S. BANACH, W. SIERPIŃSKI, W. STOŻEK

ARYTMETYKA

DLA I KLASY GIMNAZJALNEJ

CENA zł 2,10
WRAZ ZE ZNACZKIEM NA BUDOWĘ
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH

KSIĄŻNICA-ATLAS
S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.
LWÓW — WARSZAWA
1933

Przy rozwiązywaniu zadań z liczbami statystycznemi wskazane jest posługiwanie się danemi statystycznemi z wydawnictwa: Wąsowicz i Zierhoffer *Świat w cyfrach*

2338

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie.

Potęgowanie

Określenia

Przypuśćmy, że mamy dany iloczyn np.: $2 . 2 . 2 . 2$, w którym wszystkie czynniki są równe.

Iloczyn taki zapisujemy krócej w postaci: 2^4. A więc czynnik, który się powtarza, piszemy raz, u góry zaś piszemy liczbę wskazującą, ile razy ten czynnik się powtarza.

Czytamy: dwa podniesione do potęgi czwartej, lub krótko: dwa do czwartej.

Podobnie: $2 . 2 . 2 = 2^3 = 8$ (czytaj: dwa do trzeciej),
$3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 3^5 = 243$ (czytaj: trzy do piątej),
$7 . 7 = 7^2 = 49$ (czytaj: siedm do drugiej) i t. d.

Wyrażenie 2^4 nazywamy **potęgą**: liczbę 2 **podstawą**, 4 **wykładnikiem** potęgowym.

Wyrażenie takie, jak 7^1, w którem wykładnik jest 1, równa się 7 (podstawie).

Podobnie: $2^1 = 2$, $5^1 = 5$, $10^1 = 10$ i t. d.

Zadania

1. Przedstaw, jako potęgi, następujące iloczyny:
   a) $2 . 2 . 2 . 2$, $5 . 5 . 5$, $7 . 7 . 7 . 7 . 7$, $11 . 11 . 11 . 11$.
   b) $23 . 23 . 23 . 23 . 23$, $18 . 18 . 18 . 18 . 18 . 18 . 18$.
   c) $\frac{3}{4} . \frac{3}{4} . \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} . \frac{5}{6} . \frac{5}{6} . \frac{5}{6}$, $\frac{2}{7} . \frac{2}{7} . \frac{2}{7} . \frac{2}{7} . \frac{2}{7}$.
   d) $2{,}1 . 2{,}1 . 2{,}1$; $0{,}1 . 0{,}1 . 0{,}1 . 0{,}1$; $1{,}2 . 1{,}2 . 1{,}2 . 1{,}2$.
2. Oblicz: *a)* 3^2, 5^2, 11^2, 20^2; *b)* 3^4, 5^3, 2^6, 7^4;
   c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{4}{7}\right)^2$; *d)* $\left(\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^4$, $\left(\frac{2}{3}\right)^5$, $\left(\frac{2}{3}\right)^6$.
   e) $0{,}1^2$; $1{,}1^2$; $0{,}01^2$; *f)* $0{,}1^4$; $2{,}1^3$; $0{,}01^3$; $0{,}001^2$.
3. Oblicz: *a)* 2^1, 2^2, 2^3, ... 2^{16}; *b)* 3^1, 3^2, 3^3, ... 3^9;
   c) 5^1, 5^2, 5^3 ... 5^6; *d)* $\left(\frac{2}{3}\right)^1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ ... $\left(\frac{2}{3}\right)^8$.
   e) $\left(\frac{2}{5}\right)^1$, $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(\frac{2}{5}\right)^4$, $\left(\frac{2}{5}\right)^5$; *f)* $0{,}2^2$; $0{,}2^3$; $0{,}2^4$; $0{,}2^5$.

4. Oblicz: *a)* $10^1, 10^2, 10^3 \ldots 10^{10}$; *b)* $0{,}1^1; 0{,}1^2; 0{,}1^3; \ldots 0{,}1^{10}$. Przekonaj się, że 10 do jakiejkolwiek potęgi równa się jedynce z tyloma zerami, ile wynosi wykładnik.
5. Napisz tysiąc, sto tysięcy, milion, biljon, tryljon jako potęgę liczby 10!
6. Liczba 12 000 równa się $12 . 10^3$. Przedstaw w ten sposób liczby: 3 400 000, 1 600 000 000, 280 000 000 000, 23 400, 57 630 000.
7. Przekonaj się, że: *a)* $1+2=2^2-1$, $1+2+2^2=2^3-1$, $1+2+2^2+2^3=2^4-1$, $1+2+2^2+2^3+2^4=2^5-1$, $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7=2^8-1$;

   b) $1+3=\frac{3^2-1}{3-1}$, $1+3+3^2=\frac{3^3-1}{3-1}$, $1+3+3^2+3^3=\frac{3^4-1}{3-1}$;

   c) $1+5=\frac{5^2-1}{5-1}$, $1+5+5^2=\frac{5^3-1}{5-1}$;

   d) $1+10+10^2+10^3=\frac{10^4-1}{10-1}$;

   $1+10+10^2+10^3+10^4+10^5=\frac{10^6-1}{10-1}$.
8. Przekonaj się, że: $3^3+4^3+5^3=6^3$, $11^3+12^3+13^3+14^3=20^3$.
9. W książce rachunkowej Achmesa (1700 przed Chr.) znajduje się takie zadanie: Było 7 osób, każda miała 7 kotów, każdy kot zjadł 7 myszy, każda mysz może zjeść 7 kłosów jęczmienia, każdy kłos jęczmienia po zasianiu daje 7 miar jęczmienia; ile miar zboża ocaliły te koty przez to, że zjadły myszy?
10. Ile wynosi bok kwadratu, którego pole równa się: *a)* 16 m^2, *b)* 25 dcm^2, *c)* 81 cm^2, *d)* 1 *a*, *e)* 1,44 *a*?
11. Oblicz krawędź sześcianu, którego pole równa się: *a)* 150 cm^2, *b)* 384 dcm^2, *c)* 2,16 *a*!
12. Jak długa jest krawędź sześcianu, którego objętość wynosi: *a)* 8 cm^3, *b)* 27 cm^3, *c)* 125 m^3?

Iloczyn potęg. (O równej podstawie)

Mamy obliczyć iloczyn potęg np.: $2^3 . 2^5$, w których podstawy są równe.

Zamieniając potęgi na iloczyny, otrzymamy:

$$2^3 . 2^5 = \underbrace{2 . 2 . 2}_{3} . \underbrace{2 . 2 . 2 . 2 . 2}_{5}$$

W ostatnim iloczynie wszystkie czynniki są równe 2. Iloczyn ten możemy napisać więc w kształcie potęgi. Ponieważ czynnik 2 powtarza się w nim $3+5$ razy t. j. 8 razy, więc iloczyn ten równa się: $2^{3+5}=2^8$. Zatem: $2^3 . 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$.

Podobnie: $3^2 . 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$, $10^3 . 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$, $5^1 . 5^3 = 5^{1+3} = 5^4$ i t. d.

A zatem: Iloczyn potęg o równych podstawach równa się potędze, której podstawa jest ta sama, a wykładnik jest sumą danych wykładników.

Zadania

1. Oblicz: *a)* $3^4 . 3^2$, $2^7 . 2^5$, $5^8 . 5^2$, $4^3 . 4^7$, $7^2 . 7^4$;
   b) $2^2 . 2^4 . 2^3$, $3^2 . 3^5 . 3^6$, $4 . 4^2 . 4^7$, $5^3 . 5^7 . 5^{11}$, $9^2 . 9^4 . 9^8$;
   c) $4^2 . 4^5 . 4^7 . 4^8$, $8^3 . 8^5 . 8^{10} . 8^{12}$, $10 . 10^2 . 10^4 . 10^8 . 10^{11}$.
2. Oblicz: *a)* $2^2 . 3^4 . 2^4$, $2^5 . 7^2 . 2^3 . 7^4$, $3^2 . 4 . 4^4 . 3^5$, $5^3 . 5 . 7^2 . 5^4$;
   b) $2^3 . 3^5 . 3^3 . 2^4$, $4^2 . 5^3 . 5^2 . 4^3 . 4^4$, $3^5 . 6^2 . 3^4 . 6^3 . 6^5$;
   c) $5 . 2^2 . 5^3 . 7^2 . 2^4 . 7^6$, $3^2 . 5 . 8^2 . 3^4 . 8^3 . 5^4 . 3^7$.
   Licz: $2^2 . 3^4 . 2^4 = 2^2 . 2^4 . 3^4 = 2^6 . 3^4$.
3. Oblicz, zamieniając każdy czynnik na potęgę o podstawie:
   a) 10 iloczyny: $100 . 1000$; $1000 . 10\,000 . 100\,000$;
   b) 2 „ : $2 . 4$; $4 . 8$; $8 . 16$; $4 . 8 . 16$;
   c) 5 „ : $5 . 25$; $25 . 125$; $5 . 125 . 625$.
4. Oblicz: *a)* $\left(\frac{2}{5}\right)^2 . \left(\frac{2}{5}\right)^3$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2 . \left(\frac{3}{4}\right)^5$; $\left(\frac{4}{7}\right)^3 . \left(\frac{4}{7}\right)^6$; $\left(\frac{2}{9}\right)^3 . \left(\frac{2}{9}\right)^4$;
   b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^4 . \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 . \left(\frac{2}{5}\right)^4 . \left(\frac{2}{5}\right)^6$; $\left(\frac{3}{11}\right)^4 . \left(\frac{3}{11}\right)^6 . \left(\frac{3}{11}\right)^2$.
5. Oblicz: $2{,}3^2 . 2{,}3^4$; $3{,}1^4 . 3{,}1^5$; $0{,}1^4 . 0{,}1^6$; $0{,}2^3 . 0{,}2^4$;
   b) $1{,}4^2 . 1{,}4^3 . 1{,}4^5$; $0{,}5^2 . 0{,}5^4 . 0{,}5^3$; $2{,}1^3 . 2{,}1^2 . 2{,}1^4$;
   c) $1{,}02^2 . 1{,}02^3 . 1{,}02^4$; $0{,}01^3 . 0{,}01^4 . 0{,}01^2 . 0{,}01^5$.

Liczby pierwsze

Określenia

Każda liczba całkowita jest podzielna przez 1 i przez siebie samą. Są liczby, które nie posiadają już innych podzielników. Taką liczbą jest np. 7.

Liczby takie, większe od 1, nazywamy pierwszemi lub prostemi.

Liczbami prostemi są: 2, 3, 5, 7, 11 i t. d.

Liczby całkowite (większe od jedności), które prócz 1 i siebie samej posiadają jeszcze inne podzielniki, nazywamy złożonemi. Np. Liczba 8 posiada podzielniki 1, 2, 4, 8; zatem 8 jest liczbą złożoną.

Zadania

1. Wypisz liczby pierwsze, zawarte między 150 a 160!
2. Eratostenes, który żył w Aleksandji (3 wiek przed Chr.), podał następujący prosty sposób otrzymania tablicy liczb pierwszych: Wypisujemy liczby np. 1—20. Przekreślamy następnie co drugą liczbę wyjąwszy 2. Pierwszą po dwójce nieprzekreśloną liczbą jest 3. Wykreślamy teraz co trzecią liczbę wyjąwszy 3. Pierwszą nieprzekreśloną liczbą po trójce jest 5. Wykreślamy znowu co piątą liczbę, wyjąwszy 5 i t. d.
   Liczby niewykreślone (z wyjątkiem 1) są liczbami pierwszemi, a to: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ten sposób otrzymywania liczb pierwszych nazywa się sitem Eratostenesa. Wyszukaj zapomocą sita Eratostenesa liczby pierwsze, zawarte między 1—100.
3. Aby zbadać, czy dana liczba np. 101 jest, czy też nie jest liczbą pierwszą, obliczamy kwadraty kolejnych liczb pierwszych tak długo, aż otrzymamy liczbę większą od 101. Obliczamy zatem: $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $11^2 = 121$.
   Aby się przekonać, czy dana liczba (101) jest liczbą pierwszą, wystarczy stwierdzić, że nie jest podzielna przez żadną z liczb 2, 3, 5, 7, 11.
   Ponieważ 101 nie jest podzielne przez żadną z liczb 2, 3, 5, 7, 11, więc jest liczbą pierwszą.
   Zbadaj w ten sposób, które z liczb: 187, 283, 341, 411, 513, 781 są pierwsze, a które złożone.
4. Przedstaw *a)* 30, *b)* 40 jako sumę dwóch liczb pierwszych; na ile sposobów możesz to uczynić?
5. Matematyk Legendre podał wyrażenie $2 . x^2 + 29$, które ma tę własność, że jeśli w niem w miejsce litery x podstawić dowolną liczbę całkowitą zawartą między 0 a 28, to na wynik otrzymamy liczbę pierwszą. Np. połóżmy $x = 4$. Mamy: $2 . 4^2 + 29 = 2 . 16 + 29 = 32 + 29 = 61$ (liczba pierwsza). Napisz liczby pierwsze, które otrzymasz, kładąc w miejsce litery x: 8, 9, 10, 11, 12.
6. Matematyk Euler podał wyrażenie $x^2 + x + 41$, które dla liczb całkowitych od 0 do 39, podstawionych w miejsce litery x, daje na wynik liczbę pierwszą. Np. dla $x = 11$ mamy: $11^2 + 11 + 41 = 121 + 11 + 41 = 173$ (liczba pierwsza). Napisz liczby pierwsze, które otrzymasz, kładąc w miejsce litery x: 16, 17, 18, 19, 20.
7. Matematyk Escott podał wyrażenie $x^2 + 1601 - 79 . x$, które dla liczb całkowitych od 0 do 79, podstawionych w miejsce

litery x, daje na wynik liczbę pierwszą. Np. dla $x = 10$ mamy: $10^2 + 1601 - 79 \cdot 10 = 911$ (liczba pierwsza). Napisz liczby pierwsze, które otrzymasz, kładąc w miejsce litery x: 60, 61, 62, 63, 64, 65.

Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Często dogodnie jest przedstawić daną liczbę, jako iloczyn samych liczb pierwszych. Chcemy np. 360 przedstawić jako iloczyn samych liczb pierwszych. Szukamy w tym celu liczby pierwszej, któraby była podzielnikiem liczby 360. Liczbą taką jest 2. Mamy: $360 = \mathbf{2} \cdot 180$. Szukamy teraz liczby pierwszej, która byłaby podzielnikiem 180. Liczbą taką jest znowu 2. Mamy: $180 = \mathbf{2} \cdot 90$. Postępując tak dalej, otrzymujemy: $90 = \mathbf{2} \cdot 45$; $45 = \mathbf{3} \cdot 15$; $15 = \mathbf{3} \cdot \mathbf{5}$. 5 jest już liczbą pierwszą. Zatem $360 = 2 \cdot 180 = 2 \cdot 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

A więc: $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Możemy to również zapisać krócej w postaci: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Rachunek powyższy zapisujemy w następujący sposób:

$$
\begin{array}{r|l}
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

Z jednej strony kreski zapisujemy liczby pierwsze a z drugiej ilorazy. Podobnie postępując, otrzymamy:

$$18\,900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \text{ czyli } 18\,900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Zadania

1. Liczba jest przez 4 podzielna, jeśli liczba utworzona z ostatnich dwóch cyfr jest przez 4 podzielna. Napisz kilka liczb: *a)* dwucyfrowych, *b)* sześciocyfrowych, *c)* siedmiocyfrowych, podzielnych przez 4.
2. Liczba jest przez 3 podzielna, jeśli suma cyfr tej liczby jest przez 3 podzielna. Napisz kilka liczb: *a)* czterocyfrowych, *b)* pięciocyfrowych, *c)* sześciocyfrowych, podzielnych przez 3.
3. Liczba jest przez 9 podzielna, jeśli suma cyfr tej liczby jest przez 9 podzielna. Napisz kilka liczb: *a)* trzycyfrowych, *b)* czterocyfrowych, *c)* pięciocyfrowych, podzielnych przez 9.

4. Napisz liczbę: *a)* dwucyfrową, *b)* trzycyfrową, *c)* czterocyfrową, *d)* pięciocyfrową podzielną przez 3, a niepodzielną przez 9.
5. Napisz kilka liczb trzycyfrowych podzielnych przez: *a)* 4 i 5, *b)* 2 i 3, *c)* 4 i 3, *d)* 2 i 9, *e)* 4 i 9, *f)* 3 i 5, *g)* 9 i 5.
6. Rozłóż następujące liczby na czynniki pierwsze: *a)* 240, 242, 270, 360, 798, 846; *b)* 273, 3168, 4320, 11 200, 28 600; *c)* 12 312, 15 680, 159 600, 78 408.
7. Rozłóż w pamięci następujące liczby na czynniki pierwsze: *a)* 6, 8, 12, 18, 24, 16, 27, 36; *b)* 150, 180, 210, 600, 1100, 1700.

Podzielniki liczby

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć wszystkie podzielniki jakiejś liczby, np. 60. W tym celu rozkładamy ją na czynniki pierwsze. Mamy: $60 = 2 . 2 . 3 . 5$. Każdy czynnik jest podzielnikiem 60. Iloczyn jakichkolwiek czynników jest również podzielnikiem liczby 60. A więc podzielnikami liczby 60 są: 2, 3, 5, $2 . 2 = 4$, $2 . 3 = 6$, $3 . 5 = 15$, $2 . 2 . 3 = 12$, $2 . 2 . 5 = 20$, $2 . 3 . 5 = 30$, $2 . 2 . 3 . 5 = 60$.

Zatem podzielnikami liczby 60 są: 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30, 60. Są to wszystkie podzielniki liczby 60 z wyjątkiem 1.

Zadania

1. Podaj z pomiędzy liczb od 1 do 100 te, które posiadają podzielnik: *a)* 4, *b)* 9, *c)* 6, *d)* 8.
2. Podaj wszystkie podzielniki liczb: *a)* 6, *b)* 15, *c)* 18, *d)* 28, *e)* 48.
3. Każdy iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 24; przekonaj się o tem na kilku przykładach!
4. Jaka to jest najmniejsza liczba, która posiada 4 podzielniki?
5. Jeśli w wyrażeniu $(x - 1) . (x + 1)$ podstawisz w miejsce litery x liczbę pierwszą większą od 3, to na wynik otrzymasz liczbę, która ma podzielnik 12; przekonaj się o tem przyjmując za x: 5, 7, 11, 13, 17, 19.
6. Jeśli w wyrażeniach $x^3 + 1$ i $x + 1$ podstawisz w miejsce litery x liczbę całkowitą, to otrzymasz dwie liczby, z których pierwsza jest przez drugą podzielna: przekonaj się o tem, przyjmując za x: 3, 4, 5, 6, 7, 8.
7. Podzielniki liczby 6 mniejsze od 6 są: 1, 2, 3. Suma ich $1 + 2 + 3$ równa się 6. Taka liczba nazywa się doskonałą. Przekonaj się, że: *a)* liczba 28 jest doskonałą, t. j. że suma wszystkich jej podzielników mniejszych od 28 równa się 28, *b)* liczba 496 jest doskonałą!

Wspólny podzielnik

Dwie jakiekolwiek liczby mają zawsze wspólny podzielnik 1. Dwie liczby, które nie mają innego wspólnego podzielnika oprócz 1, nazywają się względem siebie pierwsze lub względnie pierwsze.

Np. Liczby 8, 9 są względnie pierwsze.

Wyznaczmy wspólne podzielniki liczb 30 i 36.

Podzielnikami liczby 30 są: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

„ „ 36 „ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Widzimy stąd, że wspólnemi podzielnikami liczb 30 i 36 są liczby: 1, 2, 3, 6.

Największym wspólnym podzielnikiem jest 6. Największy wspólny podzielnik oznaczamy: NWP (30, 36) = 6.

Wyznaczanie NWP zapomocą rozkładu na czynniki pierwsze

Mamy znaleźć NWP (216, 1620).

Rozkładamy dane liczby na czynniki pierwsze:

$216 = 2^3 . 3^3$, $1\,620 = 2^2 . 3^4 . 5$.

Liczby pierwsze 2 i 3, występujące równocześnie w obu rozkładach, są wspólnemi podzielnikami danych liczb. Każdy inny wspólny podzielnik jest iloczynem dwójek i trójek. W tym iloczynie 2 może występować co najwyżej 2 razy, gdyż inaczej 1620 nie byłoby podzielne przez ten iloczyn; 3 zaś jako czynnik może występować co najwyżej 3 razy, gdyż inaczej 216 nie byłoby przez ten iloczyn podzielne. Wynika stąd, że:

$$\text{NWP}\ (216, 1620) = 2^2 . 3^3 = 108.$$

Podobnie, chcąc znaleźć NWP (3960, 3740, 260), rozkładamy te liczby na czynniki pierwsze.

Otrzymamy:
$$3960 = 2^3 . 3^2 . 5 . 11$$
$$3740 = 2^2 . 5 . 11 . 17$$
$$260 = 2^2 . 5 . 13.$$

Zatem NWP (3960, 3740, 260) $= 2^2 . 5 = 20$.

Zadania

1. Wyszukaj NWP liczb: *a)* 18 i 12; *b)* 30 i 12; *c)* 16 i 24; *d)* 32 i 48; *e)* 55 i 99; *f)* 75 i 175; *g)* 42 i 63; *h)* 65 i 143; *i)* 15, 25 i 35; *j)* 24, 36, 48 i 60; *k)* 224 i 392; *l)* 828 i 10 692; *m)* 9216, 6912 i 12672; *n)* 2178, 5324 i 6468; *o)* 1848, 2904 i 3432; *p)* 7128, 4320 i 1008.

2. Uprość następujące ułamki przez N W P licznika i mianownika: $\frac{180}{252}$; $\frac{336}{462}$; $\frac{560}{420}$; $\frac{1080}{810}$; $\frac{1512}{1008}$; $\frac{2145}{1386}$; $\frac{700}{5880}$; $\frac{126}{2940}$.
3. Mamy odmierzyć 80 *l*, 76 *l* i 68 *l* wina.
   Jaką największą pojemność ma naczynie, którem odmierzysz te ilości wina, bez użycia innych naczyń?
4. Wyszukaj największą liczbę, przez którą podzielone 85 daje na resztę 1, 110 zaś na resztę 2!
5. Proch strzelniczy można utworzyć z 150 części saletry, 25 części siarki i 25 części węgla; w jaki sposób ten przepis zapiszesz, biorąc 1 *kg* węgla?
6. Dane są trzy kwadraty, o bokach 108 *cm*, 132 *cm*, 204 *cm*; podziel je na równe kwadraty, możliwie wielkie!
7. Prostokąt ma wymiary 12 *cm* i 18 *cm*; podziel go na możliwie największe równe kwadraty!

Najmniejsza wspólna wielokrotność

Wypiszmy wielokrotności liczb: 6, 10, 15.

Wielokrotności liczby 6 są: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, ...
liczby 10 są: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, ...
liczby 15 są: 15, 30, 45, 60, 75, ...

Widzimy stąd, że wspólnemi wielokrotnościami danych liczb są liczby 30, 60, i t. d.

Najmniejszą zaś wspólną wielokrotnością danych liczb jest 30. Najmniejszą wspólną wielokrotność oznaczamy:

$$\text{N W W } (6,\ 10,\ 15) = 30.$$

Mamy znaleźć N W W (12, 30, 50). Rozkładamy na czynniki pierwsze dane liczby. Otrzymamy:

$$12 = 2^2 . 3; \quad 30 = 2 . 3 . 5; \quad 50 = 2 . 5^2.$$

W rozkładach powyższych występują liczby pierwsze 2, 3, 5. Zatem N W W danych liczb jest iloczynem dwójek, trójek i piątek. W iloczynie tym 2 musi wystąpić 2 razy, gdyż inaczej 12 nie mieściłoby się w tym iloczynie; podobnie 5 musi wystąpić 2 razy, zaś 3 jeden raz. A więc:

$$\text{N W W } (12,\ 30,\ 50) = 2^2 . 3 . 5^2 = 300.$$

Podobnie: $60 = 2^2 . 3 . 5$, $350 = 2 . 5^2 . 7$, $245 = 5 . 7^2$.
A wiec: N W W (60, 350, 245) $= 2^2 . 3 . 5^2 . 7^2 = 14\,700$.

Zadania

1. Oblicz N W W liczb: *a)* 7 i 9; 7 i 35; 16 i 48; 17 i 68.
   b) 2, 4 i 8; 50, 60 i 300; 4, 44 i 22;

c) 5, 9 i 15; 6, 8 i 10; 8, 10 i 12;
d) 3, 9, 7, 21 i 49; 14, 20, 21 i 28; 3, 6, 13, 39 i 65.
(Zadanie *a)* rozwiąż dwoma sposobami: I) wyznaczając wielokrotności danych liczb, II) przez rozkład na czynniki pierwsze).

2. Można obliczyć N W W (6, 10, 15, 35, 40, 162, 175), sporządzając tabelkę następującą:

$\cancel{6}$	$\cancel{10}$	15	$\cancel{35}$	40	162	175	2
		15		20	81	175	3
		$\cancel{5}$		20	27	175	5
				4	27	35	

N W W (6, 10, 15, 35, 40, 162, 175) $= 4 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 113\,400$.

W pierwszym wierszu, na lewo od kreski pionowej, przekreślamy każdą liczbę, która jest podzielnikiem drugiej, a więc np. 6, ponieważ jest podzielnikiem 162. Po prawej stronie kreski pionowej piszemy jakąkolwiek liczbę pierwszą, która jest podzielnikiem przynajmniej dwóch liczb nieprzekreślonych, w naszym przykładzie 2. W drugim wierszu przepisujemy te liczby, które nie są podzielne przez 2, a następnie ilorazy pozostałych liczb przez 2.
Z drugim wierszem postępujemy tak, jak z pierwszym i otrzymujemy wiersz trzeci.
Postępując w ten sposób dalej, dochodzimy do wiersza, w którym każde dwie liczby są względem siebie pierwsze.
Iloczyn liczb ostatniego wiersza i kolumny po prawej stronie kreski pionowej jest N W W danych liczb. Oblicz N W W liczb:
a) 3, 6, 2, 15 i 25; 4, 5, 7, 35 i 56;
b) 8, 9, 18, 24 i 36; 57, 55, 44 i 76;
c) 105, 108, 126 i 135; 21, 33, 80, 112 i 44.

3. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika, obierając jako wspólny mianownik N W W mianowników, a następnie porównaj:
a) $\frac{3}{5}$ i $\frac{19}{20}$; $\frac{6}{7}$ i $\frac{11}{35}$; $\frac{3}{8}$ i $\frac{19}{20}$; $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{14}$;
b) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{6}$; $\frac{8}{15}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{20}$; $\frac{19}{20}$, $\frac{39}{50}$ i $\frac{7}{12}$;
c) $\frac{9}{14}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{15}{42}$ i $\frac{1}{9}$; $\frac{13}{18}$, $\frac{49}{56}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{1}{21}$ i $\frac{7}{9}$.

4. Uprość, a następnie sprowadź do najmniejszego wspólnego mianownika następujące ułamki:
a) $\frac{9}{12}$ i $\frac{14}{40}$; $\frac{15}{27}$ i $\frac{14}{30}$; $\frac{12}{16}$ i $\frac{25}{30}$; $\frac{20}{35}$ i $\frac{38}{42}$;
b) $\frac{8}{30}$, $\frac{10}{35}$ i $\frac{15}{75}$; $\frac{10}{16}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{21}{105}$ i $\frac{16}{40}$;
c) $\frac{32}{48}$, $\frac{28}{42}$, $\frac{28}{56}$, $\frac{33}{36}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{24}{30}$ i $\frac{8}{70}$.

Działania liczbami ułamkowemi i dziesiętnemi

Ułamki i liczby dziesiętne

1. Narysuj odcinek o długości 6 *cm*, a obok $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ tego odcinka.
2. Napisz następujące ułamki w formie ilorazu: $\frac{2}{7}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{21}{4}$, $\frac{64}{16}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{126}{11}$.
3. Napisz następujące ilorazy w formie ułamka: $5:6$, $11:4$, $28:6$, $4:17$, $29:3$, $125:2$, $245:600$.
4. Ile to jest *cm*: $\frac{2}{5}$ *m*, $\frac{3}{4}$ *m*, $\frac{19}{20}$ *m*, $\frac{13}{50}$ *m*?
5. Ile to jest *g*: $\frac{3}{4}$ *kg*, $\frac{5}{8}$ *kg*, $\frac{9}{25}$ *kg*, $\frac{17}{50}$ *kg*?
6. Wyraź w ułamkach *m*: 10 *cm*, 50 *cm*, $6\frac{1}{4}$ *cm*, 71 *cm*!
7. Wyraź w ułamkach *kg*: 30 *g*, 125 *g*, 850 *g*, 4 *g*!
8. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce litery x w następujących równościach: *a)* $\frac{4}{5}\,m = x\,cm$; $\frac{3}{8}\,km = x\,m$; $75\,cm = x\,m$.
   b) $\frac{3}{8}\,t = x\,kg$, $624\,kg = x\,t$, $164\,g = x\,kg$;
   c) $\frac{1}{4}\,m^2 = x\,dcm^2$, $\frac{7}{8}\,m^2 = x\,cm^2$, $27\,cm^2 = x\,dcm^2$;
   d) $\frac{3}{5}\,hl = x\,l$; $5624\,l = x\,hl$; $\frac{4}{5}\,l = x\,dcl$.
9. Jak zmienia się wartość ułamka, jeżeli licznik: *a)* zwiększamy, *b)* zmiejszamy? Podaj przykłady liczbowe!
10. Jak zmienia się wartość ułamka, jeśli mianownik: *a)* zwiększamy, *b)* zmniejszamy? Podaj przykłady liczbowe!
11. Jak należy zmieniać licznik i mianownik ułamka, aby jego wartość nie zmieniła się? Podaj przykłady liczbowe!
12. Uporządkuj wedle wielkości rosnących lub malejących:
    a) $\frac{37}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{4}$; *b)* $\frac{1}{20}$, $\frac{4}{29}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{11}{20}$;
    c) $\frac{60}{15}$, $\frac{60}{12}$, $\frac{60}{3}$, $\frac{60}{45}$, $\frac{60}{15}$, $\frac{60}{13}$, $\frac{60}{35}$; *d)* $\frac{87}{3}$, $\frac{87}{5}$, $\frac{87}{2}$, $\frac{87}{16}$, $\frac{87}{100}$, $\frac{87}{15}$, $\frac{87}{42}$.
13. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:
    a) $\frac{1}{2} = \frac{x}{4}$, $\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$, $\frac{1}{2} = \frac{x}{16}$, $\frac{1}{1} = \frac{x}{32}$;
    b) $\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$, $\frac{1}{2} = \frac{8}{x}$, $\frac{1}{2} = \frac{16}{x}$, $\frac{1}{2} = \frac{52}{x}$;
    c) $\frac{2}{5} = \frac{x}{10}$, $\frac{2}{5} = \frac{x}{15}$, $\frac{2}{5} = \frac{x}{20}$, $\frac{2}{5} = \frac{x}{60}$;
    d) $\frac{2}{5} = \frac{6}{x}$, $\frac{2}{5} = \frac{8}{x}$, $\frac{2}{5} = \frac{14}{x}$, $\frac{2}{5} = \frac{18}{x}$.
14. Napisz liczbę 5 w formie ułamka o mianowniku: 1, 2, 7, 12, 4!
15. Napisz kilka ułamków właściwych, a kilka niewłaściwych!
16. Zamień na liczbę mieszaną następujące ułamki niewłaściwe:
    a) $\frac{57}{4}$, $\frac{83}{7}$, $\frac{46}{11}$, $\frac{123}{15}$, $\frac{125}{18}$; *b)* $\frac{146}{13}$, $\frac{169}{15}$, $\frac{300}{29}$, $\frac{350}{47}$, $\frac{400}{91}$.
17. Zamień następujące liczby mieszane na ułamki niewłaściwe:
    a) $1\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$, $7\frac{5}{11}$, $10\frac{11}{12}$, $30\frac{1}{10}$; *b)* $21\frac{1}{55}$, $14\frac{6}{73}$, $25\frac{11}{60}$, $46\frac{13}{61}$.

18. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:
a) $5 = \frac{x}{4}$, $7 = \frac{x}{9}$, $14 = \frac{x}{11}$, $20 = \frac{x}{15}$;
b) $5 = \frac{20}{x}$, $8 = \frac{63}{x}$, $29 = \frac{87}{x}$, $2 = \frac{126}{x}$;
c) $4\frac{2}{7} = \frac{x}{7}$, $9\frac{4}{5} = \frac{x}{5}$, $11\frac{1}{3} = \frac{x}{3}$, $18\frac{9}{11} = \frac{x}{11}$;
d) $24\frac{17}{13} = \frac{x}{13}$, $35\frac{1}{55} = \frac{x}{55}$, $60\frac{7}{63} = \frac{x}{63}$, $114\frac{4}{13} = \frac{x}{13}$.

19. Ile to jest: *a)* $\frac{1}{5}$ z 4 *zł*, $\frac{3}{4}$ z 5 *zł*, $\frac{7}{10}$ z 8 *zł*, $\frac{3}{20}$ z 2 *zł*;
b) $\frac{1}{4}$ z 2 *km*, $\frac{5}{8}$ z 4 *km*, $\frac{1}{16}$ z 3 *km*, $\frac{3}{25}$ z 2 *km*;
c) $\frac{1}{2}$ z 3 tuz., $\frac{1}{6}$ z 5 tuz., $\frac{1}{4}$ z 7 tuz., $\frac{1}{3}$ z 4 tuz.

20. Napisz 2, 4, 5, 7 godzin jako ułamek: *a)* dnia, *b)* tygodnia!

21. Napisz 15 sekund jako ułamek: *a)* minuty, *b)* godziny, *c)* dnia!

22. Uprość następujące ułamki:
a) $\frac{4}{6}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{25}{75}$, $\frac{15}{60}$, $\frac{42}{105}$; *b)* $\frac{75}{90}$, $\frac{78}{90}$, $\frac{68}{442}$, $\frac{125}{135}$, $\frac{208}{304}$, $\frac{868}{915}$;
c) $\frac{108}{276}$, $\frac{288}{384}$, $\frac{342}{494}$, $\frac{221}{289}$, $\frac{252}{342}$, $\frac{225}{405}$;
d) $\frac{3\,.\,4}{4}$, $\frac{5}{3\,.\,10}$, $\frac{6}{2\,.\,18}$, $\frac{7}{14\,.\,6}$, $\frac{9}{3\,.\,5}$, $\frac{18}{6\,.\,7}$;
e) $\frac{12}{9\,.\,8}$, $\frac{16}{12\,.\,3}$, $\frac{24}{18\,.\,5}$, $\frac{30}{45\,.\,7}$, $\frac{63}{42\,.\,2}$, $\frac{24}{5\,.\,36}$.

23. Zamień ułamki: *a)* $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{12}$ na ułamki o mianowniku 24;
b) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{31}{30}$, $\frac{17}{15}$, $\frac{29}{20}$ na ułamki o mianowniku 60;
c) $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{2}$[illegible], $\frac{17}{18}$, $\frac{31}{36}$ na ułamki o mianowniku 72.

24. Zamień ułamki: *a)* $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{12}{11}$ na ułamki o liczniku 24;
b) $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{24}{17}$, $\frac{30}{31}$, $\frac{15}{19}$, $\frac{20}{13}$ na ułamki o liczniku 60;
c) $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{24}{19}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{36}{29}$ na ułamki o liczniku 72.

25. Sprowadź następujące ułamki do najmniejszego wspólnego mianownika: *a)* $\frac{2}{3}$ i $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{6}$ i $\frac{3}{11}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{30}$;
b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$ i $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ i $\frac{2}{5}$: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ i $\frac{1}{10}$;
c) $\frac{7}{16}$, $\frac{5}{14}$ i $\frac{11}{112}$; $\frac{11}{12}$, $\frac{19}{30}$ i $\frac{29}{18}$; $\frac{9}{35}$, $\frac{23}{21}$ i $\frac{17}{28}$;
d) $\frac{7}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{12}$ i $\frac{17}{18}$; $\frac{13}{24}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{41}{45}$ i $\frac{59}{60}$; $\frac{13}{30}$, $\frac{19}{45}$, $\frac{23}{50}$ i $\frac{31}{75}$;
e) $\frac{23}{54}$, $\frac{31}{60}$, $\frac{53}{72}$ i $\frac{1}{90}$; $\frac{29}{50}$, $\frac{11}{70}$, $\frac{62}{75}$ i $\frac{23}{175}$; $\frac{17}{30}$, $\frac{13}{42}$, $\frac{31}{63}$ i $\frac{41}{105}$.

26. Napisz ułamki $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$ w formie liczb dziesiętnych!

27. Napisz ułamki $\frac{3}{10}$, $\frac{41}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{123}{100}$, $\frac{7}{1000}$, $\frac{246}{1000}$, $\frac{7}{10000}$, $\frac{161851}{10000}$ w formie liczb dziesiętnych i przeczytaj je!

28. Pomnóż liczbę *a)* 2,54758, *b)* 4,000567, kolejno przez 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 i przeczytaj otrzymane wyniki!

29. Podziel liczbę *a)* 624,2, *b)* 0,35 kolejno przez 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 i przeczytaj otrzymane wyniki!

30. Ile to jest: *a) zł* i *gr:* 2,34 *zł*, 5,02 *zł*, 0,45 *zł*, 0,04 *zł*;
b) m i *cm:* 5,06 *m*, 0,46 *m*, 1,02 *m*, 0,03 *m*;
c) km i *m:* 2,456 *km*, 1,53 *km*, 14,002 *km*, 0,045 *km*, 0,102 *km*, 0,003 *km*;

d) *kg* i *g*: 13,246 *kg*, 4,073 *kg*, 0,51 *kg*, 0,02 *kg*, 0,004 *kg*.

31. Zaokrąglij następujące liczby:
a) 2,61, 1,07, 0,456, 13,71, 0,061 do dziesiątych;
b) 2,456, 0,041, 1,006, 0,458, 1,0014 do setnych;
c) 1,2468, 0,0069, 0,0145, 0,1412 do tysięcznych;
d) 281, 246,1, 68,09, 164,9, 93 do dziesiątek;
e) 681, 214, 183,01, 1645, 2141,2 do setek;
f) 1681, 2142, 1893, 6421, 5140,2 do tysięcy.
Np. liczbę 6,418 zaokrąglamy „do dziesiątych", zastępując cyfry niższych jednostek niż dziesiąte zerami, cyfrę zaś dziesiątych t. j. 4 pozostawiamy bez zmiany, gdyż następna cyfra t. j. 1 jest mniejsza od 5. Otrzymamy zatem 6,4.
Chcąc zaokrąglić liczbę 2,358 do dziesiątych, powiększamy cyfrę dziesiątych t. j. 3 o 1, gdyż następna cyfra jest już 5. Otrzymamy: 2,4.

Dodawanie

Zadania

1. Oblicz: *a)* $\frac{3}{5}+\frac{7}{25}$, $\frac{5}{9}+\frac{13}{36}$, $\frac{9}{10}+\frac{9}{40}$, $\frac{17}{18}+\frac{55}{144}$;
b) $\frac{17}{16}+\frac{11}{48}$, $\frac{11}{12}+\frac{13}{96}$, $\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{11}{35}$, $4+\frac{9}{16}+\frac{13}{48}$;
c) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}+\frac{1}{8}$, $\frac{3}{11}+\frac{4}{10}$, $\frac{1}{13}+\frac{2}{15}$, $\frac{52}{15}+\frac{1}{8}$;
d) $12\frac{5}{7}+\frac{19}{42}$, $\frac{7}{12}+14\frac{31}{36}$, $21\frac{15}{17}+18\frac{41}{51}$, $9\frac{13}{76}+5\frac{7}{19}$;
e) $10\frac{4}{15}+3\frac{5}{24}$, $12\frac{1}{11}+3\frac{5}{8}$, $6\frac{11}{50}+8\frac{7}{15}$, $12\frac{7}{12}+3\frac{1}{18}+\frac{29}{36}$.
2. Dodaj wszystkie ułamki, mniejsze od $\frac{1}{3}$, o wspólnym mianowniku 24!
3. Dodaj wszystkie ułamki o wspólnym mianowniku 13 od $\frac{4}{13}$ do $\frac{10}{13}$ włącznie!
4. Dodaj wszystkie ułamki o wspólnym mianowniku 20, których liczniki są liczbami pierwszemi, mniejszemi od 20!
5. Oblicz: *a)* $3+2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}+\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}+6\frac{1}{3}$;
b) $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}+1\frac{1}{6}$, $3\frac{1}{5}+4\frac{7}{10}+\frac{1}{20}$, $4\frac{1}{12}+1\frac{3}{4}+2\frac{5}{8}+4\frac{1}{3}$.
6. Oblicz najkrótszym sposobem:
a) $2\frac{1}{6}+5\frac{5}{6}+1$, $4\frac{2}{7}+1\frac{3}{7}+8\frac{2}{7}+5\frac{6}{7}$;
b) $4\frac{2}{11}+3+5\frac{6}{11}+7\frac{4}{11}$, $1\frac{1}{13}+16\frac{4}{13}+8\frac{5}{13}+10\frac{12}{13}$.
7. Oblicz: *a)* $\frac{4}{7}+\frac{1}{5}+\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}+\frac{7}{18}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}+\frac{9}{40}+\frac{11}{12}+\frac{3}{6}$;
b) $6\frac{4}{11}+2\frac{1}{30}+5\frac{7}{22}$, $4\frac{9}{28}+15\frac{29}{70}+4\frac{19}{21}$, $40\frac{1}{52}+23\frac{13}{65}+6\frac{19}{78}$;
c) $7\frac{11}{14}+2\frac{17}{35}+8\frac{5}{21}+3\frac{23}{30}$, $28\frac{19}{21}+3\frac{1}{42}+7\frac{11}{36}+25\frac{23}{84}$;
d) $8\frac{9}{35}+4\frac{1}{14}+6\frac{13}{21}+12\frac{29}{30}$, $16\frac{5}{14}+7\frac{5}{21}+14\frac{11}{28}+3\frac{51}{112}$.
8. Oblicz: *a)* $7\frac{1}{3}+4\frac{9}{10}+\frac{13}{30}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{5}$; $6\frac{5}{8}+4\frac{2}{5}+5\frac{7}{40}+1\frac{1}{10}+5\frac{11}{20}$;
b) $6\frac{4}{9}+2\frac{3}{8}+11\frac{5}{12}+7\frac{23}{72}+\frac{17}{18}$; $7\frac{3}{8}+8\frac{4}{5}+10\frac{5}{16}+2\frac{17}{80}+3\frac{1}{20}$;

c) $8\frac{9}{14} + 2\frac{5}{16} + 3\frac{1}{4} + \frac{55}{112} + \frac{1}{8}$; $10\frac{11}{12} + 4\frac{1}{8} + 8\frac{3}{16} + 2\frac{1}{36} + 1\frac{29}{144}$;
d) $\frac{9}{14} + \frac{5}{9} + \frac{7}{18} + \frac{23}{24} + \frac{17}{42} + \frac{31}{56} + \frac{47}{63}$; $\frac{11}{36} + \frac{17}{18} + \frac{1}{6} + \frac{5}{8} + \frac{19}{24} +$
$+ \frac{11}{12} + \frac{71}{72}$;
e) $16\frac{10}{21} + 8\frac{18}{28} + 15\frac{11}{14} + 10\frac{33}{63} + 1\frac{17}{18} + 4\frac{25}{56} + 12\frac{17}{24}$;
f) $18\frac{7}{24} + 12\frac{4}{21} + 7\frac{3}{8} + 14\frac{7}{12} + 9\frac{11}{20} + 11\frac{7}{15} + 15\frac{3}{35}$.

