieć: **jeżeli stopień pierwiastka jest parzysty, wówczas każda liczba dodatnia ma dokładnie dwa pierwiastki, różniące się tylko znakiem, żadna zaś liczba ujemna nie posiada pierwiastka.**

Np.	64	ma dwa szóste pierwiastki:	$+2$ i -2
	1	„ „ czwarte „ :	$+1$ i -1
	6561	„ „ ósme „ :	$+3$ i -3

2) Stopień pierwiastka nieparzysty

Załóżmy teraz, że n jest liczbą naturalną nieparzystą. Zauważmy, że jeżeli $x < 0$, wówczas $x^n < 0$. Np. $(-4)^3 < 0$, $(-1)^5 < 0$ itd. A zatem, jeżeli $a > 0$, to nie ma takiej liczby $x < 0$, aby $x^n = a$.

Wynika stąd, że żadna liczba dodatnia nie posiada pierwiastka ujemnego stopnia nieparzystego.

Przejdziemy teraz do zbadania pierwiastków liczb ujemnych. Weźmy pod uwagę liczbę ujemną $-a$, $(a > 0)$. Jeżeli n-ty pierwiastek liczby a oznaczymy literą b, wówczas $b^n = a$. Lecz

$$(-b)^n = -b^n\text{, więc } (-b)^n = -a.$$

Zatem $-b$ jest n-tym pierwiastkiem liczby $-a$.

Np. $+243$ ma piąty pierwiastek: $+3$, więc
-243 „ „ „ -3.

Widzimy więc, że każda liczba ujemna posiada pierwiastek stopnia nieparzystego. Łatwo się przekonamy, że ma tylko jeden pierwiastek. Przypuśćmy bowiem, że $-a$ ma jeszcze inny pierwiastek, np. $c \neq -b$. Zatem $c^n = -a$. Ponieważ $(-c)^n = -c^n = -(-a)$, więc $(-c)^n = a$. Zatem $-c$ byłoby n-tym pierwiastkiem liczby a. Lecz liczba dodatnia a ma tylko jeden pierwiastek, mianowicie b. Więc mielibyśmy $-c = b$, czyli $c = -b$, wbrew założeniu. A więc:

Jeżeli stopień pierwiastka jest nieparzysty, wówczas każda liczba (dodatnia lub ujemna) posiada tylko jeden pierwiastek; pierwiastek ma ten sam znak, co liczba pierwiastkowana. Liczby przeciwne mają pierwiastki przeciwne.

Zauważmy jeszcze, że przy dowolnym n (naturalnym) n-ty pierwiastek 0 jest 0, bo $0^n = 0$ Innego pierwiastka 0 nie posiada, bo jeżeli $b \neq 0$, wówczas także $b^n \neq 0$.

Oznaczanie pierwiastka

Jeżeli liczba a posiada jeden tylko pierwiastek n-tego stopnia (tj. gdy n nieparzyste lub gdy $a = 0$), wówczas ten pierwiastek oznaczamy:

$$\sqrt[n]{a}.$$

Jeżeli natomiast a posiada dwa pierwiastki (tj. gdy $a > 0$, n parzyste), wówczas symbol powyższy oznacza (jedyny) dodatni pierwiastek liczby a.

Np. $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[4]{81}=3$, $\sqrt[5]{-1}=-1$, $\sqrt[7]{-128}=-2$, $\sqrt[n]{0}=0$.

Jeżeli $a>0$, zaś n parzyste, to, ponieważ $\sqrt[n]{a}$ oznacza dodatni pierwiastek, więc $-\sqrt[n]{a}$ oznacza ujemny pierwiastek liczby a.

Np. czwartymi pierwiastkami liczby 16 są $\sqrt[4]{16}$ i $-\sqrt[4]{16}$ (lub jak krótko piszemy $\pm\sqrt[4]{16}$).

Jeżeli $a<0$, zaś n parzyste, wówczas a nie posiada pierwiastka n-tego stopnia. Zatem symbol $\sqrt[n]{a}$ w tym przypadku nic nie oznacza.

Np. symbole $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[2]{-1}$, $\sqrt[10]{-3}$ itd. nic nie oznaczają.

Symbol $\sqrt[2]{a}$ oznacza to samo, co $\sqrt{a}$.

Z określenia symbolu pierwiastka od razu wynika:

1. $\sqrt[1]{a}=a$, bo $a^1=a$

2. $(\sqrt[n]{a})^n=a$, jeżeli $\sqrt[n]{a}$ istnieje.

   Np. $(\sqrt[3]{8})^3=8$, $(\sqrt[5]{-32})^5=-32$ i t. p.

3. Wzór $$\sqrt[n]{a^n}=a$$
   jeżeli n jest liczbą parzystą, zachodzi tylko wtedy, gdy $a\geq 0$. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, wówczas wzór powyższy zachodzi dla każdej liczby a.

   Np. $\sqrt[4]{2^4}=2$, $\sqrt[4]{(-2)^4}=2$, $\sqrt[3]{2^3}=2$, $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$ itd.

4. Jeżeli $b=\sqrt[n]{a}$, wówczas $b^n=a$.

   Np. $2=\sqrt[6]{64}$, więc $2^6=64$

   $\sqrt[4]{x}=3$, „ $x=3^4=81$.

Uwaga 1. Jak wiemy, każda liczba dodatnia a posiada tylko jeden dodatni pierwiastek stopnia n (n naturalne). Ten jedyny dodatni pierwiastek nazywamy pierwiastkiem arytmetycznym stopnia n liczby a. Pierwiastek zera nazywamy również pierwiastkiem arytmetycznym. Widzimy zatem, że

$$\sqrt[n]{a}, \quad (a\geq 0,\ n \text{ naturalne})$$

oznacza pierwiastek arytmetyczny stopnia n liczby a.

Uwaga 2. Podobnie jak dla pierwiastków kwadratowych, zachodzi następujące twierdzenie: **pierwiastek (dowolnego stopnia) z liczby naturalnej jest albo liczbą całkowitą, albo niewymierną.**

Zatem: $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{7}$ itp. są liczbami niewymiernymi.

Uwaga 3. Na końcu książki podana jest tabelka pierwiastków sześciennych liczb od 1 do 100.

Zadania

5. Podaj pierwiastki:

a) $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[3]{343}$;

b) $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[3]{1\,000\,000}$, $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$, $\sqrt[3]{-\frac{216}{343}}$;

c) $\sqrt[3]{0,001}$, $\sqrt[3]{0,027}$, $\sqrt[3]{-0,216}$, $\sqrt[3]{-0,000125}$;

d) $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{256}$, $\sqrt[4]{10\,000}$;

e) $\sqrt[4]{0,0016}$, $\sqrt[4]{0,0625}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$, $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$;

f) $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[5]{-0,00243}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$;

g) $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[7]{-128}$, $\sqrt[8]{256}$, $\sqrt[8]{\frac{1}{256}}$.

6. Rozwiąż równania:

a) $x^3 = 1$, $x^3 = -8$, $3x^3 = 375$

b) $x^4 = 16$, $3x^5 = -96$, $81x^4 = 1$.

7. Rozwiąż równania:

a) $\sqrt[3]{x} = 6$, $\sqrt[5]{x} = 3$, $\sqrt[6]{x} = 1$

b) $\sqrt[4]{5x} = 4$, $\sqrt[3]{\frac{1}{3}x} = -5$, $\sqrt[5]{2x} = 2$.

8. Jaką liczbę oznacza n, jeżeli

a) $\sqrt[n]{9} = 3$, $\sqrt[n]{125} = 5$, $\sqrt[n]{16} = 2$

b) $\sqrt[n]{-343} = -7$, $\sqrt[n]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$, $\sqrt[n]{0,00001} = 0,1$.

9. Wyznacz *a)*, *b)* z dokładnością do 0,01; *c)*, *d)* do 0,1:

a) $\sqrt[3]{5}$, *b)* $\sqrt[3]{9}$, *c)* $\sqrt[4]{2}$, *d)* $\sqrt[4]{3}$.

10. Które z pierwiastków istnieją:

a) $\sqrt[3]{-2}$, *b)* $\sqrt[4]{12}$, *c)* $\sqrt[4]{-16}$, *d)* $\sqrt[5]{-\frac{1}{2}}$

e) $\sqrt[6]{-64}$, *f)* $\sqrt[7]{-0{,}01}$, *g)* $\sqrt[8]{2{,}03}$, *h)* $\sqrt[10]{-1}$.

11. Dla jakich x podane wyrażenia nic nie oznaczają:

a) $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[6]{1-x}$, $\sqrt[8]{x-5}$, $\sqrt{x^3}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}$, $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt[4]{-(1-x)^2}$, $\sqrt[3]{-(1-x)^3}$;

c) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{-x}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}+\sqrt{-x^2}$, $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[6]{x-5}$.

12. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{2cx^2}$, $\sqrt[3]{2cd^2z}$, $\sqrt[4]{y^2-d^2}$;

b) $\sqrt[3]{-12c^3dz}$, $\sqrt[5]{-2c^2x}$, $\sqrt[5]{12d^2-3x^2-2y^2-9b^2}$.
dla $b=1$, $c=2$, $d=3$, $x=4$, $y=5$, $z=6$.

13. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{8}+\sqrt{16}$, *b)* $5\sqrt[5]{32}-7\sqrt{9}$, *c)* $2\sqrt[3]{\frac{8}{27}}+3\sqrt[5]{\frac{1}{32}}-4\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$.

14. Posługując się tablicą pierwiastków sześciennych oblicz:

a) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$, *b)* $\sqrt[3]{7}-2\sqrt[3]{3}$, *c)* $\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{14}$;

d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$, *e)* $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}}$, *f)* $\dfrac{2\sqrt[3]{7}-3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}}$;

g) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$, *h)* $\sqrt{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}$, *i)* $\sqrt{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{17}}$.

15. Rozwiąż równania:

a) $x^9=3^9$, $x^{16}=(-2)^{16}$, $x^{15}=(-1)^{15}$

b) $x^7=(-5)^7$, $x^{12}=(-5)^{12}$, $x^{16}=2^{16}$.

16. Która z liczb jest większa:

a) $2\sqrt[3]{5}, 3$ *b)* $3\sqrt[4]{2}, 2\sqrt[4]{3}$ *c)* $3\sqrt[5]{3}, 2\sqrt[5]{8}$

d) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}$, *e)* $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}$, *f)* $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}$.

Aby porównać np. $2\sqrt[4]{7}$ i $3\sqrt[4]{2}$, podnosimy te liczby do czwartej potęgi. Otrzymamy $(2\sqrt[4]{7})^4 = 2^4 \cdot 7 = 112$, $(3\sqrt[4]{2})^4 = 3^4 \cdot 2 = 162$.

Zatem $\quad (2\sqrt[4]{7})^4 < (3\sqrt[4]{2})^4$, stąd $2\sqrt[4]{7} < 3\sqrt[4]{2}$.

Rozdział III

Działania na pierwiastkach arytmetycznych

§ 1 Pierwiastek iloczynu i ilorazu

Pierwiastek iloczynu.

W tym rozdziale zajmiemy się prawami odnoszącymi się do działań na pierwiastkach arytmetycznych. W całym rozdziale zakładamy, że wyrażenia występujące pod pierwiastkami i zawierające litery są nieujemne.

Niechaj a i b oznaczają dowolne liczby nieujemne, zaś n liczbę naturalną. Przy tych założeniach zachodzi wzór:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \qquad (a \geq 0,\ b \geq 0) \tag{1}$$

Ażeby równość powyższą udowodnić, wystarczy wykazać, że:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = ab$$

Istotnie:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Podobnie, jeżeli mamy kilka liczb nieujemnych, np. a, b, c, d, wówczas

$$\sqrt[n]{abcd} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}\,\sqrt[n]{d} \tag{2}$$

A więc: pierwiastek z iloczynu liczb nieujemnych równa się iloczynowi pierwiastków (tego samego stopnia) z poszczególnych czynników.

Przykłady:

(Litery a, b, c, x, y, z oznaczają liczby dodatnie).

1. $\sqrt{36 \cdot 25} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{25} = 6 \cdot 5 = 30$

2. $\sqrt[4]{16x^4y^8z^{12}} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{y^8} \cdot \sqrt[4]{z^{12}} = 2xy^2z^3.$

3. Mając obliczyć $\sqrt{40 \cdot 28 \cdot 70}$ rozłóżmy występujące liczby na czynniki pierwsze. Otrzymamy:

$$\sqrt{40 \cdot 28 \cdot 70} = \sqrt{2^3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt{2^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2} =$$
$$= \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280.$$

4. Niekiedy możemy dany pierwiastek przedstawić w prostszej postaci. Zdarza się to wówczas, gdy pod pierwiastkiem występuje czynnik, którego pierwiastek łatwo da się wyznaczyć.

Np. $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$$\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{27 \cdot 5} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[4]{a^7} = \sqrt[4]{a^4 \cdot a^3} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a\sqrt[4]{a^3}$$
$$\sqrt[3]{a^5 b^4 c} = \sqrt[3]{a^3 a^2 b^3 bc} = \sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^3}\sqrt[3]{a^2 bc} = ab\sqrt[3]{a^2 bc}.$$

Wzór (2) możemy również wypowiedzieć następująco:

I l o c z y n p i e r w i a s t k ó w r ó w n y c h s t o p n i r ó w n a s i ę p i e r w i a s t k o w i (tego samego stopnia) z i l o c z y n u l i c z b p i e r w i a s t k o w a n y c h.

P r z y k ł a d y:

1. $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

2. $\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{18 \cdot 12} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$

3. $\sqrt{30} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{30 \cdot 18} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3^2} =$
$$= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 6\sqrt{15}.$$

4. Czynnik stojący przed pierwiastkiem możemy włączyć pod pierwiastek, opierając się na wzorze $a = \sqrt[n]{a^n}$ $(a \geq 0)$.

Np. $3\sqrt{10} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{3^2 \cdot 10} = \sqrt{90}$

$$2\sqrt[4]{\tfrac{3}{8}} = \sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{\tfrac{3}{8}} = \sqrt[4]{2^4 \cdot \tfrac{3}{8}} = \sqrt[4]{6}$$
$$a\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^5}\sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^5 b}$$

5. $\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^5}\sqrt[3]{x^7} = \sqrt[3]{x^2 \cdot x^5 \cdot x^7} = \sqrt[3]{x^{14}} = \sqrt[3]{x^{12} \cdot x^2} =$
$$= \sqrt[3]{x^{12}} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^4\sqrt[3]{x^2}.$$

Pierwiastek ilorazu.

Jeżeli a jest liczbą nieujemną, b dodatnią, zaś n liczbą naturalną, wówczas

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (a \geq 0,\ b > 0) \qquad (1)$$

Równość zachodzi, gdyż

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}.$$

A więc: pierwiastek z ilorazu liczb nieujemnych równa się ilorazowi pierwiastków (tego samego stopnia) z liczb pierwiastkowanych.

Np. 1. $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$

2. $\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{3\cdot 5}{5\cdot 5}}=\sqrt{\frac{15}{25}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

3. $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \qquad (a > 0).$

Wzór (1) możemy również wypowiedzieć następująco:

Iloraz pierwiastków (równych stopni) równa się pierwiastkowi (tego samego stopnia) z ilorazu liczb pierwiastkowanych.

Przykłady:

1. $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{63}{7}}=\sqrt{9}=3$

2. $\sqrt[3]{54}:\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{54:16}=\sqrt[3]{27:8}=\sqrt[3]{27}:\sqrt[3]{8}=\frac{3}{2}$

3. $\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^2b^3}}=\sqrt[5]{\frac{a^3b^2}{a^2b^3}}=\sqrt[5]{\frac{a}{b}} \qquad (a > 0,\quad b > 0)$

4. Odwrotnością $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ jest $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, mamy bowiem

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 1 \qquad (a > 0, \quad b > 0).$$

Zatem:

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} : \sqrt{\tfrac{2}{15}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot \sqrt{\tfrac{15}{2}} = \sqrt{\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{15}{2}} = \sqrt{5}$$

5. $2 : 5\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 2 \cdot \tfrac{1}{5}\sqrt{\tfrac{3}{2}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{2^2 \cdot \tfrac{3}{2}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{6}$

6. $\sqrt{\tfrac{8}{7}} : 2 = \sqrt{\tfrac{8}{7}} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{8}{7}}$ lub

$$\sqrt{\tfrac{8}{7}} : 2 = \sqrt{\tfrac{8}{7}} : \sqrt{2^2} = \sqrt{\tfrac{8}{7} : 2^2} = \sqrt{\tfrac{2}{7}}\,.$$

U w a g a 1. Wyrażenia $\sqrt{a+b}$ nie można prościej przedstawić. W szczególności wzory $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ lub $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ lub $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$ są b ł ę d n e. Np.

$$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}, \text{ gdyż}$$

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5, \ \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

Podobnie $\sqrt{2^2+3^2} \neq 2+3$, bo $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \neq 5$.

U w a g a 2. Wzór $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ udowodniliśmy przy założeniu, że a i b są liczbami nieujemnymi. Jeżeli to założenie jest nie spełnione, to równość nie zachodzi. Np. nie zachodzi równość

$$\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9},$$

gdyż lewa strona wynosi $\sqrt{36} = 6$, prawa zaś nic nie oznacza.

Z a d a n i a

1. Oblicz:

a) $\sqrt{25 \cdot 49}$, b) $\sqrt{64 \cdot 81}$, c) $\sqrt[3]{125 \cdot 27}$ d) $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$,

e) $\sqrt{16a^4b^8}$, f) $\sqrt[3]{27x^6y^9z^3}$, g) $\sqrt[5]{32x^{10}y^{20}z^5}$.

2. Oblicz:

a) $\sqrt{20 \cdot 108 \cdot 135}$, b) $\sqrt[3]{28 \cdot 63 \cdot 42}$, c) $\sqrt{250 \cdot 18 \cdot 45}$

d) $\sqrt[4]{75 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 9}$, e) $\sqrt[5]{150 \cdot 160 \cdot 810 \cdot 40}$.

Rozłóż występujące liczby na czynniki pierwsze.

3. Przedstaw w prostej postaci i oblicz:

a) $\sqrt{60}$, *b)* $\sqrt{84}$, *c)* $\sqrt{250}$, *d)* $\sqrt{1360}$

e) $\sqrt[3]{24}$, *f)* $\sqrt[3]{81}$, *g)* $\sqrt[3]{88}$, *h)* $\sqrt[3]{375}$.

4. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

a) $\sqrt{a^3}$, *b)* $\sqrt{a^7}$, *c)* $\sqrt{a^5 b^3}$, *d)* $\sqrt[3]{x^4}$

e) $\sqrt[4]{x^5}$, *f)* $\sqrt[3]{x^8 y^7}$, *g)* $\sqrt[4]{x^9 y^5}$, *h)* $\sqrt[8]{a^{10} x^{11}}$

i) $\sqrt[4]{162\, x^5 y^{12}}$, *j)* $\sqrt[5]{288\, a^3 x^5}$, *k)* $\sqrt[5]{64\, x^6 y^7 z^5}$.

5. Oblicz:

a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$, *b)* $\sqrt{45}\cdot\sqrt{80}$, *c)* $\sqrt{98}\,\sqrt{32}$

d) $\sqrt[3]{20}\,\sqrt[3]{50}$, *e)* $\sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{32}$, *f)* $\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{243}$

g) $\sqrt{2x}\,\sqrt{8x}$, *h)* $\sqrt{6ab^3}\,\sqrt{150a^3b}$, *i)* $\sqrt[3]{3a^2x^4y^2}\,\sqrt[3]{9ax^2y}$.

6. Wykonaj mnożenia i sprowadź pierwiastki do prostej postaci:

a) $2\sqrt{14}\cdot 3\sqrt{2}$, *b)* $5\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{15}$, *c)* $3\sqrt{11}\cdot 2\sqrt{33}$

d) $5\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{18}$, *e)* $\sqrt[3]{50}\cdot 2\sqrt[3]{5}$, *f)* $2\sqrt[4]{600}\cdot\sqrt[4]{800}$

g) $\sqrt{3x}\cdot 2\sqrt{x}$, *h)* $\sqrt{3ab^3}\cdot\sqrt{6abc}$, *i)* $2\sqrt{x^3y}\cdot 3\sqrt{3y}$

j) $\sqrt[3]{25x^2}\cdot\sqrt[3]{5x^2}$, *k)* $\sqrt[3]{9x^2y}\,\sqrt[3]{3xy}$, *l)* $2\sqrt[5]{3a^2bc^3}\cdot\sqrt[5]{a^3bc^2}$.

7. Włącz czynnik pod znak pierwiastka:

a) $3\sqrt{2}$, *b)* $6\sqrt{5}$, *c)* $4\sqrt{0{,}15}$, *d)* $4\sqrt{3\frac{1}{2}}$

e) $2\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$, *f)* $3\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$, *g)* $5\sqrt[4]{\frac{3}{25}}$, *h)* $\frac{2}{3}\sqrt[5]{\frac{81}{16}}$.

8. Włącz czynnik pod znak pierwiastka:

a) $x\sqrt{y}$, *b)* $3a\sqrt{b}$, *c)* $(3-a)\sqrt{2}$, *d)* $2a\sqrt[3]{ab}$,

e) $4x\sqrt[3]{2xy}$, *f)* $3xy\sqrt[4]{2xy^3}$, *g)* $x\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, *h)* $2xy\sqrt{\dfrac{1}{2xy}}$,

i) $\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$, *j)* $ax^2\sqrt{\dfrac{3y}{x^3}}$, *k)* $\dfrac{ab^2}{c^3}\sqrt[3]{\dfrac{c^5}{a^4b^5}}$

l) $(x+y)\sqrt{\dfrac{xy}{x^2+2xy+y^2}}$.

9. Oblicz:

a) $\sqrt{45}:\sqrt{5}$, *b)* $\sqrt{84}:\sqrt{14}$, *c)* $\sqrt{120}:\sqrt{24}$,

d) $\sqrt[3]{56}:\sqrt[3]{7}$, *e)* $\sqrt[3]{600}:\sqrt[3]{4}$, *f)* $\sqrt[3]{96}:\sqrt[3]{12}$.

10. Oblicz:

a) $\sqrt{18}:\sqrt{3}$, *b)* $\sqrt{14}:\sqrt{7}$, *c)* $\sqrt{80}:\sqrt{5}$,

d) $\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{2}$, *e)* $\sqrt[3]{135}:\sqrt[3]{5}$, *f)* $\sqrt[3]{72}:\sqrt[3]{9}$.

11. Podziel:

a) $\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[3]{a}$, *b)* $\sqrt[4]{a^5}:\sqrt[4]{a^3}$, *c)* $\sqrt[5]{a^8}:\sqrt[5]{a^3}$,

d) $\sqrt{\dfrac{3}{a}}:\sqrt{\dfrac{5}{a^3}}$, *e)* $\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{3}}:\sqrt[3]{\dfrac{9}{a^2}}$, *f)* $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a}}:\sqrt[4]{\dfrac{1}{a^5}}$.

12. Oblicz:

a) $20:5\sqrt{\frac{4}{5}}$, $15:\sqrt{\frac{5}{7}}$, $14:\sqrt{\frac{7}{8}}$;

b) $\frac{3}{4}:\sqrt{12}$, $26:\sqrt{\frac{13}{2}}$, $11:\sqrt{\frac{11}{3}}$.

13. Sprowadź do prostej postaci:

a) $\sqrt{125a^5b^3c}:\sqrt{55a^3c}$, *b)* $\sqrt[4]{57a^3x^2y}:\sqrt[4]{38b^2xy^3}$,

c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[3]{2xy^2}}{\sqrt[3]{5xy}}$, *d)* $\dfrac{\sqrt[4]{4ax^5}\sqrt[4]{8a^5x}}{\sqrt[4]{2a^2x^2}}$.

14. Sprowadź do prostej postaci:

a) $(x+y):\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$, *b)* $(x-y):\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2}}$,

c) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}:\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, *d)* $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y^2}}:\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$, *e)* $\sqrt[5]{\dfrac{2x}{y^2}}:\sqrt[5]{\dfrac{x^3}{y}}$.

15. Jeżeli a, b, c, d są liczbami dodatnimi, spełniającymi równość $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ wówczas również $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt[n]{a^n+c^n}}{\sqrt[n]{b^n+d^n}}=\dfrac{c}{d}$ przy każdym naturalnym n. Przyjmij $a=3$, $b=2$, $c=6$, $d=4$ i sprawdź dla 1) $n=2$, 2) $n=3$.

16. Uczeń, chcąc obliczyć sumę $\sqrt{2116}+\sqrt{7396}$, zastąpił ją przez $\sqrt{2116+7396}$, który następnie poprawnie wyznaczył z dokładnością do 0,01. Jaki błąd popełnił?
17. Krawędź sześcianu wynosi a *cm* Oblicz krawędź sześcianu o objętości dwa razy większej. Podstaw w wyniku $a=6$.
18. Krawędzie prostopadłościanu wynoszą a, b, c. Oblicz krawędź sześcianu o równej objętości. Podstaw w wyniku $a=4$, $b=6$, $c=9$.

§ 2. Przekształcanie sumy

Sumy algebraiczne, w których występują pierwiastki, możemy często sprowadzić do prostszej postaci przy pomocy poznanych przekształceń.

Przykłady:

1. W sumie $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}+7\sqrt{a}$ możemy zredukować wyrazy. Otrzymamy $12\sqrt{a}$. Podobnie

$$2\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{y}+2\sqrt[3]{x}-7\sqrt[4]{y}=4\sqrt[3]{x}-11\sqrt[4]{y}.$$

Czasem dogodnie jest przed redukcją przekształcić pierwiastki. Np.

2. $3\sqrt{8}+4\sqrt{18}-2\sqrt{50}=3\sqrt{4\cdot 2}+4\sqrt{9\cdot 2}-2\sqrt{25\cdot 2}=$
$=3\cdot 2\sqrt{2}+4\cdot 3\sqrt{2}-2\cdot 5\sqrt{2}=6\sqrt{2}+12\sqrt{2}-10\sqrt{2}=8\sqrt{2}.$

3. $\sqrt{x}+\sqrt{2y}+5\sqrt{3y}-2\sqrt{5x}=\sqrt{x}-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{2}\sqrt{y}+$
$+5\sqrt{3}\sqrt{y}=(1-2\sqrt{5})\sqrt{x}+(\sqrt{2}+5\sqrt{3})\sqrt{y}.$

4. W sumie $\sqrt{x}+2\sqrt{3x}-3\sqrt{5x}$ czynnik $\sqrt{x}$ możemy wyłączyć za nawias. Piszemy więc w nawiasie iloraz tej sumy przez $\sqrt{x}$, za nawiasem zaś $\sqrt{x}$. Otrzymamy

$$\sqrt{x}+2\sqrt{3x}-3\sqrt{5x}=(1+2\sqrt{3}-3\sqrt{5})\sqrt{x}.$$

5. Iloczyn sum, jak np. $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(\sqrt{2}-5\sqrt{3})$, obliczamy mnożąc (jak zwykle) każdy wyraz jednej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy, a następnie redukując. Zatem:

$$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(\sqrt{2}-5\sqrt{3})=2\sqrt{3}\sqrt{2}-10(\sqrt{3})^2+3(\sqrt{2})^2-$$
$$-15\sqrt{2}\sqrt{3}=2\sqrt{6}-10\cdot 3+3\cdot 2-15\sqrt{6}=-24-13\sqrt{6}.$$

6. $(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})^2=(3\sqrt{a})^2+2\cdot 3\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b}+(2\sqrt{b})^2=9a+$
$+4b+12\sqrt{ab}.$

7. $(3\sqrt{x}+2\cdot\sqrt{y})(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})=(3\sqrt{x})^2-(2\sqrt{y})^2=9x-4y.$

Stosowaliśmy tutaj wzór $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Zadania

19. Sprowadź do prostej postaci:

a) $3\sqrt{5}-2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}$, $3\sqrt{7}-2\sqrt{2}-5\sqrt{7}+4\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{a}-5\sqrt{x}-2\sqrt{a}+2\sqrt{x}+7$, $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}$

c) $6\sqrt{x}-7\sqrt{2x}+2\sqrt{x}+3\sqrt{2x}$, *d)* $\sqrt[3]{y}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{3y}+2\sqrt[3]{y}-3\sqrt[4]{x}$.

20. Sprowadź do prostszej postaci i oblicz:

a) $\sqrt{28}-\sqrt{63}+\sqrt{700}-\sqrt{567}$, *b)* $3\sqrt{48}-2\sqrt{12}+6\sqrt{192}$

c) $3\sqrt{2450}+2\sqrt{2048}-\sqrt{13122}$, *d)* $3\sqrt{5}+\sqrt{50}-3\sqrt{72}+7\sqrt{20}$

e) $7\sqrt{15}+5\sqrt{27}-2\sqrt{12}$, *f)* $\frac{7}{2}\sqrt{24}-\frac{40}{3}\sqrt{99}+7\sqrt{44}$.

21. Sprowadź do prostszej postaci i oblicz:

a) $3\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{5000}-2\sqrt[3]{320}$, *b)* $5\sqrt[3]{108}+3\sqrt[3]{1372}-\sqrt[3]{500}$

c) $8\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{54}+9\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{432}$,

d) $2\sqrt[3]{192}+5\sqrt[3]{250}-3\sqrt[3]{16}+10\sqrt[3]{24}$.

22. Sprowadź do prostszej postaci:

a) $3\sqrt{2x}-5\sqrt{18x}+4\sqrt{50x}$,

b) $7\sqrt{4x}-4\sqrt{9x}+3\sqrt{45x}-5\sqrt{36x}$,

c) $\sqrt{4+4x^2}+2\sqrt{9+9x^2}-5\sqrt{1+x^2}$,

d) $\sqrt{7y}+\sqrt{28y}-\sqrt{63y}+2\sqrt{y}$,

e) $3\sqrt{a^3b}+2\sqrt{ab^3}$, *f)* $3\sqrt[4]{a^7x^5}-2\sqrt[4]{a^3x}$, *g)* $\sqrt[5]{a^6b^7}-\sqrt[5]{ab^2}$.

23. Pomnóż, sprowadź do prostej postaci i oblicz:

a) $(3\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{50})\sqrt{2}$, *b)* $(2\sqrt{6}-\sqrt{12}-\sqrt{24}+\sqrt{48})\sqrt{2}$,

c) $(5\sqrt{24}-4\sqrt{32}+3\sqrt{50}-3\sqrt{54})\sqrt{3}$,

d) $(2\sqrt{20}-7\sqrt{8}-3\sqrt{5}-3\sqrt{18})4\sqrt{10}$,

e) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{3})(4\sqrt{2}+\sqrt{3})$, *f)* $(4\sqrt{5}+3\sqrt{3})(\sqrt{5}-2\sqrt{3})$,

g) $(6\sqrt{10}-2\sqrt{3})(2\sqrt{10}-\sqrt{3})$, *h)* $(11\sqrt{3}+2\sqrt{10})(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

24. **Pomnóż i sprowadź do prostej postaci:**

a) $(2a+3\sqrt{x})(5a-2\sqrt{x})$, *b)* $(3\sqrt{x}+y)\ (2\sqrt{x}-y)$,

c) $(2\sqrt{a}-3\sqrt{b})\ (5\sqrt{a}-2\sqrt{b})$, *d)* $(x\sqrt{y}+y)\ (y\sqrt{x}+y)$,

e) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\ (2\sqrt{x}-\sqrt{y})$, *f)* $(4\sqrt{a}-\sqrt{3x})\ (\sqrt{a}+2\sqrt{3x})$,

g) $(x\sqrt{yz}+y\sqrt{xz})\ (x\sqrt{yz}-2y\sqrt{xz})$,

h) $(3\sqrt{ax}+\sqrt{x})\ (2\sqrt{a}-\sqrt{x})$.

25. **Oblicz:**

a) $(2+\sqrt{3})^2$, *b)* $(4-\sqrt{5})^2$, *c)* $(1+\sqrt{3})^2$,

d) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$, *e)* $(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2$, *f)* $(\sqrt{18}-\sqrt{2})^2$,

g) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2$, *h)* $(3\sqrt{15}-4\sqrt{3})^2$, *i)* $(5\sqrt{10}-4\sqrt{40})^2$.

26. **Podnieś do kwadratu:**

a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, *b)* $(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})^2$, *c)* $(2\sqrt{7}-3\sqrt{x})^2$,

d) $(a-b\sqrt{x})^2$, *e)* $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})^2$,

f) $(\sqrt{1+3x}-\sqrt{2-x})^3$, *g)* $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$,

h) $\left(\sqrt{\frac{2-x}{3-x}}-\sqrt{\frac{3-x}{2-x}}\right)^2$,

i) $\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}\right)^2$.

27. **Wykonaj mnożenia:**

a) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\ (\sqrt{3}+\sqrt{2})$, $(2\sqrt{3}-5)\ (2\sqrt{3}+5)$;

b) $(\sqrt{3x}-2)\ (\sqrt{3x}+2)$, $(\sqrt{3xy}-\sqrt{2a})\ (\sqrt{3xy}+\sqrt{2a})$;

c) $(a\sqrt{b}+2\sqrt{x})\ (a\sqrt{b}-2\sqrt{x})$, $(3x\sqrt{y}-2y\sqrt{x})\ (3x\sqrt{y}+2y\sqrt{x})$;

d) $(a+\sqrt{a^2-b})(a-\sqrt{a^2-b})$,

$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)\ \left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)$;

e) $(3+2\sqrt{x}+\sqrt{y})\ (3+2\sqrt{x}-\sqrt{y})$,

$(2+\sqrt{3}+\sqrt{a})\ (2+\sqrt{3}-\sqrt{a})$.

28. **Pomnóż:**

a) $\sqrt{\sqrt{7}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{7}-1}$, *b)* $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

c) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, *d)* $\sqrt{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$.

29. Pomnóż:

a) $\sqrt{a+b+\sqrt{2ab}}\cdot\sqrt{a+b-\sqrt{2ab}}$, *b)* $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$,

c) $(\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}+xy)(\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}-xy)$,

d) $(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2})(\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}+xy)$.

30. Sprawdź, że dla $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $a^2\geqslant b$ zachodzi równość:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}.$$

(Podnieś obie strony do kwadratu i porównaj).

31. Wykaż, że wyrażenie $x^2-2px+q$ dla $x=p+\sqrt{p^2-q}$ jest równe zeru. Zakładamy przy tym oczywiście, że $p^2-q\geqslant 0$.

32. Średnią geometryczną n liczb nieujemnych nazywamy n-ty pierwiastek arytmetyczny z iloczynu tych liczb. A więc np. średnią geometryczną liczb a, b jest $\sqrt{ab}$, średnią geometryczną liczb a, b, c jest $\sqrt[3]{abc}$ itd. Wyznacz średnią geometryczną liczb *a)* 12, 75, *b)* 4, 5, 6.

Wykazano, że średnia geometryczna n liczb (nieujemnych) jest zawsze niewiększa od ich średniej arytmetycznej. Sprawdź to dla liczb *a)* 3, 5, *b)* 2, 3, 5.

§ 3. Uwalnianie mianownika od niewymierności

Aby obliczyć ułamek $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (przyjmując $\sqrt{2}=1{,}414$), należałoby wykonać dzielenie $1:1{,}414$, dość kłopotliwe, gdyż dzielnik jest liczbą czterocyfrową. Rachunek możemy sobie uprościć przekształcając dany ułamek następująco. Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{2}$. Otrzymamy:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1{,}414}{2}=0{,}707.$$

W powyższym przykładzie ułatwiliśmy sobie rachunek przez to, że usunęliśmy z mianownika pierwiastek; otrzymaliśmy wskutek tego do obliczenia ułamek, którego mianownik jest prostszy.

Dlatego też wyrażenia ułamkowe zawierające pierwiastki staramy się dla wygody rachunku tak przekształcić, żeby w mianowniku pierwiastki nie występowały. Postępowanie takie nazywamy **uwalnianiem mianownika od niewymierności**. Poznamy kilka przypadków, w których to się udaje.

1. Wyrażenie ułamkowe

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \qquad (a > 0)$$

przekształcamy mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{a}$. Dostaniemy

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \cdot \sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{a}.$$

Np. $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{35}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{35}$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \frac{\sqrt{35}}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{35}$$

Nieraz można w łatwiejszy sposób uwolnić się od pierwiastka w mianowniku.

Np. $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{10}.$$

2. Wyrażenie ułamkowe

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \qquad (a > 0)$$

przekształcamy mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt[n]{a^{n-1}}$. Otrzymamy

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{1+n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}.$$

Np. $$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{25}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{8}$$

W niektórych przypadkach można postąpić w prostszy sposób.

Np. $$\frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}=\frac{1\cdot\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^2}}=\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[5]{a^5}}=\frac{\sqrt[5]{a^2}}{a}\qquad(a>0)$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{8}}=\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}}=\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{\sqrt[5]{4}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{a^3b^4c^6}}=\frac{\sqrt[7]{a^4b^3c}}{\sqrt[7]{a^3b^4c^6}\cdot\sqrt[7]{a^4b^3c}}=\frac{\sqrt[7]{a^4b^3c}}{a\ b\ c}\qquad(a,\ b,\ c>0).$$

3. Wyrażenie ułamkowe

$$\frac{1}{a+b\sqrt{c}}\qquad(c>0)$$

przekształcamy mnożąc licznik i mianownik przez $a-b\sqrt{c}$. Więc:

$$\frac{1}{a+b\sqrt{c}}=\frac{a-b\sqrt{c}}{(a+b\sqrt{c})\,(a-b\sqrt{c})}=\frac{a-b\sqrt{c}}{a^2-(b\sqrt{c})^2}=\frac{a-b\sqrt{c}}{a^2-b^2c}.$$

Przekształcenie powyższe jest dozwolone, gdy wszystkie mianowniki są różne od zera, tj. $a+b\sqrt{c}\neq 0$, $a-b\sqrt{c}\neq 0$, czyli gdy $(a+b\sqrt{c})\,(a-b\sqrt{c})=a^2-b^2c\neq 0$.

Np. $$\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\frac{\sqrt{7}+2}{7-4}=\frac{1}{3}(\sqrt{7}+2)$$

$$\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{(2+\sqrt{5})\,(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)\,(\sqrt{5}+1)}=\frac{2\sqrt{5}+2+5+\sqrt{5}}{5-1}=\frac{1}{4}(7+3\sqrt{5})$$

4. Wyrażenie ułamkowe

$$\frac{1}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}\qquad(b>0,\ d>0)$$

przekształcamy mnożąc licznik i mianownik przez $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$. Otrzymamy

$$\frac{1}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}=\frac{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}{(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})\,(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}=\frac{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}{(a\sqrt{b})^2-(c\sqrt{d})^2}=$$

$$=\frac{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}{a^2b-c^2d}.$$

Przekształcenie jest dozwolone, jeżeli wszystkie mianowniki są różne od zera, tj. $a\sqrt{b}+c\sqrt{d} \neq 0$, $a\sqrt{b}-c\sqrt{d} \neq 0$, czyli gdy $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d}) = a^2b - c^2d \neq 0$.

Np. $$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{(4\sqrt{2}+\sqrt{6})(2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(2\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{8\cdot 2+4\sqrt{12}+2\sqrt{12}+6}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2} =$$
$$= \frac{22+6\sqrt{12}}{8-6} = 11+3\sqrt{12} = 11+3\sqrt{4\cdot 3} = 11+6\sqrt{3},$$

Podane przekształcenia, jak widzimy na przykładach, nie tylko ułatwiają rachunek, lecz także doprowadzają często do wyrażeń prostszych.