9. Oblicz: $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} + \frac{7}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{11}{100}$; $1\frac{1}{10} + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{23}{100}$.
Powtórz rachunek, pisząc ułamki jako liczby dziesiętne!

10. Dodawaj: *a)* do liczby 2,3 liczbę 0,4 dopóki nie przekroczysz 8;
b) do liczby 5,8 liczbę 1,2 dopóki nie przekroczysz 15;
c) do liczby 0,04 liczbę 0,02 dopóki nie przekroczysz 0,2.

11. Oblicz:
a) 24,63 + 59,46 + 815,19; 0,526 + 63,2 + 463,12 + 1,5;
b) 618,2 + 46,583 + 1,649 + 118,7; 0,649 + 0,512 + 6,211 +
+ 214,25;
c) 3,72 + 248,4 + 12,78 + 2,9 + 46,35; 6,4 + 0,48 + 25,04 +
+ 1,4 + 0,62;
d) 8,94 + 1,0423 + 20,645 + 257,28 + 2,4385;
e) 2,8 + 624,1 + 3,2 + 2120,8 + 0,4621 + 21,6.

12. Oblicz: *a)* 6,25 *m* + 14,4 *m* + 26,85 *m* + 236,2 *m* + 14,15 *m*;
b) 216,45 *zł* + 340,36 *zł* + 84,50 *zł* + 87,74 *zł* + 410,90 *zł*;
c) 0,95 *hl* + 4,84 *hl* + 11,4 *hl* + 200,04 *hl* + 25,6 *hl*;
d) 25,5 *km* + 65,624 *km* + 410,85 *km* + 0,432 *km* + 86,48 *km*.

13. Następujące liczby są przybliżone:
a) 2,547; *b)* 13,48; *c)* 0,046; *d)* 0,0063; *e)* 1,00026; *f)* 0,000068.
Błąd każdej jest nie większy od pięciu jednostek jej ostatniego rzędu; wyznacz, w jakich granicach znajduje się dokładna liczba:

R o z w i ą z a n i e: Jeżeli 0,047 jest liczbą przybliżoną, to liczba dokładna może być co najwyżej o 0,005 większa od liczby przybliżonej, albo też o 0,005 mniejsza. Wynosi zatem co najwyżej 0,047 + 0,005 = 0,052, a co najmniej 0,047 — 0,005 = 0,042.

14. Oblicz następujące sumy liczb przybliżonych (błąd w każdej liczbie jest nie większy od 5 jednostek jej najniższego rzędu):

a)	*b)*	*c)*	*d)*
7,654	64,96	371,2	5,092
6,78	87,421	12,316	4,58
45,01	0,19	8,49	9,8
0,588	46,639	2,097	67,912
12,13	0,38	104,48	0,7

e) 1,4 + 69,342 + 1,3 + 136,52 + 0,48 + 30,8;
f) 8,18 + 9,579 + 0,2 + 21,263 + 0,42 + 8,1 + 6,12;

g) $846{,}4 + 1{,}2 + 8{,}45 + 0{,}532 + 1{,}7 + 216{,}48 + 7{,}912$;
h) $142 + 7{,}4 + 18 + 489{,}8 + 65 + 9{,}1 + 16{,}23$.

W sumie zachowujemy te miejsca dziesiętne, które występują we wszystkich składnikach. Z pozostałych miejsc możemy wziąć poprawkę. Np.

$$\begin{array}{r|l} 3{,}25 & 76 \\ 18{,}20 & \\ 3{,}56 & 1 \\ \hline 25{,}02 & \end{array}$$

Liczymy $1 + 7 = 8$; poprawka 1, a następnie dodajemy jak zwykle. Aby ocenić błąd w wyniku, zauważmy, że w każdym składniku błąd nie przekracza liczby 0,05. Ponieważ składników jest 3, więc błąd w sumie nie przekracza $3 \times 0{,}05 = 0{,}15$ albo zaokrąglając do dziesiątych: 0,2.
Oceń w ten sposób błąd w każdem zadaniu!

Ćwiczenia

1. Robotnik pracował w ciągu tygodnia: $7\frac{3}{4}$ godz., $8\frac{1}{3}$ godz., $7\frac{1}{2}$ godz., $6\frac{3}{4}$ godz., $7\frac{1}{3}$ godz., $7\frac{2}{3}$ godz. *a)* Oblicz, ile godzin pracował w ciągu całego tygodnia. *b)* Powtórz to zadanie, wyrażając czas pracy w każdym dniu zapomocą godzin i minut.
2. Jaś wydał: $2\frac{1}{10}$ *zł*, $3\frac{3}{4}$ *zł*, $1\frac{2}{5}$ *zł*, $2\frac{9}{10}$ *zł*; oblicz, ile razem wydał: *a)* dodając liczby mieszane, *b)* wyrażając poszczególne wydatki w *zł* i *gr*, *c)* wyrażając poszczególne wydatki w liczbach dziesiętnych złotego.
3. Kupiec sprzedał towaru: $1\frac{1}{4}$ *kg*, $\frac{3}{8}$ *kg*, $2\frac{3}{4}$ *kg*, $5\frac{1}{10}$ *kg*, $1\frac{1}{5}$ *kg*; oblicz, ile razem sprzedał: *a)* dodając liczby mieszane, *b)* wyrażając ciężary w *kg* i *g*, *c)* wyrażając ciężary w liczbach dziesiętnych *kg*.
4. Wartość wyrobów gotowych, wywiezionych z Polski w 1930 r., wyrażona w miljonach *zł* wynosi: przemysłu drzewnego 43,5; metalowego 216,8; garbarskiego 4,5; włókienniczego 9,4; chemicznego 49,7; odzieżowego 24; oblicz wartość całego wywozu! Oblicz wartość wywozu, zaokrąglając liczby do liczb całkowitych (miljonów) i porównaj oba wyniki!
5. Światowa produkcja aluminjum w 1930 r., wyrażona w tysiącach tonn, wynosiła: w Stanach Zjednoczonych 103,9; w Kanadzie 34,9; w Niemczech 30,2; we Francji 26; w Norwegji 24,7; w Szwajcarji 20,5; w innych krajach 26,9; ile wynosiła razem na całym świecie?
Oblicz światową produkcję, zaokrąglając liczby do liczb całkowitych (tysięcy) i porównaj oba wyniki!

6. Oblicz obwód kwadratu o boku: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 3,24 *m*, *c)* $4\frac{3}{5}$ *km*!
7. Ogród w kształcie prostokąta o wymiarach 30 *m* i 40 *m* obwiedziono ścieżką na 2 *m* szeroką; jaki jest zewnętrzny obwód tej ścieżki? Rysunek w skali 1 : 500!
8. Oblicz obwód prostokąta o bokach: *a)* 8 *cm* i $5\frac{3}{4}$ *cm*, *b)* 6,25 *cm*, i 8,5 *cm*, *c)* $5\frac{3}{4}$ *km* i $6\frac{7}{8}$ *km*!
9. Obwiązano paczkę w kształcie prostopadłościanu wdłuż i wszerz sznurkiem. Długość tej paczki wynosiła 60 *cm*, szerokość $\frac{7}{12}$ długości, wysokość zaś $\frac{4}{5}$ szerokości; jak długi musiał być sznurek, jeśli 9 *cm* liczymy na węzeł?

Odejmowanie

Zadania

1. Oblicz: *a)* $\frac{7}{11} - \frac{5}{11}$, $\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$, $\frac{9}{7} - \frac{2}{3}$, $\frac{7}{9} - \frac{5}{12}$, $\frac{29}{22} - \frac{8}{11}$.
   b) $2 - \frac{4}{7}$, $5 - \frac{8}{15}$, $12 - \frac{7}{30}$, $8 - \frac{59}{60}$, $24 - \frac{11}{13}$.
2. Oblicz: *a)* $7\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$, $12\frac{3}{4} - 9\frac{1}{4}$, $25\frac{4}{13} - 12\frac{1}{13}$, $8\frac{31}{60} - 2\frac{17}{60}$.
   b) $9\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$, $14\frac{3}{8} - 9\frac{5}{8}$, $12\frac{1}{12} - 7\frac{7}{12}$, $15\frac{3}{16} - 9\frac{7}{16}$.
3. Oblicz: *a)* $11\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}$, $8\frac{11}{12} - 3\frac{5}{8}$, $6\frac{7}{9} - 2\frac{5}{6}$;
   b) $23\frac{2}{15} - 11\frac{3}{10}$, $18\frac{1}{30} - 15\frac{4}{5}$, $12\frac{5}{12} - 6\frac{4}{9}$, $11\frac{7}{24} - 2\frac{1}{36}$.
4. Jaką liczbę należy dodać do $3\frac{7}{10}$, aby otrzymać $5\frac{1}{2}$?
5. Jaką liczbę należy odjąć od $12\frac{9}{16}$ aby otrzymać $4\frac{3}{4}$?
6. Jaka liczba jest o $2\frac{3}{4}$ mniejsza od $5\frac{1}{2}$?
7. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:
   a) $4\frac{1}{2} + x = 8$; $x + 8\frac{11}{12} = 12$; $5\frac{1}{3} + x = 10\frac{2}{5}$; $x + 4\frac{5}{6} = 8\frac{1}{4}$;
   b) $4\frac{7}{12} = 2\frac{1}{3} + x$; $8\frac{1}{2} = x + 3\frac{1}{6}$; $8 - x = 2\frac{1}{3}$; $5\frac{3}{7} - x = 2\frac{1}{14}$.
8. Uzupełnij (zn. odejmij):
   a) $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{13}$ do 1; $1\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{4}$, $5\frac{4}{7}$, $7\frac{5}{12}$ do 10;
   b) $2\frac{3}{4}$ do 5, $7\frac{8}{11}$ do 13, $6\frac{5}{7}$ do 15, $25\frac{6}{11}$ do 40.
9. Odejmuj, jak długo się da:
   a) 0,5 od 5,8; *b)* 0,6 od 10,9; *c)* 0,04 od 0,18.
10. Oblicz: *a)* $28{,}16 - 12{,}14$; $56{,}81 - 9{,}92$; $45{,}21 - 5{,}93$;
    b) $264{,}5 - 14{,}65$; $73{,}8 - 29{,}3814$; $15{,}4 - 8{,}9006$;
    c) $8{,}0245 - 1{,}721$; $76{,}844 - 12{,}4659$; $85{,}4 - 67{,}9432$.
11. Oblicz: *a)* $(47{,}82 - 16{,}704) + (23{,}44 - 12{,}084)$;
    b) $(64{,}25 - 12{,}354) - (8{,}02 - 4{,}26)$;
    c) $640{,}85 - (24{,}01 + 15{,}64) - 25{,}11$;
    d) $241{,}012 + (63{,}04 - 26{,}145) - (21{,}63 + 0{,}49)$;
    e) $(620 - 48{,}02) - (302{,}4 + 26{,}18) + 205{,}24$.
12. Oblicz: *a)* $16\frac{1}{12} + 4\frac{5}{12} - 8\frac{7}{12} - 2\frac{11}{12} + 4\frac{1}{12} - 3\frac{5}{12}$;
    b) $2\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + 3\frac{1}{4}$; $8\frac{5}{9} + 3\frac{1}{6} - 2\frac{3}{4}$; $12\frac{7}{15} - \frac{1}{2} + 4\frac{23}{30}$;

c) $3 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$; $24\frac{7}{10} - 8\frac{1}{2} + 2\frac{5}{6} - 1\frac{4}{9}$;

d) $12\frac{11}{16} - 8\frac{1}{3} + 2\frac{4}{9} - 3\frac{5}{6} + 1\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.

13. Oblicz: *a)* $14\frac{1}{2} - (6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{8})$; $20\frac{3}{4} - (8\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8}) - (1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2})$;

b) $(22\frac{5}{9} + \frac{1}{2}) - (12\frac{3}{4} - 6\frac{1}{8})$; $30 - (2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2}) - (4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{3})$;

c) $45 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}) - (8\frac{3}{4} - 6\frac{1}{8})$.

14. Oblicz:

a) 84,18 *zł* — 62,46 *zł*; 4,83 *m* — 2,94 *m*; 20,5 *kg* — 3,725 *kg*;

b) 12,48 *ha* — 9,83 *ha*; 15,8 *t* — 12,94 *t*; 4,5 *l* — 2,25 *l*;

c) 4,85 *kg* — 3 *kg* 416 *g*; 15 km^2 86 *ha* — 9 km^2 95 *ha*;

d) 8 *t* — 5 *t* 645 *kg*; 105 *ha* — 18 *ha* 9 *a*.

15. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:

a) $25{,}84 + x = 35{,}96$; $x - 45{,}18 = 10$;

b) $x - 2{,}6 = 3{,}45$; $64{,}13 - x = 4{,}02$;

c) $(114{,}64 - x) + 18{,}4 = 96{,}04$; $(x - 8{,}14) + 12{,}2 = 15{,}04$;

d) $(25{,}45 + x) + 5{,}6 = 80{,}01$; $(48{,}2 + x) - 10{,}2 = 100{,}06$.

16. Oblicz następujące różnice liczb przybliżonych (błąd w każdej liczbie jest nie większy od 5 jednostek jej najniższego rzędu):

a) $\begin{array}{r} 18{,}645 \\ -\ 6{,}85 \\ \hline \end{array}$ *b)* $\begin{array}{r} 24{,}02 \\ -\ 8{,}245 \\ \hline \end{array}$ *c)* $\begin{array}{r} 4{,}0056 \\ -\ 3{,}843 \\ \hline \end{array}$ *d)* $\begin{array}{r} 6{,}432 \\ -\ 4{,}2845 \\ \hline \end{array}$

Uwaga: Podobnie jak przy dodawaniu, zachowujemy i w odejmowaniu tylko te miejsca dziesiętne, które występują równocześnie w danych liczbach. Liczymy więc: *a)* $18{,}64 - 6{,}85 = 11{,}79$.

17. Oblicz następujące wyrażenia, w których występują liczby przybliżone. (Błąd w każdej z nich jest nie większy od 5 jednostek jej najniższego rzędu):

a) $64{,}281 - 2{,}14 + 8{,}645 + 10{,}16 - 3{,}24 - 2{,}461$;

b) $104{,}2 - 6{,}461 - 0{,}61 + 3{,}65 + 5{,}84 - 10{,}24$;

c) $280{,}12 - 40{,}2 - 1{,}45 - 2{,}651 + 15{,}8 - 20{,}36$;

d) $615{,}2 - 89 + 2{,}1 - 3{,}46 - 18{,}2 + 3{,}45$.

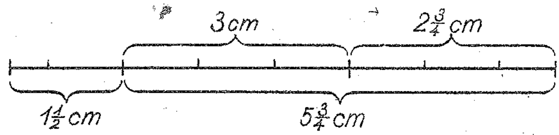
Zmiany sumy i różnicy

Zmiany sumy

Mamy dwa odcinki: jeden o długości 3 *cm*, drugi o długości $2\frac{3}{4}$ *cm* (rys. 1). Ich suma wynosi $5\frac{3}{4}$ *cm*. Gdybyśmy jeden z nich (np. większy) powiększyli o $1\frac{1}{2}$ *cm*, to o $1\frac{1}{2}$ *cm* wzrośnie także suma obu odcinków. Zatem:

$$(3 + 1\tfrac{1}{2}) + 2\tfrac{3}{4} = 5\tfrac{3}{4} + 1\tfrac{1}{2}.$$

A więc, o ile zwiększymy jeden składnik sumy, o tyle zwiększy się suma. To samo zachodzi dla sumy więcej liczb.

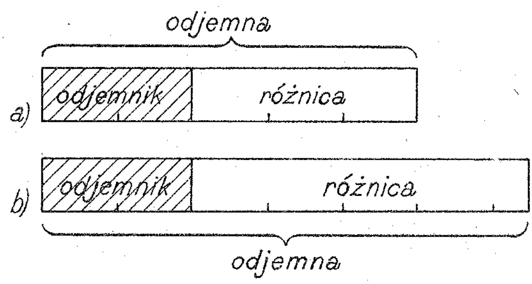


Rys. 1.

Oczywiście, że możemy również powiedzieć: O ile zmniejszymy jeden składnik sumy, o tyle zmniejszy się suma.

Zmiany różnicy.

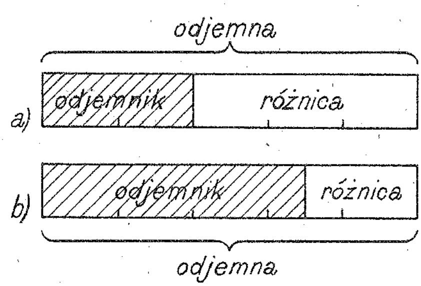
I. Na rys. 2 *a* mamy pasek o długości 5 *cm*, z którego odcięliśmy (część zacieniowaną) 2 *cm*. Pozostało więc *cm*: $5-2=3$. Gdybyśmy wzięli pasek długości o $1\frac{1}{2}$ *cm* większej jak poprzednio i odcięli to samo (rys. 2 *b*), to różnica byłaby o $1\frac{1}{2}$ *cm* większa. A więc: $(5+1\frac{1}{2})-2=3+1\frac{1}{2}$. Widzimy zatem, że o ile powiększymy odjemną, o tyle powiększy się różnica.



Rys. 2.

Podobnie przekonywamy się, że o ile pomniejszymy odjemną, o tyle pomniejszy się różnica.

II. Przypuśćmy jak poprzednio, że z paska o długości 5 *cm* (rys. 3 *a*) odcięliśmy pasek o długości 2 *cm*. Pozostało więc *cm*:



Rys. 3.

$5-2=3$. Gdybyśmy odcięli pasek o $1\frac{1}{2}$ *cm* dłuższy niż poprzednio (rys. 3 *b*), to różnica byłaby o $1\frac{1}{2}$ *cm* krótsza. A więc:

$$5-(2+1\tfrac{1}{2})=3-1\tfrac{1}{2}.$$

Widzimy stąd, że o ile powiększymy odjemnik, o tyle pomniejszy się różnica.

Podobnie przekonywamy się, że o ile pomniejszymy odjemnik, o tyle powiększy się różnica.

Zadania

1. Jeden składnik sumy powiększyliśmy o *a)* $2\frac{3}{4}$, *b)* 1,45, drugi o *a)* $1\frac{3}{8}$, *b)* 2,34. O ile zwiększyła się suma?
2. Jeden składnik zwiększyliśmy o *a)* $5\frac{1}{9}$, *b)* 1,04, drugi zaś zmniejszyliśmy o *a)* $1\frac{2}{3}$, *b)* 0,12. O ile zwiększyła się suma?
3. Jeden składnik zmniejszyliśmy o *a)* $8\frac{5}{12}$, *b)* 10,04, drugi o *a)* $3\frac{1}{4}$, *b)* 6,41. O ile zmniejszyła się suma?
4. W sumie liczb przybliżonych jeden składnik jest o 0,008 większy od liczby dokładnej, drugi zaś o 0,01. O ile suma liczb przybliżonych jest większa od sumy liczb dokładnych?
5. W sumie liczb przybliżonych jeden składnik jest o 0,006 mniejszy od liczby dokładnej, drugi zaś o 0,012 większy. O ile suma liczb przybliżonych jest większa od sumy liczb dokładnych?
6. W sumie liczb przybliżonych pierwsza liczba jest o 0,04 większa od liczby dokładnej, druga o 0,003 mniejsza, trzecia o 0,005 większa, czwarta o 0,01 większa, piąta o 0,02 mniejsza od liczby dokładnej. O ile suma liczb przybliżonych jest większa od sumy liczb dokładnych?
7. Jak zmieni się różnica, jeżeli:
   a) odjemną powiększymy o 4, $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{10}$; 3,4; 8,64;
   b) odjemną pomniejszymy o 6, $3\frac{1}{4}$, $8\frac{3}{5}$; 9,6; 1,02;
   c) odjemnik powiększymy o 3, $2\frac{7}{5}$, $4\frac{1}{6}$; 8,2; 0,41;
   d) odjemnik pomniejszymy o 5, $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{8}$; 0,6; 1,82.
   Objaśnij odpowiedzi na przykładach!
8. Jak zmieni się różnica, jeżeli:
   a) odjemną zwiększymy o $8\frac{1}{6}$, odjemnik zaś o $4\frac{1}{2}$;
   b) odjemną zwiększymy o 6,21, odjemnik zaś zmniejszymy o 4,16;
   c) odjemną zmniejszymy o $12\frac{1}{4}$, odjemnik zaś zwiększymy o $4\frac{1}{6}$;
   d) odjemną zmniejszymy o 0,04, odjemnik zaś o 2,1.
   Objaśnij odpowiedzi na przykładach!
9. W różnicy dwu liczb przybliżonych odjemna jest o 0,004 większa od liczby dokładnej, odjemnik zaś o 0,01 mniejszy. O ile różnica liczb przybliżonych różni się od różnicy liczb dokładnych?

10. W różnicy dwu liczb przybliżonych odjemna jest o 0,01 większa od liczby dokładnej, odjemnik zaś o 0,0094. O ile różnica liczb przybliżonych różni się od różnicy liczb dokładnych?
11. W różnicy dwu liczb przybliżonych odjemna jest o 0,0045 mniejsza od liczby dokładnej, odjemnik zaś o 0,012 większy. O ile większa jest różnica liczb dokładnych od różnicy liczb przybliżonych?

Ćwiczenia

1. Rolnik posiadał dwa kawałki gruntu: jeden o powierzchni 3,4 *ha* i drugi o 75 *a* mniejszy; ile razem posiadał?
2. W naczyniu o pojemności 5 *l* było $2\frac{3}{4}$ *l* mleka, poczem odlano $1\frac{1}{2}$ *l*, a następnie dolano $1\frac{3}{4}$ *l*; ile *l* mleka brakuje, aby naczynie było pełne?
3. Ciężar brutto wynosi: *a)* 264 *kg*, *b)* 786,2 *kg*, *c)* 460 *kg*, *d)* $64\frac{1}{2}$ *kg*, netto zaś wynosi: *a)* 248,35 *kg*, *b)* 644,8 *kg*, *c)* 428,75 *kg*, *d)* $62\frac{3}{4}$ *kg*; ile wynosi tara?
4. Oblicz następujące różnice, zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne odpowiedniej jedności:
a) 20 *m* 45 *cm* — 4 *m* 86 *cm*, 23 *cm* 5 *mm* — 16 *cm* 8 *mm*;
b) 85 *hl* 36 *l* — 14 *hl* 48 *l*, 5 *l* 8 *dcl* — 3 *l* 9 *dcl*;
c) 18 *ha* 46 *a* — 15 *ha* 94 *a*, 13 km^2 96 *ha* — 8 km^2 99 *ha*;
d) 45 *t* 465 *kg* — 19 *t* 684 *kg*, 84 *kg* 453 *g* — 49 *kg* 684 *g*.
5. 25 *kg* szynki waży po uwędzeniu 21,24 *kg*; ile wynosi strata na wadze wskutek uwędzenia?
6. Jajo waży $59\frac{1}{2}$ *g*, białko $29\frac{3}{4}$ *g*, żółtko zaś $21\frac{9}{10}$ *g*; ile waży skorupa?
7. Liczba listów, wyrażona w miljonach, wynosiła w Polsce: 584,4 w 1924 r.; 672,3 w 1925 r.; 736,1 w 1926 r.; 832,7 w 1927 r.; 933,8 w 1928 r.; 999,2 w 1929 r.; oblicz przyrost z roku na rok i w czasie od 1924 r. do 1929 r. włącznie.
8. Światowy obrót handlowy, wyrażony w miljardach złotych, wynosił w roku 1929: w Europie 333,8; w Ameryce 162; w Azji 94,7; w Afryce 24,5; w Australji 16,6. W roku 1930 wynosił zaś: w Europie 287,2; w Ameryce 117,3; w Azji 72,9; w Afryce 20,2; w Australji 11,5. Oblicz ubytek obrotu handlowego w poszczególnych częściach świata, a następnie na całym świecie.
9. Obwód prostokąta wynosi: *a)* $35\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 38,4 *m*, *c)* $41\frac{3}{10}$ *dcm*, jeden zaś z boków: *a)* 7 *cm*, *b)* 10,75 *m*, *c)* $11\frac{5}{8}$ *dcm*; oblicz długość drugiego boku!

10. W prostokącie jeden bok wynosi: *a)* $64\frac{3}{4}$ *m*, *b)* $8\frac{1}{10}$ *dcm*, *c)* 4,65 *m*; drugi jest o *a)* $5\frac{1}{2}$ *m*, *b)* $1\frac{3}{4}$ *dcm*, *c)* 0,86 *m* krótszy. Oblicz obwód!

Mnożenie

Zadania

1. Ile to jest:
   a) $\frac{3}{4}$ z 150 *l*, $\frac{5}{8}$ z 4 *kg*, $\frac{2}{3}$ z $\frac{6}{11}$ *hl*, $\frac{41}{15}$ z 8 *t*, $\frac{17}{12}$ z $\frac{21}{4}$ *g*;
   b) $\frac{4}{5}$ z 6 *dcm*, $\frac{11}{18}$ z 2 *km*, $\frac{11}{12}$ z $\frac{64}{7}$ m^2, $\frac{19}{7}$ z 8 m^3, $\frac{9}{19}$ z $\frac{3}{4}$ km^2;
   c) $\frac{3}{5}$ z 8, $\frac{4}{7}$ z $\frac{2}{11}$. $\frac{13}{8}$ z 5, $\frac{4}{9}$ z $\frac{141}{12}$.
2. *a)* Ile to jest: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ tuzina?
   b) „ „ „ $\frac{15}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{60}$ kopy?
   c) „ „ „ $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{10}$, z 30?
   d) Ile to jest minut: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{30}$ godziny?
   e) Ile to jest godzin: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ doby?
3. Oblicz: *a)* $15 \cdot \frac{3}{7}$, $\frac{4}{5} \cdot 8$, $7 \cdot \frac{5}{9}$, $\frac{2}{5} \cdot 3$, $20 \cdot \frac{17}{21}$, $\frac{3}{13} \cdot 10$;
   b) $35 \cdot \frac{2}{35}$, $\frac{11}{12} \cdot 12$, $9 \cdot \frac{7}{9}$, $\frac{5}{17} \cdot 17$, $18 \cdot \frac{11}{18}$, $\frac{4}{51} \cdot 51$;
   c) $45 \cdot \frac{8}{15}$, $\frac{5}{6} \cdot 18$, $32 \cdot \frac{7}{8}$, $\frac{83}{144} \cdot 24$, $66 \cdot \frac{7}{11}$, $\frac{5}{18} \cdot 108$;
   d) $4 \cdot \frac{11}{16}$, $\frac{5}{22} \cdot 11$, $23 \cdot \frac{19}{69}$, $\frac{23}{75} \cdot 15$, $17 \cdot \frac{19}{68}$, $\frac{19}{65} \cdot 13$;
   e) $8 \cdot \frac{5}{6}$, $\frac{11}{40} \cdot 50$, $12 \cdot \frac{7}{8}$, $\frac{7}{10} \cdot 25$, $111 \cdot \frac{23}{741}$, $\frac{19}{240} \cdot 36$;
   f) $2\frac{3}{4} \cdot 6$, $4\frac{1}{8} \cdot 2$, $5\frac{1}{2} \cdot 8$, $5\frac{11}{14} \cdot 7$, $4\frac{7}{9} \cdot 18$, $5\frac{3}{8} \cdot 12$;
   g) $4\frac{9}{10} \cdot 11$, $6\frac{11}{17} \cdot 20$, $7\frac{19}{24} \cdot 13$, $9\frac{7}{30} \cdot 11$, $8\frac{19}{27} \cdot 15$;
4. Oblicz: *a)* $\frac{7}{11} \cdot 12$, $\frac{7}{11} \cdot 10$, *b)* $\frac{15}{24} \cdot 25$, $\frac{15}{24} \cdot 23$;
   c) $\frac{11}{19} \cdot 20$, $\frac{11}{19} \cdot 18$; *d)* $\frac{11}{60} \cdot 61$, $\frac{11}{60} \cdot 59$;
   e) $\frac{23}{29} \cdot 30$, $\frac{23}{29} \cdot 28$; *f)* $\frac{29}{48} \cdot 49$, $\frac{29}{48} \cdot 47$.
   Licz: $\frac{3}{8} \cdot 9 = \frac{3}{8}\,(8 + 1) = \frac{3}{8} \cdot 8 + \frac{3}{8} \cdot 1 = 3\frac{3}{8}$;
   $\frac{3}{8} \cdot 7 = \frac{3}{8}\,(8 - 1) = 3 - \frac{3}{8} = 2\frac{5}{8}$.
5. Oblicz: *a)* $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$, $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{6}$, $\frac{12}{25} \cdot \frac{3}{5}$, $\frac{7}{9} \cdot \frac{14}{5}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$;
   b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$, $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{15}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3}$, $\frac{5}{24} \cdot \frac{9}{10}$, $\frac{7}{18} \cdot \frac{9}{2}$;
   c) $7 \cdot \frac{2}{3}$, $8 \cdot \frac{3}{16}$, $5 \cdot \frac{5}{9}$, $6 \cdot \frac{1}{3}$, $3 \cdot \frac{2}{27}$;
   d) $1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, $\frac{5}{4} \cdot 2\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5} \cdot 7\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4}$;
   e) $3\frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{2}$, $3 \cdot 5\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2} \cdot 5\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{3}$.
6. Oblicz: *a)* $\frac{7}{25} \cdot \frac{10}{21}$, $\frac{13}{20} \cdot \frac{15}{26}$, $\frac{8}{15} \cdot \frac{25}{36}$, $\frac{27}{32} \cdot \frac{44}{45}$;
   b) $\frac{18}{35} \cdot \frac{14}{27}$, $2\frac{1}{5} \cdot \frac{15}{22}$, $6\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10}$, $\frac{16}{21} \cdot 8\frac{3}{4}$;
   c) $5\frac{4}{9} \cdot 2\frac{1}{7}$, $9\frac{2}{7} \cdot 3\frac{3}{13}$, $8\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$, $\frac{4}{15} \cdot 1\frac{11}{34}$;
   d) $4\frac{23}{25} \cdot \frac{10}{41}$, $\frac{10}{11} \cdot 2\frac{32}{39}$, $\frac{9}{14} \cdot 6\frac{1}{8}$, $5\frac{1}{8} \cdot 4\frac{4}{7}$;
   e) $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 11} \cdot \dfrac{11}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{8 \cdot 9}{5} \cdot \dfrac{15}{16 \cdot 18}$, $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{11 \cdot 13} \cdot \dfrac{26 \cdot 33}{4 \cdot 25 \cdot 7}$;
   f) $343 \cdot \frac{65}{49}$, $27 \cdot \frac{53}{729}$, $693 \cdot \frac{127}{462}$, $\frac{37}{49} \cdot \frac{21}{74}$;
   g) $\frac{72}{125} \cdot \frac{25}{36}$, $\frac{121}{117} \cdot \frac{39}{77}$, $\frac{729}{304} \cdot \frac{76}{81}$, $\frac{216}{343} \cdot \frac{147}{64}$;
   h) $\frac{19}{225} \cdot \frac{63}{95}$, $26\frac{13}{27} \cdot \frac{21}{52}$, $15\frac{45}{64} \cdot 36\frac{72}{75}$, $95 \cdot 100\frac{17}{19}$.

U w a g a. Uprość ułamki przed wykonaniem mnożenia!

7. Oblicz: *a)* $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{10}{9}$; *b)* $\frac{11}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4}$; *c)* $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{13}{2}$;
d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$; *e)* $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3}$; *f)* $\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2}$; *g)* $\frac{5}{8} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{3}{2}$; *h)* $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$;
i) $3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 3$; *j)* $2\frac{2}{5} \cdot 2\frac{2}{5} \cdot 2$; *k)* $7 \cdot \frac{3}{5} \cdot 8\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$; *l)* $\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{7}{5}$.

8. Oblicz następujące wyrażenia:
a) $(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{7}) \cdot (\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{11})$; *b)* $\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2}) \cdot \frac{7}{9}$; *c)* $\frac{1}{4} \cdot (2 \cdot \frac{4}{5}) \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11})$;
d) $\frac{3}{7} \cdot (\frac{2}{5} + \frac{1}{10}) \cdot \frac{5}{9}$; *e)* $\frac{3}{5} \cdot (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) \cdot (\frac{2}{7} + 1)$;
f) $(\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5}) \cdot (\frac{7}{3} - \frac{1}{2}) \cdot (\frac{2}{3} + \frac{3}{4})$.

U w a g a. Należy najpierw wykonać działania, naznaczone w nawiasach!

9. Oblicz: *a)* $\frac{8}{15} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{3}$, $\frac{4}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{8}$, $\frac{10}{21} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{3}{2}$;
b) $\frac{75}{100} \cdot \frac{63}{48} \cdot \frac{27}{72}$, $\frac{42}{21} \cdot \frac{57}{91} \cdot \frac{26}{19}$, $\frac{42}{75} \cdot \frac{39}{95} \cdot \frac{38}{91} \cdot \frac{45}{60}$;
c) $\frac{1}{8} \cdot 5\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7}$, $3\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{3}$, $\frac{33}{30} \cdot 2\frac{2}{11} \cdot \frac{56}{44}$;
d) $4\frac{23}{25} \cdot \frac{10}{41} \cdot 2\frac{32}{39}$, $3\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{70}$, $2\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{15} \cdot 1\frac{11}{34}$.

U w a g a. Przed wykonaniem mnożenia należy zwrócić uwagę, czy któryś z liczników i mianowników nie ma wspólnego podzielnika. Jeśli wspólny podzielnik istnieje, należy przez niego uprościć.

Np.: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{7}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{2}{\cancel{10}} \cdot \overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}} \cdot \underset{3}{\cancel{9}} \cdot \underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$.

10. Sprawdź następujące równości:
a) $(\frac{5}{12} + \frac{7}{8}) \cdot \frac{6}{5} = (\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{5}) + (\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{5})$;
b) $(2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}) \cdot \frac{5}{6} = (2\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}) + (3\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6})$;
c) $(\frac{25}{48} - \frac{15}{64}) \cdot \frac{36}{125} = (\frac{25}{48} \cdot \frac{36}{125}) - (\frac{15}{64} \cdot \frac{36}{125})$;
d) $(2\frac{23}{36} - 1\frac{15}{42}) \cdot \frac{6}{19} = (2\frac{23}{36} \cdot \frac{6}{19}) - (1\frac{15}{42} \cdot \frac{6}{19})$.

11. Oblicz: *a)* $\frac{9}{10} \cdot 3$, $\frac{5}{100} \cdot 7$, $\frac{11}{1000} \cdot 3$, $\frac{23}{10000} \cdot 9$;
b) $\frac{23}{100} \cdot 13$, $\frac{101}{1000} \cdot 17$, $\frac{103}{10000} \cdot 11$, $\frac{199}{1000000} \cdot 23$.

12. Pomnóż przez: *a)* 10, *b)* 100, *c)* 1000, następujące liczby:
2,1356; 7,53; 0,0075; 2,1; 0,2.

13. Pomnóż przez *a)* 0,1; *b)* 0,01; *c)* 0,001 następujące liczby:
7,3546; 25,4; 1,2; 0,035; 0,8.

14. Oblicz: *a)* $6,21 \times 10$; $13,5 \times 10$; $1,253 \times 10$; $6,21 \times 100$; $13,5 \times 100$; $1,253 \times 100$; $6,21 \times 1000$; $13,5 \times 1000$; $1,253 \times 1000$;
b) $2,35 \times 0,1$; $6,325 \times \frac{1}{10}$; $2,55 \times 0,1$; $2,35 \times 0,001$;
$6,524 \times \frac{1}{100}$; $4,82 \times \frac{1}{1000}$; $14,21 \times \frac{1}{10000}$; $63,81 \times 0,001$.

15. Oblicz: *a)* 2,5 . 3,1; 4,2 . 7,3; 35 . 2,1; 7,5 . 4; 0,3 . 0,03;
b) 7,3 . 2,01; 0,5 . 0,2; 7,35 . 0,031; 25,01 . 0,5;
c) 0,07 . 0,083; 0,00032 . 0,000075; 0,105 . 0,0024; 0,03 . 0,0052.

16. Oblicz: *a)* 3,8 . 0,4 . 1,6; 14,5 . 0,9 . 0,002; 0,031 . 40 . 3,84;
b) 1,8 . 4,6 . 500 . 0,2; 3,8 . 2,9 . 0,4 . 20; 2,84 . 0,356 . 30 . 0,06;

c) $2{,}7 \times 3{,}4 \times 0{,}5$; $0{,}2 \times 0{,}3 \times 0{,}5$; $0{,}273 \times 0{,}9 \times 5$; $60{,}8 \times 4{,}6 \times 0{,}9$; $84 \times 0{,}08 \times 0{,}2$.

17. Oblicz: *a)* $0{,}1^2$; $0{,}01^2$; $2{,}4^2$; $1{,}02^2$; $0{,}054^2$;
b) $0{,}1^3$; $0{,}2^3$, $0{,}4^3$; $2{,}1^3$; $0{,}01^3$, $0{,}21^3$;

18. Oblicz następujące iloczyny, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne: $\frac{7}{4} \times 2{,}13$; $\frac{15}{16} \times 0{,}32$; $0{,}01 \times \frac{6}{25}$.

19. Pomnóż przez 40, 600, 8000, następujące liczby:
a) 19,465 *m*; 9,435 *kg*; 251,46 *zł*;
b) 84,78 *ha*; 96,7225 km^2; 105,6425 *t*.

20. Zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne: *a)* *km*; *b)* *kg*; *c)* m^2, oblicz następujące iloczyny:
a) $2{,}4 \times 13$ *km* 420 *m*; $5{,}4 \times 1$ *km* 610 *m*; 4×12 *m* 3 *dcm*;
b) 5×5 *kg* 410 *g*; $0{,}2 \times 27$ *kg* 350 *g*; $0{,}08 \times 2$ *kg* 4 *dkg*;
c) $0{,}6 \cdot 7$ m^2 14 dcm^2; $1{,}6 \cdot 12$ m^2 4 dcm^2.

21. Oblicz: *a)* $4{,}26 \cdot \frac{3}{2}$; $0{,}24 \cdot \frac{2}{3}$; $0{,}045 \cdot \frac{4}{5}$; $2{,}12 \cdot \frac{5}{4}$;
b) $0{,}0042 \cdot \frac{5}{8}$; $4{,}125 \cdot \frac{8}{3}$; $1{,}02 \cdot 0{,}05 \cdot \frac{11}{2}$.

22. Oblicz: *a)* $(45{,}893 - 16{,}686) \cdot 0{,}8$; $(94{,}672 - 86{,}548) \cdot 0{,}9$;
b) $(23{,}46 + 11{,}394) \cdot 0{,}5$; $(16{,}444 + 3{,}846) \cdot 0{,}7$;
c) $(4{,}261 - 1{,}88) \cdot 0{,}04$; $(15 - 3{,}624) \cdot 0{,}006$.

23. Oblicz następujące wyrażenia:
a) $(2{,}3 + 4{,}5) \cdot (0{,}3 + 3{,}6)$; $3{,}2 \cdot (2{,}5 \cdot 0{,}4) - 0{,}7$;
b) $1{,}3 \cdot (25{,}4 - 8{,}4)$; $(12{,}4 + 1{,}06) \cdot (41{,}2 - 0{,}08)$;
c) $14{,}37 - (2{,}54 \cdot 3) + (5{,}19 \cdot 5)$; $(5{,}18 \cdot 2) + (6{,}91 \cdot 0{,}3) - (5{,}14 \cdot 0{,}2)$.