Zadania

W zadaniach od 33. do 41. przedstaw podane wyrażenia w postaci ułamków, których mianowniki nie zawierają pierwiastków, i niektóre z nich oblicz.

33. *a)* $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{7}}$, $\frac{1}{\sqrt{0,2}}$; *b)* $\frac{10}{3\sqrt{5}}$, $\frac{9}{2\sqrt{3}}$, $\frac{54}{\sqrt{72}}$;

c) $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, $\sqrt{\tfrac{3}{5}}$, $\sqrt{\tfrac{3}{8}}$;

d) $\frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$, $\frac{4\sqrt{7}}{9\sqrt{6}}$, $\frac{16\sqrt{5}}{3\sqrt{48}}$, $\frac{100\sqrt{7}}{\sqrt{200}}$;

e) $\frac{5\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, $\frac{3\sqrt{7}-5\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}$, $\frac{5\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{2\sqrt{12}}$.

34. *a)* $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $\frac{6}{\sqrt{3b}}$, $\frac{4}{\sqrt{2ab}}$, $\frac{7}{\sqrt{14c}}$;

b) $\frac{3a}{2\sqrt{a}}$, $\frac{7ab}{\sqrt{ab^3}}$, $\frac{2ab^3bc^4}{\sqrt{ab^3c^5}}$, $\frac{4x^2}{\sqrt{8xy^3}}$;

c) $\frac{\sqrt{ab}+a\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, $\frac{2\sqrt{xy}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$, $\frac{3\sqrt{a^3b}-\sqrt{ab^2}}{\sqrt{a}}$

35. *a)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}, \quad \dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}, \quad \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{6}}, \quad \dfrac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{15}};$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}, \quad \dfrac{2x}{\sqrt[3]{a^2 x}}, \quad \dfrac{3ab^2}{\sqrt[4]{48a^3b^2}}, \quad \dfrac{5\sqrt[4]{x^7y}}{\sqrt[4]{5x^3}}.$

36. *a)* $\dfrac{6}{4+\sqrt{7}}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}, \quad \dfrac{12}{7-3\sqrt{5}}, \quad \dfrac{13}{5+2\sqrt{3}};$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}, \quad \dfrac{\sqrt{7}}{5-2\sqrt{7}}, \quad \dfrac{\sqrt{3}}{8-2\sqrt{3}}, \quad \dfrac{\sqrt{14}}{3\sqrt{7}+8}.$

37. *a)* $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \quad \dfrac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}, \quad \dfrac{14}{\sqrt{13}+\sqrt{6}};$

b) $\dfrac{6}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}, \quad \dfrac{12}{5\sqrt{3}-3\sqrt{7}}, \quad \dfrac{3}{2\sqrt{11}+5\sqrt{2}}.$

38. *a)* $\dfrac{4+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}, \quad \dfrac{7-2\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}, \quad \dfrac{3+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}};$

b) $\dfrac{15+14\sqrt{3}}{15-2\sqrt{3}}, \quad \dfrac{9-5\sqrt{3}}{7-3\sqrt{3}}, \quad \dfrac{10+3\sqrt{7}}{10-3\sqrt{7}}.$

39. *a)* $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}, \quad \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \quad \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{27}-\sqrt{12}};$

b) $\dfrac{7\sqrt{5}-3}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}, \quad \dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \quad \dfrac{2\sqrt{7}+3}{5\sqrt{2}-3\sqrt{14}}.$

40. *a)* $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}, \quad \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \quad \dfrac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}};$

b) $\dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{12}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}, \quad \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2\sqrt{10}-\sqrt{3}}.$

41. *a)* $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}, \quad \dfrac{1}{2x+3\sqrt{y}}, \quad \dfrac{z}{z+\sqrt{z}};$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \quad \dfrac{3}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}, \quad \dfrac{x}{5\sqrt{x}-3\sqrt{2x}};$

c) $\dfrac{3+\sqrt{a}}{3-\sqrt{a}}, \quad \dfrac{2+3\sqrt{x}}{2-3\sqrt{x}}, \quad \dfrac{5\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}+1};$

d) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\dfrac{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{5\sqrt{x}+4\sqrt{y}}$, $\dfrac{a\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{3\sqrt{x}+a\sqrt{y}}$;

e) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x-5}}$, $\dfrac{b}{a-\sqrt{a^2-b}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{a-3}+\sqrt{a-5}}$;

f) $\dfrac{3\sqrt{10}}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}+2)}$, $\dfrac{a-\sqrt{a-x}}{(a+\sqrt{a-x})\sqrt{x}}$, $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{4}}+\sqrt{3-\sqrt{4}}}$.

42. **Uwolnij od pierwiastków w mianownikach, a następnie dodaj:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{7}}-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$;

b) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}-\dfrac{5}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}}+\dfrac{4}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{2}{\sqrt{8}}-\dfrac{7}{\sqrt{15}}$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{3x}}+\dfrac{5}{\sqrt{6x}}$, $\dfrac{a}{\sqrt{6a^3}}-\dfrac{b}{\sqrt{8a}}$;

d) $\dfrac{5+\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}+\dfrac{5-\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}$, $\dfrac{5x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}-\dfrac{2x-7\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

43. **Przedstaw w postaci ułamków, nie zawierających pierwiastków w mianownikach:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{6\sqrt{8}}$, $2\sqrt{\dfrac{7}{6}}\cdot 5\sqrt{\dfrac{3}{49}}$;

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}:\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{\dfrac{2}{3}}:\sqrt{\dfrac{7}{5}}$, $\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{8}}:\dfrac{9\sqrt{35}}{4\sqrt{6}}$;

c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{6}}\right)\sqrt{14}$, $\left(\dfrac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\right)^2$;

d) $\dfrac{2}{\sqrt{a}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{b}}$, $\dfrac{3x}{\sqrt{ab^3x}}\cdot\dfrac{5b}{\sqrt{2bx^5}}$.

§ 4. Pierwiastek potęgi

Jeżeli a jest liczbą nieujemną, zaś m, n są dowolnymi liczbami naturalnymi, wówczas

$$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m \tag{1}$$

Mamy bowiem

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m=a^m.$$

Wzór (1) możemy krótko wypowiedzieć: n-ty pierwiastek z m-tej potęgi liczby nieujemnej równa się m-tej potędze n-tego pierwiastka z tej liczby.

Przykłady.

1. $\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

2. $1 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = 1 + 2\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2 = (1 + \sqrt[3]{x})^2$

3. $\sqrt{(x^2 + 2x + 1)^3} = (\sqrt{x^2 + 2x + 1})^3 = (x + 1)^3$.

Wzór (1) możemy również wypowiedzieć następująco: m-ta potęga n-tego pierwiastka liczby nieujemnej równa się n-temu pierwiastkowi z m-tej potęgi tej liczby.

Przykłady.

1. $(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

2. $(\sqrt{x})^3 = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$

3. $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a})^3 + 3\,(\sqrt[3]{a})^2 \cdot \sqrt[3]{b} + 3\,\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{b})^3 =$

$$= a + 3\,\sqrt[3]{a^2 b} + 3\,\sqrt[3]{ab^2} + b.$$

Jeżeli a jest liczbą nieujemną, zaś m, n, p są dowolnymi liczbami naturalnymi, wówczas

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \tag{2}$$

Mamy bowiem

$$(\sqrt[np]{a^{mp}})^n = \sqrt[np]{a^{mnp}} = \sqrt[np]{(a^m)^{np}} = a^m.$$

Zauważmy, że wykładniki n, m otrzymamy dzieląc wykładniki np i mp przez wspólny podzielnik p.

A więc wartość pierwiastka z potęgi nie zmieni się, jeżeli wykładnik pierwiastkowy i potęgowy przez tę samą liczbę naturalną pomnożymy lub przez wspólny podzielnik podzielimy.

W szczególności mamy

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m; \qquad \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}.$$

Przykłady.

1. $\sqrt[6]{a^9} = \sqrt{a^3}$, $\sqrt[8]{a^4} = \sqrt{a}$ $(a \geq 0)$

2. $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

3. $\sqrt[6]{a^9 b^3} = \sqrt[6]{a^9} \cdot \sqrt[6]{b^3} = \sqrt{a^3}\, \sqrt{b} = \sqrt{a^3 b}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$

4. $\sqrt[18]{\dfrac{a^9}{b^{27}}} = \dfrac{\sqrt[18]{a^9}}{\sqrt[18]{b^{27}}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^3}} = \sqrt{\dfrac{a}{b^3}}$ $(a \geq 0,\ b > 0)$

5. Jeżeli mamy kilka pierwiastków o różnych wykładnikach pierwiastkowych, to możemy je zawsze przedstawić w postaci pierwiastków o tym samym wykładniku; nazywa się to sprowadzaniem do wspólnego wykładnika pierwiastkowego.

Np. mamy pierwiastki:

$$\sqrt[4]{a^3},\quad \sqrt[6]{b^5},\quad \sqrt[8]{c^7} \qquad (a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0)$$

Wspólną wielokrotnością wykładników 4, 6, 8 jest 24. Pierwiastki przekształcamy następująco:

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4.6]{a^{3 \cdot 6}} = \sqrt[24]{a^{18}},\quad \sqrt[6]{b^5} = \sqrt[6.4]{b^{5 \cdot 4}} = \sqrt[24]{b^{20}}$$

$$\sqrt[8]{c^7} = \sqrt[8.3]{c^{7 \cdot 3}} = \sqrt[24]{c^{21}}.$$

W ten sposób przedstawiliśmy dane pierwiastki w postaci pierwiastków o wspólnym wykładniku 24.

6. Który z pierwiastków jest większy, $\sqrt[3]{14}$ czy $\sqrt{6}$?

Przedstawmy pierwiastki w postaci pierwiastków o wykładniku 6. Mamy

$$\sqrt[3]{14} = \sqrt[6]{14^2} = \sqrt[6]{196};\qquad \sqrt{6} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216}.$$

Ponieważ $\sqrt[6]{196} < \sqrt[6]{216}$, więc $\sqrt[3]{14} < \sqrt{6}$.

7. Iloczyn pierwiastków o różnych wykładnikach, jak np. $\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt[4]{c^3}$, możemy przedstawić w postaci jednego pierwiastka, sprowadzając dane pierwiastki do wspólnego wykładnika. Jakc wspólny wykładnik obieramy 12. A więc

$$\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b^2}\,\sqrt[4]{c^3} = \sqrt[12]{a^6}\,\sqrt[12]{b^8}\,\sqrt[12]{c^9} = \sqrt[12]{a^6 b^8 c^9}.$$

Podobnie

$$\sqrt[3]{2}\ \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{32}.$$

8. $$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{6^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{6^3}{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{216}{4}} = \sqrt[6]{54}.$$

Zadania

44. Oblicz w łatwy sposób:

a) $\sqrt{9^3}$, *b)* $\sqrt[3]{8^4}$, *c)* $\sqrt[4]{625^3}$,

d) $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3}$, *e)* $\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^2}$, *f)* $\sqrt[4]{\left(\frac{81}{16}\right)^5}$.

45. Podnieś do kwadratu:

a) $(\sqrt[3]{2} + 2)^2$, $(2\sqrt[3]{3} - 1)^2$, $(4 - 2\sqrt[3]{5})^2$;

b) $(\sqrt[5]{2} + 3)^2$, $(2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^2})^2$, $(3x\sqrt[3]{x^2y} - 2y\sqrt[3]{xy^2})^2$.

46. Przedstaw w postaci kwadratu dwumianu:

a) $\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{a} + 1$, *b)* $\sqrt[3]{4b^2} + 2x\sqrt[3]{2b} + x^2$

c) $\sqrt[5]{a^4b^2} + 2\sqrt[5]{a^3b^3} + \sqrt[5]{a^2b^4}$.

47. Podnieś do trzeciej potęgi:

a) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3$, $(2\sqrt[3]{a} + 2)^3$, $(3 - 2\sqrt[3]{x})^3$;

b) $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{\frac{1}{a}}\right)^3$, $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)^3$, $\left(\sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{\frac{1}{2x}}\right)^3$.

48. Sprowadź do prostszej postaci:

a) $\sqrt{(x^2 - 6x + 9)^3}$, *b)* $\sqrt{(b^2 - 6ab + 9a^2)^3}$,

c) $\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)^3} + \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2)^3}$.

49. Sprowadź do prostszej postaci i oblicz:

a) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[4]{36}$, $\sqrt[4]{100}$;

b) $\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{625}$, $\sqrt[10]{32}$.

50. Sprowadź do prostszej postaci:

a) $\sqrt[6]{x^2}$, $\sqrt[15]{x^9}$, $\sqrt[16]{x^{12}}$, $\sqrt[10]{x^4}$;

b) $\sqrt[12]{a^6}$, $\sqrt[4]{a^{12}}$, $\sqrt[10]{a^{15}}$, $\sqrt[8]{a^{12}}$;

c) $\sqrt[9]{8x^6}$, $\sqrt[12]{a^4 b^8}$, $\sqrt[6]{a^9 b^3}$, $\sqrt[14]{a^{21} b^{35}}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{8a^3}{125\,b^9}}$, $\sqrt[12]{\frac{256a^4}{625\,b^8}}$, $\sqrt[14]{\frac{a^{35}}{b^{21}}}$.

51. Zamień pierwiastki:

$\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[6]{a}$ na pierwiastki o wykładniku 30.

52. Sprowadź do wspólnego wykładnika pierwiastki.

a) $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, b) $\sqrt[3]{3x}$, $\sqrt[4]{x^2}$, c) $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt[4]{3x^3}$,

d) $\sqrt{a^3 b}$, $\sqrt[4]{ab^3}$, e) $\sqrt[4]{3ab^3}$, $\sqrt[6]{2a^5 b}$.

53. Przedstaw iloczyn w postaci jednego pierwiastka:

a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a}$, $\sqrt{5}\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{x}\sqrt[4]{y}$;

b) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[6]{a^5}\sqrt[8]{a^3}$, $\sqrt[8]{a^5}\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{x}\sqrt[10]{y}$;

c) $\sqrt{b}\sqrt[8]{b}$, $\sqrt[4]{x^3}\sqrt[8]{y^3}$, $\sqrt[8]{x}\sqrt[12]{y}$, $\sqrt[15]{x}\sqrt[60]{x}$;

d) $\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$, $\sqrt[3]{x^3}\sqrt[9]{\frac{y}{x}}$, $\sqrt[4]{2}\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[4]{x}\sqrt[6]{\frac{y}{x}}$.

54. Przedstaw iloraz w postaci jednego pierwiastka:

a) $\frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt{10}}$, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}}$, $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[4]{64}}$, $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}}$;

b) $\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}}$, $\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{y}}$, $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$, $\frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}$.

55. Przedstaw w prostszej postaci:

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}$, b) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}$, *c)* $2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{bc}\cdot 5\sqrt[3]{a^3b^2\sqrt{c}}$, *d)* $3\sqrt[4]{a^3}\sqrt[3]{b^2}\cdot 4\sqrt[6]{a}\sqrt{b^3}$,

e) $\sqrt{x^2-1}\ \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, *f)* $\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}\ \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^3}}$,

g) $\sqrt[3]{x^2y}:\sqrt{\dfrac{x}{y-1}}$, *h)* $\sqrt[6]{\dfrac{x+1}{x-2}}\ \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}$.

56. Która z liczb jest większa:

a) $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{2}$, *b)* $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5}$, *c)* $\sqrt[9]{4}$, $\sqrt[18]{15}$,

d) $2\sqrt[4]{3}$, $\sqrt{7}$, *e)* $3\sqrt{2}$, $2\sqrt[3]{5}$, *f)* $2\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{5}$,

g) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{5}$, *h)* $\sqrt[3]{0,1}$, $\sqrt[4]{0,1}$, *i)* $\sqrt[7]{3}$, $\sqrt[8]{3}$.

57. Podnieś do kwadratu:

a) $(3\sqrt[4]{5}-\sqrt{3})^2$, *b)* $(\sqrt[6]{5}-\sqrt[3]{5})^2$, *c)* $(2\sqrt[8]{x}-\sqrt[6]{y})^2$.

58. Kwadrat ma pole $a\ cm^2$, sześcian zaś objętość $b\ cm^3$. Jaki jest stosunek boku kwadratu do krawędzi sześcianu? W otrzymanym wzorze podstaw $a=4$, $b=2$ i oblicz.

§ 5. Pierwiastek pierwiastka

Jeżeli a jest liczbą nieujemną, zaś m, n są dowolnymi liczbami naturalnymi, wówczas

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a} \qquad (1)$$

mamy bowiem:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn}=\left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{n}\right]^{m}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m}=a.$$

A więc: pierwiastek z pierwiastka liczby nieujemnej równa się pierwiastkowi, którego stopień jest iloczynem obu stopni.

Przykłady.

1. $\sqrt{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[6]{x} \qquad (x\geqslant 0).$

2. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^{12}}} = \sqrt[20]{a^{12}} = \sqrt[5]{a^3} \qquad (a \geqslant 0).$

3. $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt[12]{x^4} = \sqrt[3]{x} \qquad (x \geqslant 0).$

Z wzoru (1) wynika

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}},$$

gdyż obie strony są równe $\sqrt[nm]{a}$.

A więc: **mając obliczyć pierwiastek z pierwiastka możemy pierwiastkować w dowolnym porządku.**

Np.
$$\sqrt{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{\sqrt{25}} = \sqrt[3]{5}$$
$$\sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^3}} = \sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0).$$

Zadania

59. Przedstaw w prostszej postaci:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a}}$, $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a}}$, $\sqrt{\sqrt{a}}$, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$;

b) $\sqrt[5]{\sqrt{x^5}}$, $\sqrt[6]{\sqrt[3]{x^{12}}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{a^9}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^2}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{12}}}$,

c) $\sqrt{\sqrt[3]{9}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$.

60. Przedstaw w postaci jednego pierwiastka:

a) $\sqrt{3\sqrt[3]{5}}$, b) $\sqrt[3]{4\sqrt[4]{7}}$, c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$, e) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$, f) $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}$,

$g)\ \sqrt[5]{a^2\sqrt[4]{a}},\qquad h)\ \sqrt[5]{x\sqrt[3]{x^7}},\qquad i)\ \sqrt[9]{a\sqrt{a^2\sqrt{a}}}.$

61. Oblicz z dokładnością do 0,01:

$a)\ \sqrt[4]{2},\quad \sqrt[4]{7},\quad \sqrt[4]{1,2},\quad \sqrt[4]{2,7};$

$b)\ \sqrt[8]{2},\quad \sqrt[8]{5},\quad \sqrt[8]{10},\quad \sqrt[8]{0,1};$

$c)\ \sqrt[6]{2},\quad \sqrt[6]{15},\quad \sqrt[6]{35},\quad \sqrt[6]{0,072}.$

Wskazówka: $\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}},\quad \sqrt[8]{2}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}},\quad \sqrt[6]{2}=\sqrt{\sqrt[3]{2}}.$

Trzecie pierwiastki liczb od 1 — 100 podane są na końcu książki.

62. Przedstaw w postaci jednego pierwiastka i oblicz:

$a)\ \sqrt{\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}},\qquad b)\ \sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{3}},\qquad c)\ \sqrt{5\sqrt[3]{5}}$

$d)\ \sqrt[3]{\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{\tfrac{3}{4}}},\qquad e)\ \sqrt{\tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{9}{8}}},\qquad f)\ a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a\sqrt{ab}}}$

$g)\ \left(\sqrt[6]{\sqrt[7]{8a^3}}\right)^7,\qquad h)\ \left(\sqrt[8]{\sqrt[11]{16a^4}}\right)^{11},\qquad i)\ \left(\sqrt{\sqrt[9]{8a^3}}\right)^3.$

W $f)$ — $i)$ przyjmij $a=6,\ b=\tfrac{1}{2}$.