24. Oblicz następujące iloczyny liczb przybliżonych (błąd w każdej liczbie jest nie większy od 5 jednostek jej najniższego rzędu):
a) $8{,}56 \cdot 3{,}4$; $7{,}96 \cdot 4{,}1$; $4{,}56 \cdot 8{,}2$; $4{,}3 \cdot 8{,}12$;
b) $3{,}4 \cdot 0{,}35$; $4{,}8 \cdot 0{,}34$; $76{,}9 \cdot 0{,}41$; $0{,}62 \cdot 0{,}041$;
c) $0{,}21 \cdot 3{,}4 \cdot 2{,}3$; $1{,}4 \cdot 3{,}15 \cdot 0{,}85$; $25{,}08 \cdot 4{,}1 \cdot 0{,}05$;
d) $1{,}87 \cdot 0{,}24 \cdot 2{,}005$; $0{,}04 \cdot 1{,}256 \cdot 2{,}0042$.

R o z w i ą z a n i e: cyframi znaczącemi danej liczby przybliżonej nazywamy te cyfry, które otrzymamy po odrzuceniu początkowych zer.

Np. 0,00305 ma trzy cyfry znaczące, 0,00030 ma dwie cyfry znaczące. W iloczynie liczb przybliżonych zachowujemy tyle cyfr znaczących, ile posiada ta liczba, która ma najmniej cyfr znaczących. A więc w iloczynie $7{,}41 \cdot 2{,}5$ zachowamy dwa miejsca znaczące.

Mamy zatem: $7{,}41 \cdot 2{,}5 = 18{,}525$ t. j. w przybliżaniu 18.

Cyfry odrzucone są niepewne. Nie należy jednak sądzić, że pozostawione cyfry są pewne lub, że błąd jest mniejszy od

5 jednostek najniższego zachowanego rzędu. Błąd może być stosunkowo wielki.

Np. iloczyn liczb dokładnych 8,37 i 0,116 wynosi 0,97092. Gdybyśmy obliczyli iloczyn liczb przybliżonych: 8,32 . 0,111, to otrzymalibyśmy: 8,32 . 0,111 = 0,92352.

Porównując oba wyniki widzimy, że błąd wynosi około 0,05 t. j. 5 jednostek przedostatniego rzędu zachowanego.

25. Oceń błąd, jaki popełniasz przy obliczaniu iloczynu przybliżonego w zadaniu poprzedniem *a)* i *b)*.
Rozwiązanie: Iloczyn liczb przybliżonych 2,6 i 0,37 wynosi 0,962. W iloczynie dokładnym mogą być czynniki co najwyżej o 5 jednostek najniższego rzędu większe, względnie mniejsze.
Iloczyn dokładny wynosi zatem co najwyżej: 3,1 . 0,42 = 1,302, a co najmniej 2,1 . 0,32 = 0,672. Porównując oba te wyniki z wartością iloczynu przybliżonego widzimy, że błąd jest mniejszy od 0,4.

Ćwiczenia

1. Ile otrzymamy, jeżeli od liczby 325 odejmiemy $\frac{4}{5}$ tej liczby?
2. Co jest większe: suma, czy iloczyn ułamków $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{4}$?
3. Ziemia przebiega w ciągu jednej sekundy $30\frac{13}{25}$ *km*; ile *km* przebiegnie w ciągu roku ($365\frac{1}{4}$ dni)?
4. Z kurka wodociągu nieszczelnie zamkniętego padają co trzy sekundy krople wody o objętości 0,1 cm^3; ile wody wycieknie w ciągu 24 godzin?
5. Śruba wkręca się o $\frac{3}{16}$ *mm* za każdym obrotem; jak głęboko się wkręci po $15\frac{2}{9}$ obrotach?
6. Dwaj robotnicy za wykonanie pewnej pracy otrzymali razem 120 *zł*; pierwszy wykonał $\frac{3}{4}$ pracy, drugi resztę. Ile każdy z nich zarobił?
7. Za ile ma kupiec sprzedać towar, który go kosztował 300 *zł*, jeśli chce zarobić $\frac{3}{20}$ tego, co zapłacił?
8. Kupiec kupił $50\frac{2}{5}$ *kg* towaru, płacąc $2\frac{1}{2}$ *zł* za jeden *kg*; chce zarobić $\frac{3}{25}$ tego, co zapłacił. *a)* Ile zapłacił za towar? *b)* Jaki będzie miał zysk? *c)* Jaka będzie cena sprzedaży 1 *kg* tego towaru?
9. Z dwóch miejscowości odległych od siebie o $97\frac{1}{4}$ *km*, wychodzą równocześnie naprzeciwko siebie dwaj posłańcy; jeden przebywa w ciągu godziny $4\frac{3}{5}$ *km*, drugi $5\frac{1}{4}$ *km*. W jakiej odległości od siebie będą po $6\frac{1}{2}$ godzinach?

10. Kwotę 3256 *zł* rozdzielono między cztery osoby tak, że pierwsza otrzymała $\frac{2}{5}$, druga $\frac{1}{8}$, trzecia $\frac{1}{4}$, a czwarta resztę. Ile otrzymała każda osoba?
11. Rozdzielono 1200 *zł* pomiędzy 15 osób w ten sposób, że pomiędzy 10 osób rozdzielono $\frac{5}{6}$ całej sumy na równe części, a pomiędzy pozostałych 5 osób resztę również na równe części. Ile otrzymała każda osoba?
12. Ktoś wydał naprzód $\frac{2}{5}$ tej sumy pieniędzy, którą posiadał, a następnie $\frac{3}{4}$ reszty. Jaki ułamek ma jeszcze tej sumy, którą posiadał na początku?
13. Ktoś mierzył fałszywym metrem, mianowicie o $1\frac{1}{4}$ *cm* krótszym i wymierzył $15\frac{1}{2}$ *m*. Jaka jest prawdziwa długość?
14. Wapno gaszone zajmuje $3\frac{1}{2}$ razy większą objętość, aniżeli przed gaszeniem. Jaką objętość będzie miało $5\frac{3}{4}$ m^3 wapna po gaszeniu?
15. Obwód pola w kształcie prostokąta wynosi 545 *m*, a szerokość jego wynosi $\frac{2}{3}$ długości. Jaka jest wartość tego pola, jeśli 1 m^2 kosztuje $\frac{1}{5}$ *zł*?
16. Oblicz w stopniach, minutach i sekundach kąt, jaki opisuje wskazówka mała (godzinowa) zegara w *a)* $\frac{7}{15}$ godz.; *b)* $\frac{5}{12}$ godz.; *c)* $1\frac{3}{4}$ godz.?
17. Trawa, po wysuszeniu na siano, traci $\frac{13}{20}$ swego ciężaru. Jaka jest wartość zbiorów z łąki, która po pierwszem skoszeniu dała 12 *t* trawy, a przy drugiem $\frac{2}{3}$ tej ilości, jeśli *t* siana kosztuje 75 *zł*?
18. Brukarze wybrukowali trzy ulice o wymiarach $11\frac{1}{2}$ *m* i $98\frac{1}{5}$ *m*, $10\frac{1}{4}$ *m* i $72\frac{1}{2}$ *m*, 12 *m* i $110\frac{3}{4}$ *m*; ile należy się brukarzom za robotę, jeśli 1 m^2 kosztuje $1\frac{1}{2}$ *zł*?
19. Sztuka płótna miała $\frac{4}{5}$ *m* szerokości, a $25\frac{1}{2}$ *m* długości. Po wypraniu straciła $\frac{1}{20}$ swej szerokości i $\frac{1}{16}$ swej długości; ile m^2 ma teraz ta sztuka płótna?
20. 30 mężczyzn, 20 kobiet i 15 dzieci urządziło wycieczkę, która przeciętnie kosztowała 2 *zł* za jedno dziecko, za jedną kobietę $\frac{7}{4}$ tego, co za dziecko i za jednego mężczyznę $\frac{5}{2}$ tego, co za dziecko; ile kosztowała wycieczka?
21. Ogrodzono plac w kształcie kwadratu o boku: *a)* 28 *m*, *b)* 31,5 *m*, *c)* $29\frac{3}{4}$ *m* płotem, którego 1 *m* kosztował: *a)* 4 *zł*, *b)* 4,5 *zł*, *c)* $4\frac{1}{4}$ *zł*; ile kosztowało całe ogrodzenie?
22. Oblicz obwód trójkąta równobocznego o boku: *a)* $7\frac{3}{4}$ *cm*, *b)* 8,76 *m*, *c)* $3\frac{5}{8}$ *km*!
23. Oblicz obwód sześciokąta umiarowego o boku: *a)* $5\frac{1}{8}$ *dcm*, *b)* 9,64 *km*, *c)* $4\frac{3}{20}$ *cm*!

24. Oblicz obwód wielokąta umiarowego, którego bok wynosi 8 *cm*, a w którym liczba boków wynosi: *a)* 5, *b)* 7, *c)* 10, *d)* 20.
25. Oblicz obwód koła, którego promień równa się: *a)* 4 *cm*, *b)* $1\frac{1}{4}$ *m*, *c)* 2,25 *dcm*, przyjmując $\pi = 3{,}14$.
26. Jedno z kół samochodu wykonało podczas jazdy z miasta *A* do miasta *B* 60 000 obrotów. Jaka jest odległość tych miast, jeżeli promień koła wynosi 33 *cm*?
27. Duża wskazówka zegara ma 2 *cm*, mała 14 *mm*, a ta która wskazuje sekundy 6 *mm*. Jaką drogę opisze koniec każdej z tych wskazówek w ciągu: *a)* doby, *b)* tygodnia, *c)* roku?
28. Oblicz pole kwadratu o boku: *a)* $3\frac{1}{2}$ *m*, *b)* $5\frac{3}{4}$ *cm*, *c)* 2,4 *dcm*, *d)* 0,2 *cm*!
29. Stół kwadratowy o boku 0,9 *m* przykryty jest serwetą, która zwisa dookoło stołu na szerokość 0,25 *m*; jakie jest pole tej serwety?
30. Oblicz pole prostokąta o wymiarach: *a)* $5\frac{1}{2}$ *m* i $4\frac{3}{4}$ *m*, *b)* 2,4 *dcm* i 5,8 *dcm*, *c)* $6\frac{5}{8}$ *km* i $7\frac{1}{25}$ *km*!
31. Oblicz pole równoległoboku, którego podstawa wynosi: *a)* 3 *m*, *b)* 4,6 *m*, *c)* $2\frac{3}{4}$ *dcm*, wysokość zaś: *a)* $1\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 3,64 *m*, *c)* $1\frac{1}{8}$ *dcm*!
32. W ścianie o długości 6,28 *m* mają być wybite drzwi, szerokie na 1,26 *m*, w ten sposób, żeby krawędzie boczne drzwi były równo odległe od odpowiednich krawędzi bocznych ściany. Oblicz *a)* odległość bocznej krawędzi drzwi od odpowiedniej bocznej krawędzi ściany, *b)* pole drzwi, jeżeli ich wysokość wynosi 2,15 *m*, *c)* pole ściany (bez drzwi), jeśli wysokość ściany wynosi 4,25 *m*, *d)* zaokrąglij wyniki otrzymane w *b)* i *c)* w dcm^2!
33. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego podstawa wynosi: *a)* 6 *cm*, *b)* 8,4 *dcm*, *c)* $10\frac{3}{4}$ *m*, wysokość zaś: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 10,85 *dcm*, *c)* $12\frac{1}{8}$ *m*!
34. Oblicz pole trójkąta, którego podstawa wynosi: *a)* 15 *m*, *b)* 16,45 *dcm*, *c)* $12\frac{5}{8}$ *km*, wysokość zaś: *a)* $14\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 18,55 *dcm*, *c)* $14\frac{1}{4}$ *km*!
35. Oblicz pole trapezu, którego boki równoległe mają: *a)* 3 *m* i 5 *m*, *b)* 2,8 *dcm* i 4,6 *dcm*, *c)* $3\frac{1}{4}$ *cm* i $5\frac{3}{8}$ *cm*, wysokość zaś wynosi: *a)* $2\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 3,5 *dcm*, *c)* $4\frac{1}{2}$ *cm*!
36. Narysuj sześciokąt umiarowy o boku 5 *cm*, zmierz odległość jego środka od boku, a następnie oblicz jego pole.
37. Przekątna czworokąta ma długość 157,4 *m* i dzieli ten czworokąt na 2 trójkąty, z których jeden ma wysokoćć 74,6 *m*, drugi zaś 96,4 *m*, przyczem wysokości te są prostopadłe do przekątnej; oblicz pole tego czworokąta! Rysunek w skali 1:500!

38. Oblicz pole koła, którego promień równa się: *a)* 3 *m*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 8,7 *cm*, *d)* $5\frac{3}{4}$ *dcm*, przyjmując za liczbę π jednym razem $\frac{22}{7}$, drugim razem 3,14!
39. Oblicz pole pierścienia, zawartego między dwoma kołami współśrodkowemi o promieniach: *a)* 6 *m* i 4 *m*, *b)* 4,6 *dcm* i 2,8 *dcm*, *c)* $5\frac{1}{4}$ *km* i $4\frac{1}{8}$ *km*!
40. W kwadrat o obwodzie 55 *dcm* wpisano koło. Oblicz jego pole! O ile jest ono mniejsze od pola kwadratu? Rysunek w skali 1 : 10!
41. Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi: *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 5,8 *dcm*, *c)* $14\frac{3}{8}$ *m*! Narysuj siatkę w odpowiedniej skali!
42. Bryłę marmuru, w kształcie sześcianu o krawędzi 1,4 *m*, oszlifowano na całej powierzchni; ile zapłacono za tę pracę, jeśli za 1 m^2 płacono 8 *zł* 50 *gr*?
43. Oblicz powierzchnię prostopadłościanu o wymiarach: *a)* 2 *cm*, 5 *cm*, 8 *cm*; *b)* 3,4 *dcm*, 5,8 *dcm*, 6 *dcm*; *c)* $4\frac{1}{2}$ *m*, $6\frac{1}{4}$ *m*, $7\frac{3}{8}$ *m*! Narysuj siatki w odpowiedniej skali!
44. Pokój ma 8 *m* długości, 4,5 *m* szerokości, a 4 *m* wysokości. Podłoga kosztowała po 15 *zł* za 1 m^2, tynkowanie zaś po 5 *zł* za 1 m^2. Ile kosztowały razem podłoga i tynkowanie pokoju?
45. Oblicz powierzchnię graniastosłupa prostego o wysokości 8 *cm*, którego podstawa jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych 4 *cm* i 5 *cm*. Narysuj siatkę!
46. Oblicz powierzchnię graniastosłupa prostego o wysokości 6 *cm*, którego podstawa jest trójkątem równoramiennym, przyczem podstawa tego trójkąta ma $4\frac{1}{2}$ *cm*, wysokość zaś $5\frac{1}{2}$ *cm*. Brakujące wymiary znajdź przy pomocy rysunku i pomiaru!
47. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego (w skali 1 : 100) o wysokości $3\frac{3}{4}$ *m*, którego podstawa jest trójkątem równobocznym o boku 2 *m* i oblicz jego pole, mierząc na siatce odległość środka trójkąta od boku!
48. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego (w skali 1 : 25) o wysokości 7,5 *dcm*, którego podstawa jest sześciokątem umiarowym o boku 5 *dcm*, i oblicz jego pole, mierząc na siatce odległość środka sześciokąta od boku!
49. Oblicz powierzchnię walca prostego, którego podstawa jest kołem o promieniu: *a)* $4\frac{1}{2}$ *dcm*, *b)* 8,6 *dcm*, *c)* $9\frac{3}{4}$ *m*, a którego wysokość wynosi: *a)* 5 *dcm*, *b)* 12,4 *dcm*, *c)* $20\frac{1}{2}$ *m*. Narysuj siatkę w skali: *a)* 1 : 20, *b)* 1 : 100, *c)* 1 : 1000.
50. Podstawa rury walcowej ma promień zewnętrzny 4 *cm*, wewnętrzny 3 *cm*, długość zaś rury wynosi 6 *cm*; oblicz powierzchnię tej rury! Siatka!

51. Sporządź model sześcianu, którego krawędź wynosi 5 *cm*, i oblicz jego objętość!
52. Oblicz objętość sześcianu, którego krawędź wynosi: *a)* $9\frac{4}{5}$ *cm*, *b)* 4,6 *m*, *c)* $8\frac{3}{8}$ *dcm*.
53. Jaki jest ciężar sześcianu, o krawędzi 1,2 *m* wykutego z granitu, którego 1 cm^3 waży 2,65 *g*?
54. Sporządź model prostopadłościanu o wymiarach: $2\frac{1}{2}$ *cm*, 4 *cm*, 6 *cm* i oblicz jego objętość!
55. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach: *a)* 2 *cm*, $4\frac{1}{2}$ *cm*, $5\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 4,2 *dcm*, 5,4 *dcm*, 6 *dcm*, *c)* $2\frac{1}{2}$ *m*, $4\frac{3}{5}$ *m*, 6 *m*, *d)* 5 *dcm*, $4\frac{5}{8}$ *dcm*, 9 *cm*!
56. Ciało zanurzone w płynie traci pozornie tyle na swym ciężarze, ile waży płyn przez to ciało wyparty (t. zn. płyn tej samej objętości, co ciało). Jeżeli więc np. 1 dcm^3 z mosiądzu wrzucimy do wody, to on w wodzie waży 8,5 *kg* — 1 *kg* = 7,5 *kg*, gdyż 1 dcm^3 mosiądzu w powietrzu waży 8,5 *kg*, a 1 dcm^3 wody waży 1 *kg*.
   Sześcian z mosiądzu o krawędzi: *a)* 4 *cm*, *b)* 8,7 *cm*, *c)* $6\frac{3}{4}$ *cm*, wrzucono do wody; ile waży ten sześcian w wodzie?
57. Jaki jest ciężar prostopadłościanu z ołowiu, którego 1 cm^3 waży 11,34 *g*, jeśli wymiary prostopadłościanu są: *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, 4 *cm*, $5\frac{3}{4}$ *cm*; *b)* 4,2 *cm*, 5,4 *cm*, 8 *cm*; *c)* $6\frac{3}{4}$ *cm*, $8\frac{1}{5}$ *cm*, 10 *cm*. Ile straci pozornie ten prostopadłościan na ciężarze, jeżeli go całkiem zanurzymy w wodzie?
58. Sporządź model graniastosłupa prostego o wysokości 5 *cm*, którego podstawa jest trójkątem równobocznym o boku 2 *cm*; oblicz jego objętość, mierząc na modelu wysokość podstawy!
59. Sporządź model graniastosłupa prostego o wysokości 8 *cm*, którego podstawa jest sześciokątem umiarowym o boku $2\frac{1}{2}$ *cm*. Oblicz jego objętość, mierząc na modelu odległość środka podstawy od boku!
60. Graniastosłup prosty, zrobiony z drzewa dębowego, o wysokości 8 *cm*, ma za podstawę romb, w którym przekątne wynoszą 4 *cm* i 3 *cm*; oblicz ciężar tego graniastosłupa, wiedząc, że 1 cm^3 drzewa dębowego waży 0,7 *g*!
61. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 7 *cm* jest czworokąt, w którym jedna przekątna wynosi 3 *cm* i dzieli go na dwa trójkąty o wysokościach 4,5 *cm* i 2 *cm*, (przekątna jest wspólną podstawą trójkątów). Oblicz objętość tego graniastosłupa!
62. Rów ma kształt graniastosłupa prostego na 8 *m* długiego, któ-

rego podstawa jest trapezem równoramiennym o bokach równoległych 2 *m* i 3 *m*, przyczem wysokość trapezu równa się 1,8 *m*. Oblicz, ile *hl* wody ten rów pomieści!

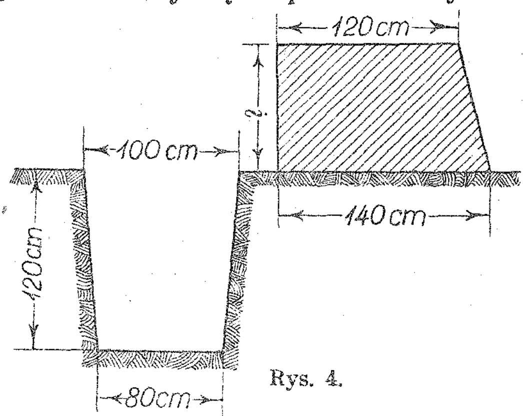
63. Sporządź model walca obrotowego o wysokości 6 *cm*, którego podstawa ma promień $1\frac{1}{2}$ *cm*, i oblicz jego objętość!

64. Oblicz objętość walca obrotowego, którego podstawa ma promień: *a)* 7 *cm*, *b)* 4,8 *dcm*, *c)* $6\frac{3}{4}$ *m*, a którego wysokość wynosi: *a)* $1\frac{1}{2}$ *dcm*, *b)* 8,2 *dcm*, *c)* $10\frac{1}{8}$ *m*.

65. Oblicz, ile waży rura walcowa żelazna, 3,5 *m* długa, której promień zewnętrzny wynosi 2,8 *dcm*, wewnętrzny zaś 2,4 *dcm*, jeżeli 1 m^3 żelaza waży 7,25 *t*!

66. Do menzurki, której podstawa ma promień 5 *cm*, wrzucono ciało tak, że zupełnie się zanurzyło, wskutek czego poziom wody w menzurce podniósł się o 14 *cm*. Jaka jest objętość tego ciała?

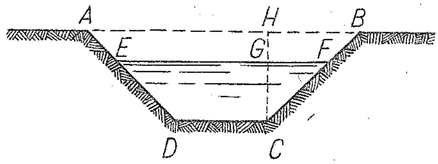
67. Piechota wykopała rów strzelecki, a następnie zrobiła z wykopanej ziemi zasłonę (rys. 4). Zarówno przekrój rowu strzeleckiego, jak i zasłony są trapezami o wymiarach podanych



Rys. 4.

na rysunku. Oblicz *a)* pole przekroju rowu, *b)* wysokość zasłony, *c)* ilość wykopanej ziemi jeśli rów był na 500 *m* długi, *d)* liczbę żołnierzy potrzebnych do wykopania tego rowu w przeciągu $2\frac{1}{2}$ godziny, jeśli jeden żołnierz w ciągu jednej godziny wykopie $\frac{1}{2}$ m^3 ziemi.

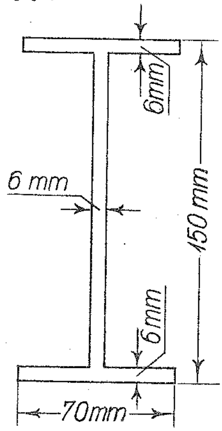
68. Wykopano rów osuszający, którego przekrój jest trapezem równoramiennym (rys. 5), przyczem: $AB = 3{,}6$ *m*, $DC = 1{,}2$ *m*, $EF = 2{,}8$ *m*, $CG = 0{,}8$ *m*, $GH = 0{,}4$ *m*. Oblicz: *a)* pole trapezu $ABDC$ (tak zwane pole wykopu), *b)* pole trapezu $EFCD$ (pole przekroju wody), *c)* objętość wody w rowie długim na



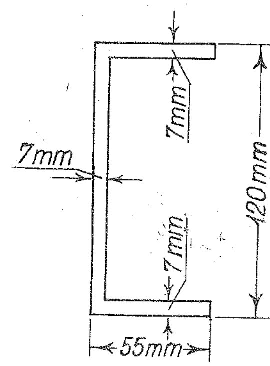
Rys. 5.

800 m, *d)* rys. 5 przedstawia plan przekroju rowu w skali 1 : 100; zmierz długość odcinka ED i oblicz długość linji łamanej $EDCF$, czyli t. zw. obwód zwilżony. *e)* oblicz pole powierzchni zwilżonej rowu, długiego na 600 m.

69. Na rys. 6 zaznaczone są wymiary przekroju dźwigara żelaznego. Oblicz: *a)* pole tego przekroju, *b)* objętość dźwigara długiego na 8 m, *c)* ciężar 6 takich dźwigarów, podtrzymujących sufit, przyjmując, że 1 cm^3 żelaza waży 7,5 g.



Rys. 6.



Rys. 7.

70. Na rys. 7 zaznaczone są wymiary przekroju dźwigara żelaznego. Oblicz: *a)* pole tego przekroju, *b)* objętość dźwigara długiego na 6,5 m, *c)* jego ciężar, przyjmując, że 1 cm^3 żelaza waży 7,5 g.

Dzielenie

Zadania

1. Oblicz: *a)* $\frac{24}{25} : 6$, $\frac{24}{25} : 8$, $\frac{7}{3} : 7$, $\frac{15}{32} : 15$, $\frac{33}{31} : 11$;
b) $\frac{48}{125} : 6$, $\frac{48}{125} : 12$, $\frac{48}{125} : 24$, $\frac{95}{7} : 19$, $\frac{87}{101} : 29$;
c) $\frac{7}{9} : 2$, $\frac{12}{13} : 5$, $\frac{11}{15} : 7$, $\frac{7}{15} : 8$, $\frac{11}{16} : 9$.
d) $5\frac{1}{11} : 7$, $11\frac{5}{9} : 13$, $14\frac{1}{4} : 19$, $5\frac{1}{7} : 6$, $10\frac{10}{17} : 15$;
e) $38\frac{3}{4} : 5$, $4\frac{2}{13} : 9$, $13\frac{7}{17} : 19$, $4\frac{4}{15} : 8$, $23\frac{2}{5} : 9$.

2. Przed wykonaniem dzielenia uprość:
   a) $\frac{8}{9} : 12$, $\frac{12}{25} : 42$, $\frac{16}{15} : 24$, $\frac{21}{13} : 14$, $\frac{45}{112} : 30$;
   b) $\frac{45}{13} : 15$, $\frac{56}{77} : 72$, $\frac{72}{99} : 96$, $\frac{81}{29} : 72$, $\frac{96}{48} : 36$;
   c) $8\frac{1}{2} : 17$, $7\frac{2}{3} : 23$, $8\frac{4}{5} : 22$, $18\frac{3}{4} : 50$, $13\frac{1}{3} : 75$.
3. Podaj odwrotności następujących liczb:
   a) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$; *b)* 3, 5, 10; *c)* $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $7\frac{2}{5}$, $5\frac{1}{3}$.
4. Oblicz: *a)* $\frac{2}{3} : \frac{4}{3}$, $\frac{7}{5} : \frac{8}{25}$, $\frac{1}{3} : \frac{3}{8}$, $\frac{7}{15} : \frac{7}{25}$, $\frac{12}{25} : \frac{18}{5}$;
   b) $3 : \frac{2}{3}$, $7 : \frac{1}{5}$, $2 : \frac{3}{5}$, $9 : \frac{3}{4}$, $10 : \frac{100}{101}$;
   c) $2\frac{1}{2} : \frac{7}{5}$, $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$, $3 : 2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} : 1\frac{1}{5}$, $7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$;
   d) $\frac{8}{15} : \frac{4}{15}$, $\frac{1}{6} : \frac{1}{42}$, $\frac{5}{6} : \frac{1}{48}$, $\frac{20}{21} : \frac{4}{7}$, $\frac{22}{31} : \frac{11}{2}$;
   e) $8 : \frac{4}{5}$, $6 : \frac{2}{7}$, $\frac{65}{72} : \frac{13}{72}$, $\frac{99}{90} : \frac{11}{90}$, $\frac{8}{5} : \frac{4}{45}$;
   f) $7\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$, $4\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$, $5\frac{5}{12} : \frac{13}{12}$, $1\frac{11}{12} : \frac{23}{2}$, $6\frac{14}{15} : 1\frac{11}{15}$;
   g) $3\frac{5}{24} : 3\frac{1}{18}$, $13\frac{1}{4} : \frac{22}{5}$, $4\frac{21}{25} : 5\frac{2}{15}$, $2\frac{5}{6} : \frac{34}{3}$, $15\frac{19}{20} : \frac{10}{3}$.
5. Oblicz: *a)* $369 : \frac{41}{37}$, $27 : \frac{108}{113}$, $\frac{51}{26} : \frac{68}{65}$;
   b) $17\frac{3}{13} : \frac{49}{52}$, $107 : 35\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{32} : 7\frac{13}{16}$;
   c) $6\frac{86}{121} : \frac{2}{121}$, $5\frac{7}{121} : 5\frac{35}{44}$, $\frac{477}{187} : \frac{212}{561}$.

   Po zamianie ilorazu na iloczyn uprość!
6. Ile wynosi mnożna, jeżeli:
   a) iloczyn wynosi $\frac{3}{4}$, a mnożnik $\frac{5}{7}$; *b)* iloczyn wynosi $1\frac{1}{2}$, a mnożnik $\frac{8}{11}$; *c)* iloczyn wynosi $3\frac{4}{5}$, a mnożnik $1\frac{8}{9}$?
7. Ile wynosi mnożnik, jeżeli:
   a) iloczyn wynosi $\frac{17}{4}$, a mnożna $\frac{5}{8}$; *b)* iloczyn wynosi $3\frac{1}{6}$, a mnożna $\frac{23}{12}$; *c)* iloczyn wynosi $4\frac{1}{2}$, a mnożna $3\frac{1}{4}$?
8. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce litery x w następujących równościach:
   a) $x \cdot \frac{3}{4}\ zł = 18\ zł$; $x \cdot \frac{3}{10}\ l = 1\frac{1}{2}\ l$;
   b) $x \cdot \frac{4}{5}\ kg = \frac{17}{2}\ kg$; $x \cdot \frac{2}{5}$ godz. $= 2\frac{1}{2}$ godz.;
   c) $x \cdot \frac{5}{2}\ km = \frac{19}{4}\ km$; $x \cdot \frac{3}{25}\ m^2 = 4\frac{1}{2}\ m^2$;
   d) $\frac{5}{4} \cdot x\ cm = 1\frac{1}{2}\ cm$; $\frac{11}{4} \cdot x\ l = \frac{3}{5}\ l$;
   e) $1\frac{1}{2} \cdot x\ kg = 3\frac{1}{5}\ kg$; $1\frac{1}{12} \cdot x$ godz. $= 2\frac{1}{2}$ godz.;
   f) $5\frac{3}{4} \cdot x\ zł = \frac{5}{8}\ zł$; $3\frac{1}{8} \cdot x\ m^2 = 1\frac{3}{4}\ m^2$.
9. Przekonaj się o prawdziwości następujących równości:
   a) $(\frac{2}{3} + \frac{1}{7}) : \frac{4}{5} = (\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) + (\frac{1}{7} : \frac{4}{5})$;
   b) $(\frac{11}{24} + 5\frac{2}{5} + \frac{14}{15}) : \frac{7}{8} = (\frac{11}{24} : \frac{7}{8}) + (5\frac{2}{5} : \frac{7}{8}) + (\frac{14}{15} : \frac{7}{8})$;
   c) $(5\frac{3}{8} - \frac{21}{4}) : \frac{8}{9} = (5\frac{3}{8} : \frac{8}{9}) - (\frac{21}{4} : \frac{8}{9})$;
   d) $(6\frac{1}{2} - \frac{4}{9} + 8\frac{2}{3}) : \frac{5}{6} = (6\frac{1}{2} : \frac{5}{6}) - (\frac{4}{9} : \frac{5}{6}) + (8\frac{2}{3} : \frac{5}{6})$.
10. Przez co trzeba pomnożyć liczbę $3\frac{1}{2}$, aby otrzymać 4?
11. Iloczyn dwóch liczb wynosi $\frac{11}{8}$; jedna z tych liczb jest $2\frac{1}{3}$. Ile wynosi druga?
12. Ile razy można odejmować $\frac{3}{4}$ od $4\frac{2}{3}$?

13. Jaka liczba podzielona przez: *a)* $\frac{3}{2}$, *b)* $2\frac{1}{3}$, *c)* $5\frac{3}{7}$, daje iloraz *a)* $\frac{4}{5}$, *b)* $\frac{11}{8}$, *c)* $3\frac{1}{6}$?

14. *a)* Jaka liczba jest swoją własną odwrotnością?
b) Jeżeli liczba jest mniejsza od 1, to jej odwrotność jest większa od 1; podaj przykłady!
c) Iloczyn liczby przez jej odwrotność równa się jedności; podaj przykłady!

15. Oblicz: *a)* 17,4 : 6; 0,414 : 9; 8,0037 : 9; 5,92 : 16;
b) 40,32 : 24; 248,16 : 75; 557,91 : 15; 0,728 : 140;
c) 225,36 : 18; 0,1568 : 49; 11,322 : 306; 0,4263 : 87.

16. Podziel następujące liczby: 3,71; 23,573; 0,941; 0,2 przez: *a)* 0,1; *b)* 0,01; *c)* 0,001; przekonaj się, że otrzymasz iloraz, przesuwając kropkę odpowiednio o jedno, dwa, trzy miejsca na prawo!

17. Oblicz: *a)* 3,45 : 100; 17,51 : 1000; 1272,7 : 10; 0,1 : 10; 0,01 : 100, 0,001 : 1000;
b) 2,34 : 0,1; 0,45 : 0,01; 18,12 : 0,001; 0,02 : 0,0001; 47 : 0,01; 1 : 0,001.

18. Oblicz następujące ilorazy:
a) 2,7 : 1,2; 36,54 : 4,5; 7,2 : 2,5; 2,8 : 11,2;
b) 5,6 : 0,35; 0,231 : 0,22; 0,003 : 9,6; 0,102 : 0,34;
c) 2295,06 : 5,8; 176,244 : 0,38; 7,0567 : 1,19; 3,84 : 2,56;
d) 65142 : 0,6; 22,62 : 0,006; 5,068 : 2,8;
e) 2,508 : 0,66; 9,7704 : 9,2; 0,61728 : 0,0096;
f) 0,000 03 : 0,002; 0,000 07 : 0,000 005; 3 : 0,000 016;
g) 0,53 : 0,2; 5,7 : 0,5; 15,7 : 3,51; 0,083 : 0,0005.

19. Oblicz: *a)* 2 *m* 7 *cm* : 0,3; 3 *km* 240 *m* : 1,8; 1 *m* 2 *dcm* 6 *cm*; 0,24;
b) 5 *q* 67 *kg* : 2,1; 4 *t* 5 *q* 76 *kg* : 0,11; 7 *kg* : 0,056.
Zamień liczby mianowane na dziesiętne odpowiedniej jedności!

20. Przez jaką liczbę należy pomnożyć: *a)* 3,7; *b)* 75,6; *c)* 0,803; *d)* 0,00025, aby otrzymać *a)* 0,0037, *b)* 0,756; *c)* 80,3; *d)* 2,5?

21. Oblicz: *a)* 8,82 : $\frac{5}{6}$; 0,16 : $\frac{4}{5}$; 2,4 : $\frac{8}{7}$; 2,1 : $\frac{6}{5}$;
b) 19,23 : $\frac{51}{8}$; 10,152 : $3\frac{11}{12}$; 11,652 : $2\frac{1}{9}$;
c) 6,832 : $\frac{103}{12}$; 14,186 : $1\frac{5}{8}$; 9,085 : $4\frac{1}{6}$,

22. Przedstaw następujące ułamki: $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{8}{13}$, jako ilorazy i oblicz ich wartość do trzech miejsc znaczących.

23. Oblicz następujące ilorazy liczb przybliżonych:
a) 2,4 : 1,65; 0,41 : 1,25; 4,62 : 0,056;
b) 0,000485 : 0,021; 245,1 : 0,45; 2684 : 0,16.

Rozwiązanie: Np. $3{,}26 : 0{,}045 = 72{,}4\ldots$
W ilorazie liczb przybliżonych zachowujemy tyle miejsc znaczących, ile posiada liczba mająca najmniej cyfr znaczących. W naszym więc przykładzie zatrzymujemy w ilorazie dwa miejsca znaczące, gdyż dzielnik posiada 2 miejsca znaczące. Nie należy sądzić (podobnie jak w iloczynie), że błąd w wyniku jest mniejszy od 5 jednostek najniższego zachowanego miejsca.

Zmiany iloczynu i ilorazu

Zmiany iloczynu. Przypuśćmy, że iloczyn: $15 \times 17 \times \frac{2}{3}$ chcemy pomnożyć przez jakąś liczbę np. przez $2\frac{1}{2}$; zatem mamy obliczyć iloczyn: $2\frac{1}{2} \times (15\frac{1}{2} \times 17 \times \frac{2}{3})$.

Ponieważ w iloczynie możemy w dowolnym porządku działania wykonywać, więc $2\frac{1}{2} \times (15 \times 17 \times \frac{2}{3}) = (2\frac{1}{2} \times 15) \times 17 \times \frac{2}{3} = 15 \times (2\frac{1}{2} \times 17) \times \frac{2}{3} = 15 \times 17 \times (2\frac{1}{2} \times \frac{2}{3})$.

Zatem iloczyn mnożymy przez liczbę, mnożąc jeden czynnik (którykolwiek) przez tę liczbę.

Przypuśćmy, że iloczyn: $15 \times 17 \times \frac{2}{3}$ chcemy podzielić przez $2\frac{1}{2}$ t. j. $\frac{5}{2}$; mamy zatem obliczyć iloraz: $(15 \times 17 \times \frac{2}{3}) : \frac{5}{2}$.

Lecz $(15 \times 17 \times \frac{2}{3}) : \frac{5}{2} = (15 \times 17 \times \frac{2}{3}) \times \frac{2}{5} = (15 \times \frac{2}{5}) \times 17 \times \frac{2}{3}$.

Z uwagi na to, że: $15 \times \frac{2}{5} = 15 : \frac{5}{2}$, otrzymujemy:

$$(15 \times 17 \times \tfrac{2}{3}) : \tfrac{5}{2} = (15 : \tfrac{5}{2}) \times 17 \times \tfrac{2}{3}.$$

Podobnie postępując, otrzymujemy:

$$(15 \times 17 \times \tfrac{2}{3}) : \tfrac{5}{2} = 15 \times (17 : \tfrac{5}{2}) \times \tfrac{2}{3} = 15 \times 17 \times (\tfrac{2}{3} : \tfrac{5}{2}).$$

A więc iloczyn dzielimy przez liczbę, dzieląc jeden czynnik (którykolwiek) przez tę liczbę.

Uwaga. Z powyższego wynika, że jeżeli jakiś czynnik iloczynu pomnożymy (wzgl. podzielimy) przez jakąś liczbę, to przez to cały iloczyn pomnożymy (wzgl. podzielimy) przez tę liczbę.

Zmiany ilorazu. Przypuśćmy, że iloraz: $5 : 6$ mamy pomnożyć przez 2. A więc mamy obliczyć: $(5 : 6) \times 2$.

Zamieniając iloraz na ułamek, otrzymamy: $\frac{5}{6} \times 2 = \dfrac{5 \times 2}{6} = \dfrac{5}{6 : 2}$.

Zatem: $(5 : 6) \times 2 = (5 \times 2) : 6 = 5 : (6 : 2)$.

Widzimy stąd, że iloraz mnożymy przez liczbę, mnożąc dzielną lub dzieląc dzielnik przez tę liczbę.

To samo zachodzi dla liczb ułamkowych. Mamy np. iloraz $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$ pomnożyć przez $\frac{2}{7}$. Otrzymamy: $(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}) \cdot \frac{2}{7}$. Wykonując dzielenie w nawiasie, mamy: $\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{7} = (\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}) \times \frac{6}{5} = (\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}) : \frac{5}{6}$. A więc mnożymy iloraz, mnożąc dzielną.

Mamy również:

$$\tfrac{3}{4} \times \tfrac{6}{5} \times \tfrac{2}{7} = \tfrac{3}{4} \times \left(\frac{6 \times 2}{5 \times 7}\right) = \tfrac{3}{4} : \left(\frac{5 \times 7}{6 \times 2}\right) = \tfrac{3}{4} : (\tfrac{5}{6} \times \tfrac{7}{2}) = \tfrac{3}{4} : (\tfrac{5}{6} : \tfrac{7}{2}).$$

A więc mnożymy iloraz, dzieląc dzielnik.

Podobnie przekonywamy się, że iloraz dzielimy przez liczbę, dzieląc dzielną lub mnożąc dzielnik przez tę liczbę.

Np. Mamy obliczyć: $(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}) : \frac{7}{2}$. Wyrażenie powyższe wynosi: $(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}) \times \frac{2}{7}$. Mamy teraz iloraz pomnożyć przez liczbę, zatem możemy mnożyć dzielną lub dzielić dzielnik.

Otrzymamy więc albo: $(\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}) : \frac{5}{6}$ albo: $\frac{3}{4} : (\frac{5}{6} : \frac{2}{7})$.

Wyrażenia powyższe możemy również napisać w postaci:

$$(\tfrac{3}{4} : \tfrac{7}{2}) : \tfrac{5}{6} \quad \text{albo:} \quad \tfrac{3}{4} : (\tfrac{5}{6} \times \tfrac{7}{2}).$$

Pierwsze wyrażenie wskazuje, że iloraz dzielimy przez liczbę, dzieląc dzielną, drugie zaś, że iloraz dzielimy, mnożąc dzielnik.

Zadania

1. W iloczynie $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{9}$ powiększ jeden z czynników: *a)* 3 razy, *b)* 5 razy, *c)* 13 razy; ile razy powiększy się iloczyn? Sprawdź rachunkiem!
2. W iloczynie *a)* $\frac{4}{11} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{13}{15}$, *b)* 4,2 . 3,1 . 1,6 powiększ jeden czynnik 2 razy, inny 7 razy; ile razy powiększy się iloczyn? Sprawdź rachunkiem!
3. W iloczynie $\frac{4}{11} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{6}{17}$ powiększ jeden czynnik 3 razy, a drugi czynnik pomniejsz 5 razy; jak zmieni się iloczyn? Sprawdź rachunkiem!
4. W ilorazie $\frac{4}{7} : \frac{3}{11}$ powiększ dzielną *a)* 2 razy, *b)* 5 razy, *c)* $\frac{5}{9}$ razy; jak za każdym razem zmieni się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
5. W ilorazie $\frac{5}{13} : \frac{17}{21}$ powiększ dzielnik: *a)* 6 razy, *b)* $\frac{13}{3}$ razy, *c)* $\frac{9}{2}$ razy; jak za każdym razem zmieni się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
6. W ilorazie 4,2 : 0,8 powiększono dzielną 5 razy, dzielnik zaś zmniejszono 5 razy; jak zmienił się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
7. W ilorazie $\frac{7}{19} : \frac{23}{16}$ powiększono dzielną 5 razy, dzielnik zaś zmniejszono 8 razy; jak zmienił się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
8. Pomnóż w prosty sposób przez *a)* $\frac{2}{3}$, *b)* $\frac{4}{5}$, *c)* $\frac{7}{11}$ iloczyn: $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{11}{7}$! Np. $(\frac{5}{11} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{8}{19}) \cdot \frac{11}{5} = (\frac{5}{11} \cdot \frac{11}{5}) \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{8}{19} = \frac{4}{13} \cdot \frac{8}{19}$.
9. Pomnóż w prosty sposób przez *a)* $\frac{8}{3}$, *b)* $\frac{16}{5}$, *c)* $\frac{4}{9}$ iloczyn: 0,18 . 1,45. Np. $(2{,}1 \cdot 4{,}63) \cdot \frac{2}{3} = (2{,}1 \cdot \frac{2}{3}) \cdot 4{,}63 = 0{,}7 \cdot 4{,}63$.

10. Podziel w prosty sposób przez *a)* $\frac{9}{13}$, *b)* $\frac{7}{15}$, *c)* $\frac{10}{19}$ iloczyn: $\frac{10}{19} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{9}{13}$.
11. Podziel w prosty sposób przez *a)* $\frac{4}{3}$, *b)* $\frac{3}{5}$, *c)* $\frac{5}{2}$ iloczyn: 2,16 . 0,25.

Ćwiczenia

1. $\frac{5}{8}$ *kg* pewnego towaru kosztuje $\frac{5}{2}$ *zł*; ile kosztuje 1 *kg* tego towaru?
2. Ile kosztuje gram złota, jeśli $2\frac{1}{2}$ *g* złota kosztuje $14\frac{1}{2}$ *zł?*
3. Automobil przebiegł w $5\frac{1}{2}$ godziny 260 *km;* jaką drogę przebiegł w 1 godzinie?
4. Robotnik za $3\frac{1}{2}$ godziny pracy otrzymał $8\frac{3}{4}$ *zł;* ile płacono mu za 1 godzinę pracy?
5. $\frac{2}{5}$ sztuki sukna kosztuje 240 *zł;* ile kosztuje cała sztuka?
6. W ciągu $\frac{5}{6}$ godziny robotnik wykonał $\frac{2}{5}$ przyjętej pracy; w jakim czasie wykona całą pracę?
7. $\frac{3}{4}$ butelki octu kosztuje $\frac{6}{25}$ *zł;* ile kosztuje pełna butelka octu?
8. 12 *l* wina rozlano w butelki o pojemności $\frac{3}{4}$ *l;* ile butelek napełniono?
9. Ile razy odcinek $13\frac{1}{2}$ *m* jest dłuższy od odcinka $2\frac{1}{4}$ *m*?
10. Kilogram cukru kosztuje $1\frac{1}{2}$ *zł;* ile *kg* cukru otrzymamy za $6\frac{1}{8}$ *zł?*
11. Zegar przyśpiesza dziennie o $2\frac{2}{9}$ minuty; po ilu dniach przyśpieszy godzinę?
12. Ile kamizelek można uszyć ze sztuki 6 *m* sukna, jeśli na jedną kamizelkę potrzeba $\frac{3}{5}$ *m* sukna?
13. Metr ma około $1\frac{3}{4}$ łokcia; ile to jest metrów $4\frac{1}{5}$ łokcia?
14. Obwód koła u wozu wynosi $\frac{22}{7}$ *m;* ile razy koło obróci się na drodze o długości $97\frac{3}{7}$ *m?*
15. Śruba wkręca się o $\frac{3}{4}$ *mm* za jednym obrotem; ile razy trzeba śrubę obrócić, aby wkręciła się o $3\frac{3}{4}$ *mm?*
16. Ogrodzenie ogrodu w kształcie prostokąta, którego jeden bok wynosi 58 *m*, kosztowało 988 *zł*, przyczem za 1 *m* ogrodzenia płacono 4,75 *zł*. Jak długi jest drugi bok?
17. Oblicz bok kwadratu, którego obwód wynosi: *a)* $21\frac{3}{4}$ *cm*, *b)* 15,48 *dcm*, *c)* $18\frac{1}{16}$ *km!*
18. Obwód kwadratu równa się obwodowi prostokąta o wymiarach 4,5 *m* i 6 *m*. Oblicz bok tego kwadratu! Rysunek w skali 1 : 100!
19. Oblicz obwód prostokąta o wymiarach 4 *km* i 5 *km*, a następnie obwody tych prostokątów, które przedstawiają jego plan w skali 1 : 10, 1 : 25, 1 : 50, 1 : 200, 1 : 500, 1 : 1000. Porównaj te obwody z obwodem danego prostokąta! Co zauważysz?

20. Pole w kształcie kwadratu można obejść w 1,7 minutach, przyjmując, że idzie się z prędkością 4,5 *km* na godzinę. Oblicz długość boku tego kwadratu!
21. Oblicz promień koła, którego obwód wynosi: *a)* 18,84 *cm*, *b)* 5 *dcm*, *c)* $2\frac{1}{8}$ *m*!
22. Obwód wielkiego koła u wozu wynosi 3 *m*. Gdy wóz porusza się, mniejsze koło wykonuje 4 obroty, a większe równocześnie 3 obroty: *a)* jaki jest obwód koła mniejszego? *b)* jaki jest jego promień?
23. Jaka jest wysokość prostokąta, w którym podstawa równa się; *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 4,5 *dcm*, *c)* $4\frac{1}{5}$ *m*, *d)* $\frac{7}{8}$ *m*, *e)* 2,4 *m* a którego pole wynosi: *a)* $17\frac{1}{2}$ cm^2, *b)* 14,4 dcm^2, *c)* $15\frac{9}{40}$ m^2, *d)* 0,7 m^2, *e)* 0,6 m^2?
24. Zamieniono pole w kształcie prostokąta o wymiarach 156 *m* 75 *m*, w cenie 3,75 *zł* za 1 m^2, na pole w cenie 2,5 *zł* za 1 m^2; ile pola na zamianie zyskano?
25. W ogrodzie w kształcie prostokąta, o polu 10,08 *a*, przeprowadzono równolegle do dłuższego boku drogę na 2,5 *m* szeroką, wskutek czego uprawna część ogrodu zmniejszyła się o 1,05 *a*; jakie były wymiary ogrodu?
26. Jak długi jest bok kwadratu, którego pole równa się polu prostokąta o wymiarach: *a)* 4 *cm* i 9 *cm*, *b)* 9 *cm* i 16 *cm*?
27. Dokoła ogrodu w kształcie prostokąta biegnie ścieżka 0,85 *m* szeroka. Pole tego placu (ogrodu wraz z ścieżką) wynosi 37,96 *a*, długość zaś 73 *m*; jakie jest pole tej ścieżki?
28. Ile wynosi podstawa równoległoboku, którego pole wynosi: *a)* $22\frac{1}{2}$ cm^2, *b)* 36,72 dcm^2, *c)* $43\frac{1}{8}$ m^2, wysokość zaś: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 5,4 *dcm*, *c)* $5\frac{3}{4}$ *m*?
29. Ile wynosi wysokość równoległoboku, którego pole równa się: *a)* $6\frac{3}{5}$ dcm^2, *b)* 115,5 m^2, *c)* $85\frac{1}{2}$ km^2, *d)* 2,8 cm^2, *e)* $\frac{5}{8}$ m^2, podstawa zaś: *a)* 3 *dcm*, *b)* 15,4 *m*, *c)* $11\frac{1}{4}$ *km*, *d)* 3,5 *cm*, *e)* 1,6 *m*?
30. Przez pole w kształcie równoległoboku, o podstawie 85,6 *m* i wysokości 62,5 *m*, poprowadzono równolegle do podstawy drogę na 2,6 *m* szeroką, resztę zaś sprzedano po 55 *zł* za ar; jaką kwotę ze sprzedaży uzyskano?
31. Jaka jest wysokość trójkąta, którego pole wynosi: *a)* 1 m^2, *b)* 1 *a*, *c)* 1 *ha*, podstawa zaś: *a)* $1\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 20,5 *m*, *c)* $175\frac{3}{4}$ *m*?
32. Pole w kształcie równoległoboku o podstawie 128 *m* i wysokości 85 *m* oceniono po 50 *zł* za 1 *a*. Pole to zamieniono na łąkę w kształcie trójkąta, licząc po 68 *zł* za jeden ar; jakie

jest pole tej łąki? Ile wynosi podstawa, jeśli wysokość ma 100 *m*?

33. Pole trapezu wynosi: *a)* $39\frac{1}{8}$ *cm*², *b)* 0,388 *ha*, *c)* 1,815 *a*, boki zaś równoległe mają: *a)* 4 *cm* i $11\frac{1}{4}$ *cm*, *b)* 112,4 *m* i 81,6 *m*, *c)* $14\frac{1}{8}$ *m* i $16\frac{1}{8}$ *m*; oblicz wysokość trapezu!
34. Pole trapezu równoramiennego równa się 18,72 *a*, przyczem jeden z boków równoległych jest 2 razy większy od drugiego, wysokość zaś wynosi 48 *m*; oblicz długości boków równoległych! Rysunek w skali 1 : 1000!
35. Pole w kształcie trapezu sprzedano za 5760 *zł*, licząc po 48 *zł* za 1 *a*; wiedząc, że wysokość trapezu wynosiła 80 *m*, jeden zaś z boków równoległych miał 135 *m*; oblicz długość drugiego boku równoległego!
36. Obwód koła wynosi: *a)* 8 *m*, *b)* 14,5 *dcm*, *c)* $4\frac{2}{5}$ *cm*; oblicz jego pole!
37. Pole koła o promieniu 3,4 *cm* równa się polu prostokąta o podstawie 8 *cm*; jaka jest wysokość tego prostokąta?
38. Prostopadłościan, którego podstawa jest kwadratem o boku: *a)* 5 *cm*, *b)* 3,5 *cm*, ma pole: *a)* 130 *cm*², *b)* 103,25 *cm*²; jak wysoki jest ten prostopadłościan?
39. Pole pobocznicy walca wynosi: *a)* 15,7 *dcm*², *b)* 36,424 *a*, *c)* 35,325 *m*², wysokość zaś walca: *a)* 2,5 *dcm*, *b)* 4,5 *m*, *c)* $3\frac{3}{4}$ *m*; jaki jest promień podstawy walca?
40. Powierzchnia walca wynosi: *a)* 125,6 *cm*², *b)* 357 *dcm*², *c)* 486,7 *m*²; promień zaś podstawy: *a)* 2 *cm*, *b)* $2\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)* 5 *m*. Jaka jest wysokość tego walca?
41. Pudełko w kształcie sześcianu ma krawędź: *a)* 16 *cm*, *b)* 27 *cm*; ile zmieści się w nim sześcianów o krawędzi: *a)* 2 *cm*, *b)* 3 *cm*?
42. Jaka jest wysokość prostopadłościanu, którego objętość wynosi: *a)* 140 *cm*³, *b)* 33,12 *dcm*³, *c)* $81\frac{13}{16}$ *m*³, a którego podstawa ma: *a)* 40 *cm*², *b)* 14,4 *dcm*², *c)* $19\frac{1}{4}$ *m*²?
43. Jak wysoką powinna być sala o długości 9 *m* i szerokości $4\frac{1}{2}$ *m*, jeśli ma pomieścić 48 uczniów, przyczem liczymy po 4 *m*³ powietrza na 1 osobę?
44. Kostka cukru ma wymiary 22 *mm*, 24 *mm*, 8 *mm*; oblicz ile kostek cukru przypada na 1 *kg*, wiedząc, że 1 *cm*³ cukru waży 1,6 *g*. Jaką objętość zajmuje 5 *kg* cukru?
45. Lampa gazowa zużywa 24 *m*³ powietrza na godzinę, lampa naftowa 20 *m*³, świeca 6 *m*³, wreszcie człowiek przez oddychanie 7 *m*³. Pokój ma 4,8 *m* długości, 3,8 *m* szerokości a 3,4 *m* wysokości; *a)* w jakim czasie 5 osób zużyłoby całko-

wicie powietrze w tym pokoju, gdyby nie było dopływu świeżego powietrza? *b)* w jakim czasie powietrze będzie zużyte, jeśli nadto pali się lampa gazowa lub naftowa, albo też świeca?

46. Prostopadłościan z miedzi, wrzucony do wody, stracił pozornie 235 *g* na swym ciężarze. Jaka była długość tego prostopadłościanu, jeśli jego podstawą był kwadrat o boku 5 *cm*? Ile waży 1 cm^3 miedzi, jeśli ten prostopadłościan ważył w wodzie 1863,55 *g*?

47. Objętość graniastosłupa prostego wynosi: *a)* 1080 cm^3, *b)* 25 dcm^3, *c)* $871\frac{7}{8}$ m^3, podstawa zaś): *a)* 135 cm^2, *b)* 6,25 dcm^2, *c)* 5625 m^2; jaka jest wysokość tego graniastosłupa?

48. Objętość graniastosłupa prostego wynosi: *a)* 14,7 cm^3, *b)* $261\frac{27}{32}$ dcm^3, *c)* 162,4 m^3, wysokość zaś: *a)* 7,5 *cm*, *b)* $9\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)* 8,5 *m*; jakie jest pole podstawy tego graniastosłupa?

49. Jaka jest wysokość walca, którego objętość wynosi: *a)* 60,68 cm^3, *b)* 81,4 dcm^3, *c)* 211,6 m^3, a którego promień podstawy ma: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 2,4 *dcm*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *m*?

50. Do naczynia kształtu walca, w którem podstawa ma promień 6 *cm*, wlano wody, a następnie wrzucono prostopadłościan o wymiarach 5 *cm*, 6,24 *cm*, 8 *cm*; o ile wskutek tego podniósł się poziom wody w tem naczyniu?

51. Tunel prowadzący przez górę św. Gotarda w Alpach zbudowano w czasie od 4 lipca 1872 r. do 5 lutego 1880 r. Tunel ma 14,9 *km* długości, a koszty jego budowy wyniosły 102,8 miljonów *zł*. Oblicz: *a)* koszty budowy 1 *m* tunelu, *b)* ile przeciętnie czasu potrzeba było, aby wybudować 1 *m* tunelu, *c)* ile czasu potrzebuje pociąg, aby przejechać przez tunel z prędkością 60 *km* na godz.?

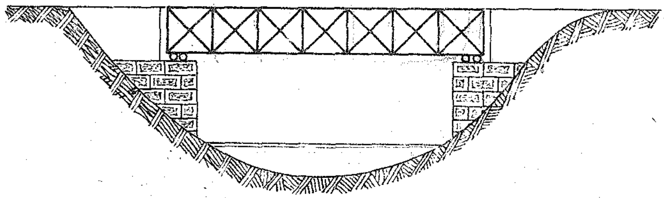
52. Najszybszy pociąg w Europie jedzie na przestrzeni Paryż-Calais (298 *km*) z prędkością 93 *km* na 1 godz.; oblicz: *a)* ile *m* na 1 sek. przebiega ten pociąg, *b)* czas jazdy z Paryża do Calais.

53. Średnia prędkość parowca wynosi 23 mil morskicn na godz. (1 mila morska = 1,852 *km*); jak długo jedzie parowiec z Gdańska do New Yorku (6800 *km*)?

54. Odległość bieguna od równika mierzona na południku wynosi 90^0, albo 10 000 *km*. Z Warszawy, której szerokość geograficzna wynosi $52^0 13' 5''$, wystartował lotnik, lecąc wzdłuż południka przeciętnie z prędkoćcią 180 *km* na godz.; po jakim czasie przyleci nad biegun północny?

55. Przez rzeczkę o szerokości 16 *m* poprowadzono most o rozpiętości 21 *m*. Belka kwadratowa żelaznej konstrukcji (kratow-

nica) składa się (rys. 8) z 7 kwadratów o boku 3 *m*; *a)* oblicz koszty budowy tego mostu, jeśli 1 *m* bieżący kratownicy kosztuje 1300 *zł*, a $\frac{2}{3}$ kosztów budowy całego mostu przypada



Rys. 8.

na obie kratownice; *b)* oblicz ciężar obu kratownic, jeśli ciężar 1 *m* bieżącego kratownicy wynosi 2,75 *t*; *c)* podaj rysunek w skali 1 : 200 kratownicy o rozpiętości 27 *m*, jeśli kratownica składa się z 9 kwadratów.

Obliczanie wyrażeń

Porządek wykonywania działań

Jeżeli mamy obliczyć wartość jakiegoś wyrażenia, jak np.: $8 + 4 . 5$, to nie jest rzeczą obojętną, w jakim porządku będziemy wykonywali naznaczone działania. Jeżeli najpierw wykonamy dodawanie, a potem mnożenie, to rachunek przedstawi się następująco: $8 + 4 = 12$, $12 . 5 = 60$.

Wykonajmy teraz najpierw mnożenie, a potem dodawanie, a więc: $4 . 5 = 20$, $8 + 20 = 28$.

Widzimy, że tym razem otrzymaliśmy inny wynik, niż poprzednio. Potrzebne więc są reguły, w jakim porządku należy wykonywać działania.

Reguły te są następujące:

I. Jeżeli w wyrażeniu występują tylko znaki dodawania i odejmowania, to wartość takiego wyrażenia obliczamy, wykonując pokolei naznaczone działania.

Np. $16 - 5 - 3 + 7 - 2$.

Obliczamy: $16 - 5 = 11$, $11 - 3 = 8$, $8 + 7 = 15$, $15 - 2 = 13$.

A więc wartość naszego wyrażenia jest 13.

Zadania

1. Oblicz wartość następujących wyrażeń:
a) $16 - 5 + 3 - 1$, *b)* $8 - 2 - 3 + 5 - 4$, *c)* $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{16}$.
d) $5 - 4 - 1 + 3$, *e)* $7 - 1 + 8 - 8$, *f)* $2 - 1{,}7 + \frac{2}{5} - \frac{1}{8}$.

II. Jeżeli w wyrażeniu (oprócz dodawania i odejmowania) występuje mnożenie, to wykonujemy najpierw wszystkie naznaczone mnożenia, a potem pokolei dodawania i odejmowania.

Np. *a)* $3 + 4 \cdot 5$.

Obliczamy: $4 \cdot 5 = 20$; otrzymujemy więc wyrażenie $3 + 20$; wartością jego jest 23.

b) $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4$.

Obliczamy: $3 \cdot 5 = 15$, $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, $5 \cdot 4 = 20$.

Wstawiając zamiast iloczynów ich wartości, otrzymujemy wyrażenie: $15 - 12 + 20$.

Po obliczeniu otrzymujemy jako wartość tego wyrażenia: 23.

c) $10 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 10 - 6 + 10 = 14$.

Zadania

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $3 \cdot 4 - 2$; $8 + 2 \cdot 3$; $\frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; $2{,}1 + \frac{1}{3} \cdot 4$;
b) $3{,}5 - 2{,}1 \cdot 1{,}3$; $\frac{3}{4} - 0{,}3 \cdot \frac{1}{8}$; $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4}$;
c) $30 - 2 \cdot 3 \cdot 4$; $2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5$; $3{,}6 - 2 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}4$;
d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$; $4{,}5 - 1{,}2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$.

2. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$; $4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 3$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$;
b) $4 \cdot 7 - 3 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot \frac{1}{2}$; $18 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7$; $4 \cdot 2 - 3 + 2{,}5 \cdot 2$;
c) $5 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 6 - 7 \cdot 2$; $20 + 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 + 3$;
d) $80 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 - 8$; $\frac{15}{2} - \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{8} \cdot 5 + \frac{3}{8}$;
e) $40 \cdot 2{,}3 + 18 - 4{,}7 \cdot 5 - 1{,}2 \cdot 3$; $\frac{11}{3} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + 5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

III. Jeżeli w wyrażeniu występują także dzielenia, to wykonuje się najpierw mnożenia, potem dzielenia, a wkońcu pokolei dodawania i odejmowania.

Np. *a)* $4 - 15 : 5$ obliczamy: $15 : 5 = 3$, $4 - 3 = 1$;
b) $2 \cdot 5 - 8 : 4 + 8 \cdot \frac{5}{2} = 10 - 2 + 20 = 28$.

Zadania

1. Oblicz wartość następujących wyrażeń:

a) $8 : 4 - 2$; $6 + 12 : 3$; $8 - 5 + 4 : 2$; $2 \cdot \frac{3}{2} - 6 : 3$;
b) $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 : 2$; $4 \cdot 6 : 12 + 24 : 3$; $2 \cdot 6 \cdot 8 : 3 - 3 \cdot 10 \cdot 2 : 5$;
c) $2 \cdot 3 + 8 : 4 - 2 \cdot 10 : 5$; $5 \cdot 8 : 4 + 4 \cdot 12 : 3 - 2 \cdot 10 : 5$;
d) $5 - 4 : 2 + 3 \cdot 2 : 3 + 2 \cdot 4$; $5 \cdot 3 - 4 \cdot 5 : 8 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{10} - 3$.

2. Oblicz wartość następujących wyrażeń:

a) $100 - 8 - 2 \cdot 16 : 4 + 5 \cdot 3$; $8 \cdot 5 \cdot 6 : 10 - 3 \cdot 6 + \frac{5}{2} - 2$;

b) $\frac{8}{3} + 2 . 4 : 6 + 2 . \frac{7}{3}$; $15 - 7 : 2 - 2 . \frac{5}{8} + 4 . 7$;
c) $\frac{3}{2} . \frac{2}{5} + 2 . \frac{3}{4} : 2 - \frac{1}{8} + 4$; $5 + 2 . \frac{4}{3} . 5 + 7 : 2 - 8 : 3$;
d) $\frac{3}{4} + \frac{5}{2} . 6 : 2 - \frac{1}{6} . 3 : 5 + 7 . 2 - 4$; $0{,}8 : 2 + \frac{7}{2} - 2 + \frac{1}{3} . \frac{6}{2} : 2$.

IV. Jeżeli w wyrażeniu występuje nadto potęgowanie, to najpierw obliczamy potęgi, następnie wykonujemy mnożenia, potem dzielenia, a wreszcie pokolei dodawania i odejmowania.

Np. *a)* $8 + 3^2 = 8 + 9 = 17$;
b) $4 + 2 . 5^2 = 4 + 2 . 25 = 4 + 50 = 54$;
c) $2 . 3^2 - 3 . 5 + 4^2 . 3 = 2 . 9 - 3 . 5 + 16 . 3 = 18 - 15 + 48 = 51$;
d) $18 : 3^2 + 3^2 . 2 = 18 : 9 + 9 . 2 = 2 + 18 = 20$.

Przy obliczaniu więc wartości wyrażeń należy pamiętać następującą kolejność działań:

I. Potęgowanie.
II. Mnożenie.
III. Dzielenie.
IV. Dodawanie i odejmowanie pokolei.

Gdybyśmy inaczej obliczali wartości wyrażeń, to moglibyśmy otrzymać wyniki błędne.

Uwaga: Wartości ułamków jak np. $\frac{3 + 4 . 5}{2 + 3 . 5}$ obliczamy, obliczając osobno wartość wyrażenia, które jest licznikiem i osobno wartość wyrażenia, które jest mianownikiem, a następnie dzieląc wyniki przez siebie.

Liczymy zatem:

$$3 + 4 . 5 = 3 + 20 = 23; \quad 2 + 3 . 5 = 2 + 15 = 17,$$

a więc
$$\frac{3 + 4 . 5}{2 + 3 . 5} = \frac{23}{17}.$$

Jeżeli w wyrażeniach występują takie ułamki, to najpierw obliczamy wartości tych ułamków, a następnie wykonujemy działania wedle reguły działań.

Np. $4 . 5 + \frac{1 + 5 . 7}{14 - 2} = 4 . 5 + \frac{1 + 35}{12} = 4 . 5 + \frac{36}{12} = 23$.

Zadania.

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $5^2 + 7$, $16 - 3^2$, $6^2 - 5$, $1 + 2^3$, $4^3 - 18$;
b) $5 + 3 . 2^2$, $5 . 2^3 - 8$, $30 - 4 . 2^2$, $75 - 2 . 3^3$;
c) $2^2 . 3 + 4 . 5 + 8 . 3^2$, $16 - 2 . 3 + 5 . 2^3$;
d) $2 . 7 - \frac{6}{3} + 4^2 . 7$, $3^3 . 5 - 2 . 4^2 + 5 . 7 + \frac{6}{2}$;

e) $\frac{16}{2^2}+4.7$, $\frac{15}{3}+2.4+\frac{5^2}{3}$, $7^2.5+\frac{4^2}{2}-4.6$;

f) $\frac{125}{5^2}-8.\frac{3}{5}+3^2.\frac{40}{5}+3$,

$\frac{3^2}{2^2}.8-2.\frac{5}{2}+3^2.2^2.\frac{7}{6}-2.5+4$.

2. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $100-3.\frac{4^2}{12}+8.6$, $45+\frac{3}{4^2}-3.2^2+5.7$;

b) $40.2^2+2.10-\frac{4}{5^2}-\frac{3^2}{2}$, $\frac{12}{4}+2^3.5-2.5-\frac{2^4}{4}$;

c) $5.2.10-\frac{2^3}{4}-\frac{27}{3^2}+5.4$, $3.\frac{8}{2^2}+4.5+30.2^2-3.7$;

d) $2.8.\frac{14}{2^4}+5-7.2+\frac{24}{3}$, $18+3.9.\frac{5}{3^3}+\frac{7}{2}-\frac{2^4}{3}$.

3. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $3+\frac{5-1}{8+3}$, $2+\frac{5+4}{8-3}$, $16+\frac{2.3+5}{4-1}$, $20-\frac{7+4.5}{9+6.8}$;

b) $5+\frac{4+5.7}{8.3+2}$, $\frac{6.9-8}{40-2.3}+11$, $12-\frac{4.11-3.7}{8.15-6.7}$;

c) $\frac{4+2.5}{8-3}.2$, $3.\frac{7.8-2.3}{5.6-14}+1$, $18-2.\frac{3.4-2.5}{8-2.3}$.

Nawiasy

Obliczanie wartości wyrażeń, zawartych w nawiasach.

Jeżeli chcemy, aby działania wykonano w innym porządku, niż podaje reguła, wówczas używamy nawiasów.

Zwykle używa się następujących nawiasów:

( ) [ ] { }

Powyższe rodzaje nawiasów mogą być rozmaitej wielkości.

Nauczymy się teraz obliczać wartości wyrażeń, w których występują nawiasy. Rozróżniamy dwa przypadki.

1. W wyrażeniu: $3.(4+2)+7.(5-3)$ występują nawiasy, które nie zawierają wewnątrz innych nawiasów. Obliczamy wartości takich wyrażeń, obliczając najpierw wartości wyrażeń zawartych w nawiasach (opuszczając nawiasy), a następnie wykonując działania wedle reguły działań.

A więc: $3.(4+2)+7.(5-3)=3.6+7.2=18+14=32$.

Podobnie: $(5+3) \cdot (5-3) + 4 \cdot (\frac{8}{2} + 1) = 8 \cdot 2 + 4 \cdot (4+1) =$
$= 8 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 16 + 20 = 36.$

2. W wyrażeniu: $5 \cdot (10-7) + [3 \cdot 4 + 5 \cdot (8-2)]$
nawias graniasty zawiera nawias okrągły. Wartości takich wyrażeń (w których występują nawiasy, zawierające w swojem wnętrzu inne nawiasy) obliczamy, obliczając najpierw wartości wyrażeń zawartych w tych nawiasach, w których wnętrzu niema już innych nawiasów.

Obliczymy więc najpierw wartości wyrażeń, zawartych w nawiasach: $(10-7)$ i $(8-2)$.

Otrzymamy zatem: $5 \cdot 3 + [3 \cdot 4 + 5 \cdot 6]$.

Wartość tego wyrażenia obliczamy, jak w przypadku 1.

A więc: $5 \cdot 3 + [3 \cdot 4 + 5 \cdot 6] = 5 \cdot 3 + [12 + 30] = 5 \cdot 3 + 42 =$
$= 15 + 42 = 57.$

Podobnie: $11 + \{[8 + (6-2)] - 5\} = 11 + \{[8+4] - 5\} =$
$= 11 + \{12 - 5\} = 11 + 7 = 18.$

U w a g a. Jeżeli chcemy w wyrażeniu zastąpić znak kreski ułamkowej znakiem dwóch kropek, należy uważać, aby porządek działań w myśl przyjętych reguł był zachowany, co zawsze da się zrobić przez użycie nawiasów.

Np. $\frac{3+7}{4 \cdot 5} = (3+7) : (4 \cdot 5)$; $2 + \frac{5+6}{8} = 2 + [(5+6) : 8]$.

Zadania

1. Oblicz wartości wyrażeń:
   a) $(2+3) \cdot (4+7)$, $(9-2) \cdot (8+3)$, $(10-3) \cdot (7-4)$;
   b) $(\frac{1}{2}+1) \cdot (\frac{2}{3}+2)$, $(\frac{11}{2}-1) \cdot (2+\frac{1}{2})$, $(3\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) \cdot (6-\frac{2}{5})$;
   c) $(3+1) \cdot (5-2) + 2 \cdot (5 \cdot 7)$, $(8-3) \cdot (6+7) - 3 \cdot (8:4)$;
   d) $5 \cdot (8 \cdot 6) - (2+1) \cdot (7-5)$, $10 \cdot (12:4) - (4-1) \cdot (5-3)$.
2. Oblicz wartości wyrażeń:
   a) $3 \cdot 2 + [5 + 4 \cdot (7+1)]$, $2 \cdot (16-4) + [20 - 2 \cdot (3-1)]$;
   b) $35 \cdot (4-1) - [8 - (4+1)]$, $15 \cdot (3+7) - [11 - (5-1)]$;
   c) $[17 + (3+1) \cdot 2] \cdot 4$, $[15 - (7-5)] \cdot 2 + 2 \cdot (4-1)$;
   d) $3 \cdot (4 \cdot 2) - [(2+4) : 3]$, $[(7+1) : 2] : 3$.
3. Oblicz wartości wyrażeń:
   a) $18 - \{[10 - (4+1)] : 2 + 6\}$, $\{[20 - 8 - 6)] \cdot 3 - 5\} \cdot 4$;
   b) $\{[7 \cdot (5:2)] \cdot 4 - 1\} \cdot 2$, $6 \cdot (8-1) - \{[3 \cdot (5-1) + 1] \cdot 2 - 1\}$;
   c) $\{20 - [15 - (8+4)]\} : 5$, $\{[(2+1) \cdot 3 + 4] \cdot 5\} : 3$;
   d) $[(4 \cdot 7) : 3 - 2] \cdot 5 - \{[14 - (7+5)] \cdot 3 - 1\}$.

4. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $\frac{3+(4-1).5}{18-(6-4).3}$; b) $\frac{[4+(7+2).3].4}{46-[(18-5).3-1]}$;

c) $\frac{[17-(4-1)].2+5}{12-[(0,2+0,8).3-1]}$; d) $\frac{11-\{[(3+1)-7].2+1\}}{[(6-4).5+1].3-(2.5)}$;

e) $\frac{\{30-[18-(2+5)]\}.4}{[18+(6+1).3].15}$; f) $\frac{[8-(3-1)].2-[5-(3+1)]}{5.[8-(2+5)]-[(4+1).2-8]}$.

5. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $5+\frac{3.7+1}{5.6-2}-(4-1)$, $\frac{3+(4-1).5}{2.5-1}+18-[9-(5+1]$;

b) $7:3+\frac{4-(3-1)}{5-(4-2)}$, $20-\left[\frac{(5+1).4-2}{(7-2).3+5}+2\right]$;

c) $16+\frac{15-[4-(3-1)]}{4+(6-2).3}-3$,

$\frac{[(8-3).4-2].5-20}{[15-(4+1)].2+1}-[(6-5):7)]$.

Używanie nawiasów

W poprzednim ustępie nauczyliśmy się obliczać wartości wyrażeń, w których występują nawiasy. Zajmiemy się teraz zadaniem: Ktoś poda nam liczby i działania, jakie na tych liczbach mamy wykonać; jak zapisać to przy pomocy nawiasów?

Przykład 1. Od 8 odejmij sumę liczb 2 i 3.

Rozwiązanie: Piszemy sumę liczb 2 i 3 w nawiasie: $(2+3)$, a następnie różnicę: $8-(2+3)$.

Przykład 2. Sumę liczb 4 i 5 pomnóż przez 7.

Rozwiązanie: Piszemy sumę liczb 4 i 5 w nawiasie: $(4+5)$, a następnie iloczyn: $(4+5).7$.

Przykład 3. Sumę liczb 8 i 5 pomnóż przez różnicę liczb 7 i 4.

Rozwiązanie: Piszemy sumę liczb 8 i 5 w nawiasie: $(8+5)$, następnie różnicę liczb 7 i 4 w nawiasie: $(7-4)$, wreszcie iloczyn: $(8+5).(7-4)$.

Przykład 4. Sumę liczb 2 i $3\frac{1}{4}$ odejmij od 8, a otrzymany wynik pomnóż przez 5.

Rozwiązanie: Piszemy najpierw: $(2+3\frac{1}{4})$, a następnie: $[8-(2+3\frac{1}{4})]$, wreszcie: $[8-(2+3\frac{1}{4})].5$.

Uwaga. Do liczby 2 dodaj iloczyn liczb 3 i 4.

Rozwiązanie: Piszemy najpierw iloczyn: (3.4), a następnie sumę: $2+(3.4)$.

Wyrażenie to napiszemy prościej, opuszczając nawias: $2+3.4$. Wiemy bowiem, że wartość wyrażenia oblicza się, wykonując najpierw mnożenia, a potem dodawania. W układaniu wyrażeń lepiej jest jednak na początku dawać i zbyteczne nawiasy. Zbyteczny bowiem nawias nie szkodzi, brak nawiasu potrzebnego jest natomiast błędem i zmienia wartość wyrażenia.

Zadania

1. W następujących zadaniach zaznacz nawiasami porządek, w którym działania masz wykonać i oblicz wartości otrzymanych wyrażeń:
   a) do liczby 5 dodać sumę liczb 3 i 4;
   b) od liczby 8 odjąć sumę liczb 2 i 3;
   c) do liczby 6 dodać różnicę liczb 7 i 2;
   d) od liczby 10 odjąć różnicę liczb 6 i 4.
2. *a)* sumę liczb 3 i 7 pomnóż przez 4;
   b) pomnóż 5 przez sumę liczb 10 i 4;
   c) utwórz iloczyn sumy liczb 8 i 7 przez liczbę 9;
   d) różnicę liczb 10 i 8 pomnóż przez 4;
   e) podziel sumę liczb 11 i 4 przez liczbę 3;
   f) utwórz iloraz różnicy liczb 20 i 8 przez 5.
3. *a)* sumę liczb 2 i 3 pomnóż przez sumę liczb 4 i 1;
   b) sumę liczb 8 i 11 pomnóż przez różnicę liczb 10 i 3;
   c) różnicę liczb 6 i 2 pomnóż przez sumę liczb 2 i 7;
   d) utwórz iloczyn różnicy liczb 18 i 12 przez różnicę liczb 10 i 4.
4. *a)* do 8 dodaj sumę liczb 3 i 11, a wynik pomnóż przez 2;
   b) do 14 dodaj różnicę liczb 7 i 1, a wynik pomnóż przez 4;
   c) od 18 odejmij sumę liczb 3 i 5, a wynik pomnóż przez 11;
   d) od 24 odejmij różnicę liczb 13 i 9, a wynik podziel przez 5.
5. Jaką liczbę otrzymasz, jeśli do 5 dodasz 2, wynik pomnożysz przez 3 i wreszcie dodasz 6?
6. Jaki wynik otrzymasz, jeśli od 7 odejmiesz 4, wynik podzielisz przez 3 i wreszcie odejmiesz 1?
7. Dodaj do iloczynu liczby 5 przez sumę liczb 7 i 9 iloczyn liczby 4 przez różnicę liczb 10 i 8.
8. Do iloczynu liczby 7 przez sumę liczb 4 i 8 dodaj 9 i otrzymany wynik pomnóż przez 5.
9. Do ilorazu liczby 10 przez różnicę liczb 8 i 6 dodaj 4 i wynik pomnóż przez 11.
10. Pomnóż sumę liczb 5 i 7 przez różnicę liczb 10 i 6, do wyniku dodaj 3, a następnie wszystko podziel przez 4.

11. Od iloczynu sumy liczb 8 i 2 przez ich różnicę odejmij 5 i wynik pomnóż przez sumę liczb 2 i 3.
12. Do iloczynu sumy liczb 3 i 1 przez 2 dodaj 1, wynik pomnóż przez 4, dodaj znowu 1 i wynik pomnóż przez 5.
13. Od ilorazu sumy liczb 8 i 3 przez 5 odejmij 1, wynik pomnóż przez 2, a następnie podziel przez 3.
14. Od iloczynu różnicy liczb 8 i 5 przez 2 odejmij 1, wynik pomnóż przez 3, odejmij znowu 1 i wynik pomnóż przez 4.
15. Obież jakąś liczbę, np. 17, dodaj do niej 11, wynik pomnóż przez 2 i od tego iloczynu odejmij 20. To, co otrzymasz pomnóż przez 5, następnie odejmij iloczyn obranej liczby (17) przez 10, a na wynik otrzymasz 10.
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
16. Obierz jakąś liczbę, np. 21, pomnóż ją przez 15, do wyniku dodaj 60 i to, co otrzymasz podziel przez 3. Pomnóż teraz obraną liczbę (21) przez 5 i wynik ten odejmij od poprzednio otrzymanej liczby. Ostateczny wynik będzie 20.
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
17. Obierz dowolną liczbę, np. 14, podziel ją przez 2, do wyniku dodaj 7, a to, co otrzymasz, pomnóż przez 8, od wyniku odejmij 12, następnie podziel przez 4 i znowu odejmij 11. Otrzymasz na wynik obraną liczbę (14).
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
18. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 18, pomnóż ją przez 2, do wyniku dodaj 1, to, co otrzymasz pomnóż przez 5 i dodaj jeszcze 3; jeśli w wyniku odrzucisz cyfrę jednostek, otrzymasz obraną liczbę (18).
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
19. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 23, dodaj do niej 2, wynik pomnóż przez 3, a od tego, co otrzymasz, odejmij 4, pomnóż następnie przez 3 i dodaj wkońcu obraną liczbę (23); jeśli w wyniku odrzucisz cyfrę jednostek, otrzymasz obraną liczbę (23). Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
20. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 19, pomnóż ją przez 5, do wyniku dodaj 2, to, co otrzymasz, pomnóż przez 4, do wyniku dodaj 3, następnie pomnóż przez 5 i wkońcu dodaj 7; jeśli w wyniku odrzucisz cyfry jednostek i dziesiątek, otrzymasz obraną liczbę (19).
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
21. Pamiętając o porządku, w jakim działania należy wykonywać, opuść w następujących wyrażeniach zbyteczne nawiasy:

a) $(2+3)+5$, $[(4-1)+3]+1$, $(5.4)+1$, $6+(4.3)$;
b) $1+(6:2)$, $(2.5)+(7-3).2$, $3.(2^2)+4$, $(3.2)^2+4$;
c) $(7-4)+(3+2)$, $(6+8)-(4+5)$, $2+(4.6):3$, $[2+(4.6)]:3$;
d) $\{[(5+2)+3]+1\}+2$, $(13+5)-\{[(8-3)-(4-2)]+6\}$, $\{[(4.6)+8]:8\}.3-1$.

Plan zadania

Rozwiązując jakieś zadanie, nie zawsze wykonujemy odrazu działania konieczne do rozwiązania; czasami naznaczamy je tylko przy pomocy nawiasów, czyli tworzymy t. zw. plan zadania.

Przykład 1. Z dwóch miast wyszli naprzeciw siebie równocześnie dwaj posłańcy. Jeden szedł z prędkością 6 *km* na godz., drugi z prędkością 7 *km* na godz.; spotkali się po 4 godzinach. Jaka jest odległość tych miast od siebie?

Rozwiązanie: Pierwszy posłaniec przeszedł w 4 godzinach 4.6 *km*, drugi w tym samym czasie 4.7 *km*. Odległość więc obu miast wynosi w *km*: $4.6+4.7$.

Otrzymaliśmy więc plan zadania, wskazujący, jakie działania należy wykonać.

Przykład 2. Ojciec zarabiał dziennie 12 *zł*, syn 8 *zł*, na utrzymanie zaś domu wydawano dziennie 10 *zł*; ile zaoszczędzono w ciągu 6 dni?

Rozwiązanie: Dziennie zaoszczędzano *zł*: $(12+8-10)$, zatem w ciągu 6 dni zaoszczędzono *zł*: $6.(12+8-10)$.