Równania kwadratowe

Rozdział IV

Równania kwadratowe o jednej niewiadomej

§ 1. Rozwiązywanie równań

Zajmiemy się teraz równaniami stopnia drugiego o jednej niewiadomej. Są to równania kształtu

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad \text{(I)}$$

gdzie x jest niewiadomą, zaś a, b, c są liczbami danymi, przy czym $a \neq 0$. (Gdyby było $a = 0$, wówczas równanie (I) byłoby stopnia pierwszego).

Zanim zajmiemy się powyższym równaniem, zbadamy najpierw pewne przypadki szczególne.

1. Przyjmijmy, że w równaniu (I) współczynnik przy niewiadomej w stopniu pierwszym jest równy zeru. Otrzymamy równanie:

$$ax^2 + c = 0. \qquad (1)$$

Załóżmy, że równanie posiada rozwiązanie i że x oznacza to rozwiązanie. Zatem:

$$ax^2 = -c, \text{ więc } x^2 = -\frac{c}{a} \qquad (2)$$

Jeżeli $-\frac{c}{a} > 0$, wówczas

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania (które oznaczamy x_1, x_2)

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Sprawdzając przekonywamy się, że x_1 i x_2 są pierwiastkami równania (1). Innych rozwiązań równanie (1) nie posiada.

Jeżeli $-\frac{c}{a} = 0$, wówczas równanie (1) przybiera postać $ax^2 = 0$. Równanie ma wtedy tylko jedno rozwiązanie $x = 0$.

Jeżeli w końcu $-\frac{c}{a} < 0$, wówczas równanie (2) nie ma rozwiązania (gdyż kwadrat nie może być liczbą ujemną), zatem i równanie (1) nie ma w tym przypadku rozwiązania.

Przykłady

a) Równanie $x^2 = 9$ ma rozwiązania $x = \pm\sqrt{9}$. Zatem $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

b) Równanie $x^2 = -9$ nie ma rozwiązania.

c) Rozwiązać równanie: $4x^2 - 25 = 0$.

Przekształcając dostajemy

$$4x^2 = 25 \text{ stąd } x^2 = \tfrac{25}{4}, \text{więc } x = \pm\sqrt{\tfrac{25}{4}} = \pm\tfrac{5}{2}.$$

A więc $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$. Sprawdzając przekonywamy się, że $\frac{5}{2}$ i $-\frac{5}{2}$ są pierwiastkami równania.

2. Przypuśćmy, że w równaniu (I) wyraz wolny jest równy zeru. Otrzymamy równanie

$$ax^2 + bx = 0.$$

Aby równanie rozwiązać, wyłączmy x przed nawias. Dostaniemy

$$x(ax + b) = 0.$$

Równanie będzie spełnione tylko wtedy, jeżeli

$$x = 0 \text{ lub } ax + b = 0.$$

Otrzymujemy więc dwa rozwiązania

$$x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Przykład $\qquad 4x^2 - 8x = 0.$

Wyłączając x przed nawias dostaniemy

$$x(4x - 8) = 0.$$

Zatem $\qquad x_1 = 0, \; x_2 = \frac{8}{4} = 2.$

3. Rozwiązać równanie:

$$x^2 - 14x + 49 = 9.$$

Zauważmy, że lewa strona jest kwadratem dwumianu : $x - 7$. Równanie możemy zatem napisać w postaci:

$$(x - 7)^2 = 9 \qquad (1)$$

Przypuśćmy, że dane równanie posiada rozwiązanie i że x oznacza to rozwiązanie.

Zatem $$x - 7 = \pm \sqrt{9},$$

tzn. x musi spełniać jedno z równań:

$$x - 7 = 3 \quad \text{lub} \quad x - 7 = -3 \tag{2}$$

Z pierwszego otrzymujemy $x_1 = 10$, z drugiego $x_2 = 4$. Innych rozwiązań równanie nie może posiadać. Sprawdzając przekonywamy się, że x_1 i x_2 są pierwiastkami danego równania.

4. Rozwiązać równanie

$$x^2 + 6x = 27 \tag{1}$$

Lewa strona nie jest kwadratem dwumianu. Łatwo jednak zauważyć, że przedstawia ona pierwsze dwa wyrazy kwadratu

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2.$$

Aby po lewej stronie mieć zupełny kwadrat dwumianu $x + 3$, dodajmy do obu stron równania $3^2 = 9$. Otrzymamy

$$x^2 + 6x + 9 = 27 + 9 \tag{2}$$

Rozwiązując równanie (2) jak poprzednio, dostaniemy

$$(x + 3)^2 = 36.$$

Zatem $x + 3 = 6$ lub $x + 3 = -6$.

Stąd $x_1 = 3$, $x_2 = -9$.

Sprawdzając przekonywamy się, że $x_1 = 3$ i $x_2 = -9$ spełniają dane równanie.

5. Rozwiązać równanie:

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Dzieląc obie strony przez 6 i przenosząc wyraz wolny na prawą stronę dostaniemy:

$$x^2 - \tfrac{5}{6}x = -\tfrac{1}{6}.$$

Przedstawiając $-\frac{5}{6}x$ jako podwójny iloczyn $2 \cdot (-\frac{5}{12})x$ widzimy, że po lewej stronie mamy dwa wyrazy kwadratu

$$(x - \tfrac{5}{12})^2 = x^2 - 2 \cdot \tfrac{5}{12}x + (\tfrac{5}{12})^2.$$

Dodając do obu stron $(\frac{5}{12})^2$ otrzymamy:

$$x^2 - \tfrac{5}{6}x + (\tfrac{5}{12})^2 = (\tfrac{5}{12})^2 - \tfrac{1}{6},$$

stąd $$(x - \tfrac{5}{12})^2 = \tfrac{1}{144}.$$

Zatem. $x_1 = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$, $\quad x_2 = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$.

Sprawdzając przekonywamy się, że $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{1}{3}$ są pierwiastkami równania.

6. Przejdziemy teraz do rozwiązania ogólnego równania stopnia drugiego:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0) \qquad (1)$$

Załóżmy, że równanie posiada rozwiązanie i że x oznacza to rozwiązanie.

Dzieląc obustronnie przez a i przenosząc wyraz wolny na prawą stronę otrzymamy:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad (2)$$

Podobnie jak w poprzednich przykładach, przedstawiamy $\frac{b}{a}x$ jako podwójny iloczyn $2 \cdot \frac{b}{2a}x$. Zatem po lewej stronie mamy dwa wyrazy kwadratu dwumianu:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Dodając do obu stron (2) wyrażenie $\frac{b^2}{4a^2}$ otrzymamy

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Stąd
$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \qquad (3)$$

Stronę prawą przekształcamy następująco:

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad (4)$$

Wyrażenie $b^2 - 4ac$ nazywamy **wyróżnikiem** równania (1). Połóżmy

$$b^2 - 4ac = D.$$

Zatem według (4)

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{D}{4a^2}.$$

Więc na mocy (3)

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2} \qquad (5)$$

Załóżmy najpierw, że $D > 0$. Ponieważ $4a^2 > 0$, więc prawa strona równania (5) jest dodatnia. Zatem

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{D}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

A więc

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ lub } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Stąd

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \tag{6}$$

Rozwiązania powyższe zapisujemy krócej

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{I}$$

Sprawdzając przekonywamy się, że wzory (6) przedstawiają rozwiązania równąnia (1). Innych rozwiązań równanie (1) nie ma. Sprawdzimy np., że x_1 spełnia równanie (1). Podstawiając mamy:

$$a\,\frac{b^2 - 2b\sqrt{D} + D}{4a^2} + b\,\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2 - 2b\sqrt{D} + D}{4a} + \frac{-b^2 + b\sqrt{D}}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2 - 2b\sqrt{D} + D - 2b^2 + 2b\sqrt{D} + 4ac}{4a} =$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac + D}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac + b^2 - 4ac}{4a} = 0.$$

Przypuśćmy teraz, że $D = 0$. Wówczas na mocy (5)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

stąd

$$x + \frac{b}{2a} = 0, \text{ zatem}$$

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{7}$$

Innego rozwiązania równanie (1) nie posiada. Sprawdzając przekonywamy się, że wzór (7) podaje rozwiązanie równania (1).

Zauważmy że rozwiązanie podane wzorem (7) otrzymujemy z wzoru (I) przy założeniu $D = 0$.

Załóżmy wreszcie, że $D < 0$. W tym przypadku prawa strona równania (5) jest ujemna, zatem równanie (5) nie ma rozwiązania, a więc i równanie (1) nie posiada rozwiązania.

Otrzymaliśmy więc następujące wyniki, dotyczące równania:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

1. Jeżeli wyróżnik $D = b^2 - 4ac > 0$, wówczas równanie ma dwa pierwiastki różne, podane wzorem (I).

2. Jeżeli wyróżnik $D = 0$, wówczas równanie ma tylko jeden pierwiastek, podany wzorem (I).

3. Jeżeli wyróżnik $D < 0$, wówczas równanie nie posiada rozwiązania.

Uwaga 1. W przypadku 2, tj. gdy $D = 0$, mówimy, że równanie posiada pierwiastek podwójny lub że równanie posiada dwa pierwiastki równe. W tym znaczeniu możemy powiedzieć: jeżeli wyróżnik jest nieujemny, wówczas równanie posiada dwa pierwiastki (które ewentualnie mogą być równe).

Uwaga 2. Jeżeli liczby a, c mają różne znaki, to równanie ma dwa rozwiązania. Istotnie, w tym przypadku $ac < 0$, więc i $4ac < 0$, $-4ac > 0$, zatem $D = b^2 - 4ac > 0$.

Uwaga 3. Wzory (I) podają oczywiście rozwiązania równań: $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ $(a \neq 0)$, badanych w ustępie 1. i 2. (str. 50, 51). Wygodniej jest jednak te równania rozwiązywać w sposób poprzednio podany, niż przy pomocy wzorów (I).

Uwaga 4. Weźmy pod uwagę równanie

$$x^2 + px + q = 0 \tag{8}$$

w którym współczynnik przy x^2 jest równy 1.

Mamy tutaj $a = 1$, $b = p$, $c = q$. Więc $D = p^2 - 4q$

Zatem
$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \tag{II}$$

Wzór (II) możemy przekształcić następująco:

Ponieważ $\dfrac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - \dfrac{4q}{4}} = \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$, więc

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{II'}$$

Do postaci (8) możemy doprowadzić ogólne równanie:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0),$$

dzieląc obie strony przez a. Otrzymamy

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Kładąc $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$ dostaniemy równanie (8).

Szczególnie wygodny jest wzór (II'), gdy p jest liczbą parzystą, gdyż wówczas $\frac{p}{2}$ jest liczbą całkowitą.

Przykłady:

1. Rozwiązać równanie $6x^2 - 5x + 1 = 0$. Mamy tutaj $a = 6$, $b = -5$, $c = 1$. Więc $D = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$. Ponieważ $D > 0$, więc równanie posiada dwą różne pierwiastki.

Z wzoru (I) mamy

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6}, \text{ więc}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3}$$

2. $\qquad -3x^2 + 6x - 3 = 0.$

Mamy $\quad D = 6^2 - 4(-3)(-3) = 0$. Równanie posiada zatem jeden tylko pierwiastek, który otrzymamy z wzoru (I) Zatem

$$x = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1.$$

3. $\qquad 5x^2 + 3x + 2 = 0.$

Mamy $\quad D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31$. Ponieważ $D < 0$, więc równanie nie posiada rozwiązania.

4. Rozwiązać równanie: $15x^2 + 45x + 15 = 0$. Jeżeli współczynniki mają wspólny podzielnik, wówczas obie strony dzielimy przez ten podzielnik. Otrzymamy równanie o prostszych współczynnikach; przez to rachunek przy obliczaniu pierwiastków będzie łatwiejszy. W naszym przypadku dzielimy obie strony przez 15.

Dostajemy $x^2 + 3x + 2 = 0$. Mamy $D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1$.

Zatem $\quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$, więc $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

5. $4x^2 - 4x - m = 0.$

Mamy $D = 16 + 4.4\, m = 16(1 + m)$. Jeżeli więc $1 + m > 0$ (t. zn. $m > -1$), to równanie ma dwa rozwiązania

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16\,(1+m)}}{8} = \frac{4 \pm 4\sqrt{1+m}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{1+m}}{2}.$$

Jeżeli $1 + m = 0$ (tzn. $m = -1$), wówczas równanie ma jedno rozwiązanie:

$$x = \tfrac{1}{2}.$$

Jeżeli $1 + m < 0$ (tzn. $m < -1$), równanie nie ma rozwiązania.

Podamy teraz kilka przykładów równań, których rozwiązanie da się sprowadzić do rozwiązania równania $ax^2 + bx + c = 0$. Mając dane równanie postępujemy, jak zwykle. A więc zakładamy, że równanie posiada rozwiązanie i że x oznacza to rozwiązanie. Przy tym założeniu równanie przechodzi w równość, którą odpowiednio przekształcamy. Na końcu sprawdzamy, czy otrzymane rozwiązania są rzeczywiście pierwiastkami danego równania.

6. $$2x\,(x + 2) = (3x - 2)^2. \qquad (1)$$

Uwalniamy się od nawiasów. Otrzymujemy

$$2x^2 + 4x = 9x^2 - 12x + 4.$$

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę i redukujemy. Zatem

$$-7x^2 + 16x - 4 = 0 \qquad (2)$$

Wyróżnik $D = 16^2 - 4\,(-7)\,(-4) = 144 > 0.$

Równanie (2) ma więc dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-16 + \sqrt{144}}{-14} = \frac{2}{7}, \qquad x_2 = \frac{-16 - \sqrt{144}}{-14} = 2.$$

Sprawdzając przekonywamy się, że x_1 i x_2 są pierwiastkami równania (1).

7. $$\frac{2}{x-1} - \frac{x-4}{x-3} = 1 \qquad (1)$$

Uwalniamy od mianowników; w tym celu mnożymy obie strony równania przez $(x-1)\,(x-3)$. Otrzymamy

$$2\,(x - 3) - (x - 4)\,(x - 1) = (x - 1)\,(x - 3).$$

Uwalniając od nawiasów i przenosząc wszystkie wyrazy na lewą stronę dostaniemy

$$-2x^2 + 11x - 13 = 0 \qquad (2)$$

Wyróżnik $D = 11^2 - 4\,(-2)\,(-13) = 17 > 0$.

Wobec tego pierwiastkami równania (2) są:

$$x_1 = \frac{-11 + \sqrt{17}}{-4} = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17},\quad x_2 = \frac{-11 - \sqrt{17}}{-4} = \frac{11}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}$$

W przybliżeniu do 0,01 mamy: $x_1 = 1{,}72$, $x_2 = 3{,}78$.

Sprawdzając przekonamy się, że x_1 i x_2 są pierwiastkami równania (1).

8. Niekiedy dogodnie jest wprowadzić niewiadomą pomocniczą. Np. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x-1}{x} - 5 + \frac{6x}{x-1} = 0. \tag{1}$$

Połóżmy $\frac{x-1}{x} = y$, zatem $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{y}$. Podstawiając w (1) otrzymamy $y - 5 + \frac{6}{y} = 0$. Stąd $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

Zatem x musi spełniać jedno z równań:

$$\frac{x-1}{x} = 2, \quad \frac{x-1}{x} = 3.$$

Z pierwszego mamy $x_1 = -1$, z drugiego $x_2 = -\frac{1}{2}$. Sprawdzając przekonywamy się, że x_1 i x_2 są pierwiastkami równania (1).

Zadania

Rozwiąż równania (od 1 — 7 bez użycia wzorów):

1. *a)* $x^2 = 169$, *b)* $x^2 = 22$, *c)* $5x^2 = 75$,

   d) $\frac{x^2}{2} = 27$, *e)* $\frac{x^2}{0{,}3} = 2{,}5$, *f)* $7x^2 + 1 = 12$,

   g) $(x+1)^2 = 2x + 5$, *h)* $(x-2)^2 = 40 - 4x$.

2. *a)* $(2x+3)^2 + 40 = (3x+2)^2$,

   b) $(4x+3)^2 = 125 - (3x-4)^2$,

   c) $(x+3)^2 - (x+2)^2 = (x+1)^2$,

   d) $(3x-1)(2x+3) - (4x+3)(x+1) = 12$.

3. *a)* $ax^2 = b$, *b)* $x^2 + a = b$, *c)* $ax^2 - b = bx^2 + a$,

   d) $(x+a)^2 + (x-a)^2 = 8a^2$, *e)* $\frac{a}{x} - x = ax$.

Podstaw w przykładach *a), b), c)*: $a = 1$, $b = 2$; $a = 0$, $b = 5$; $a = -2$, $b = 3$, zaś w przykładach *d), e)*: $a = 0, -1, +2$.

4. *a)* $x^2 - 4x = 0$, *b)* $-x^2 + 3x = 0$, *c)* $3x^2 + 8x = 0$,
d) $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{5}x = 0$, *e)* $3{,}1x^2 - 2{,}5x = 0$.

5. *a)* $(2x + 1)(3x - 2) = (x - 1)(x + 2)$,
b) $(x + 2)^2 - (3x - 1)(5x - 4) = 0$,
c) $(3x - 2)^2 + (3x + 2)(2x - 1) - 2 = 0$,
d) $(4x + 3)^2 + (3x + 4)^2 = 25$.

6. *a)* $c^2x - cx^2 = 0$, *b)* $(a + b)x^2 = (a^2 + b^2)x$,
c) $bx^2 + ax = x^2 + bx$, *d)* $bx^2 + x^2 = abx + ax$,
e) $2x^2(a + b) - 3abx = ax(2x - b) - b^2x$.

Podstaw w przykładach *a)* $c = 1$; $c = 0$, *b)* $a = 3$, $b = 2$; $a = 5$, $b = -5$, *c)* $a = \frac{3}{4}$, $b = 2$; $a = 6$, $b = 1$,
d) $a = 1$, $b = 2$; $a = 3$, $b = -1$,
e) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$; $a = 4$, $b = 0$.

7. *a)* $x^2 + 6x = 27$, *b)* $x^2 - 8x = 9$, *c)* $x^2 - 20x = 261$,
d) $x^2 + 20x + 75 = 0$, *e)* $x^2 - 20x + 75 = 0$,
f) $x^2 - x = 110$, *g)* $12x^2 - 20x + 3 = 0$,
h) $18x^2 + 3x - 10 = 0$, *i)* $6x^2 + x - 2 = 0$.

8. *a)* $2x^2 - 3x + 1 = 0$, *b)* $3x^2 + 5x - 8 = 0$,
c) $10x^2 + x + 2 = 0$, *d)* $-3x^2 + 6x - 3 = 0$,
e) $-12x^2 + x + 1 = 0$, *f)* $8x^2 - 8x + 2 = 0$.

9. *a)* $2x^2 - \frac{7}{6}x = \frac{1}{4}$, *b)* $2x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{25}{8} = 0$, *c)* $3x^2 - 5x + \frac{3}{4} = 0$,
d) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{4}x + 2 = 0$, *e)* $\frac{8}{10}x^2 - \frac{61}{120}x + \frac{1}{6} = 0$,
f) $4{,}2x^2 + 8{,}4x = 33{,}6$, *g)* $2{,}1x^2 + 8{,}3x = 10{,}4$,
h) $0{,}7x^2 - 3{,}1x - 2 = 0$, *i)* $0{,}3x^2 - 1{,}2x - 2{,}1 = 0$.

10. *a)* $11x^2 + 2x = 8x^2 + 9x - 2$, *b)* $9x^2 - 5x = 14x^2 + 3x - 13$,
c) $(5x^2 + 4x + 3) - (x^2 - 3x + 4) = 29$,
d) $(9x^2 + 5x - 7) - (5x^2 + 7x - 9) = 2$.

11. *a)* $(x - 4)^2 + (x - 6)^2 = (x - 2)^2$ *b)* $(3x + 1)^2 + (x + 2)^2 = (2x + 3)^2$,

c) $(4x+1)^2-(3x+1)^2=(2x+1)^2$,

d) $(x-3)^2=(x-2)^2+(x+2)^2+6$.

12. a) $(x-2)(x-4)+(x-3)(x-1)=11$,

b) $(5x+1)(4x-1)+(3x-1)(4x+1)=28$,

c) $(5x-2)(x+1)-(4x-3)(3x-4)=14$,

d) $(3x-4)(4x-1)-(5x-6)(2x-1)=2$.

13. a) $2(x+4)(4x-9)=75$, b) $2x(x+2)=(3x-2)^2$,

c) $2x(x+4)-(x+2)(x+3)=2(3x+2)$,

d) $3(x+4)^2-2(x-1)(x+3)=2(2x^2+1)$.

14. a) $(x+1)^3=(x-1)^3+26$, b) $(x-1)^3=(x+1)^3-56$.

15. a) $x^2+2a^2=3ax$, b) $x^2+3a^2=4ax$, c) $4x^2+4ax=b^2-a^2$,

d) $x^2+2ab=2ax+b^2$, e) $9x^2-6ax=b^2-a^2$,

f) $x^2+2(b-a)x+a^2=2ab$, g) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$.

Podstaw następnie: w a), b) $a=1$; $a=3$, w zadaniach c), d), e), f), g) $a=1$, $b=2$; $a=-1$, $b=-3$; $a=2$, $b=3$.

16. a) $x+\frac{1}{x}=6$, b) $3x=\frac{6}{x}+10\frac{1}{2}$, c) $x-\frac{10}{x}-3=0$,

d) $x=\frac{8}{x-2}$, e) $x-\frac{20}{x-5}=6$, f) $x-7=\frac{4}{x-4}$.

17. a) $x-3=\frac{3}{2x-7}+1$, b) $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=\frac{13}{6}$,

c) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{30}$, d) $\frac{12}{x+2}+3=\frac{10}{x-2}$,

e) $\frac{15}{2x}-1=\frac{1}{x-3}$, f) $\frac{7}{x+4}+\frac{1}{4-x}=\frac{5}{3}$,

g) $\frac{10}{x-3}+\frac{12}{x+4}=3$, h) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{5x}{x^2-1}$.

18. a) $\frac{2x+1}{x-3}+\frac{4x+2}{2x-5}=15$, b) $\frac{6x+5}{3x+4}+\frac{2x+5}{2x+3}=2$,

c) $\frac{2x-1}{3x+1}+\frac{2}{x-5}=\frac{5}{7}$, d) $\frac{4x}{8}+\frac{x-5}{x+3}=\frac{4x+7}{19}$.

19. a) $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$, b) $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{2x}{a^2-x^2}$,

c) $x - \frac{a^2}{x-a} = a$, *d)* $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-a} = \frac{1}{a-1}$.

Podstaw następnie w *a)* $a = 2$, $a = 1$; w *b)* $a = \frac{4}{5}$, $a = 1$, $a = 2$; w *c)* $a = 1$, $a = 0$; w *d)* $a = 1$, $a = \frac{4}{3}$, $a = 0$, $a = 2$.

20. *a)* $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{9}{20}$, *b)* $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} = \frac{11}{30}$,

c) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{12}$, *d)* $\left(\frac{8+x}{4-x}\right)^2 = 8\,\frac{8+x}{4-x} - 15$,

e) $\left(\frac{6x}{4-x}\right)^2 + \frac{15x}{x-4} + 1 = 0$,

f) $\left(\frac{3x-4}{x-2}\right)^2 - \frac{9(4-3x)}{2-x} + 20 = 0$.

(Wskazówka: wprowadź odpowiednią niewiadomą pomocniczą).

21. Zbadaj, dla jakiej wartości a równanie ma jeden pierwiastek:

a) $ax^2 - 3x + 1 = 0$, *b)* $5x^2 + 3x - 2a = 0$,

c) $(a+1)x^2 + 2ax + a = 0$, *d)* $-3ax^2 + 6(a+1)x - 3a = 0$.

22. Podstaw za a taką wartość, by równanie miało: 1) dwa rozwiązania, 2) jedno rozwiązanie, 3) by nie miało żadnego rozwiązania.

a) $(a+1)x^2 + (2a-1)x + a = 0$,

b) $(a+2)x^2 + 3x + a - 2 = 0$,

c) $x^2 - ax + 1 = 0$, *d)* $9x^2 + (a+6)x + 1 = 0$.

23. Wykaż, że równanie $(a^2+1)x^2 + (2a^2+1)x + a^2 = 0$ posiada dwa rozwiązania, równanie $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ jedno rozwiązanie, zaś równanie $(a^2+1)x^2 + 2ax + 1 = 0$ nie ma żadnego rozwiązania, przy każdej wartości a.

§ 2. Układanie równań

Przy zagadnieniach prowadzących do równań drugiego stopnia postępujemy podobnie, jak dawniej przy równaniach pierwszego stopnia. A więc oznaczamy przez x niewiadomą i układamy równanie, które ona ma spełniać. Następnie rozwiązujemy to równanie w sposób poprzednio poznany. W końcu badamy, czy otrzymany wynik jest rozwiązaniem danego zagadnienia.

P r z y k ł a d 1. Kupiec sprowadził za 160 *zł* kawy i za 100 *zł* herbaty, razem 12 *kg*, przy czym 1 *kg* herbaty kosztował o 5 *zł* więcej niż 1 *kg* kawy. Obliczyć cenę 1 *kg* kawy i herbaty.

Oznaczmy przez x cenę 1 *kg* kawy (w złotych). Cena 1 *kg* herbaty wynosi $x+5$ *zł*. Ilość *kg* kawy wynosi $\frac{160}{x}$, herbaty $\frac{100}{x+5}$, razem 12. Zatem

$$\frac{160}{x}+\frac{100}{x+5}=12\,.$$

Po uwolnieniu od mianowników, redukcji i uproszczeniu otrzymujemy równanie

$$3x^2-50x-200=0$$

o pierwiastkach $x_1=20$, $x_2=-\frac{10}{3}$. Ponieważ cena jest liczbą dodatnią, tylko pierwsza wartość może być rozwiązaniem naszego zagadnienia. Zatem cena 1 *kg* kawy wynosi 20 *zł*, zaś 1 *kg* herbaty 25 *zł*. Istotnie, liczba *kg* kawy wypada $\frac{160}{20}=8$, herbaty $\frac{100}{25}=4$, razem 12.

P r z y k ł a d 2. Podróżny przebył odległość 350 *km* pociągiem osobowym, powrócił zaś pociągiem pośpiesznym w czasie o 2 godziny krótszym. Pociąg pośpieszny przebywał w 1 godzinie o 20 *km* więcej niż osobowy. Jak długo trwała pierwsza podróż?

Oznaczmy szukany czas, mierzony w godzinach, przez x. Podróż powrotna trwała więc $x-2$ godz. W 1 godz. pociąg osobowy przebywał $\frac{350}{x}$ *km*, zaś pociąg pośpieszny $\frac{350}{x-2}$ *km*. Zatem

$$\frac{350}{x-2}=\frac{350}{x}+20$$

Po uwolnieniu od mianowników, redukcji i uproszczeniu otrzymujemy równanie

$$x^2-2x-35=0$$

o pierwiastkach $x_1=7$, $x_2=-5$. Ponieważ czas podróży jest liczbą dodatnią, drugi pierwiastek nie ma znaczenia dla naszego zagadnienia. Zatem szukany czas wynosi 7 godzin.

Aby sprawdzić wynik, obliczamy drogę przebytą przez każdy z pociągów w 1 godzinie. Dla pociągu osobowego otrzymujemy $\frac{350}{7}=50$ *km*, dla pośpiesznego $\frac{350}{5}=70$ *km*, a więc istotnie o 20 *km* więcej.

Przykład 3. Jeden bok prostokąta o polu $p\,cm^2$ jest o $a\,cm$ dłuższy od drugiego boku. Obliczyć długości boków.

Oznaczmy przez x długość krótszego boku w cm. Długość dłuższego boku w cm wynosi więc $x+a$. Zatem

$$x(x+a)=p$$

czyli
$$x^2+ax-p=0.$$

Wyróżnik tego równania $D=a^2+4p$ jest dodatni. Rozwiązując równanie otrzymujemy

$$x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2+4p}}{2},\quad x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2+4p}}{2}.$$

Drugi pierwiastek jest ujemny, a więc bez znaczenia dla zadania. Pierwszy jest dodatni. Zatem długość krótszego boku wynosi $\frac{-a+\sqrt{a^2+4p}}{2}\,cm$, dłuższego boku $\frac{a+\sqrt{a^2+4p}}{2}\,cm$. Np. dla $p=15$, $a=2$ boki prostokąta wynoszą 3 cm, 5 cm. Łatwo sprawdzić, że te wartości spełniają warunki zadania.

Zadania

24. Za 120 *zł* kupiono kilka m sukna; gdyby 1 m kosztował o 3 *zł* mniej, to za tę samą kwotę można by kupić o 2 m więcej. Ile m kupiono?

25. Długość prostokąta jest 2 razy większa od szerokości. Przekątna wynosi 3,8 cm. Oblicz boki tego prostokąta.

26. Długość prostokąta o polu 91,3 cm^2 jest o 2,7 cm dłuższa od szerokości. Ile wynoszą boki tego prostokąta?

27. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 10. Jeżeli tę liczbę pomnożymy przez liczbę o tych samych cyfrach, napisanych w przeciwnym porządku, otrzymamy 2701. Co to za liczba?

28. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego wynosi 3,7 cm, zaś różnica obu przyprostokątnych 2,3 cm. Oblicz przyprostokątne.

29. Jeżeli pewien odcinek przedłużymy o 6 cm, o 5 cm i o 1,5 cm, to otrzymamy 3 odcinki, będące bokami trójkąta prostokątnego. Oblicz długość pierwotnego odcinka.

30. Długości boków trójkąta prostokątnego wyrażają się w cm trzema liczbami naturalnymi po sobie następującymi. Oblicz długości boków.

31. Oblicz ramię trójkąta równoramiennego, w którym suma ramienia i podstawy wynosi 13 *cm*, zaś wysokość 8 *cm*.

32. Pole trójkąta prostokątnego wynosi $p\ cm^2$, zaś suma długości obu przyprostokątnych $s\ cm$. Oblicz długości przyprostokątnych. Podstaw $p = 12$, $s = 10$.

33. Jeżeli do pewnej liczby dodamy jej odwrotność, to otrzymamy a. Co to za liczba? Podstaw $a = 5{,}2$. Czy przy każdym a taka liczba istnieje?

34. Przez ogród w kształcie prostokąta o bokach 50 *m* i 40 *m* poprowadzono dwie ścieżki równej szerokości, wzdłuż i wszerz. Jaka jest szerokość ścieżek, jeżeli zajmują 89 m^2?

35. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna wynosi $c\ cm$, zaś prostopadła do niej wysokość $w\ cm$. Oblicz odcinki, na które wysokość dzieli przeciwprostokątną, oraz obie przyprostokątne. Podstaw $c = 12$, $w = 3{,}3$.

36. W turnieju szachowym rozegrano a partyj. Ilu było graczy, jeżeli każdy z każdym grał jedną partię? Podstaw $a = 36$.

37. Wielobok wypukły ma 54 przekątnych. Ile ma boków?

38. Podróżnik przebył 1200 *km*. Gdyby przebywał dziennie o 10 *km* mniej, podróż trwałaby o 6 dni dłużej. Ile *km* dziennie przebywał?

39. Dwóch piechurów wychodzi równocześnie z pewnej miejscowości. Pierwszy przebywa w 1 godzinie 4 *km* i idzie w kierunku północnym, drugi przebywa w 1 godzinie 5 *km* i idzie na wschód. Po jakim czasie ich odległość wyniesie 30 *km*?

40. Wysokość dzieli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego na dwa odcinki, których długości różnią się o $d\ cm$. Dłuższa przyprostokątna wynosi $a\ cm$. Oblicz krótszy odcinek przeciwprostokątnej. Podstaw $a = 5$, $d = 1$.

41. Z punktu zewnątrz koła poprowadzono styczną i sieczną w ten sposób, że długość odcinka stycznej wynosi $a\ cm$, zaś długość cięciwy na siecznej $b\ cm$. Oblicz długość odcinka na siecznej, leżącego poza kołem.

42. Bok rombu wynosi $a\ cm$, zaś różnica przekątnych $d\ cm$. Oblicz długości przekątnych. Podstaw $a = 6$, $d = 4$. Wykaż, że zagadnienie nie posiada rozwiązania, jeżeli $d > 2a$.

43. Na dwu bokach kwadratu wychodzących z tego samego wierzchołka odmierzono, poczynając od wierzchołka, równe odcinki w ten sposób, że końce tych odcinków tworzą wraz z przeciwległym wierzchołkiem trójkąt równoboczny. Oblicz bok tego trójkąta przyjmując, że bok kwadratu wynosi $a = 4$ *cm*.
(Wskazówka: Obierz za niewiadomą długość odmierzonego odcinka).

44. Ojciec podarował dwom synom po 20 *zł*. Starszy syn codziennie wydawał pewną sumę, zaś młodszy codziennie o 45 *gr* mniej niż starszy, tak że pieniądze wystarczyły młodszemu o 9 dni dłużej. Ile każdy wydawał?

45. Klasa trzecia pewnego gimnazjum wybrała się na wycieczkę. Całkowity koszt wynosił 54 *zł*. Ponieważ sześciu uczniów nie miało pieniędzy, każdy z pozostałych zapłacił o 30 *gr* więcej. Ilu było uczniów?

46. Powierzchnia walca kołowego wynosi p cm^2, wysokość w *cm*. Oblicz promień podstawy. Podstaw $p = 250$, $w = 12$. Czy to zagadnienie posiada zawsze rozwiązanie?

47. Ciało wyrzucono pionowo w górę z prędkością początkową c *m/sek*. Po ilu sekundach osiągnie ono wysokość w *m*? (Opór powietrza pomijamy). Podstaw $c = 250$, $w = 900$.
Wskazówka: Po t sek. wysokość, na której znajduje się ciało, wyraża się wzorem $w = ct - \frac{1}{2} g t^2$, gdzie $g = 9{,}81$.

48. Dwu robotników wykona razem pewną pracę w 5 dniach. Pierwszy z nich wykonałby tę pracę w czasie o 24 dni dłuższym niż drugi. W jakim czasie każdy z nich wykonałby sam tę pracę?

49. Odległość dwu stacyj kolejowych wynosi 48 *km*. Z pierwszej stacji wyjeżdżają równocześnie dwa pociągi, pospieszny i osobowy, w kierunku drugiej stacji. Pociąg pospieszny, który w jednej minucie przebywa o 0,4 *km* więcej niż osobowy, przyjeżdża do drugiej stacji o 10 minut wcześniej niż osobowy. Ile *km* każdy pociąg przebywa w 1 minucie?

50. Do zbiornika prowadzą dwie rury. Jeżeli woda będzie dopływać tylko pierwszą rurą, to zbiornik napełni się o a godz. wcześniej, niż gdyby woda dopływała tylko drugą rurą; jeżeli zaś obie rury będą otwarte, zbiornik napełni się w b godz. Po jakim czasie napełnimy zbiornik, otwierając tylko pierwszą rurę.
Wskazówka: Oznacz przez V m^3 objętość zbiornika, zaś przez x szukany czas w minutach. Podstaw $a = 20$, $b = 3$.

51. Z pełnej beczki, zawierającej 360 *l* spirytusu, odlano pewną ilość spirytusu, a następnie dopełniono beczkę wodą. Po zmieszaniu znowu odlano tyle samo, co za pierwszym razem, i jeszcze 84 *l*, i znowu dopełniono wodą. Po zmieszaniu otrzymano płyn, zawierający tyleż spirytusu, co wody. Ile *l* odlano za pierwszym razem?

52. Kapitalista wypożyczył 120000 *zł* na pewien procent. Po jednym roku otrzymał 4000 *zł* jako część odsetek, zaś resztę odsetek wypożyczył wraz z kapitałem na dalszy rok przy tej samej stopie procentowej. Po upływie drugiego roku otrzymał wraz z odsetkami 128100 *zł*. Ile wynosiła stopa procentowa?

53. Z dwu metali, których ciężary właściwe różnią się o 1,5 g/cm^3, sporządzono stop, biorąc 20 g cięższego i 40 g lżejszego. Ciężar właściwy stopu wynosi 9,4 g/cm^3. Oblicz ciężary właściwe tych metali.

54. Dwaj piechurzy przebyli 30 *km*. Pierwszy szedł na godz. o 2 *km* więcej niż drugi i przebył drogę w czasie o $2\frac{1}{2}$ godziny krótszym niż drugi. Ile *km* na godz. każdy przebywał?

55. Z dwu miejscowości odległych o 30 *km* wychodzi równocześnie naprzeciw siebie dwu piechurów, którzy spotykają się po $3\frac{1}{3}$ godzinach. Drugi piechur przebywa 1 *km* w czasie o 3 *min.* dłuższym niż pierwszy. W jakim czasie każdy z nich przebywa 1 *km*?

56. Z miejscowości A wysłano gońca do miejscowości B. W dwie godziny później z miejscowości B wysłano gońca do miejscowości A. Drugi goniec po 2 godzinach i 5 minutach spotkał się z pierwszym, po czym obaj doszli jednocześnie do celu. Jak długo szedł każdy?

Wskazówka: Oznacz odległość obu miejscowości przez a i oblicz prędkość każdego z gońców, następnie wyraź, że suma odległości przebytych przez obu gońców w chwili spotkania wynosi a.

§ 3. Suma i iloczyn pierwiastków

Załóżmy, że równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0) \qquad (1)$$

ma wyróżnik D nieujemny. W tym przypadku równanie ma pierwiastki określone wzorami:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \qquad (2)$$

(Jeżeli $D = 0$, wówczas oczywiście $x_1 = x_2$).

Z wzorów (2) wynika

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2-D}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

A więc otrzymaliśmy wzory

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \qquad (3)$$

Wzory powyższe pozwalają wyznaczyć sumę i iloczyn pierwiastków równania (1) bez rozwiązywania tego równania.

Przykład: Równanie $12x^2 - 11x + 2 = 0$ ma wyróżnik

$$D = 11^2 - 4 \,.\, 12 \,.\, 2 = 25 > 0.$$

Zatem wedle wzorów (3):

$$x_1 + x_2 = -\frac{-11}{12} = \frac{11}{12}, \qquad x_1 x_2 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Dla sprawdzenia rozwiązujemy dane równanie. Otrzymamy $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{1}{4}$. Mamy: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.

Jeżeli jakieś liczby, np. u i v, spełniają wzory (3), tzn. jeżeli dla tych liczb zachodzą równości

$$u + v = -\frac{b}{a}, \qquad uv = \frac{c}{a} \qquad (4)$$

wówczas te liczby są pierwiastkami równania (1).

Wykażemy np., że u spełnia równanie (1). Z równości pierwszej (4) dostajemy $v = -u - \frac{b}{a}$. Podstawiając w drugą równość (4), otrzymujemy $u\left(-u - \frac{b}{a}\right) = \frac{c}{a}$, stąd $-u^2 - \frac{b}{a}u = \frac{c}{a}$.

Mnożąc ostatnią równość obustronnie przez $-a$ dostaniemy $au^2 + bu = -c$, czyli $au^2 + bu + c = 0$. A więc u jest pierwiastkiem równania $ax^2 + bx + c = 0$.

Zatem, jeżeli liczby x_1, x_2 spełniają wzory (3), to x_1 i x_2 są pierwiastkami równania (1).