Zadania

1. Balon wzniósł się na wysokość 3600 *m*, potem opadł o 350 *m*, następnie wzniósł się o 450 *m* i znowu opadł o 640 *m*: na jakiej wysokości znajduje się balon?
2. Dwaj wspólnicy rozdzielili zysk 8540 *zł* w ten sposób, że pierwszy otrzymał 4935 *zł*, a drugi resztę; o ile więcej otrzymał pierwszy wspólnik, niż drugi?
3. Kupiec sprzedał w 3 dniach $163\frac{1}{2}$ *kg* herbaty. W pierwszym dniu sprzedał $57\frac{3}{4}$ *kg*, w drugim o $3\frac{1}{2}$ *kg* mniej, a w trzecim resztę; o ile więcej *kg* sprzedał w pierwszym dniu, niż w trzecim?
4. Właściciel trzech kamienic miał z jednej kamienicy dochód roczny 5600 *zł*, z drugiej o 1200 *zł* więcej, a z trzeciej o 4300 *zł*

mniej niż z obu pierwszych razem; ile wynosił jego roczny dochód z tych trzech kamienic?

5. Kwotę 8316 *zł* rozdzielono między 4 osoby w ten sposób, że pierwsza otrzymała $\frac{2}{7}$ tej kwoty, druga $\frac{3}{11}$, trzecia $\frac{8}{27}$, a czwarta resztę; ile otrzymała czwarta osoba?
6. Kupiec miał 600 *zł* gotówki i sprzedał 35 *kg* towaru po 8 *zł* za 1 *kg*. Drugi zaś kupiec miał 400 *zł* gotówki i sprzedał jednego towaru 18 *kg* po 5 *zł* za 1 *kg*, a drugiego 20 *kg* po 6 *zł* za 1 *kg*; o ile pierwszy kupiec miał tego dnia więcej gotówki, niż drugi?
7. Ktoś posiadał narożną parcelę w kształcie prostokąta o wymiarach 26 *m* długości i 19 *m* szerokości. Wskutek regulacji miasta stracił 3 *m* na długości i 2 *m* na szerokości. Ile stracił pieniędzy, jeśli mógł przedtem sprzedać tę parcelę po 1000 *zł* za 1 *ar*, a miasto zapłaciło mu za zabrany grunt po 600 *zł* za 1 *ar*?
8. Kantor wymiany kupił 1500 dolarów po 6 *zł* 15 *gr*. Z tego sprzedał 450 dol. po 6 *zł* 40 *gr*, potem 620 dol. po 6 *zł* 45 *gr*, a gdy wkońcu sprzedał resztę, zysk z całej transakcji wyniósł 268 *zł*; ile płacono mu za dolara, gdy sprzedawał resztę?
9. Do naczynia o pojemności 45 *l* rura dopływowa dostarcza $6\frac{1}{2}$ *l* wody w 1 minucie, rura zaś odpływowa odprowadza $2\frac{3}{4}$ *l* wody w 1 minucie; w jakim czasie napełni się to naczynie, jeśli obie rury będą równocześnie otwarte?
10. *a)* Z dwóch miast wyszły naprzeciw siebie dwa pociągi, jeden z prędkością 27 *km* na godzinę, drugi zaś z prędkością 45 *km* na godzinę. Po upływie $2\frac{1}{2}$ godziny pociągi te były odległe od siebie o 17 *km*. Jaka jest odległość obu miast?

Plan zadania: W ciągu 1 godziny pociągi zbliżyły się do siebie o $(27 + 45)$ kilometrów, a zatem po upływie $2\frac{1}{2}$ godziny zrobiły drogę $2\frac{1}{2} . (27 + 45)$ kilometrów. Ponieważ wówczas ich odległość wynosiła 17 *km*, więc odległość obu miast wynosiła: $2\frac{1}{2} . (27 + 45) + 17 = 197$ kilometrów.

b) Z Pilawy, odległej o 67 *km* od Warszawy, wyszedł pociąg towarowy w kierunku Lwowa, robiąc przeciętnie 35 *km* na godzinę, a w 2 godziny później w tymże kierunku pociąg pośpieszny z Warszawy, robiąc 60 *km* na godzinę. Ile czasu potrzebuje pociąg pośpieszny, aby dogonić pociąg towarowy?

Odp.: $(67 + 35 . 2) : (60 - 35)$ godzin.

c) Z dwóch miast odległych o 840 *km* wyszły naprzeciw siebie 2 pociągi. Jeden przebyłby całą drogę w 12 godzinach, drugi w 15 godzinach. Jaka będzie odległość między pociągami po upływie $4\frac{1}{2}$ godziny?

Odp.: $840 - (840 : 12 + 840 : 15) . 4\frac{1}{2}$ kilometrów.

d) Z Warszawy wyszedł do Skierniewic pociąg pospieszny, robiący 55 *km* na godzinę, a jednocześnie ze Skierniewic do Warszawy wyszedł pociąg, robiący 45 *km* na godzinę. Obliczyć, w jakiej odległości od Warszawy pociągi te spotkają się, jeśli odległość Skierniewic od Warszawy wynosi 60 *km*.

Odp.: $55 . [60 : (55 + 45)]$ kilometrów.

11. Kupiec otrzymał 3 paczki towaru: pierwsza ważyła 24,5 *kg*, druga o 2,4 *kg* mniej, a trzecia o 3,6 *kg* mniej, niż druga. Pierwsza paczka zawierała towar w cenie 15 *zł* za 1 *kg*, druga w cenie 10,5 *zł* za 1 *kg*, a trzecia w cenie 12,4 *zł* za 1 *kg*; ile kupiec zarobił, jeśli cały ten towar sprzedał za 980 *zł*?
12. Maszyna parowa, pracując przez 12 dni po 11 godzin dziennie, zużyła 840 *t* węgla. Wskutek ulepszenia konstrukcji maszyny zużyto w ciągu 36 godzin przy tej samej wydajności pracy 2,88 *t* węgla; ile wskutek ulepszenia konstrukcji maszyny zaoszczędzono pieniędzy w ciągu roku, jeżeli było 315 dni pracy (po 11 godz. dziennie), przyczem za 1 *t* węgla płacono 45 *zł*?

Znakowanie literowe

Określenia

1. Bok kwadratu ma 5 *cm*; oblicz obwód!

Obwód kwadratu wynosi w *cm*: $4 . 5$.

Podobnie, jeżeli bok kwadratu ma 6 *cm*, 7 *cm*, 8 *cm* i t. d., wówczas obwód wynosi w *cm* odpowiednio: $4 . 6$, $4 . 7$, $4 . 8$ i t. d.

Gdybyśmy przez O oznaczyli liczbę mierzącą obwód w *cm*, zaś przez b liczbę mierzącą bok w *cm*, to moglibyśmy napisać: $O = 4 . b$.

Wzór powyższy wyraża krótko i przejrzyście następującą ogólną regułę:

Obwód kwadratu w *cm* otrzymamy, mnożąc przez 4 liczbę mierzącą bok w *cm*.

W powyższym wzorze możemy za b podstawiać rozmaite liczby, zależnie od długości boku kwadratu; za każdym razem otrzymamy jego obwód.

2. Robotnik zarabia dziennie $7\frac{1}{2}$ *zł*; ile zarobi w ciągu 3, 4, 5, 8 dni?
Zarobek jego w *zł* wynosi odpowiednio:
$3 . 7\frac{1}{2}$, $4 . 7\frac{1}{2}$, $5 . 7\frac{1}{2}$, $8 . 7\frac{1}{2}$.
Jeżeli przez z oznaczymy zarobek w *zł*, zaś przez d liczbę dni pracy, to będziemy mogli napisać: $z = d . 7\frac{1}{2}$.
3. Jak wiemy, pole prostokąta np. w cm^2 obliczamy, mnożąc przez siebie liczby, mierzące podstawę i wysokość w *cm*.
Podaj kilka przykładów liczbowych!
Jeżeli przez P oznaczymy pole prostokąta w cm^2, przez p długość podstawy w *cm*, przez w długość wysokości w *cm*, wówczas możemy napisać: $P = p . w$.
4. Jeżeli przez b oznaczymy ciężar towaru wraz z opakowaniem w *kg*, przez t ciężar opakowania w *kg*, przez n ciężar samego towaru w *kg*, wówczas: $b = t + n$.
5. Obwód koła w *cm* obliczamy, mnożąc liczbę wyrażającą w *cm* długość średnicy przez π ($= 3{,}14\ldots$).
Jeżeli oznaczymy przez O liczbę wyrażającą w *cm* obwód koła, przez d liczbę wyrażającą w *cm* średnicę koła, wówczas: $O = \pi . d$.
We wzorze powyższym O i d mogą oznaczać rozmaite liczby, zależnie od wielkości koła. Litera π oznacza zawsze tę samą liczbę, zw. ludolfiną, t. j. 3,14.

Zadania

1. Opierając się na przykładzie 3 str. 51, oblicz pole prostokąta, gdy: *a)* $p = 8$ *cm*, $w = 3$ *cm*; *b)* $p = 12$ *cm*, $w = 5$ *cm*; *c)* $p = 71$ *cm*, $w = 16$ *cm*!
Sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a)*, *b)*, *c)*!
Opierając się na przykładzie 4 str. 51, oblicz wagę brutto, gdy: *a)* $t = \frac{1}{2}$ *kg*, $n = 5$ *kg*; *b)* $t = 2$ *kg*, $n = 17$ *kg*; *c)* $t = 2\frac{1}{4}$ *kg*, $n = 21\frac{2}{5}$ *kg*!
Sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a)*, *b)*, *c)*!
2. Bok sześciokąta umiarowego wynosi: *a)* 3 *cm*; *b)* 5 *cm*; *c)* $7\frac{1}{2}$ *cm*; oblicz obwód tego sześciokąta!
Oznacz przez O liczbę, wyrażającą w *cm* obwód sześciokąta, przez a liczbę, mierzącą bok w *cm*, i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć obwód, znając bok.
Podstaw kolejno w otrzymanym wzorze za a wartości: $5\frac{1}{2}$ *cm*, 12 *cm*, $4\frac{3}{4}$ *cm* i sformułuj za każdym razem, jakie rozwiązujesz zadanie!
3. Długość podstawy trójkąta wynosi: *a)* 8 *cm*, *b)* 9 *cm*, *c)* $10\frac{1}{2}$ *cm*,

długość zaś wysokości: *a)* 6 *cm*, *b)* 14 *cm*, *c)* 12 *cm*; oblicz pole tego trójkąta!

Oznacz przez P pole trójkąta wyrażone w cm^2, przez p długość podstawy w *cm*, przez w długość wysokości w *cm* i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć pole trójkąta, znając długości podstawy i wysokości.

Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* $p = 16$ *cm*, $w = 9$ *cm*; *b)* $p = 5$ *cm*, $w = 4\frac{1}{2}$ *cm*; *c)* $p = 10$ *cm*, $w = 4{,}6$ *cm* i sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a)*, *b)*, *c)*!

4. Kilogram towaru kosztuje: *a)* 2 *zł*, *b)* 5 *zł*, *c)* 8 *zł*; ile kosztuje: *a)* 2, *b)* 7, *c)* $4\frac{1}{4}$ *kg* tego towaru?

Oznacz przez a cenę 1 *kg* towaru, przez b liczbę, wyrażającą, ile *kg* towaru kupiłeś, przez c cenę zakupionego towaru, i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć cenę towaru, wiedząc, ile kosztuje 1 *kg* i ile *kg* towaru zakupiłeś.

Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* za a — 3 *zł*, za b — 8 *kg*; *b)* za a — 2 *zł* 40 *gr*, za b — 12 *kg*; *c)* za a — 4 *zł* 20 *gr*, za b — $6\frac{1}{2}$ *kg* i sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a)*, *b)*, *c)*.

5. Piechur, przebywając: *a)* 1,5 *m*, *b)* 1,8 *m*, *c)* $1\frac{3}{4}$ *m* w 1 sekundzie, idzie przez: *a)* 1 godzinę, *b)* 2 godz., *c)* 1 godz. 20 min.; oblicz drogę, którą przebył!

Oznacz przez c drogę w *m*, jaką przebywa piechur w 1 sek., przez t liczbę sekund, wyrażającą czas trwania chodu, przez s długość przebytej drogi w *m*. Napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć przebytą drogę, znając drogę, jaką piechur przebywa w 1 sek., oraz znając liczbę sekund, wyrażającą czas trwania chodu.

Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* za c — $1\frac{1}{4}$ *m* w 1 sek., za t — 3000 sek.; *b)* za c — 2 *m* w 1 sek., za t — $1\frac{1}{4}$ godz.; *c)* za c — $1\frac{9}{10}$ *m* w 1 sek., za t — 3 godz. i sformułuj za każdym razem zadanie, które rozwiązałeś!

6. Samolot przebywa w 1 sek. drogę: *a)* 30 *m*, *b)* 40 *m*, *c)* 50 *m*; w jakim czasie przebędzie drogę: *a)* 120 *km*, *b)* 144 *km*, *c)* 180 *km*?

Wprowadziwszy oznaczenia, jak w poprzedniem zadaniu, napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć czas trwania lotu, gdy znasz długość drogi i prędkość, z jaką samolot się porusza.

Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* za s — 140 000 *m*, za c — 35 *m* w 1 sek., *b)* za s — 360 000 *m*, za c — 45 *m* w 1 sek., *c)* za

s — 540 000 m, za c — 60 m w 1 sek. i sformułuj zadanie, jakie za każdym razem rozwiązałeś!

Wartości liczbowe wyrażeń

Przykłady:

1. Przypuśćmy, że mamy jakieś wyrażenie, jak np.: $2 . a + 3$. Jeżeli za a podstawimy jakąś liczbę, np. 5, wówczas otrzymamy wyrażenie: $2 . 5 + 3$.

Obliczając to wyrażenie, otrzymamy na wynik 13. Mówimy, że 13 jest wartością liczbową wyrażenia $2 . a + 3$ dla $a = 5$.

Jeżeli za a podstawimy np. 7, otrzymamy jako wartość liczbową wyrażenia liczbę 17.

Możemy utworzyć tabelkę, pisząc w pierwszym wierszu liczby, jakie podstawiamy za a, w drugim otrzymane wartości liczbowe (rys. 9).

a	1	2	3	4	5	7
$2 . a + 3$	5	7	9	11	13	17

Rys. 9.

Podobnie na rys. 10 tabelka przedstawia wartości liczbowe wyrażenia: $3 . (a + 1)$

a	1	2	3	4	5
$3 . (a + 1)$	6	9	12	15	18

Rys. 10.

2. Mamy wyrażenie $2 . a + b$.

Jeżeli podstawimy np. $a = 1$, $b = 3$, to otrzymamy jako wartość liczbową $2 . 1 + 3$, t. j. 5.

Tabelka (rys. 11) podaje nam wartości liczbowe tego wyrażenia, otrzymane przez podstawienie za a i b rozmaitych liczb:

a	1	1	2	2	3	3	3
b	1	2	1	2	1	2	3
$2 . a + b$	3	4	5	6	7	8	9

Rys. 11.

Moglibyśmy również zapisać wartości liczbowe w postaci tabliczki (podobnej do tabliczki mnożenia).

a

		1	2	3
b	1	3	5	7
	2	4	6	8
	3	5	7	9

Jeżeli chcemy wiedzieć jaką wartość liczbową otrzymamy np. dla $a = 3$, $b = 2$, to bierzemy pod uwagę pole w 3-ciej kolumnie w 2-gim wierszu; liczba 8, stojąca na tem polu, jest szukaną wartością liczbową.

Uwaga 1: Jeżeli przed literą stoi znak . lub $\times$, oznaczający mnożenie, to znak ten możemy opuścić.

A więc $2 . a = 2a$, $a . b = ab$, $5a + 1 = 5 . a + 1$, $3 + 5a = 3 + 5 . a$, $3ab + 7a = 3 . a . b + 7 . a$ i t. d.

Znaków $+$ $-$ $:$ nie wolno opuszczać.

Uwaga 2. Nie zawsze istnieje wartość liczbowa wyrażenia.

Np. wyrażenie: $a - 5$ nie ma wartości liczbowej dla $a = 3$, bo nie można od 3 odjąć 5.

Podobnie wyrażenie: $\frac{1}{a}$ nie ma wartości liczbowej dla $a = 0$, gdyż symbol $\frac{1}{0}$ nic nie znaczy.

Zadania

1. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $a + 1$ dla $a = 1, 2, 5, 7, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{4}{7}$;
   b) $b - 1$ dla $b = 2, 3\ 4, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{7}$;
   c) $x + \frac{1}{2}$ dla $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 7, \frac{2}{8}, \frac{4}{5}, \frac{1}{9}$;
   d) $y - \frac{1}{2}$ dla $y = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 6, \frac{9}{4}, \frac{7}{5}, \frac{13}{11}$.
   Sporządź tabelkę!
2. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $5a$ dla $a = 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 4, 15, \frac{3}{7}, \frac{8}{11}$;
   b) $\frac{2}{3}c$ dla $c = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 7, 18, \frac{13}{2}$;
   c) $3x + 2$ dla $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$;
   d) $\frac{2}{5}y - 1$ dla $y = 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6$.
   Sporządź tabelkę!
3. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $\frac{2a + 1}{3a - 1}$ dla $a = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5$;
   b) $\frac{8d - 5}{5d + 2}$ dla $d = 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{6}{5}, 3, \frac{7}{2}, \frac{9}{4}$;
   c) $\frac{\frac{2}{3}z + 1}{\frac{5}{4}z + 2}$ dla $z = 0, \frac{3}{2}, 2, \frac{12}{5}, 3, 4, 9$;

d) $\dfrac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}}$ dla $x=2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}$.

Sporządź tabelkę!

4. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
a) $2a+3b-1$ dla $a=0$, $b=1$; $a=1$, $b=0$; $a=1$, $b=1$;
b) $4x-2y+5$ dla $x=1$, $y=0$; $x=2$, $y=1$; $x=3$, $y=4$;
c) $\dfrac{5c+2d-2}{3c+d+4}$ dla $c=0$, $d=1$; $c=1$, $d=0$; $c=5$, $d=9$.

5. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
a) $(3x+8)-(2x-6)$ dla $x=3, 4, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5$;
b) $(6x-1)(5x+8)-(7x-3)$ dla $x=3, \frac{3}{7}, 2, 2\frac{1}{2}, 1$;
c) $2x^3+5x^2+7x+2$ dla $x=0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$;
d) $\dfrac{3x-8}{2x+5}-\dfrac{4x-18}{7x-5}$ dla $x=5, 6, 7, 8, 9$;
e) $(x+1)(x+2)(x+3)$ dla $x=0, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$.

6. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
a) $(2x+3)(5y+7)-(3xy-23)$ dla: $x=3$, $y=2$; $x=2$, $y=3$; $x=2$, $y=2$;
b) $(2x+3y-1)(3x+2y+1)-(xy+2)$ dla: $x=5$, $y=7$; $x=7$, $y=5$; $x=1$, $y=1$; $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$; $x=2$, $y=0$.
c) $\dfrac{7a+3b+1}{4a+5b+8}-\dfrac{8b-1}{5a+2}$ dla $a=2$, $b=3$.

7. Podstaw kilka razy w ułamku $\dfrac{x}{5}$ takie liczby w miejsce litery x, aby wartość w ten sposób powstałego ułamka była liczbą całkowitą!

8. Jakie liczby naturalne można wstawić w miejsce litery a, aby ułamek $\dfrac{a}{9}$ był ułamkiem właściwym?

9. Jakie liczby naturalne można wstawić w miejsce litery x, aby ułamek $\dfrac{9}{x}$ był niewłaściwy?

10. Oblicz wartość liczbową wyrażenia: $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
a) dla $n=1, 10, 15, 20, 100$;
b) przekonaj się, że np. dla $n=3$ wartość powyższego wyrażenia wynosi $1^2+2^2+3^2$;
c) sprawdź jeszcze na kilku przykładach, że wzór powyższy daje sumę kwadratów pierwszych n liczb.

11. Zastąp literę x taką liczbą, aby:
a) $x+7=15$; *b)* $x-2=9$; *c)* $x.5=20$; *d)* $x:3=7$;
e) $2.x=10$; *f)* $\dfrac{x}{3}=24$; *g)* $\dfrac{8}{x}=4$.

12. a jest liczbą całkowitą; którą liczbą zkolei po a jest liczba b, jeżeli: $b = a + 1$; $b = a + 2$; $b = a + 8$.
13. a jest pewną liczbą całkowitą;
    a) jaka liczba całkowita następuje po a?
    b) jaka liczba całkowita jest druga zkolei po a?
    c) jaka liczba całkowita jest siódma zkolei po a?
14. W sumie: $x + y + z$ zmień porządek składników na wszystkie możliwe sposoby. Oblicz za każdym razem wartość otrzymanego wyrażenia dla $x = 1$, $y = 5$, $z = 2\frac{1}{2}$.
15. Ile wynosi x, jeżeli:

	odjemna	odjemnik	różnica
a)	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{4}$	x
b)	a	b	x
c)	a	a	x
d)	x	$4{,}5$	$2{,}5$
e)	x	b	$a - b$
f)	x	a	0
g)	5	x	$1\frac{1}{5}$
h)	a	x	$a - b$
i)	a	x	0

16. Ile wynosi x, jeżeli:
    a) $11 - \frac{3}{4} = x$; *b)* $a - a = x$; *c)* $x - 7 = 3{,}4$;
    d) $x - b = a - b$; *e)* $x - a = 0$; *f)* $7 - x = 2{,}8$;
    g) $a - x = a - b$; *h)* $a - x = 0$.
17. Przedstaw w postaci iloczynu następujące sumy:
    $$a + a + a, \quad x + x + x + x + x, \quad z + z.$$
18. Przedstaw w postaci sumy następujące iloczyny: $2 \cdot a$, $7 \cdot x$,
19. Ile to jest: $a \cdot 0$, $a \cdot 1$, $1 \cdot a$, $0 \cdot a$?
20. Oblicz: *a)* a^2 dla $a = 3, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}$; *b)* a^3 dla $a = \frac{1}{3}, 2, 6$;
    c) $\frac{1}{2}a^4$ dla $a = 1, \frac{1}{2}, 2$; *d)* $5x^2$ dla $x = 2, \frac{1}{4}, 3$;
    e) $4{,}6\,y^3$ dla $y = 3; 0{,}1; 0{,}9$.
21. Zamieniając najpierw potęgi na iloczyn równych czynników, przedstaw w najprostszej formie iloczyny:
    $a \cdot a^2$, $x \cdot x^3$, $a^2 \cdot a^3$, $x^3 \cdot x^2$, $a \cdot a^4$, $x^5 \cdot x$.
22. Ile to jest: *a)* $a : a$, $0 : a$, jeżeli a nie jest 0; *b)* $a : 1$.
23. Oblicz (liczby a i x są różne od zera):
    a) $a^3 : a$, $a^4 : a$, $a^5 : a$, $a^6 : a$; *b)* $x^5 : x$, $x^5 : x^2$, $x^5 : x^3$, $x^5 : x^4$.
24. Oznaczmy ciężar ciała, wyrażony w gramach, przez Q, ciężar 1 cm^3 tego ciała (wyrażony w *g)* przez q, objętość zaś tego ciała wyrażoną w cm^3 przez v; w takim razie mamy wzór: $Q = v \cdot q$.

Oblicz Q, jeżeli: *a)* $v\,cm^3 = 5\ cm^3$, $q\,g = 21{,}4\,g$ (platyna);
b) $v\,cm^3 = 8\ cm^3$, $q\,g = 19{,}3\ g$ (złoto);
c) $v\,cm^3 = 15\ cm^3$, $q\,g = 11{,}34\ g$ (ołów);
d) $v\,cm^3 = 21\ cm^3$, $q\,g = 8{,}93\ g$ (miedź);
e) $v\,cm^3 = 40\ cm^3$, $q\,g = 7{,}25\ g$ (żelazo lane).
Jakie za każdym razem rozwiązałeś zadanie?

25. Jeśli boki równoległe trapezu mają $a\ cm$ i $b\ cm$, wysokość zaś $w\ cm$, to pole P (w cm^2)) tego trapezu wyraża się wzorem;

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot w.$$

Wyjaśnij ten wzór i posługując się nim oblicz pole trapezu, gdy:
a) $a\ cm = 3\ cm$, $b\ cm = 2\ cm$, $w\ cm = 1\ cm$;
b) $a\ cm = 8\ cm$, $b\ cm = 5\ cm$, $w\ cm = 3\ cm$;
c) $a\ cm = 10\ cm$, $b\ cm = 7\ cm$, $w\ cm = 4\ cm$.

26. Kamień wolno puszczony po upływie t sekund przebiega drogę $s\ cm$, która wyraża się wzorem: $s = 4{,}905\,t^2$.
Oblicz na podstawie tego wzoru s, gdy *a)* $t = 5$, *b)* $t = 10$, *c)* $t = 30$, *d)* $t = 40$.
Wyjaśnij, jakie za każdym razem rozwiązałeś zadanie!

27. Jeśli bok trójkąta równobocznego ma $a\ cm$, to pole p (w cm^2) wyraża się w przybliżeniu wzorem: $p = 0{,}433 \cdot a^2$.
Oblicz na podstawie tego wzoru pole trójkąta równobocznego o boku *a)* 3 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* $4\frac{1}{2}$ *cm*.
Sprawdź za każdym razem otrzymany wynik, mierząc na rysunku wysokość trójkąta i obliczając jego pole jako połowę iloczynu podstawy i wysokości.

28. Jeśli obwód koła wynosi $a\ cm$, to jego pole p (w cm^2) wyraża się wzorem: $p = \frac{1}{4\pi} \cdot a^2 = 0{,}07957\,a^2$.
Oblicz pole koła, którego obwód wynosi *a)* 20 *cm*, *b)* 50 *cm*, *c)* 1 *dcm*.

29. Jeśli przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają $a\ cm$ i $b\ cm$, przeciwprostokątna zaś $c\ cm$, to wówczas: $a^2 + b^2 = c^2$.
Narysuj dowolny trójkąt prostokątny, zmierz jego boki (w *cm*) i sprawdź powyższy wzór. Powtórz to kilka razy!

30. Oznaczmy przez l długość drutu miedzianego, wyrażoną w *m*, przez L długość tego drutu (wyrażoną w *m*) po ogrzaniu o t stopni C; w takim razie, jak doświadczenie uczy, mamy wzór:

$$L = l\,(1 + 0{,}000017\ t).$$

Oblicz na podstawie tego wzoru L, gdy:
a) $l\ m = 8\ m$, $t^0\ C = 12^0\ C$; *b)* $l\ m = 20\ m$, $t^0\ C = 15^0\ C$;
c) $l\ m = 15\ m$, $t^0\ C = 21^0\ C$.
Jakie zadanie za każdym razem rozwiązałeś?

Mieszaniny

1. *a)* Kupiec zmieszał *a kg* kawy jednego gatunku po *p zł* za 1 *kg* i *b kg* kawy drugiego gatunku po *q zł* za 1 *kg;* ile kosztował 1 *kg* mieszaniny?
Rozwiązanie:

a kg kawy I gat. kosztuje $a \cdot p$ *zł*
b kg kawy II gat. kosztuje $b \cdot q$ *zł*

Razem mieszanina kosztuje *zł*: $ap + bq$.
Ponieważ ciężar mieszaniny w *kg* wynosi $a + b$, przeto, oznaczając przez C cenę (w *zł*) 1 *kg* tej mieszaniny, mamy:

$$C = \frac{ap + bq}{a + b}.$$

b) Kupiec zmieszał 6 *kg* tytoniu po 56 *zł* za 1 *kg* i 8 *kg* tytoniu po 48 *zł* za 1 *kg;* ile kosztował 1 *kg* tej mieszaniny? (Rozwiąż wprost i na podstawie wzoru).

c) Do 2 *kg* kwasu siarkowego po 5 *zł* za 1 *kg* dolano 20 *kg* wody; ile kosztował 1 *kg* mieszaniny?

d) Do 7 *l* spirytusu po 6 *zł* za 1 *l* dolano 8 *l* wody; ile kosztował 1 *l* mieszaniny?

e) Handlarz win zmieszał 400 *l* wina po 4 *zł* za 1 *l* i 300 *l* po 6 *zł* za 1 *l;* ile kosztował 1 *l* mieszaniny?

2. *a)* Kupiec zmieszał *a kg* herbaty po *p zł* za 1 *kg*, *b kg* herbaty po *q zł* za 1 *kg* i *c kg* herbaty po *r zł* za 1 *kg*. Przekonaj się że, oznaczając przez C cenę w *zł* 1 *kg* tej mieszaniny, mamy

$$C = \frac{ap + bq + cr}{a + b + c}.$$

b) Zmieszano trzy gatunki tytoniu: 8 *kg* po 56 *zł* za 1 *kg*, 12 *kg* po 44 *zł* za 1 *kg* i 5 *kg* po 60 *zł* za 1 *kg;* ile kosztował 1 *kg* mieszaniny? (Rozwiąż wprost i na podstawie wzoru).

c) Kupiec zmieszał trzy gatunki wina: 100 *l* po 5 *zł* za 1 *l*, 150 *l* po 4 *zł* za 1 *l* i 50 *l* po 8 *zł* za 1 *l;* ile kosztował 1 *l* tej mieszaniny?

Wielkości proporcjonalne

Stosunek dwóch wielkości

Przypuśćmy, że mamy dane dwie wielkości, np. dwa odcinki AB i CD (rys. 12). Starajmy się znaleźć odcinek, któryby się w obu mieścił bez reszty. Odcinkiem takim jest odcinek a, który w AB mieści się 5 razy, w CD 3 razy.

Iloraz $5:3$ nazywamy wykładnikiem stosunku odcinka AB do CD.

Wykładnik stosunku odcinka AB do CD oznaczamy:

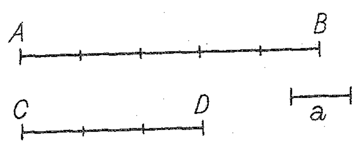
$$AB:CD \text{ lub } \frac{AB}{CD}.$$

Zatem: $AB:CD = 5:3 = \frac{5}{3}$ lub $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}$.

Czytamy: AB jest w stosunku do CD, jak 5 do 3.

Z rys. 12 widzimy, że odcinek AB jest $\frac{5}{3}$ odcinka CD. Wykładnik stosunku dwóch odcinków wskazuje więc, jakim ułamkiem odcinka drugiego jest odcinek pierwszy.

Jeżeli odcinek a obierzemy za jednostkę długości, to długość odcinka AB wyrazi się liczbą 5, długość zaś odcinka CD liczbą 3.



Rys. 12.

Wykładnik stosunku $\frac{5}{3}$ jest więc równy ilorazowi długości odcinków AB i CD (wyrażonych w tych samych jednostkach długości).

Przykład: Jaki jest wykładnik stosunku odcinków AB i CD, których długości wynoszą odpowiednio $5\frac{1}{2}$ *cm* i $3\frac{1}{5}$ *cm?*

Rozwiązanie: Ponieważ wykładnik stosunku jest równy ilorazowi długości (przy tej samej jednostce), więc

$$AB:CD = 5\tfrac{1}{2} : 3\tfrac{1}{5} = \tfrac{55}{32}.$$

Czytamy: odcinek AB jest w stosunku do CD, jak $5\frac{1}{2}$ do $3\frac{1}{5}$.

Uwaga. To samo odnosi się do innych wielkości, jak pola, objętości, ciężary i t. p.

a) Jeżeli mamy dwa kwadraty o polach odpowiednio 4 cm^2 i 9 cm^2, to mówimy, że są do siebie w stosunku jak 4 do 9, lub, że wykładnik stosunku pól wynosi $4:9 = \frac{4}{9}$.

b) Dwa ciężary jeden $2\frac{1}{4}$ *kg*, drugi $3\frac{1}{2}$ *kg* są do siebie w stosunku jak $2\frac{1}{4}$ do $3\frac{1}{2}$; wykładnik stosunku tych ciężarów wynosi $2\frac{1}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{9}{14}$.

Zadanie 1. Odcinek AB ma 5 *cm*; jak wielki jest odcinek CD, jeżeli $CD : AB = 2 : 3$.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez x długość w *cm* odcinka CD. Mamy: $x : 5 = 2 : 3$, więc $x : 5 = \frac{2}{3}$.

Ponieważ szukamy dzielnej, więc $x = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.

Zatem odcinek CD ma $\frac{10}{3}$ *cm*.

Zadanie 2. Odcinek CD ma 2 *cm*; jak wielki jest odcinek AB, jeżeli $AB : CD = 3 : 5$.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez x długość (w *cm*) odcinka AB. Mamy: $2 : x = 3 : 5$, więc $2 : x = \frac{3}{5}$.

Ponieważ szukamy dzielnika, więc $x = 2 : \frac{3}{5} = \frac{10}{3}$. Zatem odcinek CD ma $\frac{10}{3}$ *cm*.

Zadania

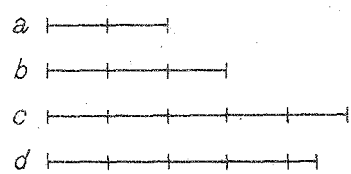
1. W jakim stosunku jest odcinek AB do odcinka CD, jeśli długość odcinka AB wynosi: *a)* 2 *cm*, *b)* $\frac{3}{4}$ *dcm*, *c)* 0,8 *dcm*, odcinka zaś CD: *a)* 3 *cm*, *b)* $\frac{4}{5}$ *dcm*, *c)* 1,2 *dcm*?
2. W jakim stosunku są do siebie pola kwadratów o bokach: *a)* 5 *cm* i 3 *cm*, *b)* $\frac{1}{2}$ *dcm* i $\frac{2}{3}$ *dcm*, *c)* 0,6 *dcm* i 0,8 *dcm*? W jakim stosunku są do siebie obwody tych kwadratów?
3. W jakim stosunku są do siebie dwa ciężary: *a)* 3 *kg* i 8 *kg*, *b)* $\frac{5}{4}$ *kg* i $\frac{3}{10}$ *kg*, *c)* 0,6 *kg* i 1,6 *kg*?
4. W jakim stosunku są do siebie dwie pojemności: *a)* 5 *l* i 8 *l*, *b)* $\frac{3}{4}$ *l* i $\frac{1}{2}$ *l*, *c)* 1,2 *l* i 0,8 *l*?
5. Dwa odcinki są do siebie w stosunku jak: *a)* $2 : 3$, *b)* $5 : 4$, *c)* $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, *d)* $1,7 : 2,3$; dłuższy z nich ma: *a)* 7 *cm*, *b)* 35 *km*, *c)* $2\frac{5}{7}$ *dcm*, *d)* 13,5 *km*. Ile wynosi krótszy?
6. Dwa ciężary są do siebie w stosunku jak: *a)* $3 : 1$, *b)* $6 : 8$, *c)* $1,2 : \frac{4}{3}$, *d)* $\frac{5}{3} : \frac{4}{7}$; mniejszy z nich ma: *a)* 2,5 *kg*, *b)* $\frac{5}{12}$ *kg*, *c)* 7,5 *kg*, *d)* $3\frac{2}{5}$ *kg*. Ile *kg* ma większy?
7. Jedno naczynie napełnimy, wlewając $2\frac{1}{2}$ szklanki wody, drugie, wlewając $4\frac{1}{2}$ takich szklanek wody. Jaki jest wykładnik stosunku pojemności tych naczyń do siebie? Jaka jest pojemność mniejszego naczynia, jeżeli większe ma pojemność 0,9 *l*?
8. Dwa prostokąty mają równe podstawy, a wysokości są w stosunku jak $2 : 3$. Przekonaj się, że ich pola są również w stosunku jak $2 : 3$, przyjmując np., że podstawa ma: *a)* 1 *cm*,

b) $2\frac{1}{2}$ *cm,* *c)* 1,5 *cm,* wysokość zaś pierwszego prostokąta wynosi: *a)* 2 *cm,* *b)* $3\frac{1}{4}$ *cm,* *c)* 2,5 *cm.*

9. Dwa ciężary są do siebie w stosunku jak $1\frac{1}{2}:2$. Narysuj obok siebie dwa prostokąty o równej podstawie np. 1 *cm,* których wysokości będą w stosunku $1\frac{1}{2}:2$. Pola tych prostokątów będą również w stosunku $1\frac{1}{2}:2$. W ten sposób uzmysłowisz sobie ciężary i ich stosunek. Powtórz to zadanie, gdy ciężary są do siebie w stosunku, jak: *a)* $2:3$, *b)* $3:2\frac{1}{2}$.

Podział w danym stosunku

Mówimy, że kilka odcinków np. a, b, c, d, (rys. 13) są do siew stosunku jak liczby 2, 3, 5, $3\frac{1}{2}$, jeżeli wykładnik stosunku dwóch odcinków równa się ilorazowi odpowiednich liczb.



Rys. 13.

A więc: $a:b=2:3$, $a:c=2:5$, $c:d=5:3\frac{1}{2}$, $c:a=5:2$ i t. d. Zapisujemy to: $a:b:c:d=2:3:5:3\frac{1}{2}$.

Uwaga. Pomnóżmy liczby 2, 3, 5, $3\frac{1}{2}$ przez jakąkolwiek liczbę (różną od zera) np. przez 2. Otrzymamy liczby 4, 6, 10, 7. Oczywiście iloraz odpowiednich liczb nie zmieni się. Mamy bowiem $2:3=4:6$, $3:3\frac{1}{2}=6:7$ i t. d. Możemy więc napisać:

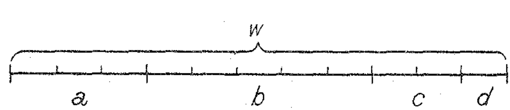
$$a:b:c:d=4:6:10:7.$$

Przypuśćmy, że stosunek kilku odcinków dany jest przy pomocy liczb ułamkowych np.: $a:b:c:d=\frac{2}{3}:\frac{5}{4}:\frac{7}{12}:\frac{5}{6}$; mnożąc te liczby przez ich wspólny mianownik (t. j. 12) otrzymamy

$$a:b:c:d=8:15:7:10.$$

Stosunek kilku odcinków możemy więc zawsze wyrazić przy pomocy liczb całkowitych.

Na rys. 14 mamy odcinek w podzielony na odcinki a, b, c, d takie, że $a:b:c:d=3:5:2:1$.



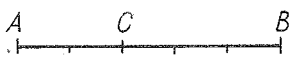
Rys. 14.

Mówimy, że odcinek w został podzielony w stosunku $3:5:2:1$ (czytaj 3 do 5 do 2 do 1).

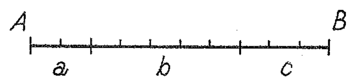
Na rys. 15 mamy odcinek AB podzielony na dwa odcinki w stosunku $2:3$.

Zadanie: Odcinek AB o długości 4 cm podzielić w stosunku $2:5:3$.

Dzielimy w tym celu odcinek na $2+5+3$ t. j. 10 równych części (rys. 16).



Rys. 15.



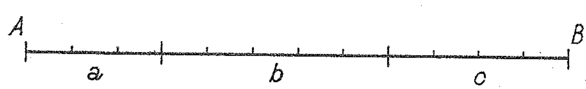
Rys. 16.

Odcinki a, b, c, mające odpowiednio 2, 5, 3 takie części, są oczywiście szukanemi odcinkami. Mamy bowiem $a:b:c = 2:5:3$.

Ponieważ $\frac{1}{10}$ odcinka AB ma 0,4 cm, więc odcinki a, b, c, mają odpowiednio długości: 0,8 cm, 2 cm, 1,2 cm.

Uwaga. Gdyby stosunek, w jakim mamy podzielić dany odcinek, nie był wyrażony w liczbach całkowitych, to należałoby te liczby pomnożyć przez ich wspólny mianownik.

Np.: chcemy podzielić dany odcinek AB w stosunku $\frac{1}{2}:\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$. Mnożąc liczby te przez 6, widzimy, że należy odcinek podzielić w stosunku: $3:5:4$. Dzielimy odcinek AB na $3+5+4$ t. j. 12 równych części. Odcinki a, b, c, zawierające odpowiednio 3, 5, 4 takie części, są szukanemi odcinkami. (Rys. 17).



Rys. 17.

Zadania

1. Podziel odcinek: *a)* 10 cm w stosunku $2:3$, *b)* 120 cm w stosunku $7:8$, *c)* 85 cm w stosunku $3:7$.
2. Podziel odcinek: *a)* 10 cm w stosunku $\frac{2}{3}:1:\frac{5}{3}$, *b)* 12 cm w stosunku $\frac{1}{2}:\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$, *c)* 20 cm w stosunku $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{12}$.
3. Podziel liczbę: *a)* 24 w stosunku $1:2:5$, *b)* 663 w stosunku $2:3:8$, *c)* 4000 w stosunku $1:7:8$.
4. Podziel liczbę: *a)* 385 w stosunku $5:7:11:12$, *b)* 3854 w stosunku $6:8:10:12$, *c)* 3120 w stosunku $2:3:4:6$.
5. Podziel pole prostokąta o bokach 2 cm i 8 cm równoległemi do krótszego boku w stosunku $\frac{2}{3}:1:\frac{3}{2}:\frac{13}{6}$.

6. Podziel pole kwadratu o boku 6 *cm* (równoległemi do jednego z boków) w stosunku $\frac{3}{2} : \frac{5}{2} : 2$.
7. Podziel: *a)* 48 *kg* w stosunku 3 : 5, *b)* 165 *zł* w stosunku 2 : 7 : 9, *c)* 684 *l* w stosunku 2 : 4 : 5 : 7, *d)* 1863 m^3 w stosunku 4 : 6 : 5 : 9.