Przykłady:

1. Równanie $6x^2 - 5x + 1 = 0$ ma pierwiastki $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Aby to sprawdzić, wystarczy stwierdzić, że zachodzą równości:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{6}, \quad x_1\, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{6}.$$

Równości powyższe zachodzą, bo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

2. Szczególnie prosto wyraża się suma i iloczyn pierwiastków w przypadku równania

$$x^2 + px + q = 0,$$

w którym współczynnik przy niewiadomej w stopniu drugim równa się 1. W tym przypadku mamy $a = 1$, $b = p$, $c = q$ więc na mocy (3)

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q. \qquad (5)$$

3. Podać równanie kwadratowe $x^2 + px + q = 0$ o pierwiastkach $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.

Ponieważ 3 i -5 mają być pierwiastkami danego równania, więc liczby p, q muszą spełniać równości:

$$3 + (-5) = -p \qquad 3 \cdot (-5) = q \qquad (6)$$

Stąd $p = 2$, $q = -15$. Dostajemy więc równanie

$$x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Łatwo stwierdzić, że 3, -5 są pierwiastkami tego równania, gdyż p, q zostały tak wyznaczone, żeby były spełnione równości (6).

4. Opierając się na wzorach (3) możemy łatwo bez rozwiązywania równania rozstrzygnąć, jakie znaki mają pierwiastki. Badamy najpierw iloczyn pierwiastków, który obliczamy z wzoru (3). Jeżeli $x_1\, x_2 > 0$, wówczas pierwiastki mają znaki te same. Np. 1) $x^2 + x - 2 = 0$, 2) $x^2 - x - 2 = 0$,

3) $x^2 - 3x + 2 = 0$, 4) $x + 3x + 2 = 0$.

Obliczając przekonywamy się, że w każdym równaniu $D > 0$. W równaniu

1) $x_1 x_2 = -2$, więc pierwiastki mają znaki przeciwne

2) $x_1 x_2 = -2$, „ „ „ „ „

3) $x_1 x_2 = 2$, więc pierwiastki mają znaki te same

4) $x_1 x_2 = 2$, „ „ „ „ „ „

Przechodzimy następnie do badania sumy pierwiastków.

W 1) mamy $x_1 + x_2 = -1 < 0$; ponieważ pierwiastki mają różne znaki, suma zaś jest ujemna, więc pierwiastek ujemny jest co do modułu większy od pierwiastka dodatniego. Rozwiązując równanie otrzymamy $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Widzimy, że $|-2| > 1$.

W 2) mamy $x_1 + x_2 = 1 > 0$. Podobnie jak poprzednio stwierdzamy, że pierwiastek dodatni jest co do modułu większy od ujemnego. Mamy tutaj

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2, \text{ a więc } 2 > |-1|.$$

W 3) mamy $x_1 + x_2 = 3$. Ponieważ pierwiastki mają te same znaki, a suma ich jest dodatnia, zatem oba pierwiastki są dodatnie.

Mamy tutaj $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

W 4) mamy $x_1 + x_2 = -3$. Podobnie jak poprzednio stwierdzamy, że oba pierwiastki są ujemne.

Mamy tutaj $x_1 = -1$ $x_2 = -2$.

5. Opierając się na wzorach (5) możemy czasem łatwo odgadnąć pierwiastki równania. Np.

a) $$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Mamy tutaj $\quad x_1 x_2 = 12, \quad x_1 + x_2 = 8.$

Ponieważ iloczyn i suma pierwiastków są dodatnie, więc oba pierwiastki są dodatnie. Przedstawiamy 12 jako iloczyn dwóch liczb całkowitych dodatnich:

$$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4.$$

Obliczamy teraz sumę czynników: $1 + 12 = 13$, $2 + 6 = 8$. A więc 2 i 6 są pierwiastkami równania.

b) $$x^2 + 3x - 18 = 0.$$

Mamy tutaj $\quad x_1 x_2 = -18, \quad x_1 + x_2 = -3.$

A więc pierwiastki mają przeciwne znaki, przy czym pierwiastek ujemny jest co do modułu większy od dodatniego

$$18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6.$$

Obliczamy sumy

$$1 + (-18) = -17, \quad 2 + (-9) = -7, \quad 3 + (-6) = -3,$$

A więc 3, — 6 są pierwiastkami równania.

6. Dane jest równanie $8x^2 - 10x + 3 = 0$. Ułożyć równanie kwadratowe

$$y^2 + py + q = 0 \text{ o pierwiastkach } y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2^2.$$

Mamy $\qquad y_1 + y_2 = -p, \qquad y_1 y_2 = q,$

więc $\qquad x_1^2 + x_2^2 = -p, \qquad x_1^2 x_2^2 = q.$

Należy więc obliczyć $x_1^2 + x_2^2$ i $x_1^2 x_2^2$.

Mamy $\qquad x_1 + x_2 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, \quad x_1 x_2 = \frac{3}{8}.$

Zatem $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (\frac{5}{4})^2 - 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{13}{16}.$

$$x_1^2 x_2^2 = (x_1x_2)^2 = (\tfrac{3}{8})^2 = \tfrac{9}{64}.$$

Stąd $\qquad p = -\frac{13}{16}, \quad q = \frac{9}{64}.$

A więc równanie $y^2 - \frac{13}{16}y + \frac{9}{64} = 0$ ma pierwiastki $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $8x^2 - 10x + 3 = 0$.

Zadania

57. Wskaż sumę i iloczyn pierwiastków równania:

a) $x^2 + 4x + 1 = 0$, *b)* $x^2 + 7x - 2 = 0$,
c) $x^2 - 3x - 5 = 0$, *d)* $3x^2 + 5x - 7 = 0$,
e) $5x^2 - 2x - 7 = 0$, *f)* $2x^2 + 5x + 3 = 0$,
g) $x^2 - 4a^2 = 0$, *h)* $5x^2 - 2x = 0$.

58. Utwórz równania drugiego stopnia o pierwiastkach:

a) $-2, 1$, *b)* $\sqrt{3}, -2$, *c)* $\frac{3}{4}, \sqrt{2}$,
d) $-\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}$, *e)* $5 + \sqrt{3}, 5 - \sqrt{3}$, *f)* $-\frac{2}{5}, 0$
g) $a, -a$, *h)* $a, \dfrac{1}{a}$, *i)* $a - \sqrt{b}, \quad a + \sqrt{b}$.

59. Jakie znaki mają pierwiastki równań:

a) $-3x^2 + 7x + 1 = 0$ *b)* $6x^2 + 10x + 2 = 0$,
c) $2x^2 + 5x + 3 = 0$, *d)* $-2x^2 + 10x + 2 = 0$,
e) $12x^2 - 25x + 2 = 0$, *f)* $-2x^2 - 8x - 7 = 0$.

60. Utwórz równanie, którego pierwiastki są kwadratami pierwiastków równania:

$a)\ x^2 - 14x + 5 = 0,$ $\qquad b)\ x^2 - 5x + 6 = 0,$

nie rozwiązując tego równania. Następnie sprawdź.

61. Utwórz równanie, którego pierwiastki są 3 razy większe od pierwiastków równania:

$a)\ x^2 - 8x + 15 = 0,$ $\qquad b)\ x^2 - 5x - 6 = 0,$

$c)\ x^2 - 7x + 10 = 0,$

nie rozwiązując tego równania. Następnie sprawdź.

62 Utwórz równanie, którego pierwiastki są odwrotnościami pierwiastków równania:

$a)\ x^2 + 9x - 10 = 0,$ $\qquad b)\ x^2 - 10x + 16 = 0,$

$c)\ 6x^2 - 5x + 1 = 0,$

nie rozwiązując równania. Następnie sprawdź.

Wskazówka: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}.$

63. Równania:

$a)\ x^2 - 3x + 2 = 0,$ $\qquad b)\ x^2 - 7x + 10 = 0,$

$c)\ x^2 + 11x + 18 = 0,$ $\qquad d)\ x^2 - 5x - 24 = 0,$

$e)\ x^2 - x - 56 = 0,$ $\qquad f)\ x^2 + 6x - 16 = 0.$

posiadają pierwiastki całkowite. Rozwiąż te równania opierając się na wzorach na sumę i iloczyn pierwiastków.

§ 4. Rozkład trójmianu stopnia drugiego na czynniki stopnia pierwszego.

Przypuśćmy, że mamy dany trójmian stopnia drugiego $ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są to liczby dane ($a \neq 0$), zaś x oznacza zmienną. Zajmiemy się pytaniem, kiedy ten trójmian da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego.

Załóżmy, że wyróżnik $D = b^2 - 4ac$ jest nieujemny. Zatem równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

posiada pierwiastki x_1, x_2, spełniające równości

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Z równości powyższych otrzymujemy:

$$b = -a\,(x_1 + x_2), \quad c = a x_1 x_2.$$

Mamy zatem

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a\,(x_1 + x_2)\,x + a x_1 x_2; \quad \textbf{stąd}$$

$$ax^2 + bx + c = a\,[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2].$$

Sprawdzamy łatwo, że wyrażenie w nawiasie [ ] równe jest iloczynowi $(x - x_1)\,(x - x_2)$. Zatem

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\,(x - x_2) \qquad (1)$$

A więc, jeżeli $D > 0$, wówczas trójmian $ax^2 + bx + c$ można rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego.

Na odwrót widzimy, że jeżeli wielomian $ax^2 + bx + c$ da się przedstawić w postaci (1), wówczas x_1 i x_2 są miejscami zerowymi tego wielomianu. Zatem w tym przypadku równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma rozwiązanie, więc wyróżnik $D \geqslant 0$.

Jeżeli więc $D < 0$, wówczas trójmian $ax^2 + bx + c$ nie da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego.

Jeżeli wyróżnik $D = 0$, wówczas mamy $x_1 = x_2$. Otrzymamy w tym przypadku

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_1) = a\,(x - x_1)^2 \qquad (2)$$

Na odwrót, jeżeli wielomian $ax^2 + bx + c$ da się przedstawić w postaci (2), wówczas łatwo zauważyć, że x_1 jest jedynym jego miejscem zerowym; zatem równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma w tym przypadku tylko jedno rozwiązanie, więc $D = 0$.

Zauważmy, że jeżeli $a > 0$ i $D = 0$, wówczas na mocy (2) możemy napisać

$$ax^2 + bx + c = [\sqrt{a}\,(x - x_1)]^2. \qquad (3)$$

W tym więc przypadku trójmian $ax^2 + bx + c$ jest kwadratem dwumianu stopnia pierwszego.

Przykłady:

1. Wielomian $3x^2 - 6x - 24$ ma wyróżnik $D = 6^2 + 4 \cdot 3 \cdot 24 > 0$. Wielomian ten da się więc rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego. Aby znaleźć ten rozkład, rozwiązujemy równanie $3x^2 - 6x - 24 = 0$. Dostajemy

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 4.$$

Zatem $\qquad 3x^2 - 6x - 24 = 3(x + 2)\,(x - 4).$

2. Wielomian $2x^2 - x + 8$ nie da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego, gdyż wyróżnik $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 < 0$.

3. Wielomian $9x^2 + 12x + 4$ ma wyróżnik $D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$. Ponieważ $a = 9 > 0$, więc dany trójmian jest kwadratem dwumianu stopnia pierwszego. Mamy rzeczywiście

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2.$$

Zadania

64. Rozłóż na czynniki:

a) $x^2 + 9x - 10$, *b)* $-6x^2 + x + 1$,

c) $20x^2 - 17x - 24$, *d)* $3x^2 + 11x - 4$,

e) $-4x^2 - 17x + 15$, *f)* $8x^2 + 70x + 48$.

65. Uprość ułamki:

a) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$, *b)* $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$, *c)* $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$.

(Rozłóż licznik i mianownik na czynniki).

66. Dla jakich m trójmiany

a) $x^2 + mx + 9$, *b)* $x^2 + mx - m - \dfrac{3}{4}$,

c) $x^2 + (m + 1)\,x + 4$, *d)* $x^2 - \dfrac{m}{m + 1}\,x + \dfrac{2}{m + 1}$

są kwadratami dwumianów stopnia pierwszego?

Rozdział V.

Układy równań o dwu niewiadomych

§ 1. Rozwiązywanie układu równań

Przejdziemy obecnie do rozwiązywania niektórych układów równań o dwu niewiadomych. Łatwo rozwiązać układ w przypadku, gdy jedno z równań jest stopnia pierwszego, drugie zaś, obok wyrazów stopnia pierwszego, zawiera kwadraty niewiadomych oraz ich iloczyn albo tylko niektóre takie wyrazy.

Przykład 1. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 104 \\ y - x &= 8 \end{aligned} \qquad (1)$$

Zakładamy, że układ powyższy posiada rozwiązanie i że x, y oznaczają to rozwiązanie. Z drugiego równania otrzymujemy

$$y = x + 8. \qquad (2)$$

Wstawiając tę wartość do pierwszego równania dostaniemy:

$$x^2 + (x + 8)^2 = 104$$

czyli

$$x^2 + 8x - 20 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są $x_1 = -10$, $x_2 = 2$. Podstawiając te wartości w równaniu (2), otrzymujemy $y_1 = -2$, $y_2 = 10$. Zatem układ (1) może mieć tylko dwa rozwiązania:

$$x_1 = -10,\ y_1 = -2, \text{ oraz } x_2 = 2,\ y_2 = 10.$$

Podstawiając znalezione wartości w równaniach (1) sprawdzamy, że znalezione liczby istotnie je spełniają.

Przykład 2. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 &= 1 \\ \frac{3x - 2y}{x + 2y} &= \frac{5}{7}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Uwalniając drugie równanie od ułamków i porządkując otrzymujemy po uproszczeniu

$$2x - 3y = 0.$$

Obliczając z tego równania x mamy

$$x = \tfrac{3}{2} y. \qquad (2)$$

Wstawiając to wyrażenie do pierwszego równania otrzymujemy po redukcji

$$\tfrac{1}{4} y^2 = 1.$$

Pierwiastkami tego równania są $y_1 = -2$, $y_2 = 2$. Odpowiednie wartości na x są, na mocy (2), $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Zatem rozwiązaniami układu (1) mogą być tylko $x_1 = -3$, $y_1 = -2$ i $x_2 = 3$, $y_2 = 2$. Podstawiając przekonywamy się, że obie pary liczb są istotnie rozwiązaniami układu (1).

Przykład 3. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 3xy &= 2 \\ 3x + 2y &= 4. \end{aligned} \qquad (1)$$

Z drugiego równania otrzymujemy:

$$y = -\tfrac{3}{2} x + 2 \qquad (2)$$

Podstawiając w pierwszym równaniu otrzymamy:

$$-\tfrac{9}{2}x^2 + 6x - 2 = 0. \qquad (3)$$

Równanie (3) ma tylko jeden pierwiastek $x = \frac{2}{3}$. A więc rozwiązaniem układu (1) może być tylko $x = \frac{2}{3}$, $y = 1$. Sprawdzając przekonywamy się, że liczby te istotnie spełniają oba równania (1). W tym przykładzie układ posiada więc tylko jedno rozwiązanie.

Przykład 4. Rozwiązać układ równań:

$$2x^2 + 3y^2 = 12$$

$$x + y = 4.$$

Postępując, jak poprzednio, dochodzimy do równania:

$$2x^2 + 3(4 - x)^2 = 12,$$

czyli

$$5x^2 - 24x + 36 = 0.$$

Równanie to nie posiada rozwiązania, bo jego wyróżnik jest ujemny. A więc dany układ również nie posiada rozwiązania.

Przykład 5. Rozwiązać układ równań:

$$\left.\begin{aligned} y + 2x &= a \\ x^2 - y^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$y = a - 2x. \qquad (2)$$

Wstawiamy tę wartość do drugiego równania:

$$x^2 - (a - 2x)^2 = 1,$$

czyli

$$3x^2 - 4ax + a^2 + 1 = 0. \qquad (3)$$

Wyróżnik tego równania

$$D = 16a^2 - 4 \cdot 3(a^2 + 1) = 4a^2 - 12 = 4(a^2 - 3).$$

Jeżeli $D > 0$, czyli jeżeli $|a| > \sqrt{3}$, to równanie (3) posiada dwa rozwiązania:

$$x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{4(a^2 - 3)}}{6} = \frac{4a \pm 2\sqrt{a^2 - 3}}{6} = \frac{2a \pm \sqrt{a^2 - 3}}{3}$$

czyli

$$x_1 = \frac{2a - \sqrt{a^2 - 3}}{3}, \qquad x_2 = \frac{2a + \sqrt{a^2 - 3}}{3}.$$

Odpowiednimi wartościami na y są na mocy (2):

$$y_1 = \frac{-a + 2\sqrt{a^2 - 3}}{3}, \qquad y_2 = \frac{-a - 2\sqrt{a^2 - 3}}{3}.$$

Sprawdzając przekonywamy się, że obie pary wartości spełniają równania (1).

Jeżeli $D = 0$, czyli jeżeli $a = \sqrt{3}$ lub $a = -\sqrt{3}$, to równanie (3) ma tylko jedno rozwiązanie

$$x = \frac{2a}{3}.$$

Odpowiednie y wynosi na mocy (2)

$$y = -\frac{a}{3}.$$

W tym przypadku układ (1) ma więc tylko jedno rozwiązanie.

Jeżeli $D < 0$, czyli jeżeli $|a| < \sqrt{3}$, to równanie (3) nie posiada pierwiastka, a więc i układ (1) nie ma rozwiązania.

P r z y k ł a d 6. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x + y &= m \\ xy &= n \end{aligned} \qquad (1)$$

Układ powyższy moglibyśmy rozwiązać wyznaczając np. niewiadomą x z pierwszego równania i wstawiając w drugie. Można jednak rozwiązać układ (1) w prostszy sposób.

Zauważmy, że równania (1) są wzorami na sumę i iloczyn pierwiastków (str. 68) równania

$$z^2 - mz + n = 0 \qquad (2)$$

Jeżeli więc x, y spełniają układ (1), wówczas są pierwiastkami równania (2) (str. 68). Aby zatem rozwiązać układ (1), wystarczy rozwiązać równanie (2). Jeżeli to równanie ma pierwiastki z_1, z_2, wówczas

$$z_1 + z_2 = m, \qquad z_1 z_2 = n$$

Zatem rozwiązaniami układu (1) są:

$$x = z_1, \quad y = z_2 \qquad \text{i} \qquad x = z_2, \quad y = z_1$$

Jeżeli $z_1 \neq z_2$, to mamy dwa rozwiązania, jeżeli $z_1 = z_2$, wówczas mamy jedno rozwiązanie.

Jeżeli równanie (2) nie ma rozwiązania, wówczas oczywiście układ (1) też nie ma rozwiązania.

Widzimy stąd, że rozwiązanie układu (1) sprowadza się do rozwiązania równania (2).

Np. Mamy układ

$$x + y = 9$$

$$xy = 14 .$$

Układamy równanie

$$z^2 - 9z + 14 = 0 .$$

Rozwiązując otrzymujemy $z_1 = 2$, $z_2 = 7$.

Zatem $x_1 = 2$, $y_1 = 7$ i $x_2 = 7$, $y_2 = 2$ są rozwiązaniami danego układu.

P r z y k ł a d 7. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 2xy - y &= 21 \\ xy - 2x &= 4. \end{aligned} \qquad (1)$$

Mnożąc drugie równanie przez 2 i odejmując od pierwszego otrzymujemy

$$4x - y = 13. \qquad (2)$$

Każde rozwiązanie układu (1) musi również spełniać układ:

$$xy - 2x = 4$$

$$4x - y = 13 ,$$

który jest tej samej postaci, co układy z poprzednich przykładów. Rozwiązując go w znany sposób, dostajemy dwa rozwiązania $x_1 = 4$, $y_1 = 3$ i $x_2 = -\frac{1}{4}$, $y_2 = -14$. Łatwo się przekonać, że są to również rozwiązania pierwotnego układu (1).

P r z y k ł a d 8. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= 5 \\ y^2 + 2x^2 + x &= 19. \end{aligned} \qquad (1)$$

Tutaj w obu równaniach niewiadoma y występuje tylko w kwadracie. Obliczając y^2 np. z pierwszego równania, mamy

$$y^2 = x^2 + 5. \qquad (2)$$

Wstawiając tę wartość do drugiego równania, otrzymamy:

$$3x^2 + x - 14 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby 2 i $-\frac{7}{3}$.