   Uwaga: Narysuj dowolny prostokąt, podziel jego podstawę w stosunku 3 : 5 i poprowadź przez punkt podziału równoległą do wysokości. Jeżeli pole całego prostokąta uzmysławia ciężar 48 *kg*, to mniejsze prostokąty uzmysławiają części, na które 48 *kg* podzieliliśmy. Zrób taki rysunek w zadaniu *b), c), d)*!
8. Dwaj kupcy włożyli we wspólny interes: pierwszy 25 000 *zł*, drugi 38 000 *zł*. Przy likwidacji spółki otrzymano 94 900 *zł* jak mają się tem podzielić?
   (Rozdziela się zazwyczaj w stosunku włożonych kapitałów).
9. Dwóch rolników wynajęło łąkę za 1400 *zł*. Jeden z nich wypasał na tej łące 36 wołów, drugi zaś 27 wołów; ile każdy z nich powinien zapłacić za łąkę?
   (W stosunku liczby wołów).
10. Ktoś przekazał w testamencie 5160 *zł* na pokrycie swych zobowiązań, a winien był jednemu 2400 *zł*, drugiemu 2800 *zł*, trzeciemu 3400 *zł*; Jak należy między nich 5160 *zł* rozdzielić?
    (W stosunku kwot wyrażających zobowiązania).
11. Trzej przemysłowcy włożyli we wspólny interes handlowy: pierwszy 12 000 *zł*, drugi 30 000 *zł*, trzeci 7500 *zł*. Jak podzielili się zyskiem, który wynosił 6435 *zł*?
    (W stosunku włożonych kwot).
12. Czterech przemysłowców włożyło we wspólne przedsiębiorstwo: pierwszy 7200 *zł*, drugi 7500 *zł*, trzeci 8000 *zł* i czwarty 9100 *zł*. Jak należy podzielić między nich stratę, która wynosi 1272 *zł*?
    (W stosunku włożonych kwot).
13. Trzej kupcy włożyli we wspólny interes jednakowe kapitały. Jak mają podzielić się zyskiem 12 835 *zł*, jeżeli kapitał pierwszego kupca był w obrocie 1 rok, drugiego $1\frac{1}{2}$ roku, a trzeciego $2\frac{1}{2}$ lat?
    (W stosunku liczb wyrażających czas obrotu).
14. Czterej robotnicy zarobili razem 232 *zł* 50 *gr*; ile zarobił każdy z nich, jeżeli pierwszy pracował 6 dni, drugi i trzeci po 8 dni, czwarty zaś 9 dni?
    (W stosunku liczb dni).

Tabele i przedstawienia graficzne

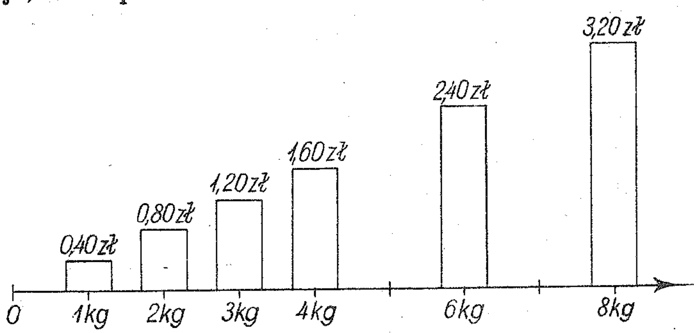
1. Tabelka (rys. 18) wskazuje nam ceny różnych ilości soli. Liczby stojące w pierwszym wierszu wskazują ilość soli w *kg*, liczby poniżej stojące odpowiednią cenę soli w *zł*.

A więc 1 *kg* kosztuje 0,40 *zł*, 3 *kg* — 1,20 *zł* i t. d.

Ilość soli w *kg* . . .	1	2	3	4	6	8
Cena soli w *zł* . . .	0,40	0,80	1,20	1,60	2,40	3,20

Rys. 18.

Moglibyśmy jeszcze w inny sposób przedstawić ceny rozmaitych ilości soli. Kreślimy prostokąty o równych podstawach i o wysokościach 0,40 *cm*, 0,80 *cm*, 1,20 *cm* i t. d. (rys. 19). Wysokości te wskazują nam cenę soli w ten sposób, że 1 *cm* wysokości odpowiada 1 *zł*. A więc prostokąt o wysokości 1,40 *cm* wskazuje, że odpowiednia ilość soli kosztuje 1,40 *zł* i t. d.



Rys. 19.

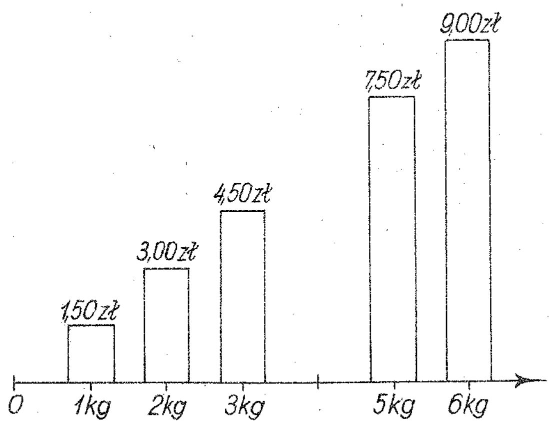
Powyższy sposób przedstawienia nazywa się sposobem wykreślnym lub graficznym.

2. Tabelka (rys. 20) przedstawia nam cenę rozmaitej ilości cukru.

Ilość cukru w *kg* . . .	1	2	3	5	6
Cena cukru w *zł* . . .	1,50	3,00	4,50	7,5C	9,00

Rys. 20.

Na rys. 21 przedstawioną mamy tabelkę powyższą graficznie na $\frac{1}{2}$ *cm* wysokości prostokątów wypada 1 *zł*, t. zn., że np. 3,00 *zł* zaznaczono prostokątem o wysokości 1,5 *cm*.



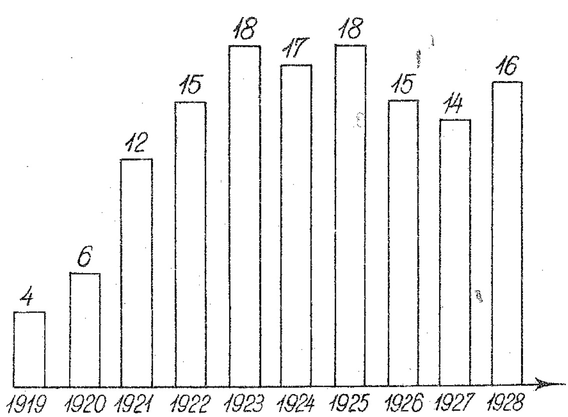
Rys. 21.

3. Tabelka (rys. 22) przedstawia nam przyrost ludności w Polsce, przypadający na każdy tysiąc mieszkańców w latach 1919—1928.

Rok	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928
Przyrost roczny	4	6	12	15	18	17	18	15	14	16

Rys. 22.

Na rys. 23 przedstawioną mamy powyższą tabelkę graficznie. Na $\frac{1}{4}$ *cm* wysokości prostokąta wypada przyrost ludności o 1 człowieka. Prostokąt więc o wysokości 3 *cm* wskazuje przyrost o 12 mieszkańców.



Rys. 23.

Zadania

1. 1 *kg* towaru kosztuje 20 *zł*. Ile kosztuje: 2 *kg*, 3 *kg*, 4 *kg*, 5 *kg*, 6 *kg*? Sporządź tabelkę i przedstaw ją graficznie; przyjmij, że na 1 *cm* wysokości prostokątów przypada 20 *zł*!
2. Ile wynosi: *a)* obwód, *b)* pole kwadratu, jeśli jego bok ma 1 *cm*, $1\frac{1}{2}$ *cm*, 2 *cm*, $2\frac{1}{2}$ *cm*, 3 *cm*. Sporządź tabelkę i przedstaw ją graficznie!
3. Niżej podana tabelka daje cenę III kl. pociągu osobowego w zależności od liczby *km*; przedstaw ją graficznie!

Km	1—5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Zł	0,40	0,40	0,60	0,60	0,60	0,80	0,80	0,80	1	1	1	1,20	1,20

4. Sporządź tabelkę, w której w pierwszym wierszu są liczby od 1 do 9, w drugim zaś odpowiednio iloczyny tych liczb przez $\frac{1}{2}$. Przedstaw tę tabelkę graficznie!
5. Komunikacja lotnicza w Polsce zaznaczona jest tabelką, w której podana jest liczba zaokrąglona lotów w odnośnym roku.

Rok	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929
Liczba lotów .	250	600	800	1500	2700	2900	3700	3900	6100

Przedstaw ją graficznie, przyjmując, że na 2 *mm* wysokości prostokątów przypada 100 lotów.

Wielkości wprost proporcjonalne

Określenia

1. Cena, jaką płacimy za sól, zależy od jej ilości, t. j. od wagi. Tabelka (rys. 24) wskazuje nam ceny różnych ilości *kg* soli.

Ilość soli w *kg*	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Cena soli w *zł*	0,40	0,80	1,20	1,60	0,20	0,10	0,05

Rys. 24.

Za 2 *kg* soli zapłacimy 2 razy więcej niż za 1 *kg*; za 3 *kg* trzy razy więcej, niż za 1 *kg* i t. d. Podobnie za $\frac{1}{2}$ *kg* soli zapłacimy połowę ceny 1 *kg* soli, za $\frac{1}{3}$ *kg* zapłacimy $\frac{1}{3}$ ceny 1 *kg* i t. d.

Weźmy pod uwagę dwie ilości soli np. 2 *kg* i 4 *kg*.

Z tabelki mamy: 2 *kg* kosztują 0,80 *zł*,
4 *kg* kosztują 1,60 *zł*.

Ile razy więc 4 *kg* jest większe od 2 *kg*, tyle razy 1,60 *zł* jest większe od 0,80 *zł*. Zatem: $4:2=1{,}60:0{,}80$.

Iloraz $4:2$ jest wykładnikiem stosunku obu ilości soli, zaś $1{,}60:0{,}80$ wykładnikiem stosunku ich cen.

Widzimy zatem, że wykładnik stosunku dwóch ilości soli jest równy wykładnikowi stosunku odpowiednich cen.

Jeżeli więc a, b oznaczają dwie ilości soli w *kg*, zaś c, d ich ceny w *zł*, to możemy napisać: $a:b=c:d$ lub $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Mówimy, że cena i waga są do siebie wprost proporcjonalne.

Podobnie zachowuje się cena i waga wielu innych towarów (np. kawy, herbaty i t. p.). Za dwa razy większą ilość kawy (herbaty) musimy zapłacić dwa razy więcej, za trzy razy większą ilość trzy razy więcej i t. d. Mówimy, że cena i waga takich towarów są do siebie wprost proporcjonalne.

Mleko sprzedajemy na litry. Za 2 *l* mleka należy 2 razy więcej zapłacić niż za 1 *l*, za 3 *l* mleka 3 razy więcej niż za 1 *l* i t. d.

Mówimy, że cena mleka jest wprost proporcjonalna do liczby litrów.

Podobnie cena sukna (z pewnego zwoju) jest wprost proporcjonalna do liczby metrów tego sukna.

Uwaga 1. Niezawsze cena i waga towaru są do siebie wprost proporcjonalne. Np. cena diamentu zmienia się w ten sposób z jego wagą, że diament dwa razy cięższy kosztuje 4 razy więcej, 3 razy cięższy 9 razy więcej i t. d. A więc cena diamentu nie jest proporcjonalna do jego wagi.

Uwaga 2. Jeżeli 3 *kg* soli kosztuje 1,20 *zł*, to 1 *kg* kosztuje *zł*: $1{,}20:3=0{,}40$.

Widzimy stąd, że, dzieląc cenę soli przez liczbę *kg*, otrzymamy cenę 1 *kg* soli. Zatem, dzieląc w tabelce (rys. 24) liczbę dolną przez odpowiednią górną, otrzymamy zawsze na wynik 0,40.

A więc:

$$0{,}40:1=0{,}80:2=1{,}20:3=0{,}20:\tfrac{1}{2}=0{,}10:\tfrac{1}{4}=0{,}05:\tfrac{1}{8}=0{,}40.$$

Liczbę 0,40 nazywamy współczynnikiem proporcjonalności. Współczynnik proporcjonalności jest więc ilorazem liczb mierzących odpowiednie sobie wielkości. W naszym wypadku współczynnik proporcjonalności oznacza w *zł* cenę 1 *kg* soli.

Jeżeli mamy taką tabelkę liczb jak rys. 24, mającą tę własność, że iloraz dwóch liczb pierwszego wiersza jest równy ilorazowi odpowiednich liczb drugiego wiersza, to mówimy, że liczby jednego wiersza są wprost proporcjonalne do liczb drugiego wiersza.

Przykłady takich tabelek podają nam rys. 25 i 26.

1	2	3	4
5	10	15	20

Rys. 25.

3	6	9	24
4	8	12	32

Rys. 26.

W powyższych tabelkach liczbom dwa razy większym odpowiadają liczby dwa razy większe, liczbom trzy razy większym, liczby trzy razy większe i t. d. Widzimy również, że iloraz odpowiednich liczb jest zawsze ten sam: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \ldots$ (rys. 25).

Liczbę $\frac{1}{5}$ nazywamy również i w tym przypadku współczynnikiem proporcjonalności.

W drugiej tabelce (rys. 26) współczynnik proporcjonalności wynosi $\frac{3}{4}$.

2. Jeżeli płaca robotnika wynosi dziennie np. 3 *zł*, to jego zarobek zależy od liczby dni roboczych. W czasie dwa razy większym zarobi dwa razy więcej, w czasie trzy razy większym trzy razy więcej i t. d.

Mówimy i tutaj, że zarobek robotnika jest wprost proporcjonalny do liczby dni roboczych.

Zarobek robotnika wynosi: 3 *zł* w 1 dniu, 6 *zł* w 2 dniach, 18 *zł* w 6 dniach i t. d. Mamy: $3:1 = 6:2 = 18:6$ i t. d.

Iloraz $3:1$ t. j. 3 jest współczynnikiem proporcjonalności. Współczynnik proporcjonalności wyraża dzienny zarobek robotnika.

3. Jeżeli samolot przelatuje przeciętnie w 1 sek. np. 40 *m*, to droga jaką przeleci, zależy od czasu. W czasie dwa razy dłuższym przeleci dwa razy większą drogę, w czasie trzy razy dłuższym trzy razy większą drogę i t. d.

Mówimy, że droga, jaką samolot przelatuje, jest wprost proporcjonalna do czasu, zużytego na jej przebycie.

Samolot przelatuje 40 *m* w 1 sek., 80 *m* w 2 sek., 200 *m* w 5 sek. i t. d. Mamy: $40:1 = 80:2 = 200:5$ i t. d.

Iloraz $40:1$ t. j. 40 jest współczynnikiem proporcjonalności. Wyraża on w *m* drogę samolotu w 1 sek., czyli prędkość samolotu.

Mówimy, że prędkość samolotu wynosi 40 *m* na sek., co piszemy 40 *m*/sek. Tak samo, jeżeli pociąg przebiega 70 *km* na godzinę mówimy, że prędkość jego wynosi 70 *km* na godz., co zapisujemy 70 *km*/godz.

4. Podobnie mówimy, że obwód kwadratu jest wprost proporcjonalny do długości boku (bo ile razy bok zwiększymy, tyle razy zwiększymy obwód).

Ponieważ obwód kwadratu jest 4 razy większy od boku kwadratu, więc współczynnik proporcjonalności wynosi 4.

5. 1 cm^3 ołowiu waży 11,34 g; zatem 2 cm^3 ważą dwa razy więcej, 3 cm^3 trzy razy więcej i t. d.

Mówimy, że ciężar ołowiu jest wprost proporcjonalny do objętości.

Ciężar 1 cm^3 wynosi 11,34 g, ciężar 2 cm^3 wynosi 22,68, ciężar 5 cm^3 wynosi 56,7 i t. d. Mamy: $11{,}34:1 = 22{,}68:2 = 56{,}7:5$ i t. d.

Iloraz 11,34 : 1 t. j. 11,34 jest współczynnikiem proporcjonalności. Wyraża ciężar jednego cm^3 ołowiu, czyli t. zw. ciężar właściwy. Mówimy, że ciężar właściwy ołowiu wynosi 11,34 g na 1 cm^3, co zapisujemy 11,34 g/cm^3.

Ponieważ 1 cm^3 złota waży 19,3 g, zatem ciężar właściwy złota wynosi 19,3 g/cm^3 (co czytamy 19,3 g na cm^3).

W przykładach 1, 2, 3, 4 i 5 występowały dwie wielkości od siebie zależne: 1) cena soli zależy od liczby kg soli, 2) zarobek robotnika zależy od liczby dni roboczych, 3) droga samolotu zależy od czasu lotu, 4) obwód kwadratu zależy od długości boku, 5) ciężar ołowiu zależy od objętości.

Wielkości, występujące w każdym z powyższych przykładów, nazwaliśmy wprost proporcjonalnemi.

Aby się przekonać, czy dwie wielkości zależne od siebie są wprost proporcjonalne, należy zbadać:

1) czy zwiększając jedną, tem samem zwiększamy drugą;

2) czy zwiększając jedną 2, 3, ... razy, zwiększamy tem samem drugą odpowiednio 2, 3, ... razy.

Zadania

1. W następujących zadaniach sporządź odpowiednie tabelki i przekonaj się, że liczby jednego wiersza są wprost proporcjonalne do liczb drugiego wiersza. Wskaż następnie w każdem zadaniu te wielkości, których proporcjonalność wynika z tabelki. Oblicz, ile wynosi współczynnik proporcjonalności i co oznacza? Sporządź wkońcu wykres w odpowiedniej skali!

a) Kula karabinowa przebiega w 1 sek. 600 *m*; ile przebiega w 2, 3, 4, 7, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{15}$ sek.?

b) 1 cm^3 złota waży 19,3 *g*; ile waży 2 cm^3, 5 cm^3, 10 cm^3, 1 dcm^3, $\frac{1}{2}$ cm^3, $\frac{1}{4}$ cm^3, $\frac{3}{4}$ cm^3?

c) Pociąg jedzie z prędkością 60 *km* na godzinę; jaką drogę zrobi w 2, 3, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ godziny?

d) 1 *l* wina kosztuje 6 *zł*; ile kosztuje: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ *l* wina?

e) Parowiec w 1 sek. przepływa średnio 13 *m*; ile przepływa w 2, 3, 4, 5, 6, 7 godzinach?

2. Narysuj trójkąty równoboczne o boku 1 *cm*, 2 *cm*, 4 *cm*, 6 *cm* i mierząc ich wysokości, przekonaj się, że wysokości są wprost proporcjonalne do boków; ile wynosi współczynnik proporcjonalności?
3. Czy obwód koła jest wprost proporcjonalny do promienia? Ile wynosi współczynnik proporcjonalności?
4. Czy pole kwadratu jest wprost proporcjonalne do długości boku?
5. Prostokąt ma podstawę 3 *cm*; czy jego pole jest wprost proporcjonalne do wysokości?
6. Kamień wolno puszczony w pierwszej sek. przebiega 5 *m*, w dwóch pierwszych sek. 20 *m*, w trzech pierwszych sek. 45 *m*, w czterech pierwszych sek. 80 *m*; czy możemy powiedzieć, że droga, jaką kamień przebiega, jest wprost proporcjonalna do czasu?
7. Mnożna wynosi 5; czy wartość iloczynu jest wprost proporcjonalna do mnożnika?
8. Dzielnik wynosi 3; czy wartość ilorazu jest wprost proporcjonalna do dzielnej?
9. Czy wartość ułamka o mianowniku 4 jest wprost proporcjonalna do licznika?
10. Płytka metalowa kwadratowa, o boku 1 *cm*, kosztuje 10 *gr*; ile kosztuje płytka kwadratowa o boku 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*? Czy cena płytki jest wprost proporcjonalna do długości boku?
11. Jaką liczbę trzeba wstawić w miejsce litery x, aby zachodziły równości?

a) $x : 6 = \frac{1}{2}$; $x : 15 = \frac{7}{10}$; $x : 3 = \frac{5}{18}$;
b) $4 : x = \frac{7}{11}$; $9 : x = 4{,}5$; $7 : x = \frac{4}{13}$;
c) $\frac{2}{5} = x : 2{,}5$; $\frac{8}{3} = x : 15$; $12{,}6 = x : \frac{7}{3}$;
d) $\frac{3}{7} = 2 : x$; $4{,}9 = 7 : x$; $\frac{14}{5} = \frac{2}{3} : x$.

Rozwiązuj w następujący sposób:

a) Ponieważ w równości $x : \frac{2}{3} = \frac{24}{5}$, szukaną liczbą jest dzielna, więc: $x = \frac{24}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{5}$.

b) Ponieważ w równości $\frac{3}{4} : x = \frac{7}{2}$, szukaną liczbą jest dzielnik, zatem $x = \frac{3}{4} : \frac{7}{2} = \frac{3}{14}$.

Reguła trzech prosta

(Dla wielkości wprost proporcjonalnych)

Sztuka sukna 15 *m* długa kosztuje 300 *zł*; ile kosztują 4 *m* tego sukna?

Zadanie to rozwiążemy dwoma sposobami:

I. Wyznaczmy współczynnik proporcjonalności. Wynosi on $300 : 15 = 20$. Współczynnik proporcjonalności oznacza w naszym przypadku cenę 1 *m* sukna. Ponieważ 1 *m* sukna kosztuje 20 *zł*, więc 4 *m* sukna kosztują 80 *zł*. Rozumowanie powyższe możemy zapisać w następujący sposób:

15 *m* kosztuje 300 *zł*,
więc 1 *m* kosztuje 300 *zł* : 15 = 20 *zł*,
a zatem 4 *m* kosztują 4 . 20 *zł* = 80 *zł*.

II. Oznaczając przez x liczbę *zł*, które trzeba zapłacić za 4 *m* sukna, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

15 *m* kosztuje 300 *zł*
4 *m* kosztuje x *zł*

Ponieważ wykładnik stosunku dwóch ilości towaru równa się wykładnikowi stosunku ich cen, więc otrzymujemy: $\frac{15}{4} = 300 : x$.

Ponieważ szukamy dzielnika, więc $x = 300 : \frac{15}{4} = 300 \cdot \frac{4}{15} = 80$.

4 *m* sukna kosztują więc 80 *zł*.

Każdy sposób rozwiązywania zadań, dotyczących wielkości wprost proporcjonalnych (przyczem trzy wielkości są dane, a poszukuje się czwartej), nazywamy **regułą trzech prostą**.

Uwaga. Rozwiążmy sposobem pierwszym następujące zadanie: Jeśli 3 jaja kosztują 18 *gr*, to ile jaj otrzymamy za 12 *gr*?

Ponieważ za 18 *gr* otrzymujemy 3 jaja
więc za 1 *gr* otrzymamy $\frac{3}{18}$ jaja
a za 12 *gr* otrzymamy $12 \cdot \frac{3}{18}$ jaja = 2 jaja.

W tem zadaniu sposób pierwszy ma tę niedogodność, że zmusza nas do rozważania części przedmiotów, które są praktycznie niepodzielne. Łatwo się przekonać, że ta trudność zniknie, jeżeli rozwiązywać będziemy to zadanie drugim sposobem.

Zadania

1. 18 *kg* kawy kosztuje 648 *zł*; ile kosztuje: *a)* 5 *kg*, *b)* 9 *kg*, *c)* $2\frac{1}{2}$ *kg*, *d)* $\frac{3}{4}$ *kg*?
2. 5 *l* wina kosztuje 30 *zł*; ile kosztuje: *a)* 7 *l*, *b)* 4,75 *l*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *l*?
3. Za 4 *m* sukna zapłacono 72 *zł*; ile należy zapłacić za: *a)* $1\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 3,2 *m*, *c)* 6,5 *m*?
4. Za 5 cytryn zapłacono 75 *gr*; ile cytryn można kupić za: *a)* $1\frac{1}{2}$ *zł*, *b)* 1 *zł* 20 *gr*, *c)* 1,05 *zł*?
5. Za 3 *kg* soli zapłacono 1 *zł* 20 *gr*; ile *kg* soli można kupić za: *a)* 4 *zł* 40 *gr*, *b)* 3 *zł*, *c)* 4,7 *zł*?
6. *a)* 12 *l* mleka kosztuje 2,40 *zł*; ile kosztuje 8 *l* mleka?
   Rozwiązanie: 4 *l* mleka kosztuje 2,40 *zł* : 3 = 0,80 *zł*, więc 8 *l* mleka kosztuje 2 . 0,80 *zł* = 1,60 *zł*.
   b) 9 *kg* towaru kosztuje 2,70 *zł*: ile kosztuje 15 *kg* tego towaru?
   Rozwiązanie: 3 *kg* kosztuje 2,70 *zł* : 3 = 0,90 *zł*; więc 15 *kg* kosztuje 5 . 0,90 *zł* = 4,50 *zł*.
   Rozwiąż w powyższy sposób następujące zadania:
   c) 24 *kg* towaru kosztuje 12 *zł*; ile kosztuje 16 *kg*?
   d) 18 *kg* towaru kosztuje 27 *zł*; ile kosztuje 24 *kg*?
   e) 28 *kg* towaru kosztuje 33,60 *zł*; ile kosztuje 21 *kg*?
   f) 14 *kg* towaru kosztuje 350 *zł*; ile kosztuje 105 *kg*?
   g) 45 robotnikom wypłacono 270 *zł*, jaką kwotę należy wypłacić 30 robotnikom?
   h) 12 arkuszy papieru kosztuje 42 *gr*; ile kosztuje 16 arkuszy? ile arkuszy można kupić za 35 *gr*, a ile za 1,12 *zł*?
7. Na wyżywienie 8 osób zakupiono 30 *kg* mąki i 40 *kg* mięsa; ile potrzeba *kg* mąki i ile *kg* mięsa na wyżywienie 15 osób przez ten sam przeciąg czasu?
8. 5 górników wydobywa dziennie 9 tonn węgla; ile tonn węgla wydobędzie w jednym dniu 9 górników?
9. Ile zarobi w ciągu 5 tygodni robotnik, który zarabia w ciągu 7 tygodni 364 *zł*?
10. 18 robotników zarobiło w pewnym czasie 1314 *zł*; ilu robotników zarobiłoby w tymże czasie 2044 *zł*?
11. Na towarze kupionym za 3000 *zł* zyskał kupiec 450 *zł*; ile *zł* zyskał na towarze kupionym za 250 *zł*?

12. Kupiec sprzedał towaru za 160 *zł* i zarobił 45 *zł*; za ile musiałby sprzedać tego towaru, żeby zarobić 261 *zł*?
13. Pociąg przebył 350 *km* w 7 godz.; jaką drogę zrobi w 12 godz., jadąc z tą samą prędkością? Ile czasu zużyje na przebycie 1000 *km*?
14. 4° Reamur'a wynoszą tyle, co 5° Celsjusza; ile stopni C wynoszą: 5°, 8°, 17°, 35°, 62, 73,6° R. Ile stopni R. wynoszą: 9°, 12°, 15°, 19,5°, 72° C.?
15. Za 50 dolarów zapłacono 332 *zł* 50 *gr*; ile dolarów zakupiono za 53 *zł* 13 *gr*? Ile zapłacono za 14 dolarów?
16. 100 franków francuskich kosztuje 34 *zł* 86 *gr*; zamień na franki 732 *zł* 6 *gr*! Zamień na złote 75 franków!
17. 25 *m* drutu waży 3,85 *kg*; jak długi jest drut o wadze 12,782 *kg*?
18. Wahadło robi w 5 sekundach 12 wahań; ile wahań robi na minutę? Ile czasu potrzebuje na wykonanie 100 wahań?
19. Koło robi 7296 obrotów w 2 godz. 32 min.; ile obrotów zrobi w 4 godz. 15 min.? W jakim czasie zrobi 1000 obrotów?
20. Przednie koło robi 60 obrotów, gdy równocześnie tylne robi 45 obrotów; ile obrotów wykona przednie koło, gdy tylne zrobi 81 obrotów, a ile wykona tylne koło, gdy przednie zrobi 96 obrotów?
21. Następujące tabelki uzupełnij liczbami tak, aby tabelki te przedstawiały liczby wprost proporcjonalne.

2	$2\frac{1}{2}$
4	

3	
5	$\frac{2}{3}$

	$\frac{3}{4}$
11	$2\frac{1}{2}$

0,4	$\frac{2}{7}$
	2,5

22. Odległość miejscowości *A* od *B* wynosi 9 *km*, na mapie zaś odległość ta wynosi 12 *cm*. Jaka jest odległość miejscowości *C* od *D*, jeśli na tej samej mapie odczytana wynosi 15 *cm*? W jakiej skali mapa jest zrobiona?
23. Pociąg w 20 min. przebiega 24 *km*; w jakim czasie przebiegnie 90 *km*? Jaką drogę przebiegnie w $1\frac{1}{4}$ godz.?
24. Oświetlenie sali 5 żarówkami kosztuje dziennie 1 *zł* 20 *gr*; ile kosztowałoby dziennie oświetlenie tej sali 8 żarówkami?
25. Światło przebiega drogę od słońca do ziemi, wynoszącą 150 000 000 *km* w 8 min. 18 sek.; jak odległa jest od ziemi gwiazda, z której światło dochodzi do ziemi po 4 latach?
26. Głos przebiega 1 *km* w 3 sek.; w jakiej odległości od nas uderzył piorun, gdy huk usłyszeliśmy po upływie 17 sek. od ujrzenia błyskawicy?

27. Za naprawę 100 *m* drogi żąda przedsiębiorca 240 *zł*; ile trzeba zapłacić za naprawę 1870 *m* drogi?
28. Potrzeba 10 000 *kg* (t. j. jednego wagonu) blendy smolistej dla wydobycia 40 *mg* radu; ile blendy potrzeba na 1 *g* radu?
29. 5 cm^3 lodu o temperaturze 0° C waży 4,584 *g*; ile waży bryła lodu o objętości 1 m^3 53 cm^3?
30. W wycieczkach górskich liczy się przeciętnie na 1 godz. czasu 275 *m* drogi wgórę; ile czasu potrzeba na wejście na szczyt o wysokości (licząc od podstawy): *a)* 1100 *m*, *b)* 412,5 *m* czyli 275 $m + \frac{275}{2}$ *m*, *c)* 962,5 *m*, *d)* 1375 *m*?
31. Na długości 6 *km* droga wzniosła się o 102 *m*; o ile wznosi się przeciętnie na długości: *a)* $1\frac{1}{2}$ *km*, *b)* 5 *km*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *km*?
32. Na przestrzeni 342 *km*, lokomotywa ciągnąca pociąg towarowy, zużyła 5 tonn węgla; ile tonn zużywa przeciętnie na 100 *km*?
33. 15 *m* sukna kosztuje 300 *zł*; ile kosztują 4 *m* sukna? Rozwiążemy to zadanie w następujący sposób:

Zapiszmy je: 15 *m* — 300 *zł*
4 *m* — *x* *zł*

Szukaną liczbę *zł* oznaczyliśmy literą *x*. Liczba *m* i liczba *zł* są wielkościami wprost proporcjonalnemi. Ilorazy odpowiadających sobie liczb muszą być sobie równe, równają się bowiem współczynnikowi proporcjonalności. Liczbie 15 odpowiada liczba 300, liczbie zaś 4 odpowiada szukana liczba *x*.
Mamy zatem: $x : 4 = \frac{300}{15}$ czyli $x : 4 = 20$.
Ponieważ szukana liczba jest dzielną, więc $x = 20 . 4 = 80$.
4 *m* sukna kosztują zatem 80 *zł*.
Oblicz w podobny sposób, ile kosztuje: *a)* 9 *m*, *b)* 17 *m*, *c)* 40 *m*, *d)* $18\frac{1}{2}$ *m*.

34. 1000 *l* benzyny kosztuje 760 *zł*; ile kosztuje 635 *l* benzyny? Rozwiążemy to zadanie t. zw. metodą **włoską** czyli **kupiecką**.

Rozwiązanie:

500 *l* benzyny kosztuje		760 *zł* : 2 =	380 *zł*
100 *l*	„ „	760 *zł* : 10 =	76 *zł*
10 *l*	„ „	76 *zł* : 10 =	7 *zł* 60 *gr*
20 *l*	„ „	2 . 7 *zł* 60 *gr* =	15 *zł* 20 *gr*
5 *l*	„ „	380 *zł* : 100 =	3 *zł* 80 *gr*
Razem 635 *l* benzyny kosztuje		. . . .	482 *zł* 60 *gr*

Oblicz w podobny sposób, ile kosztuje: *a)* 785 *l*, *b)* 245 *l*, *c)* 821 *l*, *d)* 57 *l*?

35. 7 *l* mleka daje 1,05 *l* masła; ile *l* masła otrzymamy z $24\frac{3}{5}$ *l* mleka?
Rozwiążemy to zadanie metodą włoską.

21 *l*	mleka	daje	masła	$3 \cdot 1{,}05\ l = 3{,}15\ l$
1 *l*	„	„	„	$1{,}05\ l : 7 = 0{,}15\ l$
2 *l*	„	„	„	$2 \cdot 0{,}15\ l = 0{,}30\ l$
$\frac{1}{5}$ *l*	„	„	„	$0{,}15\ l : 5 = 0{,}03\ l$
$\frac{2}{5}$ *l*	„	„	„	$2 \cdot 0{,}03\ l = 0{,}06\ l$
Razem $24\frac{3}{5}$ *l*	mleka	daje	masła	$3{,}69\ l$

Oblicz w ten sposób, ile *l* masła otrzymasz z: *a)* $15\frac{3}{4}$ *l* mleka, *b)* $22\frac{1}{2}$ *l* mleka, *c)* $33\frac{3}{5}$ *l* mleka?

36. Za przewóz $\frac{3}{2}$ *t* towaru zapłacił kupiec 150 *zł* 30 *gr*; ile zapłaci za przewóz 5 *t* towaru? Oblicz metodą włoską!

37. Pewien kapitał przynosi w 8 miesiącach 1680 *zł* dochodu; jaki dochód przyniesie w: *a)* 20 miesiącach, *b)* $2\frac{1}{2}$ latach, *c)* $1\frac{1}{2}$ roku? Oblicz metodą włoską!

38. 1 m^2 blachy (pewnej grubości) waży 20 *kg*; jakie pole ma blacha, której ciężar wynosi: *a)* 115 *kg*, *b)* 85 *kg*, *c)* 162 *kg*? Oblicz metodą włoską!

39. W głębokości 350 *m* jest temperatura 33° C, a w głębokości 25 *m* — 8° C; w jakiej głębokości jest temperatura 21° C, jeśli przyjmiemy, że (począwszy od 25 *m*) przyrost temperatury jest wprost proporcjonalny do przyrostu głębokości?

40. Obwód koła podzielono na 360 równych części, tak zwanych stopni łukowych, każdy stopień na 60 minut łukowych, każdą minutę na 60 sekund łukowych; jak długi jest łuk $12^0\,30'\,15''$, jeśli obwód tego koła ma 180 *m*?

41. 1 *kg* towaru kosztuje 3 *zł*; niech *x* *kg* towaru kosztuje *y* *zł*.
Możemy więc napisać: 1 *kg* — 3 *zł*,
x *kg* — *y* *zł*.

Ponieważ te wielkości są wprost proporcjonalne, więc

$$y : 3 = x : 1 = x.$$

Stąd

$$y = 3\,x.$$

Widzimy zatem, że wielkości x i y wprost do siebie proporcjonalne, spełniają równość: $y = 3\,x$.

Liczba 3 jest współczynnikiem proporcjonalności.

Na podstawie tego wzoru możemy obliczyć cenę (y *zł*) każdej ilości towaru (x *kg*).

Np. 8 *kg* tego towaru kosztuje $8 \cdot 3$ *zł* = 24 *zł*.

Uwaga. Jeśli wielkości x i y, od siebie zależne i zmienne, spełniają np. równość:

$$y = 12\,x$$

to wielkości x i y są do siebie wprost proporcjonalne.

Ile razy bowiem zwiększymy (lub zmniejszymy) liczbę x, tyle razy zwiększy się także (lub zmniejszy) liczba y.

a) Robotnik zarabia dziennie 6 *zł*; niech x oznacza liczbę dni pracy, y zaś liczbę *zł*, jako wynagrodzenie za tę pracę. Jaki wzór na y otrzymasz? Oblicz na podstawie tego wzoru zarobek robotnika w 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dniach! Tabelka!

b) Pociąg jedzie z prędkością 15 *m* na sekundę; niech x oznacza liczbę sekund, y zaś liczbę *m*, jaką pociąg w tym czasie przejechał. Jaki wzór otrzymasz na y? Oblicz na podstawie tego wzoru drogę, jaką pociąg przejedzie w 2, 5, 8, 10, 12, 18 sekundach, w 1, 2, 3, minutach!

c) Wysokość prostokąta wynosi 3 *cm*, podstawa x *cm*, pole zaś y cm^2. Jaki wzór otrzymasz na y? Oblicz, na podstawie tego wzoru, powierzchnię prostokąta, w którym podstawa ma 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, 8 *cm*, 15 *cm*. Tabelka!

Wielkości odwrotnie proporcjonalne

Określenia

1. Ile *m* płótna kupimy za 60 *zł*? Odpowiedź zależeć będzie od tego, ile kosztuje 1 *m*.

Jeżeli 1 *m* kosztuje 1 *zł*, to kupimy 60 *m*; gdyby 1 *m* kosztował dwa razy więcej, t. j. 2 *zł*, to kupilibyśmy 2 razy mniej t. j. 30 *m* płótna; gdyby 1 *m* kosztował 3 razy więcej (niż w pierwszym przypadku) t. j. 3 *zł*, to kupilibyśmy trzy razy mniej (niż w pierwszym przypadku) t. j. 20 *m* i t. d.

Wyniki zaznaczone mamy w tabelce na rys. 27.

Cena 1 *m* płótna w *zł*...	1	2	3	4	5	6
Liczba *m* kupiona za 60 *zł*	60	30	20	15	12	10

Rys. 27.

Weźmy pod uwagę dwa gatunki płótna np. jeden w cenie 2 *zł* za 1 *m*, drugi w cenie 4 *zł* za 1 *m*. Z tabelki widzimy, że za 60 *zł* można kupić:

30 *m* płótna po 2 *zł* za 1 metr lub
15 „ „ „ 4 „ „ 1 „

Z powyższego widać, że za 60 *zł* kupimy dwa razy więcej (t. j. $\frac{30}{15}$) płótna pierwszego gatunku, niż drugiego. Dwa razy musi być też większa cena drugiego gatunku, niż pierwszego. A więc:

$$\frac{30}{15} = \frac{4}{2}.$$

Ułamek $\frac{30}{15}$ jest wykładnikiem stosunku ilości płótna obu gatunków. Ułamek $\frac{2}{4}$ jest wykładnikiem stosunku odpowiednich cen. Ponieważ ułamek $\frac{4}{2}$ jest odwrotnością ułamka $\frac{2}{4}$ więc: wykładnik stosunku ilości dwóch gatunków płótna (które kupimy za tę samą sumę) jest równy odwrotności wykładnika stosunku ich cen za 1 *m*.

Mówimy, że liczba metrów płótna, jaką możemy kupić za pewną kwotę, jest odwrotnie proporcjonalna do ceny 1 *m* tego płótna.

Podobnie rzecz przedstawia się z innemi towarami. Jeżeli cena 1 *kg* jakiegoś towaru jest 2, 3,... razy większa niż drugiego, to za tę samą kwotę pieniędzy (np. za 60 *zł*) kupimy 2, 3, ... razy mniej pierwszego towaru, niż drugiego.

Mówimy, że liczba *kg* towaru, jaką możemy kupić za pewną kwotę, jest odwrotnie proporcjonalna do ceny 1 *kg* tego towaru.

Uwaga. Jeżeli 1 *m* płótna kosztuje 3 *zł*, to 20 *m* kosztuje:

$$20 \,.\, 3 \text{ zł} = 60 \text{ zł}.$$

Mnożąc więc liczbę *m*, przez cenę 1 *m* otrzymujemy kwotę wydaną. Wynika stąd, że mnożąc przez siebie odpowiednie liczby w tabelce (rys. 27), otrzymamy 60. Zatem:

$$1 \,.\, 60 = 2 \,.\, 30 = 3 \,.\, 20 = 4 \,.\, 15 = 5 \,.\, 12 = 6 \,.\, 10 = 60.$$

Jeżeli mamy taką tabelkę, jak na rys. 27, mającą tę własność, że iloraz dwóch liczb pierwszego wiersza jest równy odwrotności ilorazu odpowiednich liczb wiersza drugiego, wówczas mówimy, że liczby jednego wiersza są odwrotnie proporcjonalne do liczb drugiego wiersza.

Przykłady takich tabelek podają nam rys. 28 i 29.

1	2	3	4
2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

Rys. 28.

3	2	9	6
6	9	2	3

Rys. 29.

W tabelkach powyższych liczbom 2, 3 razy większym odpowiadają liczby 2, 3 razy mniejsze. Widzimy również, że iloczyn odpowiednich liczb jest ten sam. Np. (rys. 28)

$$1 \,.\, 2 = 2 \,.\, 1 = 3 \,.\, \tfrac{2}{3} = 4 \,.\, \tfrac{1}{2}.$$

2. Jeżeli 1 robotnik wystawi mur w 12 dniach, to 2 robotników wykona tę pracę w czasie 2 razy krótszym t. j. w 6 dniach, 3 robotników w czasie 3 razy krótszym t. j. w 4 dniach, 6 robotników — w 2 dniach, 12 robotników w 1 dniu. Widzimy zatem, że czas potrzebny na wykonanie pewnej pracy zależy od liczby robotników w ten sposób, że 2, 3, 4 razy więcej robotników wykona tę samą pracę w czasie odpowiednio 2, 3, 4 razy krótszym.

Mówimy, że czas, potrzebny do wykończenia pewnej pracy, jest odwrotnie proporcjonalny do liczby robotników.

Iloczyn odpowiednich liczb wynosi 12, gdyż

$$1 \,.\, 12 = 2 \,.\, 6 = 3 \,.\, 4 = 6 \,.\, 2 = 12.$$

Mówimy, że do wystawienia muru potrzeba 12 dni roboczych.