Według (2) musi być

$$y = \pm \sqrt{x^2 + 5}.$$

Przyjmując najpierw $x = 2$ otrzymujemy

$$y = \pm \sqrt{9} = \pm 3,$$

zaś dla $x = -\frac{7}{3}$ dostajemy

$$y = \pm \sqrt{\frac{94}{9}} = \pm \frac{\sqrt{94}}{3}.$$

Rozwiązaniami układu (1) mogą więc być tylko:

$$x_1 = 2,\ y_1 = 3;\quad x_2 = 2,\ y_2 = -3;\quad x_3 = -\tfrac{7}{3},\ y_3 = \frac{\sqrt{94}}{3};$$

$$x_4 = -\tfrac{7}{3},\ y_4 = -\frac{\sqrt{94}}{3}.$$

Podstawiając przekonywamy się, że wszystkie cztery pary liczb spełniają układ (1).

Jest rzeczą widoczną, że podobnie możemy postąpić z każdym układem równań drugiego stopnia o tej własności, że jedna z niewiadomych występuje w obu równaniach tylko w kwadracie.

Zadania

Rozwiąż układy równań:

1. *a)* $x^2 + y^2 = 25$
   $x + y = 7$

   b) $y^2 = 6x$
   $y = 3x + 5$

   c) $xy = 36$
   $y - 4x = 0$

   d) $x^2 - y^2 = 80$
   $x - y = 8$

   e) $4x^2 - 9y^2 = 7$
   $2x + 3y = 7$

   f) $xy = 8$
   $3x - y = 10$

   g) $x - 3y = 1$
   $x^2 - 2xy + 9y^2 = 17$

   h) $x + 2y = 4$
   $3x^2 + y^2 = 13$

   i) $3x - y = 5$
   $x^2 - 2xy + 3y^2 = 3$

   j) $7x^2 - 8xy = 159$
   $5x + 2y = 7$

2. *a)* $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 9$
   $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 98$

   b) $\frac{1}{4}(x + y) = \frac{1}{3}(x - y)$
   $\frac{x^2}{7} + 2(x - y)^2 = 79$

c) $x + y = 4$
$\frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 1$

d) $(7 + x)(6 + y) = 80$
$x + y = 5$

e) $\frac{6}{x} = \frac{y}{10}$
$x - y = 11$

f) $(3x - 2y)^2 - (2x - 3y)^2 = 80$
$4x - 5y = 5$

g) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$
$x + y = 6$

h) $\frac{x + y}{x - y} = 5$
$x^2 + y^2 = 1$

i) $x + y = 1$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$

j) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 5.$
$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{5}{6}$

3. a) $xy + x + y =$
$= (x + 2)(y + 2) - 7$
$2x^2 - 3y^2 = -10$

b) $\frac{5x + 7y}{3x + 11} = \frac{31}{17}$
$xy = 6$

c) $\frac{x - 3}{x} = \frac{y - 4}{y - 1}$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{x + y}{x - y} = \frac{a}{b}$
$x^2 + y^2 = 1$

4. a) $xy = a$
$\frac{x}{y} = b$

b) $x + y = a$
$xy = b$

c) $x - y = a$
$xy = b$

d) $\frac{x + y}{x - y} = \frac{a}{b}$
$x^2 + y^2 = 1$

e) $16x^2 - 25y^2 = 400$
$y = ax$

f) $\frac{x}{y^2} = \frac{a}{b^2}$
$x - y = a^2 - b^2$

5. a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$
$xy = 180$

b) $xy + x = 4$
$xy + y = 3$

c) $(x + 1)(y - 2) = 30$
$(x - 2)(y + 1) = 24$

d) $xy + x = 18$
$xy - y = 10$

e) $x - \frac{1}{y} = a$

$y - \frac{1}{x} = b$

f) $x + y = axy$

$x - y = bxy$

g) $x + \frac{1}{y} = 3$

$y + \frac{1}{x} = \frac{4}{3}$

h) $\frac{xy+1}{y} = \frac{18}{7}$

$\frac{x}{xy+1} = \frac{4}{7}.$

6. *a)* $x^2 - y^2 = 25$

$y^2 = 6x$

b) $2x^2 - 3y^2 = 71$

$3x^2 + 2y^2 = 165$

c) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

d) $x^2 + y^2 = a^2$

$y^2 = 2px$

e) $\frac{1}{3x^2 + 8y^2} = \frac{1}{5x^2 - 8y^2}$; $\quad \frac{19}{28y^2 - 5x^2} = 1$

f) $(x^2 - 3)(y^2 - 1) = (y^2 - 4)x^2$; $\quad \frac{x^2+1}{y^2-6} = \frac{x^2-7}{y^2+2}$

7. *a)* $2(x^2 + y^2) - 3(x + y) = 29$; $\quad (x^2 + y^2) - 2(x + y) = 11$

b) $\frac{1}{2x^2 + 3y^2} + \frac{1}{5x - 3y} = \frac{7}{10}$; $\quad \frac{3}{2x^2 + 3y^2} - \frac{2}{5x - 3y} = \frac{11}{10}$

c) $12\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 3(x + y) = 4$; $\quad 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) - 5(x + y) = -\frac{9}{2}$

d) $2\left(x + \frac{1}{y}\right) + 3\left(y + \frac{1}{x}\right) = 10$; $\quad 5\left(x + \frac{1}{y}\right) - 6\left(y + \frac{1}{x}\right) = 7$

e) $xy + \frac{x}{y} = \frac{5}{3}$

$xy + \frac{y}{x} = \frac{5}{6}$

f) $x^2 + y^2 + \frac{x}{y} = 3$

$3(x^2 + y^2) + \frac{y}{x} = 7.$

W s k a z ó w k a: Wprowadź niewiadome pomocnicze.

§ 2. Układanie równań

Mając dane zagadnienie o dwu niewiadomych postępujemy w znany już sposób. A więc: wyrażamy warunki zagadnienia przez dwa równania, następnie rozwiązujemy otrzymany układ równań, w końcu sprawdzamy, czy znalezione rozwiązania układu są zarazem rozwiązaniami danego zagadnienia.

Przykład 1. Liczba dwucyfrowa jest 6 razy większa od iloczynu swoich cyfr. Jeżeli jej cyfry przestawimy, otrzymamy liczbę o 9 większą od pierwotnej. Co to za liczba?

Oznaczmy przez x, y odpowiednio pierwszą i drugą cyfrę szukanej liczby. Liczba ta wynosi więc $10x + y$, zaś liczba otrzymana przez przestawienie cyfr $10y + x$.

Zatem

$$10x + y = 6xy$$

$$10y + x = 10x + y + 9.$$

Rozwiązując ten układ w znany sposób, znajdujemy $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ oraz $x_2 = -\frac{1}{6}$, $y_2 = \frac{5}{6}$. Jak łatwo widzieć, pierwsze rozwiązanie spełnia warunki naszego zagadnienia. Drugie rozwiązanie nie ma znaczenia, ponieważ x,y muszą być całkowite. Zatem szukaną liczbą jest 12.

Przykład 2. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna wynosi c *cm*, zaś różnica obu przyprostokątnych wynosi r *cm*. Znaleźć obie przyprostokątne.

Oznaczając mniejszą przyprostokątną przez x, większą przez y, otrzymujemy z uwagi na twierdzenie Pitagorasa następujący układ równań:

$$\begin{aligned} y - x &= r \\ x^2 + y^2 &= c^2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wyznaczając z pierwszego równania y mamy

$$y = x + r. \qquad (2)$$

Wstawiając tę wartość do drugiego równania otrzymamy

$$2x^2 + 2rx + r^2 - c^2 = 0. \qquad (3)$$

Wyróżnik tego równania jest

$$D = (2r)^2 - 4 \cdot 2\,(r^2 - c^2) = 8c^2 - 4r^2 = 4\,(2c^2 - r^2).$$

Ponieważ w trójkącie każdy bok jest większy od różnicy obu innych, musi być $c > r$, a więc $c^2 > r^2$ i $2c^2 > r^2$. Zatem wyróżnik jest dodatni. Rozwiązując równanie (3) dostajemy

$$x_{1,2} = \frac{-2r \pm \sqrt{4\,(2c^2 - r^2)}}{4} = \frac{-r \pm \sqrt{2c^2 - r^2}}{2}.$$

$$x_1 = \frac{-r + \sqrt{2c^2 - r^2}}{2} \qquad x_2 = \frac{-r - \sqrt{2c^2 - r^2}}{2}.$$

Odpowiednie wartości na y są na mocy (2):

$$y_1 = \frac{r + \sqrt{2c^2 - r^2}}{2} \qquad y_2 = \frac{r - \sqrt{2c^2 - r^2}}{2}$$

Sprawdzamy łatwo, że x_1, y_1 oraz x_2, y_2 są rozwiązaniami układu (1). Rozwiązanie x_2, y_2 nie ma jednak znaczenia dla naszego zagadnienia, bo $x_2 < 0$. Np. dla $c = 65$, $r = 23$, otrzymujemy

$$x = \frac{-23 + \sqrt{2 \cdot 65^2 - 23^2}}{2} = 33, \quad y = 56.$$

Zadania

8. Suma licznika i mianownika ułamka wynosi 33. Jeżeli powiększymy licznik o 39, mianownik o 20, otrzymamy ułamek dwa razy większy. Co to za ułamek?

9. Iloczyn cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 12. Jeżeli przestawimy cyfry, otrzymamy liczbę większą o 36. Co to za liczba?

10. Liczba dwucyfrowa jest trzy razy większa od iloczynu swoich cyfr. Jeżeli do niej dodamy 18, otrzymamy liczbę utworzoną z tych samych cyfr w przeciwnym porządku. Co to za liczba?

11. Jeżeli długość prostokąta zmniejszymy o 3 *m*, a szerokość o 1 *m*, to otrzymamy prostokąt o polu dwa razy mniejszym. Jeżeli jednak długość powiększymy o 9 *m*, a szerokość zmniejszymy o 2 *m*, to pole się nie zmieni. Oblicz boki tego prostokąta.

12. Prostokąt ma to samo pole co kwadrat o boku o 6 *cm* krótszym niż dłuższy bok prostokąta. Jeżeli szerokość prostokąta powiększymy o 1 *cm*, zaś długość zmniejszymy o 2 *cm*, pole jego się nie zmieni. Oblicz boki tego prostokąta.

13. W trójkącie prostokątnym o znanej przeciwprostokątnej c wysokość do przeciwprostokątnej dzieli ją na dwa odcinki w ten sposób, że jeden z tych odcinków równa się przyprostokątnej nie przyległej temu odcinkowi. Oblicz obie przyprostokątne.

14. Odcinek o długości a podzielono w ten sposób, że jedna z części jest średnią geometryczną całego odcinka i drugiej części. (Tzw. złoty podział). Oblicz obie części.

15. W trójkącie równoramiennym suma boku i podstawy wynosi s *cm*, zaś wysokość prostopadła do podstawy w *cm*. Oblicz boki tego trójkąta. Podstaw $s = 11$, $w = 4$.

16. Boki równoległe trapezu wynoszą a *cm* i b *cm*, wysokość w *cm*. Odcinek równoległy do podstawy dzieli go na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość tego odcinka (Wskazówka: wprowadź jako drugą niewiadomą jeden z odcinków, na które odcinek równoległy do podstawy dzieli wysokość). Podstaw $a = 8$, $b = 6$, $w = 3$.

17. Obwód prostokąta wynosi a *cm*, pole p cm^2. Oblicz boki prostokąta. Podstaw $a = 24$, $p = 35$.

18. W trójkącie równoramiennym suma podstawy i wysokości wynosi s *cm*, zaś promień koła opisanego na trójkącie r *cm*. Oblicz boki tego trójkąta. Podstaw $s = 10$, $r = \frac{25}{8}$.
(Wskazówka: oblicz najpierw podstawę i wysokość).

19. Obwód trójkąta prostokątnego wynosi a *cm*, pole p cm^2. Oblicz przyprostokątne. Podstaw $a = 36$, $p = 54$.

20. Na kole o promieniu r opisano trapez równoramienny o polu p. Oblicz boki równoległe trapezu. (Wskazówka: korzystając ze znanej własności czworokąta opisanego wyraź bok nierównoległy przez boki równoległe i zastosuj tw. Pitagorasa do trójkąta, otrzymanego przez wykreślenie wysokości).

21. Bryła ma kształt walca, zakończonego dwiema półkulami. Jej długość wynosi a *cm*, zaś powierzchnia p cm^2. Oblicz promień i wysokość walca. Podstaw $a = 13$, $p = 245$.

22. Znając wysokość w *cm* i powierzchnię p cm^2 stożka kołowego oblicz promień podstawy i bok. Podstaw $w = 10$, $p = 800$. Czy liczby p, w mogą być dowolne?

23. Kapitał 36000 *zł* przynosi w pewnym czasie 7200 *zł* dochodu. Gdyby stopa procentowa była o 1% niższa, kapitał ten przyniósłby ten sam dochód w czasie o rok dłuższym. Jaka była stopa procentowa i na jak długo wypożyczono kapitał?

24. Pewien kapitał przynosi rocznie 120 *zł* dochodu. Inny kapitał, większy o 6 000 *zł* i oprocentowany o 2% wyżej, przynosi rocznie 540 *zł* dochodu. Ile wynoszą oba kapitały? Na ile procent są umieszczone?

25. Dwu robotników wykonało pewną pracę w ten sposób, że najpierw pierwszy wykonał połowę, następnie drugi resztę,

co trwało razem 25 dni. Gdyby pracowali równocześnie, wystarczyłoby im 12 dni. W jakim czasie każdy z osobna wykonałby tę pracę?

26. Dwa punkty poruszają się ruchem jednostajnym po ramionach kąta prostego ku wierzchołkowi z prędkością 3 *m/sek* i 4 *m/sek*. Ich początkowa odległość od siebie wynosi 20 *m*. Po 2 sekundach są one odległe tylko o 10 *m*. Oblicz ich początkowe odległości od wierzchołka.

27. Przednie koło u wozu ma obwód o a *m* mniejszy niż tylne, a na przestrzeni b *m* robi o c obrotów więcej. Oblicz obwody obu kół.

28. Dwaj piechurzy wychodzą równocześnie z miejscowości A i B, odległych o 45 *km*, naprzeciw siebie i spotykają się po 5 godzinach. Pierwszy z nich przybywa do B o $2\frac{1}{4}$ godziny prędzej niż drugi do A. Oblicz, w jakim czasie każdy z nich przebył drogę AB i w jakiej odległości od A nastąpiło spotkanie.

Rozdział VI

Równania pierwiastkowe

§ 1. Rozwiązywanie równań

Zajmiemy się teraz równaniami, w których niewiadome występują pod pierwiastkami. W równaniach tych pierwiastek kwadratowy (lub stopnia parzystego) oznaczać będzie zawsze pierwiastek arytmetyczny.

Przykład 1:

$$\sqrt{2x-5}=1.$$

Zakładamy, że x oznacza pierwiastek równania. Podnosząc obie strony do kwadratu dostajemy:

$$2x-5=1, \text{ stąd } x=3.$$

Sprawdzając przekonywamy się, że $x=3$ jest pierwiastkiem.

Przykład 2:

$$\sqrt{6-x}-x+4=0. \tag{1}$$

Zostawiamy pierwiastek po lewej stronie, zaś wszystkie inne wyrazy przenosimy na prawą stronę. Dostajemy

$$\sqrt{6-x}=x-4.$$

Podnosimy do kwadratu obie strony. Zatem

$$6 - x = x^2 - 8x + 16.$$

A więc

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Stąd $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. Sprawdzając przekonywamy się, że $x_1 = 5$ jest pierwiastkiem równania (1). Natomiast $x_2 = 2$ nie jest pierwiastkiem równania (1). Mamy bowiem

$$\sqrt{6-2} - 2 + 4 = 4 \neq 0.$$

P r z y k ł a d 3:

$$(3 - \sqrt{x-5})\,(4 - \sqrt{x-5}) = x - 7.$$

Wykonując mnożenie otrzymamy

$$12 - 3\sqrt{x-5} - 4\sqrt{x-5} + x - 5 = x - 7.$$

Zostawiamy pierwiastki po lewej stronie, inne wyrazy przenosimy na prawą stronę i redukujemy. Zatem

$$-7\sqrt{x-5} = -14, \quad \text{stąd} \quad \sqrt{x-5} = 2.$$

Zatem

$$x - 5 = 2^2, \text{ więc } x = 9.$$

Sprawdzając przekonywamy się, że $x = 9$ spełnia równanie.

P r z y k ł a d 4:

$$\sqrt[3]{2x-3} = 2.$$

Podnosząc obie strony do trzeciej potęgi dostaniemy

$$2x - 3 = 8, \text{ stąd } x = \tfrac{11}{2}.$$

Sprawdzając przekonywamy się, że $x = \frac{11}{2}$ jest pierwiastkiem.

P r z y k ł a d 5:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7.$$

Zostawiamy jeden z pierwiastków na lewej stronie (np. $\sqrt{x+7}$), drugi przenosimy na prawą stronę. Dostaniemy:

$$\sqrt{x+7} = 7 - \sqrt{x}.$$

Podnosimy obie strony do kwadratu. Zatem

$$x + 7 = 49 - 14\sqrt{x} + x.$$

Pierwiastek zostawiamy po prawej stronie, wszystkie zaś inne wyrazy przenosimy na lewą stronę i redukujemy. Dostaniemy

$$-42 = -14\sqrt{x}, \text{ czyli } \quad 3 = \sqrt{x}.$$

Stąd $9 = x$. Sprawdzamy, że $x = 9$ spełnia równanie.

Przykład 6:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-5} - \sqrt{3x-2} = 0 \qquad (1)$$

Jeżeli mamy trzy pierwiastki, to staramy się, aby jeden z nich był sam po jednej stronie, pozostałe zaś po drugiej. Przenosimy np. $\sqrt{3x-2}$ na prawą stronę. Zatem

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{3x-2}.$$

Podnosząc do kwadratu obie strony otrzymamy

$$x + 2\sqrt{x(x-5)} + x - 5 = 3x - 2.$$

Stąd
$$2\sqrt{x^2-5x} = x + 3.$$

Zatem
$$4(x^2-5x) = (x+3)^2.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie

$$3x^2 - 26x - 9 = 0.$$

Dostajemy $x_1 = 9$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Sprawdzamy, że $x_1 = 9$ jest pierwiastkiem równania (1). Natomiast $x_2 = -\frac{1}{3}$ nie jest pierwiastkiem, bo dla $x = -\frac{1}{3}$ lewa strona równania (1) traci sens.

Przykład 7:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} - \sqrt{x+14} - \sqrt{x-7} = 0.$$

Przenosimy dwa pierwiastki na prawą stronę. Zatem

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+14} + \sqrt{x-7}.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu otrzymamy:

$$x + 5 + 2\sqrt{(x+5)(x-2)} + x - 2 = x + 14 + 2\sqrt{(x+14)(x-7)} + \\ + x - 7.$$

Uwolniliśmy się zatem od dwóch pierwiastków. Postępując następnie jak w przykładzie 5., otrzymamy rozwiązanie $x = 11$.

W wielu przypadkach dogodnie jest wprowadzić niewiadomą pomocniczą.

Przykład 8:

$$2x^2 - 7x - \sqrt{2x^2 - 7x + 14} = 118.$$

Zauważmy, że przed pierwiastkiem mamy dwa pierwsze wyrazy wielomianu, stojącego pod pierwiastkiem. Dodając do obu stron równania trzeci wyraz, tj. 14, otrzymamy

$$2x^2 - 7x + 14 - \sqrt{2x^2 - 7x + 14} = 132 \qquad (1)$$

Połóżmy $\sqrt{2x^2 - 7x + 14} = u$ zatem $2x^2 - 7x + 14 = u^2$

Podstawiając w (1) otrzymamy

$$u^2 - u = 132, \text{ stąd } u_1 = 12, \ u_2 = -11.$$

Oczywiście $u_2 = -11$ odpada, gdyż równość $\sqrt{2x^2 - 7x + 14} = -11$, nie może zachodzić dla żadnej wartości na x, bo pierwiastek oznacza liczbę nieujemną. Dostajemy zatem

$$\sqrt{2x^2 - 7x + 14} = u_1 = 12.$$

Stąd $$2x^2 - 7x + 14 = 144.$$

Po rozwiązaniu otrzymamy $x_1 = 10$, $x_2 = -\frac{13}{2}$. Sprawdzamy, że $x_1 = 10$ i $x_2 = -\frac{13}{2}$ są pierwiastkami danego równania.

P r z y k ł a d 9:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x-1} - \sqrt{y+1} &= 1 \\ x + y &= 13. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Uwalniamy najpierw pierwsze równanie od pierwiastków. Przenosimy zatem jeden z pierwiastków na prawą stronę. Dostaniemy

$$\sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{y+1}.$$

Podnosimy obie strony do kwadratu. A więc

$$x - 1 = 1 + 2\sqrt{y+1} + y + 1.$$

Stąd $$x - y - 3 = 2\sqrt{y+1}.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu otrzymamy

$$(x - y - 3)^2 = 4(y + 1) \qquad (2)$$

Z drugiego równania (1) mamy $x = 13 - y$. Wstawiając w (2 otrzymujemy

$$(10 - 2y)^2 = 4(y + 1).$$

Stąd $y_1 = 3$, $y_2 = 8$. Zatem $x_1 = 13 - 3 = 10$, $x_2 = 13 - 8 = 5$. Prze konywamy się, że $x_1 = 10$ i $y_1 = 3$ jest rozwiązaniem układu (1 Natomiast $x_2 = 5$, $y_2 = 8$ nie jest rozwiązaniem.

Zadania

Rozwiąż równania:

1. *a)* $\sqrt{x} = 3$; $\sqrt[3]{x} = 5$; $2\sqrt{x} = 8$; $7\sqrt[3]{x} = 21$

   b) $6\sqrt{x} = 42$; $5\sqrt[3]{x} = 30$; $7\sqrt[4]{x} = 14$; $5\sqrt[6]{x} = 15$

   c) $(9 + 7x) : \sqrt{x} = 7\frac{1}{4}\sqrt{x}$; $5 = 3\sqrt{x} - 5$; $10 = 2\sqrt{5x\sqrt{3}}$.

2. *a)* $\sqrt{x+1} = 2$; $\sqrt{x-3} = 4$; $\sqrt{3-x} = 1$; $\sqrt[3]{x+5} = 2$

   b) $5\sqrt{x+2} = 45$; $3\sqrt[3]{x-7} = 12$; $2\sqrt{5-x} = 4$; $3\sqrt[4]{x-1} = 9$

   c) $\sqrt{x+a} = b$; $\sqrt[3]{a^3 + x} = a^3$; $a\sqrt{x-1} = b$; $a\sqrt{x+b} = b$

3. *a)* $2\sqrt{x} = 20 - 3\sqrt{x}$; $9\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} = 35$; $7\sqrt{x} - 15 = 3\sqrt{x} + 9$

   b) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 2$; $\dfrac{9}{7+2\sqrt{x}} = \dfrac{8}{13-5\sqrt{x}}$

   c) $(7 - \sqrt{x})\,(8 - \sqrt{x}) = x + 41$; $(3\sqrt{x} - 5)\,(2\sqrt{x} + 3) = 6x + 1$

   d) $a\sqrt{x+b} + c\sqrt{x+b} = a^2 - c^2$; $a\sqrt{x} + b^2 = b\sqrt{x} + a^2$.

4. *a)* $\sqrt{9x+13} = \sqrt{13x+9}$; $2\sqrt[3]{x+7} = 3\sqrt[3]{x-12}$;

   b) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{\sqrt{x+12}}{\sqrt{x+23}} = \dfrac{5}{6}$; $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{a+13}} = \dfrac{7}{8}$.

   c) $a\sqrt{x} = b\sqrt{2x}$; $a\sqrt{x+b} = b\sqrt{x+a}$.

5. *a)* $\sqrt{x+7} + \sqrt{x} = 7$; $\sqrt{2x} - \sqrt{2x-11} = 1$.

   b) $\sqrt{3x} - \sqrt{3x-5} = 1$; $\sqrt{3x+4} + \sqrt{3x-5} = 9$.

   c) $\sqrt{4x+9} + 2\sqrt{x+6} = 15$; $\sqrt{7x+2} = \sqrt{7x-5} + 1$.

6. *a)* $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = \sqrt{4x+9}$; $3\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-6} = \sqrt{x+42}$

   b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} = \sqrt{4x+13}$; $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = \sqrt{4x+13}$

   c) $\sqrt{x-6} - \sqrt{x-18} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-13}$.

7. *a)* $\sqrt{4x^2 - 7x - 6} = 9 - 2x$; $\sqrt{x} + \sqrt{2+x} = \dfrac{4}{\sqrt{2+x}}$

   b) $x - \sqrt{x^2 - x - 1 + \sqrt{x^2 + x - 6}} = 1$; $\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}} = 2$.

8. *a)* $\sqrt{4x+9} + 4x = 21$; $2x - 3\sqrt{x-8} = 25$; $2x - 5\sqrt{x} = 3$

   b) $x - 2 - 2\sqrt{x-2} = 0$; $\sqrt{9+4x} = 2x - 3$.

9\. a) $\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}=5;$ $\quad\sqrt{3x-11}-\sqrt{x}=3$

b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=6;$ $\quad\sqrt{3x+1}+\sqrt{8x+1}=5$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{ax+1}=1;$ $\quad\sqrt{x+a}-\sqrt{ax+1}=\sqrt{a}.$

10\. a) $\sqrt{x}+\sqrt{x+8}=\sqrt{x+15};$ $\quad\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=\sqrt{x+21}$

b) $\sqrt{x}+\sqrt{x-16}=\sqrt{x+39};$ $\quad\sqrt{x+7}-\sqrt{x}=\sqrt{x-8}$

11\. a) $\sqrt{x+3+\sqrt{2x+9}}=4;$ b) $\sqrt{3x-11-2\sqrt{4x-11}}=5$

c) $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+4}=2x+2;$ d) $\dfrac{5x+3\sqrt{2x^2+9}}{5x-3\sqrt{2x^2+9}}=\dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{1}{2};$ f) $\dfrac{\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{7-x}-\sqrt{x-5}}=\dfrac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-5}}$

Wskazówka: w *d), e), f)* uwolnij najpierw od mianowników.

12\. a) $x^2+5x+2\sqrt{x^2+5x+2}=22$

b) $x^2-4x+2\sqrt{x^2-4x+7}=1$

13\. a) $3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=19$ $\quad$ b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}=11$

$5\sqrt{x}-9\sqrt{y}=9$ $\quad$ $\sqrt{x-1}-\sqrt{y-2}=3$

c) $5\sqrt{x+2}+7\sqrt{y-1}=29$ $\quad$ d) $4\sqrt{3x+4}-3\sqrt{2y-1}=7$

$7\sqrt{x+2}-5\sqrt{y-1}=11$ $\quad$ $3\sqrt{3x+4}+4\sqrt{2y-1}=21$

e) $3\sqrt[3]{x}=16+5\sqrt[3]{y}$ $\quad$ f) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+y}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-y}}=-\dfrac{1}{15}$

$7\sqrt[3]{y}=9\sqrt[3]{x}-8$ $\quad$ $\dfrac{15\sqrt{x+y}+15\sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2-y^2}}=8$

Wskazówka: Podstaw za pierwiastki pomocnicze niewiadome.

14\. a) $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=5$ $\quad$ b) $\sqrt{x+2}+\sqrt{y+7}=7$

$5x+2y=31$ $\quad$ $x+3y=34$

c) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3y+1}=7$ $\quad$ d) $\sqrt{4x+5}-\sqrt{6y-2}=2$

$5x+3y=45$ $\quad$ $2x-3y=10$

Wskazówka: Uwolnij najpierw od pierwiastków w pierwszym równaniu.

15. W kole narysowano dwie równoległe cięciwy o długości $2p$ *cm* i $2q$ *cm*. Odległość tych cięciw wynosi d *cm*. Oblicz promień koła zakładając, że środek koła *a)* leży *b)* nie leży między tymi cięciwami. Podstaw następnie *a)* $p = 5$, $q = 3$, $d = 4$, *b)* $p = 3$, $q = 2$, $d = 2$.

16. W półkole o promieniu r *cm* wpisano trapez o obwodzie $2s$ *cm* w ten sposób, że średnica jest podstawą trapezu. Oblicz długość drugiego boku równoległego. Podstaw $s = 12$, $r = 5$.

17. Do studni spuszczono kamień bez prędkości początkowej. Uderzenie kamienia o powierzchnię wody usłyszano po a sekundach. Oblicz głębokość studni przyjmując, że przyśpieszenie ziemskie $g = 9{,}8$ *m/sek*^{2}, zaś prędkość głosu $c = 333$ *m/sek*. Podstaw $a = 5{,}12$.

(Wskazówka: wyraź, że suma czasu spadania i czasu, po którym głos doszedł, wynosi a sekund; droga w *m*, przebyta przez kamień w czasie t sekund, wynosi $\frac{1}{2} gt^2$).

Rozdział VII

Równania stopni wyższych niż drugi

§ 1. Rozwiązywanie równań stopni wyższych

Niektóre równania i układy równań stopni wyższych niż drugi dają się sprowadzić do równań, względnie układów równań, stopnia drugiego, które już umiemy rozwiązywać. Poznamy kilka takich przykładów.

Przykład 1. Rozwiązać równanie

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0. \qquad (1)$$

Jest to równanie stopnia czwartego, w którym oprócz wyrazu wolnego występuje tylko druga i czwarta potęga niewiadomej. Takie równanie nazywa się równaniem **dwukwadratowym**.

Rozwiązujemy je wprowadzając niewiądomą pomocniczą

$$u = x^2.$$

Mamy oczywiście $x^4 = u^2$. Zatem u musi spełniać równanie drugiego stopnia

$$u^2 - 2u - 3 = 0.$$

którego pierwiastkami są $u_1 = 3$, $u_2 = -1$. A więc x musi spełniać jedno z równań

$$x^2 = 3, \qquad x^2 = -1.$$

Z pierwszego z tych równań otrzymujemy $x = \pm\sqrt{3}$. Drugie oczywiście nie posiada rozwiązania. Zatem pierwiastkami równania (1) mogą być tylko liczby $-\sqrt{3}, +\sqrt{3}$. Łatwo sprawdzić, że one spełniają to równanie.

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać równanie

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

Kładąc $\qquad u = x^3,$

dostajemy $\qquad u^2 - 7u - 8 = 0.$

Pierwiastkami tego równania są $u_1 = -1$, $u_2 = 8$. Zatem musi być

$$x^3 = -1, \text{ czyli } x = -1$$

lub $\qquad x^3 = 8, \text{ czyli } x = 2.$

Sprawdzamy, że liczby te spełniają dane równanie.

U w a g a. W podobny sposób można rozwiązywać równania kształtu

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

gdzie n oznacza dowolną liczbę naturalną. Kładąc $u = x^n$, otrzymujemy na u równanie drugiego stopnia.

P r z y k ł a d 3. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 34 \\ xy &= 15. \end{aligned} \tag{1}$$

Z drugiego równania otrzymujemy

$$y = \frac{15}{x}. \tag{2}$$

Podstawiając to w pierwszym równaniu i porządkując, dostajemy

$$x^4 - 34x^2 + 225 = 0.$$

Kładąc, jak poprzednio $\qquad x^2 = u,$

widzimy, że u musi spełniać równanie drugiego stopnia

$$u^2 - 34u + 225 = 0$$

o pierwiastkach $u_1 = 25$, $u_2 = 9$. Zatem x musi spełniać jedno z równań

$$x^2 = 25, \qquad x^2 = 9.$$

Stąd $x = \pm 5$ lub $x = \pm 3$. Wstawiając to w (2), widzimy, że rozwiązaniami układu (1) mogą być tylko: $x_1 = 5$, $y_1 = 3$; $x_2 = -5$, $y_2 = -3$; $x_3 = 3$, $y_3 = 5$; $x_4 = -3$, $y_4 = -5$. Łatwo sprawdzamy, że są to istotnie rozwiązania.

P r z y k ł a d 4. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 9 \\ x + y &= 3. \end{aligned} \qquad (1)$$

Z drugiego równania otrzymujemy

$$y = 3 - x. \qquad (2)$$

Zatem x musi spełniać równanie

$$x^3 + (3 - x)^3 = 9,$$

czyli

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Odpowiednie wartości y są wedle (2) $y_1 = 2$, $y_2 = 1$. A więc rozwiązaniami układu (1) mogą być tylko $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ i $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.

Sprawdzamy, że obie pary liczb spełniają układ równań (1).

P r z y k ł a d 5. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{6} \\ x^2y + xy^2 &= 30. \end{aligned} \qquad (1)$$

Mnożąc pierwsze równanie obustronnie przez xy i wyłączając w drugim po lewej stronie xy przed nawias, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x + y &= \tfrac{5}{6}\, xy \\ xy\,(x + y) &= 30. \end{aligned}$$

Wprowadzając niewiadome pomocnicze:

$$u = x + y \qquad v = xy, \qquad (2)$$

dostajemy

$$u = \tfrac{5}{6}\, v \qquad uv = 30.$$

Rozwiązując ten układ w znany sposób znajdujemy $u_1 = 5$, $v_1 = 6$; $u_2 = -5$, $v_2 = -6$.

Wobec (2) musi być

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ xy &= 6 \end{aligned} \qquad \text{lub} \qquad \begin{aligned} x + y &= -5 \\ xy &= -6. \end{aligned}$$

Rozwiązując te układy, otrzymujemy 4 możliwe pary liczb: $x_1=2$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=2$; $x_3=1$, $y_3=-6$; $x_4=-6$, $y_4=1$. Łatwo sprawdzamy, że wszystkie są rozwiązaniami układu (1).

Zadania

1. *a)* $x^4-10x^2+9=0$, $\qquad x^4-5x^2-36=0$

   b) $x^4+8x^2=9$, $\qquad 4x^4-5x^2+1=0$

   e) $x^4-5x^2+4=0$, $\qquad x^4+2x^2-8=0$.

2. *a)* $x^6-7x^3-8=0$ $\qquad$ *b)* $x^8-17x^4+16=0$

   c) $x^8-(1+a^4)x^4+a^4=0$ $\qquad$ *d)* $x^{10}-31x^5-32=0$

3. *a)* $\dfrac{x^2+3}{17-x^2}=\dfrac{1}{x^2+3}$, $\qquad$ *b)* $(x^2-3)^2-7(x^2-3)+6=0$

   c) $\dfrac{x^2-1}{9}+\dfrac{1}{x^2}=1$, $\qquad$ *d)* $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}$

4. *a)* $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=2$,

   b) $(x^2+x+1)\left(x^2+x-\dfrac{3}{2}\right)+1=0$,

   c) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12$, $\qquad$ *d)* $\dfrac{9(x^3-4)}{x\sqrt{x}-3}=x\sqrt{x}+3$.

5. *a)* $3x^2+2y^2=11$, $xy=2$ $\qquad$ *b)* $x^2-y^2+2xy=2$, $xy=1$

   c) $x^3-y^3=7$, $x-y=1$ $\qquad$ *d)* $x^4+y^4=\frac{17}{16}$, $xy=\frac{1}{2}$.

   e) $xy=a$, $x^2+y^2=b$ $\qquad$ *f)* $x+y=a$, $x^3+y^3=b$

6. *a)* $x+xy+y=11$, $x^2y+xy^2=30$ $\qquad$ *b)* $x^2+y^2+x-y=12$, $(x^2+y^2)(x-y)=20$

   c) $x^2-y^2=7(x-y)$, $xy(x^2+y^2)=300$. $\qquad$ *d)* $x+xy=a$, $x^2+x^2y^2=b$

W przykładzie *c)* podziel obie strony pierwszego równania przez $x-y$ (przyjmując $x\neq y$), podnieś do kwadratu otrzymane równanie i wprowadź pomocnicze niewiadome. Następnie zbadaj osobno możliwość $x=y$.

7. Korzystając z wzorów

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2),$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2),$$

rozwiąż układy równań:

a) $x^3 - y^3 = 31\,(x - y)$
$x^2 + y^2 = 26$

b) $x^3 + y^3 = \frac{3}{14}\,(x + y)^2$
$xy = \frac{3}{2}$

c) $x^3 + y^3 = 2\,(x - y)$
$x^2 - xy + y^2 = 1$

d) $3x - 2y = 4$
$27x^3 - 8y^3 = 104xy.$

8. Ramię trójkąta równoramiennego wynosi a *cm*, pole p *cm*^{2}. Oblicz podstawę. Podstaw $a = 13$, $p = 60$. Czy liczby a, p mogą być dowolne?

9. Prostokąt o polu p *cm*^{2} ma tę własność, że jeżeli go przepołowimy prostą równoległą do podstawy, to otrzymamy dwa prostokąty podobne do całego. Oblicz boki tego prostokąta. Podstaw $p = 20$.

10. Całkowita powierzchnia ostrosłupa foremnego o podstawie kwadratowej wynosi P *cm*^{2}, krawędź boczna k *cm*. Oblicz krawędź podstawy. Podstaw $P = 210$, $k = 8$.

11. Całkowita powierzchnia walca wynosi P *cm*^{2}, przekątna przekroju osiowego d *cm*. Oblicz wysokość i promień podstawy. Podstaw $P = 240$, $d = 7$.

12. Całkowita powierzchnia graniastosłupa prostego o podstawie kwadratowej wynosi P *cm*^{2}, przekątna ściany bocznej d *cm*. Oblicz krawędź podstawy i wysokość. Podstaw $P = 66$, $d = 5$.

Trzecie pierwiastki liczb naturalnych od 1 do 100

a	$\sqrt[3]{a}$	a	$\sqrt[3]{a}$	a	$\sqrt[3]{a}$	a	$\sqrt[3]{a}$
1	1	26	2,9625	51	3,7084	76	4,2358
2	1,2599	27	3	52	3,7325	77	4,2543
3	1,4422	28	3,0366	53	3,7563	78	4,2727
4	1,5874	29	3,0723	54	3,7798	79	4,2908
5	1,7100	30	3,1072	55	3,8030	80	4,3089
6	1,8171	31	3,1414	56	3,8259	81	4,3267
7	1,9129	32	3,1748	57	3,8485	82	4,3445
8	2	33	3,2075	58	3,8709	83	4,3621
9	2,0801	34	3,2396	59	3,8930	84	4,3795
10	2,1544	35	3,2711	60	3,9149	85	4,3968
11	2,2240	36	3,3019	61	3,9365	86	4,4140
12	2,2894	37	3,3322	62	3,9579	87	4,4310
13	2,3513	38	3,3620	63	3,9791	88	4,4480
14	2,4101	39	3,3912	64	4	89	4,4647
15	2,4662	40	3,4200	65	4,0207	90	4,4814
16	2,5198	41	3,4482	66	4,0412	91	4,4979
17	2,5713	42	3,4760	67	4,0615	92	4,5144
18	2,6207	43	3,5034	68	4,0817	93	4,5307
19	2,6684	44	3,5303	69	4,1016	94	4,5468
20	2,7144	45	3,5569	70	4,1213	95	4,5629
21	2,7589	46	3,5830	71	4,1408	96	4,5789
22	2,8020	47	3,6088	72	4,1602	97	4,5947
23	2,8439	48	3,6342	73	4,1793	98	4,6104
24	2,8845	49	3,6593	74	4,1983	99	4,6261
25	2,9240	50	3,6840	75	4,2172	100	4,6416

Treść

Wyrażenia pierwiastkowe

Równania kwadratowe