3. Na tabelce zaznaczone mamy czasy zużyte na przebycie 60 *m* drogi, przy odpowiednich prędkościach.

Prędkość t. j. droga przebyta w 1 sek. podana w *m*	Pociąg osobowy 10	Pociąg pośp. 20	Samochód 30	Samolot 40	Kula karabinowa 600
Czas zużyty na przebycie 60 *m* podany w sek.	6	3	2	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Z tabelki powyższej widzimy, że pociąg pośpieszny, jadący z prędkością dwa razy większą niż pociąg osobowy, przebywa tę samą drogę w czasie dwa razy krótszym; samochód, jadący z szybkością trzy razy większą niż pociąg osobowy, przebywa tę drogę w czasie trzy razy krótszym i t. d.

Czas potrzebny na przebycie pewnej drogi jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do prędkości.

Iloczyn odpowiednich liczb wynosi 60 mamy bowiem:

$$6 \,.\, 10 = 3 \,.\, 20 = 2 \,.\, 30 = 1\tfrac{1}{2} \,.\, 40 = \tfrac{1}{10} \,.\, 600 = 60.$$

Iloczyn ten przedstawia w *m* drogę przebytą.

W przykładach 1, 2, 3 występowały dwie wielkości od siebie zależne: 1) liczba *m* płótna (jaką możemy kupić za pewną kwotę pieniędzy np. za 60 *zł)* zależy od ceny 1 *m* płótna; 2) czas potrzebny do wykonania pewnej pracy zależy od liczby robotników; 3) czas potrzebny na przebycie pewnej drogi zależy od prędkości.

Wielkości występujące w każdym z powyższych przykładów nazwaliśmy odwrotnie proporcjonalnemi.

Aby się przekonać, czy dwie wielkości zależne od siebie są odwrotnie proporcjonalne, należy zbadać:

1) czy zwiększając jedną, tem samem zmniejszamy drugą;

2) czy zwiększając jedną 2, 3... razy, tem samem zmniejszamy drugą odpowiednio 2, 3... razy.

Zadania

1. W następujących zadaniach sporządź odpowiednie tabelki i przekonaj się, że liczby jednego wiersza są odwrotnie proporcjonalne do liczb drugiego wiersza. Wskaż następnie w każdem zadaniu te wielkości, których proporcjonalność wynika z tabelki. Oblicz iloczyn odpowiednich liczb i podaj co oznacza. Sporządź wkońcu wykres graficzny w odpowiedniej skali!
   a) Jeżeli 30 robotników wykonuje pewną pracę w 1 dniu, to ilu robotników wykona tę pracę w: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 5, *d)* 6, *e)* 10, *f)* 15 dniach?
   b) Jeżeli pewien odcinek podzielimy na 12 równych części, to taka część wynosi 1 *cm;* jaka jest długość części, jeśli dany odcinek podzielimy na: *a)* 3, *b)* 4, *c)* 6, *d)* 24, *e)* 120 równych części?
   c) Jeśli koło na pewnej drodze zrobiło 100 obrotów, to ile obrotów na tej samej drodze wykona koło o obwodzie: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4 razy mniejszym, *e)* 2, *f)* 4, *g)* 25 razy większym?
   d) Wiedząc, że w 1 sekundzie człowiek pływający robi drogę 1 *m*, w chodzie 1,5 *m*, wioślarz 2 *m*, człowiek w biegu 3 *m*, na rowerze 6 *m*, oblicz kolejno czasy, potrzebne na przebycie drogi 60 *m!*
2. Narysuj prostokąty o polu 6 cm^2 i o podstawie: 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm;* przekonaj się, że wysokości są odwrotnie proporcjonalne do podstawy!
3. Narysuj trójkąty o polu 4 cm^2 i o wysokości: 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm;* przekonaj się, że podstawy są odwrotnie proporcjonalne do wysokości!
4. Jeden robotnik wykona pewną pracę w tygodniu, pracując dziennie 6 godzin; ile godzin dziennie musi pracować: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 5, *e)* 6 robotników, aby tę pracę również w tygodniu wykonać? Przekonaj się, że liczba robotników jest odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennej pracy!
5. Iloczyn wynosi 30; czy mnożna jest odwrotnie proporcjonalna do mnożnika?
6. Dzielna wynosi 60; czy wartość ilorazu jest odwrotnie proporcjonalna do dzielnika?
7. Czy wartość ułamka o liczniku 6 jest odwrotnie proporcjonalna do mianownika?

Reguła trzech prosta

(Dla wielkości odwrotnie proporcjonalnych)

Pewną pracę wykonało 20 robotników w 18 dniach; w ilu dniach wykona tę pracę 12 robotników?

Zadanie to rozwiążemy dwoma sposobami:

I. 20 robotników potrzebuje 18 dni, 1 robotnik potrzebuje 20 razy więcej dni, t. j. 360 dni, 12 robotników potrzebuje 12 razy mniej dni, t. j. 30 dni.

A więc 12 robotników wykona powyższą pracę w 30 dniach.

II. Oznaczając przez x liczbę dni, w których 12 robotników wykona pracę, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

Pewną pracę wykona:

20 robotników w 18 dniach
12 robotników w x dniach

Wykładnikiem stosunku liczby robotników jest ułamek $\frac{20}{12}$; wykładnikiem stosunku odpowiednich dni pracy jest iloraz $18 : x$. Ponieważ liczba robotników jest odwrotnie proporcjonalna do liczby dni potrzebnych do wykonania danej pracy, więc odwrotność ułamka $\frac{20}{12}$ równa się ilorazowi $18 : x$.

Zatem $\frac{12}{20} = 18 : x$

Stąd $x = 18 : \frac{12}{20} = 30.$

A więc 12 robotników wykona pracę w 30 dniach.

Zadania

1. 12 robotników wykona pewną pracę w $2\frac{1}{2}$ dniach; w ilu dniach wykona tę samą pracę 15 robotników?
2. 30 robotników wykona pewną pracę w 16 godzinach; ilu robotników wykona tę samą pracę w 12 godzinach?
3. Pewien zapas żywności wystarczy dla 6 ludzi na 10 dni; na ile dni starczy tenże zapas dla 4 ludzi?
4. Pewien zapas żywności wystarczy dla 16 ludzi na 35 dni; dla ilu ludzi wystarczy ten zapas na 28 dni?
5. Pociąg, jadący z prędkością 50 *km* na godzinę, przebywa pewną drogę w $7\frac{1}{2}$ godzinach; z jaką prędkością musiałby jechać pociąg, aby tę samą drogę przebyć w 6 godzinach?
6. Dla przebycia pewnej drogi musi piechur zrobić 1440 kroków, każdy o długości $\frac{3}{4}$ *m;* ile kroków musiałby zrobić piechur, gdyby długość każdego kroku wynosiła 80 *cm?*
7. Kupiono 1000 dolarów złotych, płacąc 8 *zł* 92 *gr* za 1-go do-

lara; ileby kupiono dolarów za tę samą kwotę, gdyby 1 dolar złoty kosztował 9 *zł?*

8. Zarządca majątku otrzymał pewną kwotę pieniędzy, by wypłacić 72 robotnikom zarobek tygodniowy (t. j. 6 dniowy). Pokazało się jednak, że było zatrudnionych 108 robotników; iludniowy zarobek może im zarządca wypłacić?
9. Posłaniec, idąc z prędkością $4\frac{1}{2}$ *km* na 1 godzinę, odbywa drogę z miejscowości *A* do *B* w 6 godzinach; ile *km* musi robić w 1 godzinie, skoro ma przebyć tę drogę w 5 godzinach?
10. Stefek, chcąc sobie sprawić rakietę tennisową, musiałby składać na ten cel przez 3 miesiące po 40 *gr* dziennie; po ile musi składać, jeżeli chce kupić rakietę po 2 miesiącach?
11. Gdy rurą wpływa 21 *l* wody na minutę, to zbiornik napełni się w 12 godzinach; ile musiałoby wpływać wody na minutę, by zbiornik napełnił się w 9 godzinach? W jakim czasie napełniłby się zbiornik, gdyby rurą wpływało 36 *l* wody na minutę?
12. Przednie koło u wozu ma 3 *m* obwodu, tylne zaś $3\frac{3}{4}$ *m*; ile obrotów zrobiło w czasie jazdy tylne koło, gdy przednie zrobiło 460 obrotów?
13. Pewną sumę podzielono równo między 7 osób, przyczem każda otrzymała 30 *zł;* ile otrzymałaby każda osoba, gdyby tę sumę podzielono równo między 15 osób? Między ile osób należałoby podzielić tę sumę, chcąc, aby każda otrzymała po 21 *zł?*
14. Pewien odcinek podzielono na 12 równych części, o długości *8 cm;* na ile równych części należałoby podzielić ten odcinek, aby każda część miała długość 6 *cm?* Jakiej długości byłaby każda część, gdyby odcinek nasz podzielono na 64 równych części?
15. 20 robotników wykona pewną pracę w 18 dniach; w ilu dniach wykona tę samą pracę 15 robotników?

Rozwiązanie: 5 robotników wykona tę pracę w czasie: $4 \cdot 18$ dni $= 72$ dni. Zatem 15 robotników wykona tę pracę w czasie 3 razy krótszym, t. j. 72 dni $: 3 = 24$ dni.

Rozwiąż w podobny sposób następujące zadania:

a) 9 robotników wykona pewną pracę w 24 dniach; w ilu dniach wykona tę pracę 12 robotników?

b) Zadania: 1, 2, 3 i 4.

c) Książka ma 245 stron, a na każdej 40 wierszy; ile wierszy należałoby pomieścić na każdej stronie, aby ta książka miała 280 stron?

16. Kąt 42^0 mieści się w pewnym kącie 6 razy; ile razy mieści się w tym kącie kąt 36^0?
17. Dwa prostokąty mają równe pola; jeden z tych prostokątów ma podstawę 8 *cm*, wysokość 4 *cm*, drugi zaś ma podstawę:

    a) 6 *cm*, *b)* 10 *cm*, *c)* $7\frac{1}{2}$ *cm*. Jaka jest wysokość drugiego prostokąta? Rysunek!
18. Na pokrycie mebli potrzeba 24,5 *m* materji, szerokiej na 2 *m*; ile potrzeba metrów materji, szerokiej na 1,8 *m*?
19. 20 robotników ukończy pewną pracę w 18 dniach; w ilu dniach ukończyłoby tę pracę 12 robotników?

    Rozwiążemy to zadanie w następujący sposób:

    Zapiszmy je: 20 robotników — 18 dni

    12 „ — x „

    Szukaną liczbę dni oznaczyliśmy literą x. Ponieważ liczba robotników i liczba dni pracy są wielkościami odwrotnie proporcjonalnemi, więc iloczyny odpowiadających sobie liczb muszą być sobie równe. Liczbie 20 odpowiada liczba 18, liczbie zaś 12 odpowiada szukana liczba x.

    Mamy zatem: $x \,.\, 12 = 18 \,.\, 20,$

    więc $x \,.\, 12 = 360.$

    Ponieważ szukana liczba jest mnożnikiem, więc

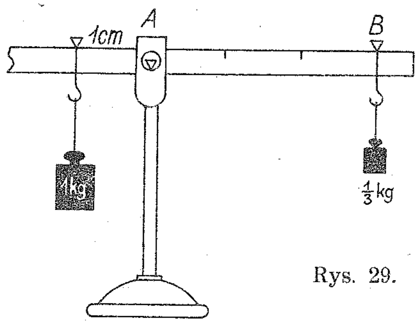
    $$x = 360 : 12 = 30.$$

    Widzimy, że 12 robotników wykona pracę w 30 dniach. Oblicz w podobny sposób, w ilu dniach ukończyłoby pracę: *a)* 5 robotników, *b)* 8 rob., *c)* 10 rob., *d)* 18 rob., *e)* 24 rob.
20. Z pewnej ilości wełny można otrzymać 72 *m* sukna, szerokiego na $1\frac{3}{4}$ *m*; *a)* ile *m* sukna, szerokiego na $2\frac{1}{4}$ *m*, można otrzymać z tej samej ilości wełny? *b)* jak szerokie będzie sukno, jeśli jego długość wyniesie 63 *m*?
21. Na pokrycie dachu zużyto 3500 dachówek, przyczem pole dachówki wynosiło 3,6 dcm^2; ile dachówek zużytoby na pokrycie tego dachu, jeśliby pole dachówki wynosiło 4 dcm^2?
22. Dwa trójkąty mają równe pola; jeden z nich ma podstawę 6 *cm*, wysokość 4 *cm*; drugi zaś ma:

    a) podstawę: *a)* 8 *cm*, *b)* 6 *cm*, *c)* 3 *cm*; jaka jest wysokość drugiego trójkąta?

    b) wysokość: *a)* 2 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* 3 *cm*; jaka jest podstawa drugiego trójkąta? Rysunek!

23. Na rys. 29 mamy dźwignię, t. j. belkę sztywną, która może obracać się około punktu A. Po lewej stronie belki zawieszono ciężar 1 *kg* w odległości 1 *cm* od punktu A. Ciężar ten mo-



Rys. 29.

żemy zrównoważyć, wieszając w dowolnym punkcie B (po prawej stronie) odpowiedni ciężarek. Doświadczenie uczy, że: *a)* wielkość tego ciężarka jest odwrotnie proporcjonalna do odległości AB; *b)* ciężarek ten równa się 1 *kg*, jeśli AB ma 1 *cm*.

a) Jaki ciężarek należy powiesić, jeśli AB ma długość: 2 *cm*, $2\frac{1}{2}$ *cm*, $3\frac{3}{4}$ *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, $\frac{1}{2}$ *cm*, $\frac{3}{4}$ *cm*?

b) Ile wynosi AB, jeśli ciężarek ma: 1 *kg*, $\frac{1}{2}$ *kg*, $\frac{3}{4}$ *kg*, 200 *g*, 2 *kg*?

Do zadań *a)* i *b)* sporządź tabelkę i wykres w odpowiedniej skali!

24. 1 robotnik wykona pewną pracę w 24 dniach; niech x robotników wykona tę pracę w y dniach.

Możemy więc napisać:

1 robotnik . . . . w 24 dniach
x „ . . . . w y „

Ponieważ te wielkości są odwrotnie proporcjonalne, więc iloczyny odpowiednich liczb są równe.

Zatem $x \cdot y = 1 \cdot 24$ czyli $xy = 24$.

Stąd $y = 24 : x$ czyli $y = \frac{24}{x}$.

Widzimy zatem, że wielkości x i y, odwrotnie do siebie proporcjonalne, spełniają równość: $y = \frac{24}{x}$.

Na podstawie tego wzoru możemy obliczyć liczbę dni y potrzebną na wykonanie pewnej pracy przez x robotników.

Np.: 2 robotników wykona tę pracę w $\frac{24}{2} = 12$ dniach.

Uwaga. Jeśli wielkości x i y, od siebie zależne i zmienne, spełniają np. równość: $y = \frac{10}{x}$, to wielkości x i y są do siebie odwrotnie proporcjonalne. Ile razy bowiem zwiększymy (lub zmniejszymy) liczbę x, tyle razy zmniejszy się także (lub zwiększy) liczba y.

a) 60 robotników wykona pewną pracę w 1 dniu; niech y oznacza liczbę robotników, którzy wykonają tę pracę w x dniach. Jaki otrzymasz wzór na y? Oblicz na podstawie tego wzoru liczbę robotników, którzy wykonają tę pracę w 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30 dniach. Tabelka!

b) Koło na pewnej drodze wykonało 300 obrotów; niech y obrotów wykona na tej drodze koło o obwodzie x razy większym (względnie mniejszym). Jaki otrzymasz wzór na y? Oblicz na podstawie tego wzoru liczbę obrotów na tej drodze koła 2, 3, 4, 5 razy większego i 2, 3, 4, 5 razy mniejszego. Tabelka!

c) Pole prostokąta wynosi 30 cm^2, podstawa ma x *cm*, wysokość zaś y *cm*. Jaki wzór otrzymasz na y? Oblicz na podstawie tego wzoru wysokość prostokata, wiedząc, że podstawa wynosi 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm*. Tabelka!

Wielkości zależne od kilku innych

Zadanie: 16 robotników wykonało pewną pracę w 15 dniach, pracując po 9 godzin dziennie; w ilu dniach wykonałoby tę pracę 12 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie?

Rozwiązanie: Przyjmujemy najpierw stałą liczbę godzin dziennej pracy, a mianowicie 9 godzin pracy.

Rozumujemy:

jeśli 16 robotników wykona pracę w 15 dniach,

to 1 robotnik wykona pracę w $16 \cdot 15$ dniach,

a 12 robotników wykona pracę w $\frac{15 \cdot 16}{12}$ dniach.

Przyjmujemy teraz stałą liczbę robotników, a mianowicie 12 robotników i rozumujemy:

jeśli przy 9-godzinnej dziennie pracy potrzeba $\frac{15 \cdot 16}{12}$ dni,

to przy 1-godzinnej dziennie pracy potrzeba $\frac{15 \cdot 16 \cdot 9}{12}$ dni,

a przy 8-godzinnej dziennie pracy potrzeba $\frac{15 \cdot 16 \cdot 9}{12 \cdot 8}$ dni,
t. j. $22\frac{1}{2}$ dnia.

Zatem 12 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, potrzebuje $22\frac{1}{2}$ dnia na wykonanie zadanej pracy.

Wynik ten otrzymaliśmy, rozwiązując 2 zadania z reguły trzech prostej. Ten sposób rozwiązywania nazywamy *regułą trzech złożoną*.

Zwyczajnie układa się następujący schemat rozwiązywania:

$$
\begin{array}{rlll}
16 \text{ rob.} & - & 9 \text{ godz.} - & 15 \text{ dn.} \\
1 \text{ rob.} & - & 9 \text{ godz.} - & 16 \,.\, 15 \text{ dn.} \\
12 \text{ rob.} & - & 9 \text{ godz.} - & \dfrac{15 \,.\, 16}{12} \text{ dn.} \\
12 \text{ rob.} & - & 1 \text{ godz.} - & \dfrac{15 \,.\, 16 \,.\, 9}{12} \text{ dn.} \\
12 \text{ rob.} & - & 8 \text{ godz.} - & \dfrac{15 \,.\, 16 \,.\, 9}{12 \,.\, 8} \text{ dn.}
\end{array}
$$

W zadaniu powyższem występowały następujące wielkości: liczba robotników, liczba dni pracy i liczba godzin pracy dziennej. Liczba dni potrzebna do wykonania pewnej pracy zależy od liczby robotników i liczby godzin dziennej pracy.

Przy tej samej liczbie godzin dziennej pracy, dwa, trzy ... razy więcej robotników wykona pracę w dwa, trzy ... razy mniejszej liczbie dni. Ta sama liczba robotników, pracując dwa, trzy ... razy więcej godzin dziennie, wykona pracę w dwa, trzy ... razy mniejszej liczbie dni.

Mówimy, że liczba dni pracy jest odwrotnie proporcjonalna do liczby robotników i odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennej pracy.

Podamy teraz inne przykłady, w których jedna wielkość zależy od kilku innych wielkości:

1. Pole prostokąta zależne jest od długości podstawy i długości wysokości. Jeżeli podstawę kilka razy powiększymy, *nie zmieniając wysokości*, to tyleż razy powiększy się pole. Jeżeli kilka razy powiększymy wysokość, *nie zmieniając podstawy*, to tyleż razy powiększy się pole.

Pole prostokąta zależy zatem w ten sposób od podstawy i wysokości, że jest wprost proporcjonalne do długości podstawy (przy tej samej wysokości) i wprost proporcjonalne do długości wysokości (przy tej samej podstawie).

2. Liczba dni marszu zależy od długości drogi i od liczby godzin dziennego marszu. Liczba dni marszu jest wprost proporcjonalna do długości drogi przy tej samej liczbie godzin dziennego

marszu, a odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennego marszu przy tej samej długości drogi.

Zadania

1. 18 robotników zarabia w 5 dniach 630 *zł*; ile zarobi 27 robotników w 6 dniach?
2. 7 robotników zarabia w 13 dniach 638 *zł* 82 *gr*; ilu robotników zarobi 1053 *zł* w 15 dniach?
3. 5 robotników zarabia w 7 dniach 254 *zł* 10 *gr*; w ilu dniach 11 robotników zarobi 638 *zł* 88 *gr*?
4. Piechur, idący przez 12 dni po 5 godzin dziennie, przechodzi 270 *km*; ile *km* przejdzie, idąc przez 16 dni po $5\frac{1}{2}$ godzin dziennie?
5. 15 robotników, pracujących po 9 godzin dziennie, wykopałoby w 4 dniach rów 100 *m* długi; w ilu dniach wykopie 9 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, rów długości 120 *m*?
6. Wykopanie rowu 15 *m* długości, 2 *m* szerokości i $\frac{3}{4}$ *m* głębokości kosztuje 135 *zł*; jakiej długości jest rów, którego wykopanie kosztuje 270 *zł*, a który ma $2\frac{1}{4}$ *m* szerokości i 80 *cm* głębokości?
7. Zapas chleba starczy dla 324 ludzi na 17 dni, jeżeli wydziela się dziennie po $\frac{3}{4}$ *kg* na osobę; na ile dni wystarczy ten zapas chleba dla 306 ludzi, otrzymujących dziennie $\frac{1}{2}$ *kg* na osobę?
8. 316 latarń, palących się po 7 godzin dziennie, zużywa w 24 dniach 7963,2 m^3 gazu; ile latarń, palących się po 9 godzin dziennie, zużyje w ciągu 27 dni 15 199,65 m^3 gazu?
9. Koło o obwodzie 3 *m* przejechało w 10 minut 6 *km*; w ilu minutach przejedzie 8 *km* koło o obwodzie $2\frac{1}{2}$ *m*, jeśli w minucie obraca się tyle razy co poprzednie?
10. Za $10\frac{1}{2}$ *m* sukna o szerokości $1\frac{1}{4}$ *m* zapłacono 120 *zł* 60 *gr*; ile zapłaconoby za $3\frac{1}{2}$ *m* tego sukna o szerokości $1\frac{1}{2}$ *m*?
11. Chodnik 100 *m* długości, $4\frac{1}{2}$ *m* szerokości ułożono z 3600 płyt; jakiej długości chodnik możnaby ułożyć z 5400 takich płyt, jeżeliby szerokość jego miała wynosić 6 *m*?
12. Zrobiono zapas siana na 40 tygodni dla 36 koni, licząc po $12\frac{1}{2}$ *kg* dziennie na konia; na jak długo wystarczyłby ten zapas siana dla 30 koni, jeśli dziennie wydawać się będzie 10 *kg* na konia?
13. Z 12 *kg* przędzy otrzymuje się 130 *m* płótna, 0,75 *m* szerokiego; ile *m* płótna, szerokiego na 1,25 *m*, otrzymamy z 18 *kg* przędzy?

14. 7 monterów potrzebuje 6 dni na założenie przewodu elektrycznego 273 m długiego; w jakim czasie 5 monterów założy przewód 325 m długi?
15. Aby wypompować wodę z kopalni, potrzeba 20 pomp, pracujących przez 12 dni po 15 godzin dziennie. Po upływie 5 dni 4 pompy popsuły się, a pozostałe pompowały po 18 godzin dziennie: w jakim czasie wypompowano wodę?
16. 8 robotników zgodziło się wybrukować podwórze w 13 dniach; po 5 dniach, pracując 8 godzin dziennie, wykonali trzecią część pracy. Ile godzin przez pozostałe dni muszą dziennie pracować, aby na czas pracę wykończyć?
17. Dwóch robotników wykonało pewną pracę w 10 godzinach; jeden z robotników wykonałby sam tę pracę w 15 godzinach. W jakim czasie drugi robotnik wykonałby tę pracę?
18. Puszczając wodę jednym kurkiem można napełnić basen w 2 godzinach, drugim zaś w 4 godzinach; jaki ułamek basenu napełni się wodą, jeżeli oba kurki będą równocześnie otwarte przez $\frac{3}{4}$ godziny?

Procenty

Określenia

Przypuśćmy, że mamy dane dwie wielkości np. dwa odcinki AB i CD i że: $AB:CD=\frac{1}{5}$.

Przedstawmy ten wykładnik stosunku w postaci ułamka o mianowniku 100, a więc: $AB:CD=\frac{20}{100}$.

Zatem: $AB=\frac{20}{100}\,CD$.

Odcinek AB wynosi 20 setnych części odcinka CD. Mówimy, że AB jest 20 procent odcinka CD.

Podobnie, jeżeli: $AB:CD=\frac{1}{7}$ to, przedstawiając ten ułamek w postaci ułamka o mianowniku 100, otrzymamy:

$$\frac{1}{7}=\frac{\frac{1}{7}\cdot 100}{100}=\frac{14\frac{2}{7}}{100}.$$

Zatem AB zawiera $14\frac{2}{7}$ setnych części odcinka CD, A więc AB wynosi $14\frac{2}{7}$ procent odcinka CD.

Widzimy stąd, że jednym **procentem** jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{100}$ tej wielkości. Dwa, trzy, pięć, półtora procent jakiejś wielkości są to odpowiednio $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{1{,}5}{100}$ tej wielkości.

Np. 5 procent 60 $m=\frac{5}{100}$ z 60 $m=\frac{5}{100}\cdot 60\ m=3\ m$,

$\frac{1}{2}$ procent 1000 $zł=\frac{0{,}5}{100}$ z 1000 $zł=\frac{0{,}5}{100}\cdot 1000\ zł=5\ zł$,

100 procent liczby $12=\frac{100}{100}$ z $12=\frac{100}{100}\cdot 12=12$.

Wyraz procent oznaczamy: %, a więc 7% oznacza 7 procent, $\frac{1}{2}$% oznacza pół procentu.

Przykłady.

1. Wino zawiera 15% alkoholu t. zn., że w 100 *l* wina zawartych jest 15 *l* alkoholu.
2. W lasach polskich jest 60% sosny, t. zn., że przeciętnie na 100 morgów lasu jest w tem 60 morgów sosny.
3. Polska produkuje 14,4% światowej produkcji ziemniaków, to znaczy, że ze zbiorów całego świata na 100 *q* ziemniaków wypada 14,4 *q* ziemniaków, pochodzących z Polski.
4. Księgarz, zakupując hurtownie książki, otrzymuje 30% opustu, czyli rabatu, to znaczy, że za towar wartości 100 *zł* płaci o 30 *zł* mniej, to jest płaci 70 *zł*.

   Niechaj k oznacza jakąś liczbę, p zaś procent. Zapytajmy się, jaka to jest liczba d, która wynosi p procent liczby k.

   Jedna setna część liczby k jest $k : 100$.

   Ponieważ d zawiera p setnych części liczby k więc

$$d = p \,.\, (k : 100) = (p\, k) : 100.$$

   A więc $d = \frac{p\,k}{100}$.

   Jeżeli więc $k = 12$, $p\% = 3\%$, więc $d = \frac{3 \,.\, 12}{100} = 0{,}36$.

Zadania

1. Oblicz: 3% z 100, 15% z 20, $7\frac{1}{2}$% z 1000, 200% z $2\frac{1}{2}$, 1% z 700, 6% z 15 000, 50% z 72, $\frac{1}{10}$% z 10 000, 8% z 25, 10% z 40, 5% z 0,125, 100% z 7,23.
2. Oblicz: 2%, 3%, 4% z *a)* 257, *b)* 684, *c)* 960, *d)* 1256.
3. Oblicz: 3%, 4%, 8%, $7\frac{1}{2}$% z *a)* 420, *b)* 0,430, *c)* 1,862, *d)* 0,0421.
4. Ile to jest: 8% z 1 *m*, 4% z 1 *kg*, 12% z 1 *km*, 2% z 1 dcm^2, $3\frac{1}{2}$% z 1 m^3, 75% z 1 *l*?
5. Ile to jest: 1%, 3%, $1\frac{1}{2}$%, 8%, 11%, $5\frac{1}{2}$% kwoty 300 *zł*?
6. Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej 3% z 856.

   Rozwiązanie: zaokrąglamy 856 do 900.

   Ponieważ 3% z 900 $= \frac{3 \,.\, 900}{100} = 27$, więc w przybliżeniu 3% z 856 wynosi 27.

   Podobnie liczymy w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej 4% z 0,00641.

Ponieważ 4% z $0{,}006 = \frac{4 \cdot 0{,}006}{100} = 0{,}00024$, więc $0{,}00024$ jest w przybliżeniu 4% z $0{,}00641$.

Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej: 1%, 2%, 3%, 4%, 5%, 8% z *a)* 645; *b)* 829; *c)* 1684; *d)* 20,83; *e)* 114,84; *f)* 0,0641; *g)* 0,00052.

7. Dlaczego: *a)* np. 5% liczby jest proporcjonalny do tej liczby, *b)* procent liczby np. 600 jest proporcjonalny do procentu? Sporządź tabelkę!
8. Jakim ułamkiem danej wielkości jest: 5%, 15%, 75%, $\frac{1}{2}\%$, $\frac{1}{10}\%$ tej wielkości?
9. Jakim procentem danej liczby jest: 10% z 10% tej liczby, 20% z 20%, 8% z 25%, 25% z 8%?
10. Wyraź procentem następujące ułamki danej wielkości: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{50}$, $\frac{13}{25}$, $1\frac{1}{2}$!
11. Wypełnij kratki liczbami dziesiętnemi, które otrzymasz, obliczając procent wskazany przez kolumnę z liczby wskazanej przez wiersz! (A więc w miejsce litery *a* należy wpisać 3% z 4).

	1%	2%	3%	4%
1	0,01	0,02		
2	0,02			
3				
4			*a*	

Przy pomocy powyższej tabelki oblicz: *a)* 7% z 80, 7% z 800, 7% z 8000; *b)* 4% z 30, 4% z 300, 4% z 30 000; *c)* 3% z 17, 5% z 45, 9% z 63, 8% z 16,5, 7% z 530, 9% z 2150.

Uwaga. Np. 5% z $265 = (5\%$ z $200) + (5\%$ z $60) + (5\%$ z $5)$.

12. Na towarze, kupionym za 7250 *zł*, kupiec zarobił 6%; ile *zł* zarobił i za ile sprzedał towar?
13. Na towarze, kupionym za 5200 *zł*, kupiec stracił $1\frac{1}{2}\%$; ile kupiec stracił i za ile sprzedał towar?
14. W klasie liczącej 35 uczniów, 80% przeszło do następnej klasy; ilu uczniów przeszło?
15. W bitwie, w której brało udział 1500 żołnierzy, zginęło 11%; ilu żołnierzy pozostało przy życiu?
16. Czynsz pewnej dzierżawy, wynoszący 2800 *zł* rocznie, podniesiono o 6%; ile wynosi zwiększony czynsz?
17. Za bilet 3-ciej klasy zapłacono 18 *zł* 30 *gr*, bilet zaś 2-giej klasy jest o 50% droższy; ile kosztuje bilet 2-giej klasy?
18. Cenę za towar, który kosztował 7 *zł* 50 *gr*, podniesiono o 8%; ile kosztował towar po podrożeniu?

19. Kupiec zakupił 1250 *l* wina za 8125 *zł*; po czemu winien sprzedawać 1 *l*, aby zarobić 7%?
20. Książka kosztuje 5 *zł*, z czego autor otrzymuje 11%, księgarz 30%, wydawca 40%, a reszta pokrywa koszta druku książki; ile kosztuje przeciętnie druk jednej książki? Ile księgarz zarobił na książce, przy sprzedaży której dał 12% opustu?
21. Przedsiębiorstwo przyniosło 285 000 *zł* dochodu brutto; koszta produkcji wynosiły 62%, administracji 11%, podatki 13%. Jaki był czysty dochód?
22. Szynka zawiera 28% wody, 25% białka, 36% tłuszczu, a resztę stanowią sole; oblicz ile każdej z tych substancyj zawiera się w $1\frac{1}{2}$ *kg* szynki?
23. Mięso wołowe traci wskutek gotowania 15% swego ciężaru; ile waży po ugotowaniu $\frac{3}{4}$ *kg* mięsa wołowego?
24. Las, którego stan drzewny wynosi 5868 m^3, posiada roczny przyrost $2\frac{1}{3}$%; jeśli 1 m^3 drzewa kosztuje 18 *zł*, jaka jest wartość tego lasu po upływie roku?
25. Towar waży brutto (z opakowaniem): *a)* 18,5 *kg*, *b)* 5,6 *kg*, *c)* 4,6 *kg*, tara (opakowanie) zaś wynosi: *a)* 8%, *b)* $12\frac{1}{2}$%, *c)* $8\frac{3}{4}$% tego ciężaru; ile waży towar netto (bez opakowania)?
26. Sprzedano majątek ziemski za: *a)* 650 000 *zł*, *b)* 440 000 *zł*, *c)* 300 000 *zł*; pośrednik, przy pomocy którego ta sprzedaż doszła do skutku, zastrzegł sobie: *a)* 1,4%, *b)* 1,2%, *c)* 1% ceny kupna czyli tak zwaną prowizję; ile otrzymał prowizji?
27. Ktoś ubezpieczył dom od ognia na: *a)* 60 000 *zł*, *b)* 20 000 *zł*, *c)* 16 000 *zł* i płacił zato rocznie: *a)* 1,6%, *b)* 3%, *c)* $\frac{1}{2}$% tej kwoty, czyli tak zwaną premję; ile wynosiła premja?
28. Kupiec przy sprzedaży towaru za 1250 *zł* dał 20% opustu; z kwoty, jaka stąd wynikła, dał dalszych 3% opustu, ponieważ towar był płacony gotówką. Ile otrzymał za towar?
29. Jednem „pro mille" jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{1000}$ tej wielkości i oznaczamy: ‰. Pro mille z jakiejś wielkości np. 5‰ z 60 000 oznacza $\frac{5}{1000}$ z 60 000 = 300.
   Oblicz: *a)* 6‰ z 1020 *zł*, *b)* 4‰ z 15 400 *zł*, *c)* 1‰ z 1 *kg*, *d)* 4‰ z 1 dcm^2, *e)* 5‰ z 1 dcm^3?
30. *a)* Wisła ma 1092 *km* długości i posiada na całym biegu średnie nachylenie 1,05‰, to znaczy, że co 1 *km* poziom jej opada o 1,05‰ z 1 *km*; oblicz, jak wysoko nad poziomem morza leżą źródła Wisły!

b) Niemen ma 992 *km* długości i posiada na całym biegu średnie nachylenie 0,201‰; jak wysoko nad poziomem morza leżą źródła Niemna?

c) W jakiej wysokości nad poziomem morza przepływa Niemen przez granicę polsko-litewską, jeśli odległość tego miejsca (wzdłuż rzeki) od źródeł wynosi 480 *km*?

31. Nachylenie średnie toru kolejowego między stacją *A* na wysokości 450 *m* nad poziomem morza a stacją *B* odległą o 30 *km* wynosi 2,54‰, między stacją *B* a stacją *C* odległą od *B* o 45 *km* wynosi 2,01‰, wreszcie między stacją *C* a stacją *D* odległą od stacji *C* o 38 *km* wynosi 1,95‰; w jakiej wysokości nad poziomem morza znajduje się stacja *D*?

32. Miasto miało 100 000 ludności. Przyrost ludności w ciągu dwóch lat wynosił kolejno: 6% i 5%; jaka była ludność tego miasta po upływie tych dwóch lat?

33. W Polsce jest 48,9% pola ornego, 22,2% lasów, 11,7% nieużytków, 10% łąk, 7,2% pastwisk. Przyjmując, że pole prostokąta o podstawie 1 *dcm* i o wysokości 1 *cm* (rys. 30) jest

Rys. 30.

obrazem powierzchni całej Polski, podzielono ten prostokąt na prostokąty I, II, III, IV i V, które odpowiednio obrazują użycie ziemi w Polsce;

a) jakie podstawy musiano obrać w tych prostokątach?

b) przyjmując powierzchnię Polski 388 390 km^2, oblicz powierzchnię: pola ornego, łąk, pastwisk, lasów i nieużytków!

34. Przedstaw, jak wyżej, rodzaj lasu w Polsce, wiedząc, że sosna stanowi 60% ogólnej powierzchni lasu, świerk 12%, olcha 6%, dąb 5%, jodła 3%, brzoza 3%, buk 3%, inne gatunki 8%!

35. Zbiór lnu w r. 1929 wyraża się następującemi procentami całkowitej produkcji światowej: Z. S. R. R. 57,9%, Polska 10,9%, Francja 4,2%, Litwa 5,6%, Belgja 3,1%, Łotwa 3,6%, Holandja 2,6%, Niemcy 1,7%, inne kraje 10,4%;

a) wiedząc, że światowa produkcja wynosi 6 000 000 *q*, oblicz produkcję poszczególnych krajów!

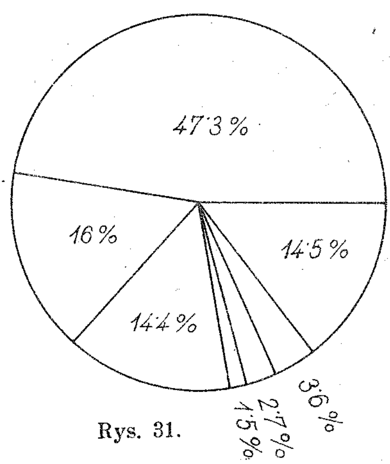
b) przedstaw to obrazowo, jak w zadaniu 33!

36. Długość linij kolejowych na świecie wynosi 1 229 800 *km*, z czego na Europę przypada 31,8%, na Amerykę Północną

40,5%, Południową 7,3%, na Australję 3,9%, na Azję 11,7%, a na Afrykę 4,8%. Przyjmując odcinek 1 *dcm* jako obraz długości wszystkich linij kolejowych na świecie, zaznacz na nim kolejno obrazy linij poszczególnych części świata i oblicz ich długości!

37. W roku 1931 zatrudnionych było w Polsce robotników: w górnictwie 22,7%, w hutnictwie 8,1%, w przemyśle włókienniczym 22,1%, metalowym 10,1%, mineralnym 7,5%, drzewnym 6,7%, spożywczym 7,9%, budowlanym 3,3%, chemicznym 5,6%, innym 6%;
a) wiedząc, że razem robotników było 580 400, oblicz liczbę robotników, zajętych w poszczególnych gałęziach przemysłu!
b) Przedstaw to obrazowo, jak w zadaniu 33!

38. W roku 1930 wyprodukowano na całym świecie 479 800 000 *q* żyta, z czego przypada na: Z. S. R. R. 47,3%, Niemcy 16%, Polskę 14,5%, Czechosłowację 3,6%, Stany Zjednoczone 2,7%, Francję 1,5% i inne kraje 14,4%;
a) oblicz produkcję w poszczególnych krajach!
b) jeżeli powierzchnia koła przedstawia produkcję światową, to produkcję poszczególnych krajów przedstawiają odpowiednio wycinki (rys. 31). Np. wycinek, dający obraz produkcj Z. S. R. R. ma kąt 47,3% z 360°. Jakim kątom odpowiadają inne wycinki?



Rys. 31.

39. Powierzchnia lądu wynosi 148 900 000 km^2, z czego przypada na: Europę 6,7%, Azję 29,7%, Afrykę 19,9%, Amerykę 28,2%, Australję 6%, Antarktydę 9,5%;
a) oblicz powierzchnię poszczególnych lądów!
b) przedstaw je obrazowo jak w zadaniu 38!

40. W roku 1930 wywieziono z Polski towaru za 2 433 000 000 *zł*, z której to kwoty przypada na: Niemcy 25,7%, na Anglję 12,1%, Austrję 9,3%, Czechosłowację 8,9%, Z. S. R. R. 5,3%, Szwajcarję 4,6%, Holandję 3,4%, Francję 3,1%, a reszta na inne kraje;

a) oblicz wartość wywiezionego towaru do poszczególnych krajów!

b) przedstaw obrazowo, jak w zadaniu 38!

41. Powietrze zawiera objętościowo 20,99% tlenu i 78,30% azotu; ile tlenu i azotu znajduje się w pokoju o wymiarach 4 *m*, 6 *m*, 3 *m*?

Obliczanie liczby której procent jest znany

Przypuśćmy, że mamy dane dwie liczby d i p i pytamy się, jaka to jest liczba, której $p\%$ równa się d. Oznaczmy szukaną liczbę przez k. Otrzymaliśmy poprzednio wzór:

$$d = \frac{p\,k}{100} \text{ lub } d = (p\,k) : 100.$$

Ponieważ $p\,k$ jest dzielną, więc $p\,k = 100\,d$.

W iloczynie $p\,k$ znamy jeden czynnik p i wartość iloczynu $100\,d$. Zatem drugi czynnik k wynosi:

$$k = (100\,d) : p \text{ czyli } k = \frac{100\,d}{p}.$$

Przykład. Jakiej kwoty 5% równa się 65 *zł*?

Rozwiązanie. Mamy $p = 5$, $d = 65$. Zatem z powyższego wzoru szukana kwota k wynosi *zł*: $k = \frac{100 \cdot 65}{5} = 1300.$

Moglibyśmy powyższe zadanie rozwiązać również w inny sposób: Oznaczając przez x *zł* szukaną kwotę, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

jeśli od 100 *zł* mamy 5 *zł*
to „ x „ „ 65 „

ponieważ występują tu wielkości wprost proporcjonalne, zatem:

$$x : 100 = 65 : 5 = 13$$

Stąd

$$x = 13 \cdot 100 = 1300.$$

Szukana kwota wynosi zatem 1300 *zł*.

Zadania

1. Oblicz liczbę, której: *a)* 8% wynosi 16, *b)* 12% wynosi 20, *c)* 5,5% wynosi 45, *d)* 15% wynosi 105,5, *e)* $6\frac{1}{2}$% wynosi 1170, *f)* $3\frac{1}{2}$% wynosi 63, *g)* 4,5% wynosi 81.
2. Oblicz liczbę, której: *a)* 12% wynosi 6; *b)* 7% wynosi 2,1; *c)* 16% wynosi 0,4; *d)* $4\frac{1}{2}$% wynosi 1,8; *e)* 6% wynosi $1\frac{1}{2}$.
3. Oblicz liczbę, której: *a)* 100% wynosi 100, *b)* 18% wynosi 18, *c)* 1% wynosi 100, *d)* 12% wynosi 1, *e)* 100% wynosi 1.
4. Oblicz liczbę, której: *a)* 120% wynosi 18, *b)* 130% wynosi 285, *c)* 145% wynosi 2840, *d)* $110\frac{1}{2}$% wynosi 48, *e)* 102,5% wynosi 648.
5. Ile kosztował towar, na którym kupiec, zarabiając 12%, zyskał 210 *zł*? Za ile sprzedał ten towar?
6. Kupiec sprzedał towar ze stratą $5\frac{1}{2}$%, wynoszącą 88 *zł*; za ile kupił i za ile sprzedał towar?
7. Spłacono 70% długu, co wyniosło 2730 *zł*; jaki był dług?
8. Księgarz daje 8% rabatu; jaka jest cena sprzedażna książek, od których rabat wynosi 32 *zł* 48 *gr*?
9. W pewnem mieście było 5170 mężczyzn, co wynosiło 47% ogółu mieszkańców; ile kobiet było w tem mieście?
10. *a)* Do następnej klasy przeszło 23 uczniów, co stanowiło 92% liczby uczniów w klasie; ilu uczniów było w klasie?
    b) Do następnej klasy nie przeszło 3 uczniów, co stanowiło $6\frac{2}{3}$% liczby uczniów w klasie; ilu uczniów przeszło?
11. Jaka była w r. 1930 światowa produkcja: *a)* srebra, *b)* złota, jeśli: *a)* 20,5%, *b)* 52,4% tej produkcji wynosiło: *a)* 1562,3 *t*, *b)* 333,3 *t*?
12. W pewnym powiecie jest 82% urodzajnej ziemi i 1125 km^2 nieurodzajnej; jaki procent jest ziemi nieurodzajnej i jak wielki jest ten powiat?
13. W r. 1929 było w szkołach średnich 62% chłopców, dziewcząt zaś 78 000; ilu było wszystkich uczni?
14. 82,6% światowej produkcji siarki przypada na Stany Zjednoczone. Inne kraje produkują razem rocznie 548 000 *t*. Ile wynosi roczna produkcja Stanów Zjednoczonych?
15. Ludność Krakowa z początkiem r. 1931 wynosiła 212 000 t. j. 233% liczby mieszkańców z r. 1900; jaka była w r. 1900 ludność Krakowa?
16. Sprzedano dom za 155 000 *zł*, t. j. za kwotę, która wynosiła 128% kosztów budowy tego domu; ile na tej sprzedaży zarobiono?

Obliczanie procentu

Przypuśćmy, że mamy dane dwie liczby k i d i pytamy się, jakim procentem liczby k jest liczba d. Oznaczmy szukany procent przez p. Mamy:
$$d = \frac{pk}{100} \quad \text{lub} \quad d = (pk) : 100$$
Stąd:
$$pk = 100\,d.$$
W iloczynie pk znamy jeden czynnik k i wartość iloczynu $100\,d$. Zatem drugi czynnik p wynosi:
$$p = (100\,d) : k$$
czyli
$$p = \frac{100\,d}{k}.$$
P r z y k ł a d. Jakim procentem kwoty 25 *zł* jest 3 *zł?*

R o z w i ą z a n i e: Mamy $k = 25$, $d = 3$, więc: $p = \frac{100\,.\,3}{25} = 12.$

Szukany procent jest 12%.

Moglibyśmy to zadanie rozwiązać również inaczej.

Oznaczając przez x szukany procent, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

jeśli od 25 *zł* mamy 3 *zł*,
to od 100 *zł* mamy x *zł*.

Ponieważ występują tu wielkości wprost proporcjonalne, zatem:
$$x : 3 = 100 : 25 = 4.$$
stąd
$$x = 12.$$
Szukany procent wynosi więc 12%.

Zadania

1. Jakim procentem pierwszej liczby jest druga liczba:
   a) 84 i 63, 120 i 6, 70 i 14, 75 i 3;
   b) 250 i 24, 3 i 21, 15 i 25, 120 i 270;
   c) 100 i 1, 26 i 26, 16 i 1, 1 i 14;
   d) 12,6 i 84, 1,46 i 0,2, 0,04 i 0,15, 0,2 i 1,84;
   e) $\frac{1}{2}$ i 10, $3\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{4}$, $5\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{3}$, $\frac{13}{5}$ i $\frac{11}{4}$.
2. Aby obliczyć w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem liczby 816 jest liczba 16, zaokrąglamy 816 do liczby 800. Oznaczając przez x szukany procent, mamy:
$$x = \frac{16\,.\,100}{800} = 2.$$
   Zatem w przybliżeniu 2% z 816 równa się 16.

Chcąc podobnie obliczyć w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem liczby 2 jest liczba 0,00916, zaokrąglamy 0,00916 do liczby 0,009. Oznaczając przez x szukany procent, mamy:

$$x = \frac{0{,}009 \,.\, 100}{2} = 4{,}5.$$

Zatem w przybliżeniu 4,5% z 2 równa się 0,00916.

Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem pierwszej liczby jest druga liczba:

a) 1983 i 20, 4,025 i 2, 62,145 i 8;

b) 4 i 108, 6 i 20,42, 5 i 0,0841;

c) 289,45 i 8, $3\frac{1}{2}$ i 1,946, 0,006932 i 0,2.

3. Wiemy, że liczba 684 jest niedokładna, przyczem błąd nie przekracza 5 (t. j. 5 jednostek najniższego rzędu). Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem liczby 684 jest liczba 5. Otrzymasz w ten sposób w przybliżeniu „błąd procentowy" liczby 684. Przyjmując, że błąd nie przekracza 5 jednostek najniższego rzędu, oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej błąd procentowy liczb: *a)* 243; *b)* 23,1; *c)* 1,16; *d)* 0,0458; *e)* 0,000283; *f)* 3,845; *g)* 1,0641: *h)* 0,0004567.
4. Kupiec zapłacił za towar 7200 *zł*, a sprzedał go za 7700 *zł;* jaki % ceny kupna zyskał kupiec?
5. Kupiono towar za 364 *zł*, a sprzedano go za 336 *zł*; jaki procent ceny kupna stracono?
6. Kupiono towar za 824 *zł* i sprzedano go z zarobkiem wynoszącym 123 *zł;* jaki procent ceny kupna zarobiono?
7. W szkole była w poszczególnych klasach następująca liczba uczniów: I 58, II 52, III 48, IV 45, z czego ukończyło klasę z pomyślnym wynikiem: w I 54, II 47, III 45, IV 41; oblicz dla każdej klasy procent promowanych!
8. W pewnem mieście było 8500 mężczyzn i 9100 kobiet; jaki procent mężczyzn, a jaki kobiet był w tem mieście?
9. Światowa produkcja ołowiu w r. 1930 wynosiła 1 729 000 *t*, z czego na Polskę przypada 44 000 *t;* jaki to jest procent światowej produkcji?
10. Długość linij kolejowych na świecie wynosi: w Europie 390 000 *km*, w Ameryce Północnej 500 000 *km*, w Ameryce Południowej 90 000 *km*, w Australji 50 000 *km*, w Azji 140 000 *km*, w Afryce 60 000 *km*; jaki procent całej długości linji kolejowych przypada na poszczególne części świata?

11. W Polsce w 1931 r. na ogólną liczbę mieszkańców 31 100 000 było wyznania: rzymsko-katol. 19 900 000, prawosławnego 3 850 000, grecko-katolickiego 3 390 000, mojżeszowego 3 000 000, ewangelickiego 840 000, innych 120 000; oblicz, jaki procent ogólnej liczby mieszkańców przypadał na poszczególne wyznania, i przedstaw wyniki geometrycznie zapomocą wycinków tego samego koła!

12. Z Polski w r. 1929 wysłano 83 000 000 listów zagranicę, w czem do Austrji, Czechosłowacji i Z. S. R. R. po 4 980 000, do Francji 7 470 000, do Stanów Zjednoczonych 5 810 000, do Gdańska i Kanady po 3 320 000, do Niemiec 26 560 000, do Wielkiej Brytanji 1 660 000, a do innych krajów resztę; oblicz, jaki procent ogólnej liczby listów przypada na poszczególne kraje!

13. W r. szk. 1929/30 było w Polsce 3 700 000 uczniów szkół powszechnych, 205 000 uczniów szkół średnich, 95 000 uczniów szkół przemysłowych, 85 000 uczniów szkół zawodowych i 45 000 uczniów szkół wyższych. Wyraź to w procentach ogólnej liczby uczącej się młodzieży!

14. Ludność Polski wynosiła okrągło:

w roku	1923	28 160 000	osób
„	1924	28 600 000	„
„	1925	29 030 000	„
„	1926	29 520 000	„
„	1927	29 860 000	„
„	1928	30 220 000	„

Oblicz: *a)* dla każdego z lat 1924—1928 procentowy przyrost ludności; *b)* procentowy przyrost ludności za pięciolecie 1923—1928.

15. Ludność Warszawy z początkiem roku 1931 wynosiła 1 115 000 osób; jaki to jest procent ludności polskiej (31 100 000 z tego roku?

16. Ludność Lwowa w r. 1900 wynosiła 160 000 osób, w r. 1925 235 000 osób; oblicz procentowy przyrost ludności Lwowa za pierwszą ćwierć wieku XX. Ile wyniosłaby ludność Lwowa w r. 1950, gdyby w drugiej ćwierci wieku XX, procentowy przyrost ludności był ten sam, co w pierwszej?

17. Dorzecze Dniestru posiada dróg wodnych 940 *km*, Dźwiny 540 *km*, Niemna 2800 *km*, Prutu 220 *km*, Prypeci 3560 *km*, Warty 810 *km*, Wisły 5280 *km*; jaki procent całej długości dróg wodnych w Polsce przypada na poszczególnę dorzecza?

18. Wywóz węgla polskiego zagranicę wyraża się w tysiącach *t* w sposób następujący: w 1925 r. — 8 158; w 1926 r. — 14 437; w 1927 r. — 11 226; w 1928 r. — 13 035; w 1929 r. — 13 934; w 1930 r. — 12 497; w 1931 r. — 13 827. Wyraź w procentach, o ile wywóz w poszczególnych latach był większy, aniżeli w 1925 r.

19. W 1913 r., w którym Gdańsk należał jeszcze do Niemiec, zawinęło do portu 2910 okrętów. Odkąd Gdańsk jest Wolnem Miastem i pozostaje pod protektoratem Polski, ruch okrętów wzrósł i wynosił: w 1929 r. — 5414 okrętów, w 1930 r. — 6 078 okrętów, w 1931 r. — 5959 okrętów; wyraź w procentach, o ile ruch okrętów w poszczególnych latach był większy, aniżeli w 1913 r.!

20. O rozwoju założonego przez Polskę portu w Gdyni świadczą następujące liczby: w 1927 r. wypłynęło z portu 519 okrętów, wywożąc 880 000 *t* węgla; w 1928 wywiozło 1093 okrętów — 1 800 000 *t*; w 1929 r. 1551 okrętów — 2 500 000 *t*; w 1930 r. 3148 okrętów — 4 400 000 *t*; oblicz w procentach:

a) o ile więcej wypłynęło okrętów w poszczególnych latach, niż w 1927 r.

b) o ile więcej wywieziono węgla przez Gdynię w poszczególnych latach, aniżeli w 1927 r.

21. Ilość radjoabonentów wynosiła: w 1926 r. — 5000; w 1927 r. 121 000; w 1929 r. — 203 000; w 1930 r. — 276 000; wyraź w procentach, o ile wzrastała liczba abonentów w wymienionych latach w porównaniu z 1925 r.

22. Koleje żelazne przewiozły: w 1926 r. — 147 000 000 osób, w 1927 r. — 159 000 000, w 1928 r. — 174 000 000; o ile w latach 1926, 1927 przewóz był procentowo mniejszy od przewozu w 1928 r.?

Procenty proste

Obliczanie dochodu

Kwotę, jaką dłużnik pożycza od kapitalisty, nazywamy **kapitałem**. Kapitalista za wypożyczenie pewnego kapitału na przeciąg pewnego czasu otrzymuje wynagrodzenie, zwane **dochodem**.

Wynagrodzenie, jakie kapitalista pobiera od każdych 100 *zł*, pożyczonych na 1 rok, nazywamy **procentem rocznym** lub **stopą** procentową. Jeżeli np. kapitalista od każdych 100 *zł* pożyczonych na 1 rok pobiera 6 *zł*, wówczas mówimy, że pobiera za pożyczkę 6% rocznie.

A więc stopa procentowa wskazuje, jaki procent kapitału jest wynagrodzeniem za jeden rok.

Przy pożyczkach występują zatem cztery wielkości: kapitał (pożyczony), stopa procentowa, czas (na który kapitał pożyczono) i dochód.

Gdy 3 z tych wielkości są dane, to czwartą możemy obliczyć.

Oznaczmy przez K kapitał (liczbę *zł*), przez P stopę procentową, przez L liczbę lat (na którą kapitał pożyczono). Zapytajmy się, jaki będzie dochód. Niechaj D oznacza dochód (liczbę *zł*).

100 *zł* da przez 1 rok P *zł* dochodu; przez L lat da L razy większy dochód t. zn. $L \,.\, P$ *zł*.

Zatem 1 *zł* da po L latach $(P \,.\, L) : 100$ *zł* dochodu. K *zł* da oczywiście K razy więcej dochodu. Należy więc iloraz $(P \,.\, L) : 100$ pomnożyć przez K. Ponieważ iloraz mnożymy, mnożąc dzielną więc:

$$D = (KPL) : 100 \text{ lub } D = \frac{KPL}{100} \quad \dots\dots \quad (1)$$

Przykład. Obliczyć dochód od 7648 *zł* danych na 8%, a wypożyczonych na 5 lat.

Rozwiązanie. Mamy tutaj $K = 7648$, $P = 8$, $L = 5$. Zatem:

$$D = \frac{7648 \,.\, 8 \,.\, 5}{100} = 3059{,}20.$$

Dochód więc wynosi 3059,20 *zł*.

Możemy powyższe zadanie rozwiązać bez pomocy wzoru w następujący sposób:

Ponieważ 100 *zł* za 1 rok przynosi 8 *zł*, to 1 *zł* za 1 rok przynosi $\frac{8}{100}$ *zł*, a 7648 *zł* za 1 rok przynosi $\frac{8 \,.\, 7648}{100}$ *zł*.

Zatem 7648 *zł* za 5 lat przynosi $\frac{8 \,.\, 7648 \,.\, 5}{100}$ *zł*.

Widzimy, że dochód $= \frac{8 \,.\, 7648 \,.\, 5}{100}$ *zł* $= 3059{,}20$ *zł*.

Uwaga 1. W zadaniach z procentu przyjmuje się, że rok ma 360 dni, czyli 12 miesięcy po 30 dni. Czas należy wyrażać w ułamkach lat np. 7 miesięcy $= \frac{7}{12}$ roku, 8 dni $= \frac{8}{360}$ r. i t. p.

Np. ile wynosi dochód od 800 *zł* wypożyczonych na 5% na

3 lata, 2 miesiące, 9 dni? Ponieważ 3 lata, 2 miesiące, 9 dni wyrażone w latach równają się: $3 + \frac{2}{12} + \frac{9}{360} = \frac{383}{120}$,

przeto $$D = \frac{800 \cdot 5 \cdot \frac{383}{120}}{100} = \frac{383}{3} = 127{,}78.$$

Zatem dochód wynosił 127 *zł* 78 *gr.*

Uwaga 2. Jeśli do kapitału doliczymy dochód, to otrzymamy t. zw. wartość końcową kapitału; kapitał pożyczony nazywamy wartością początkową kapitału.

Np. Kapitał 3000 *zł*, pożyczony na 4 lata na 5%, dał 600 *zł* dochodu. Zatem 3000 *zł* jest wartością początkową kapitału, a 3000 *zł* + 600 *zł* = 3600 *zł* jest wartością końcową kapitału. Oznaczając przez W wartość końcową kapitału, możemy napisać:

$$W = K + D.$$

Zadania

1. Oblicz dwoma sposobami dochód, jaki przynosi:
   a) kapitał 225 *zł* oddany na 2 lata na 6%;
   b) „ 2150 *zł* „ „ 3 lata i 4 miesiące na 6%;
   c) „ 3265 *zł* „ „ $4\frac{1}{2}$ miesiąca na 8%;
   d) „ 6836 *zł* „ „ $2\frac{1}{2}$ lat na $6\frac{3}{4}$%;
   e) „ 27 156 *zł* „ „ $2\frac{3}{4}$ lat na 10%;
   f) „ 5016 *zł* „ „ 1 miesiąc na $4\frac{1}{2}$%;
   g) „ 672 *zł* „ „ 5 miesięcy na $6\frac{1}{2}$%;
   h) „ 12 600 *zł* „ „ 10 miesięcy na $9\frac{3}{4}$%;
   i) „ 1000 dol. „ „ $\frac{1}{2}$ roku na 10%;
   j) „ 6824 *zł* „ od 14/VII do 19/VIII na $7\frac{1}{2}$%;
   k) „ 3580 *zł* „ od 10/IV do 21/VI na $8\frac{1}{2}$%.
2. Oblicz w zadaniu (1) wartość końcową kapitału, posługując się wzorem $W = K + D$!
3. Jaka jest wartość końcowa kapitału 380 *zł*, oddanego na 1 rok na 5%?
   Ponieważ dochód wynosi $\frac{5}{100} \cdot 380$ *zł*, a kapitał 380 *zł* $= \frac{100}{100} \cdot 380$ *zł*, więc wartość końcowa kapitału równa się:
   $$\frac{100}{100} \cdot 380 \text{ zł} + \frac{5}{100} \cdot 380 \text{ zł} = \frac{105}{100} \cdot 380 \text{ zł} = 399 \text{ zł},$$
   czyli 105% kapitału 380 *zł*.
   Oblicz w ten sposób wartość końcową kapitału: *a)* 495 *zł*, *b)* 3290 *zł*, *c)* 11 850 *zł*, oddanego na 1 rok na: *a)* 8%, *b)* 10,5%, *c)* $6\frac{3}{4}$%.
4. O kupno domu ubiega się dwóch kupców. Jeden daje gotówką 632 000 *zł*, drugi zaś 400 000 *zł* gotówką, a 250 000 *zł* po upły-

wie roku; który z kupców daje lepsze warunki, jeżeli kapitał można umieścić na 9%? (Objaśnienie: porównaj warunki po upływie roku!).

5. Kapitał *a)* 870 *zł*, *b)* 2745 *zł* przynosi przy danym procencie i czasie procentowania: *a)* 15 *zł*, *b)* 247 *zł* 5 *gr* dochodu; jaki dochód w tych samych warunkach przyniesie kapitał: *a)* 609 *zł*, *b)* 3164 *zł*?
6. Kapitał: *a)* 8250 *zł*, *b)* 1247 *zł* przynosi przy danym procencie i czasie procentowania dochód: *a)* 680 *zł*, *b)* 87 *zł* 29 *gr*; jaki kapitał w tych samych warunkach przyniesie *a)* 510 *zł*, *b)* 143 *zł* 57 *gr* dochodu?
7. Pewien kapitał oddany na umówiony procent przyniósł po 5 latach 2512 *zł* dochodu; *a)* jaki dochód przyniesie ten kapitał po $3\frac{1}{2}$ latach, *b)* w ilu latach przyniesie 4521 *zł* 60 *gr* dochodu?
8. Kapitał 500 *zł* oddano na 12%. Po roku doliczono do tego kapitału dochód i znowu pożyczono na 1 rok na tych samych warunkach; jaka była wartość końcowa kapitału?
9. Kapitał 1000 *zł* oddano na 10%. Po roku doliczono do tego kapitału dochód i znowu pożyczono na rok na tych samych warunkach; jaki będzie dochód po 2 latach?

Obliczanie kapitału

Przypuśćmy, że znamy P (stopę procentową), L (liczbę lat, na które pożyczono kapitał), D (dochód po L latach). Zapytajmy się, jaki kapitał pożyczono. Oznaczmy ten kapitał, jak poprzednio, przez K. Mamy wzór:

$$D = \frac{KPL}{100} \text{ lub } D = (KPL) : 100.$$

Stąd $KPL = 100\,D$.

Ponieważ w iloczynie $KPL = K.(PL)$, nieznanym czynnikiem jest K, więc $K = (100\,D) : (PL)$.

A więc
$$K = \frac{100\,D}{PL}.$$

P r z y k ł a d. Jaki kapitał pożyczony na 4 lata na 9% przyniesie 2340 *zł* dochodu?

R o z w i ą z a n i e. Mamy $L = 4$, $P = 9$, $D = 2340$.

Zatem:
$$K = \frac{100 \cdot 2340}{9 \cdot 4} = 6500.$$

Szukany więc kapitał wynosi 6500 *zł*.

Moglibyśmy to zadanie rozwiązać również przy pomocy reguły trzech. Oznaczmy przez x szukany kapitał.

100 *zł* (na 9% przez 4 lata) przyniesie 36 *zł* dochodu
x *zł* („ 9% „ 4 „) „ 2340 *zł* „

Ponieważ kapitał jest wprost proporcjonalny do dochodu, więc:

$$x : 100 = 2340 : 36 = \tfrac{2340}{36}.$$

Zatem: $$x = \tfrac{2340}{36} \cdot 100 = 6500.$$

Zadania

1. Jaki kapitał oddany

a)	na 5%	przyniesie po	4 latach	2462 *zł*	dochodu
b)	„ 6%	„ „	2 „	660 *zł*	„
c)	„ $7\frac{1}{2}$%	„ „	4 miesiącach	65 *zł*	„
d)	„ 8%	„ „	5 „	120 *zł*	„
e)	„ $4\frac{1}{2}$%	„ „	4 „	117 *zł* 78 *gr*	„
f)	„ 12%	„ „	5 „	423 *zł*	„
g)	„ $3\frac{1}{2}$%	„ „	45 dniach	14 *zł*	„
h)	„ $5\frac{1}{2}$%	„ „	105 „	77 *zł*	„
i)	„ 8%	„	od 3/III do 29/X	134 *zł*	„
j)	„ 9%	„	miesięcznie	750 *zł*	„
k)	„ 11%	„	po 2 lat. 11 mies.	14 341 *zł* 25 *gr*	„

2. Majątek ziemski przynosi rocznie 12 750 *zł* dochodu; jaki kapitał, umieszczony na 8%, przyniesie ten sam dochód?
3. Kapitał *a)* 3240 *zł*, *b)* 7004 *zł* pożyczono na pewien czas na *a)* 8%, *b)* 9%; jaki kapitał, oddany na *a)* 6%, *b)* 8,5%, przyniesie w tym samym czasie ten sam dochód?
4. Kapitał *a)* 8040 *zł*, *b)* 1134 *zł* pożyczono na pewien czas na *a)* 9%, *b)* $8\frac{1}{2}$%; na jaki procent należy oddać kapitał *a)* 10 800 *zł*, *b)* 1071 *zł*, aby w tym samym czasie przyniósł ten sam dochód?
5. Kapitał *a)* 6184 *zł*, *b)* 5160 *zł* oddano na *a)* 5 lat, *b)* $4\frac{1}{2}$ lat na pewien procent; jaki kapitał, oddany na *a)* 8 lat, *b)* $6\frac{3}{4}$ lat, na ten sam procent, przyniesie ten sam dochód?
6. Kapitał *a)* 1480 *zł*, *b)* 558 *zł* oddano na *a)* 6 lat, *b)* $5\frac{1}{2}$ lat na pewien procent; na ile lat na ten sam procent trzeba pożyczyć kapitał *a)* 1620 *zł*, *b)* 396 *zł*, aby otrzymać ten sam dochód?

Czas oprocentowania

Przypuśćmy, że znamy K (kapitał pożyczony), P (stopę procentową), D (dochód). Zapytajmy się, na ile lat pożyczono kapitał. Oznaczmy przez L liczbę lat.

Otrzymaliśmy wzór: $D = \frac{KPL}{100}$ czyli $D = (KPL) : 100$.

Stąd $KPL = 100\ D$.

Ponieważ w iloczynie $KPL = (KP) \cdot L$ nieznanym czynnikiem jest L, zatem $L = (100\,D) : (KP)$.

A więc $$L = \frac{100\,D}{KP}.$$

P r z y k ł a d. W jakim czasie kapitał 3610 *zł* oddany na 9% przyniesie 1949,4 *zł* dochodu?

R o z w i ą z a n i e. Mamy $D = 1949{,}4$ *zł*, $K = 3610$ *zł*, $P = 9$. Zatem

$$L = \frac{100 \cdot 1949{,}4}{3610 \cdot 9} = 6.$$

A więc po 6 latach otrzymamy żądany dochód.

Moglibyśmy to zadanie rozwiązać również przy pomocy reguły trzech. Oznaczmy przez x liczbę lat.

(3610 *zł* na 9%)	przez 1 rok	przyniesie dochodu	$\frac{9}{100} \cdot 3610$ *zł*
(„ „ „)	„ x lat	„ „	1949,4 *zł*.

Ponieważ liczba lat jest proporcjonalna do dochodu, więc:

$$x : 1 = 1949{,}4 : \frac{3610 \cdot 9}{100}.$$

Zatem $x = 6$.

Zadania

1. W jakim czasie:

a)	1248 *zł*	oddane na	8%	dadzą	37 *zł*	34 *gr*	dochodu
b)	7584 „	„ „	$9\frac{1}{2}$%	„	330 „	02 „	„
c)	3600 „	„ „	8%	„	480 „		„
d)	1168 „	„ „	5%	„	1203 „	09 „	„
e)	1640 „	„ „	6%	„	2132 „		„
f)	465 „	„ „	9%	„	167 „	40 „	„
g)	4275 „	„ „	6%	„	5044 „	50 „	„
h)	7310 „	„ „	9%	„	804 „	10 „	„

2. W jakim czasie kapitał:

a)	1200 *zł*	oddany na	5%	ma wartość końcową	1440 *zł*	
b)	1650 „	„ „	8%	„ „ „	1705 „	
c)	2144 „	„ „	9%	„ „ „	2168 „	21 *gr*
d)	5940 „	„ „	$9\frac{1}{2}$%	„ „ „	8198 „	20 „

3. Ktoś wypożyczył 3500 na 6% na 2 lata; w jakim czasie otrzymałby ten sam dochód, gdyby wypożyczył swój kapitał na 8%?

4. Pewien kapitał oddano na *a)* 6%, *b)* $7\frac{1}{2}$% na *a)* 9 lat, *b)* $8\frac{1}{2}$ lat; na jaki procent trzeba ten kapitał umieścić, aby po *a)* 8 latach, *b)* 5 latach przyniósł ten sam dochód?
5. Pewien kapitał oddano na *a)* 10%, *b)* $12\frac{1}{2}$% na *a)* $4\frac{1}{2}$ lat, *b)* 6 lat; w ilu latach ten kapitał przyniesie ten sam dochód, jeśli przyjmiemy, że oddany był na *a)* 9%, *b)* 12%?

Stopa procentowa

Przypuśćmy, że znamy K (kapitał pożyczony), L (liczbę lat, na które kapitał pożyczono), D (dochód). Zapytajmy się, na jaki procent pożyczono. Niechaj P oznacza stopę procentową.

Mamy $$D = \frac{KPL}{100} \text{ lub } D = (KPL) : 100.$$

Stąd $$KPL = 100\,D.$$

Ponieważ w iloczynie $KPL = (KL)\,.\,P$ nieznanym czynnikiem jest P, zatem $P = (100\,D) : (KL)$.

A więc $$P = \frac{100\,D}{KL}.$$

P r z y k ł a d. Na jaki procent pożyczono kapitał 3500 *zł*, jeśli po 4 latach przyniósł 840 *zł* dochodu?

R o z w i ą z a n i e. Mamy $K = 3500$, $L = 4$, $D = 840$.

A więc $$P = \frac{100\,.\,840}{3500\,.\,4} = 6.$$

Zatem kapitał pożyczono na 6%.

Moglibyśmy również to zadanie rozwiązać przy pomocy reguły trzech. Oznaczmy przez x stopę procentową.

(3500 *zł* po 4 latach) na 1% przyniesie dochodu $\frac{4}{100}\,.\,3500$ *zł*
(„ „ „ „ „) „ x% „ „ 840 *zł*.

Ponieważ dochód jest wprost proporcjonalny do stopy procentowej, więc:
$$x : 1 = 840 : \frac{3500\,.\,4}{100}.$$

Zatem $x = 6$.

Z a d a n i a

Przy jakim procencie:

a)	kapitał	2460 *zł*	da po	3 latach	405 *zł* 90 *gr*	dochodu
b)	„	9725 „	„ „	9 miesiącach	291 „	„
c)	„	2280 „	„ „	21 dniach	3 „ 99 „	„
d)	„	5184 „	„ „	100 dniach	57 „ 60 „	„

e) kapitał 6440 *zł* da po 3 miesiącach 48 *zł* 30 *gr* dochodu
f) „ 2150 „ „ „ 3 latach 4 mies. 430 „ „
g) „ 1000 „ „ „ 10 latach 1000 „ „

2. Przy jakim procencie:

a) kapitał 5600 *zł* ma po 5 latach wartość końc. 6760 *zł*
b) „ 2000 „ „ „ 3 lat. 4 mies. „ „ 2300 „
c) „ 9725 „ „ „ 9 miesiącach „ „ 10 016 „ 75 *gr*
d) „ 5400 „ „ „ 5 latach „ „ 6642 „
e) „ 425 *zł* 50 *gr* „ „ 4 latach „ „ 476 „ 56 „

3. Kupiec zaciągnął 7 kwietnia pożyczkę 1300 *zł* i zobowiązał się wypłacić za nią 7 sierpnia 1332 *zł* 50 *gr*; na jaki procent wziął pożyczkę?
4. Na jaki procent trzeba oddać 1 *zł*, aby jego wartość końcowa po $12\frac{1}{2}$ latach wynosiła 2 razy tyle, t. j. 2 *zł*?
5. Pewien kapitał, oddany na *a)* 8%, *b)* $7\frac{1}{2}$%, przyniósł po pewnym czasie *a)* 645 *zł*, *b)* 585 *zł* dochodu; na jaki procent należy ten kapitał umieścić, aby w tym samym czasie przyniósł *a)* 774 *zł*, *b)* 624 *zł* dochodu?
6. Pewien kapitał, oddany, na *a)* 11%, *b)* $10\frac{1}{2}$%, przyniósł po pewnym czasie *a)* 1034 *zł*, *b)* 903 *zł* dochodu; jaki dochód w tym samym czasie da ten kapitał, jeśli będzie umieszczony na *a)* 9%, *b)* $10\frac{3}{4}$%?

Rabat, brutto, skonto, prowizja

Zadania

1. Arkusz papieru kosztuje 4 *gr*. Przy zakupnie 100 arkuszy daje kupiec 10%, przy zakupnie 500 arkuszy 12%, a przy zakupnie 1000 arkuszy 15% rabatu; ile należy zapłacić za 100, za 500, za 1000 arkuszy papieru?
2. Kupiec sprzedał 84 *m* sukna za 1108 *zł* 80 *gr*, dając 12% rabatu; po ile sprzedawał kupiec 1 *m* tego sukna bez rabatu?

   Licz: za 100 *zł* (po odliczeniu rabatu) 88 *zł*
   „ *x* „ („ „ „) 1110,8 *zł*.

3. Kupiec sprzedał 120 *l* wina, którego litr kosztował 6 *zł*, z pewnym rabatem za 669 *zł* 60 *gr*; ile % wynosił rabat?
4. W pace wysłano 80 *kg* owoców; ile waży paka, jeżeli opłata za przesyłkę 1 *kg* wynosi 16 *gr*, opłacono zaś 15 *zł* 20 *gr*?
5. Oblicz wagę netto, jeżeli waga brutto wynosi 20 *kg*, a tara $4\frac{1}{2}$% wagi brutto!

6. Oblicz wagę brutto, jeżeli waga netto wynosi 18 *kg*, a tara 15% wagi brutto!
7. Ile procent wynosi tara, jeżeli waga brutto wynosi 30 *kg*, a waga netto 27,45 *kg*?
8. Jeżeli ktoś kupuje towar w większej ilości, to otrzymuje opust na cenie, który nazwaliśmy rabatem. Należności za towar czasami nie płaci się natychmiast gotówką, ale dopiero po kilku miesiącach. Jeżeli ktoś jednak płaci gotówką, to otrzymuje na cenie towaru opust, który nazywa się skontem. Np. ktoś zakupił 20 *t* węgla po 75 *zł* za tonnę, a ponieważ płacił gotówką, zapłacił o 150 *zł* mniej. W tym wypadku skonto wynosi 150 *zł*; ile % ceny węgla wynosi skonto?
9. Ktoś zakupił 40 tonn węgla po 72 *zł* za tonnę. Ponieważ płacił gotówką, zapłacił o 280 *zł* mniej; ile % ceny węgla wynosi skonto?
10. Przy zakupnie towaru za 4350 *zł*, za który płacono gotówką, otrzymano $8\frac{1}{2}$% skonta; ile zapłacono za towar?
11. Handlarz zakupił żelaza za 16 500 *zł* i zapłacił natychmiast gotówką tylko 15 427 *zł* 50 *gr*; ile % skonta otrzymał?
12. Towar waży 2332 *kg* brutto, tara zaś wynosi 6%; ile należy zapłacić za ten towar, jeżeli 1 *kg* towaru netto kosztuje 72 *gr*, rabat zaś wynosi $2\frac{3}{4}$%?
13. Pośrednik pobiera za sprzedanie towaru 8‰ prowizji (t. j. wynagrodzenia za pośrednictwo); ile *zł* otrzyma, gdy za jego pośrednictwem sprzedano towaru za 25 000 *zł*?
14. Za ubezpieczenie towaru zapłacił kupiec 26 *zł* 25 *gr*, t. j. $1\frac{3}{4}$% wartości towaru; oblicz wartość towaru!
15. Kupiec sprowadził 10 skrzyń kawy, z których każda ważyła 40 *kg* brutto. Tara wynosiła 10% wagi brutto; ile zapłaci za kawę, jeżeli przewozowe za 1 *kg* (brutto) wynosi 35 *gr*, a otrzymał 6% rabatu z ceny 20 *zł* za 1 *kg*?
16. Kupiec zakupił 460 *kg* winogron po 2 *zł* 40 *gr* za 1 *kg*, a płacąc gotówką, otrzymał 5% skonta. Zepsuło się 12% winogron; po czemu ma sprzedawać 1 *kg*, jeżeli chce zarobić 16% włożonej gotówki?
17. Za ubezpieczenie zboża na wypadek gradobicia zapłacono 120 *zł* tak zwanej premji, liczonej jako $\frac{3}{4}$% wartości zboża; jak wysoko oszacowano zboże?
18. Ajent handlowy w Wilnie sprzedał na rachunek fabrykanta w Poznaniu narzędzia rolnicze. Po odciągnięciu komisowego,

wynoszącego 7%, przesłał mu 11 552 *zł*; za jaką kwotę sprzedał narzędzia?

19. Kupiec sprowadził towaru za 1200 *zł*, przyczem otrzymał 6% skonta, ponieważ płacił gotówką. Koszta przewozu wyniosły 88 *zł*, a pośrednikowi zapłacił 30 *zł*. Połowę towaru sprzedał za 640 *zł*; za ile musi sprzedać drugą połowę, jeżeli chce zarobić 20% wyłożonych pieniędzy?

Stopy

Określenie

Zawartość szlachetnych metali, t. j. platyny, złota lub srebra w stopach (otrzymanych przez stopienie szlachetnego metalu z innemi metalami), określamy **próbą**. Próba jest to wykładnik stosunku ciężaru szlachetnego metalu, zawartego w danym stopie do ciężaru całego stopu.

Np. Stop, zawierający 18 *g* czystego srebra i 2 *g* miedzi jest srebrem próby $\frac{18}{18+2}=\frac{18}{20}=0{,}9$.

Ponieważ przy danej próbie ciężar szlachetnego metalu jest wprost proporcjonalny do ciężaru stopu, więc 1 *g* srebra próby 0,9 zawiera 0,9 *g* czystego srebra. Znając ciężar stopu i próbę, możemy obliczyć ciężar metalu szlachetnego, zawartego w stopie.

Np. Ile czystego srebra zawiera 680 *g* srebra próby 0,875?

Ponieważ 1 *g* stopu zawiera 0,875 *g* czystego srebra, więc 680 *g* stopu zawiera 680 . 0,875 *g* czystego srebra, czyli 595 *g* czystego srebra.

Zadania

1. Jakiej próby są stopy, zawierające: *a)* 6,3 *g* czystego srebra i 2,7 *g* miedzi; *b)* 45 *g* czystego złota i 9 *g* miedzi; *c)* 52 *g* czystego srebra i 12 *g* miedzi?
2. Ile czystego srebra znajduje się w stopie, który waży: *a)* 845 *g*, *b)* 0,65 *kg*, *c)* 0,712 *kg*, a jest próby: *a)* 0,76, *b)* 0,85, *c)* 0,68?
3. Karat równa się $\frac{1}{24}$ i służy (w systemie niemetrycznym) do wyrażania, ile *g* czystego złota przypada na 24 *g* stopu. Np. 14-karatowe złoto zawiera 14 *g* czystego złota i 10 *g* innych metali (miedzi). Jakiej próby jest złoto: *a)* 14-, *b)* 16-, *c)* 18-karatowe?
4. Stopiono razem 32 *g* srebra próby 0,825, 40 *g* próby 0,85 i 75 *g* próby 0,924; jakiej próby będzie nowy stop?

5. Stopiono razem 83 *g* złota próby 0,75, 42 *g* próby 0,82 i 25 *g* czystego złota; jakiej próby będzie nowy stop?
6. Dzwony leją ze stopu, który zawiera 390 *kg* miedzi, 110 *kg* cyny, 5 *kg* cynku i 4 *kg* ołowiu; ile *kg* każdego z tych metali potrzeba do dzwonu, który waży 1600 *kg*? (Podziel 1600 w stosunku 300 : 110 : 5 : 4!).
7. Do odlewu rzeźb używa się bronzu, który zawiera 26 *kg* miedzi, 2 *kg* cyny, 1 *kg* cynku i 1 *kg* ołowiu; ile *kg* każdego z tych metali użyto przy odlewie rzeźby, wagi 2000 *kg*?

Wiadomości o oszczędnościach i kredycie. P. K. O.

Rachunek monet

Monety są środkiem płatniczym, sporządzonym wedle określonych przepisów. Monety wybija się zazwyczaj ze złota, srebra, niklu i miedzi. Ponieważ złoto i srebro są metalami miękkiemi, więc dodaje się przymieszkę innego metalu, najczęściej miedzi. Monety są więc wybijane ze stopu. Moneta nazywa się główną, jeżeli istnieje obowiązek przyjmowania jej w każdej ilości. Moneta nazywa się zdawkową albo bilonem, jeżeli niema obowiązku przyjmowania jej w każdej ilości.

Moneta zdawkowa służy głównie do drobnych wypłat.

Jeżeli w pewnym kraju wybija się monetę główną ze złota, to mówimy, że w tym kraju jest waluta złota.

W Polsce istnieje waluta złota. Jednostką monety jest złoty (*zł*), który dzieli się na 100 groszy (*gr*).

Polskie monety główne wybija się ze złota próby 0,900 w sztukach po 100 *zł*, 50 *zł*, 25 *zł*. Moneta 25 *zł* nazywa się dukatem polskim.

Polskie monety zdawkowe są: 10 *zł* wagi 22 *g* ze srebra próby 0,750; 5 *zł* wagi 11 *g* ze srebra próby 0,750; 2 *zł* wagi 4,4 *g* ze srebra próby 0,750; 1 *zł* wagi 7 *g* z czystego niklu; 50 *gr*, 20 *gr* i 10 *gr* z niklu; 5 *gr*, 2 *gr* i 1 *gr* z bronzu.

Bilon i „pieniądze papierowe“ czyli banknoty są zastępczym środkiem pieniężnym i uprawniają do otrzymania w Banku Polskim tyle *zł* w złocie, na ile opiewają.

Podajemy niżej zestawienie monet najważniejszych państw:

Państwo	Moneta	Waga jednostki w g	Liczba sztuk wybijanych z 1 kg czystego złota	Próba monety
Anglja	Suweren 1 *£*	7,9881	136,5675	0,916
Austrja	Szyling 1 *S*	0,23524	4723,2	0,900
Czecho-słowacja . .	Korona czeska 1 *Kč*	0,04953	22432	0,900
Gdańsk	Gulden 1 *G*	0,31952	3414,2	0,917
Niemcy	Marka 1 *RM*	0,39825	2790	0,900
Polska	Złoty 1 *zł*	0,18755	5924,44	0,900
Rosja	Rubel 1 *R*	0,86026	1291,60	0,900
Skandynawja	Korona	0,44803	2480	0,900
Stany Zjedn. Ameryki Pn.	Dolar 1 *$*	1,67181	664,615	0,900
Szwajcarja . .	Frank szwajcarski 1 *Frs.*	0,32258	3414,44	0,900
Węgry	Pengö 1 *P*	0,2924	3800	0,900

Zadania

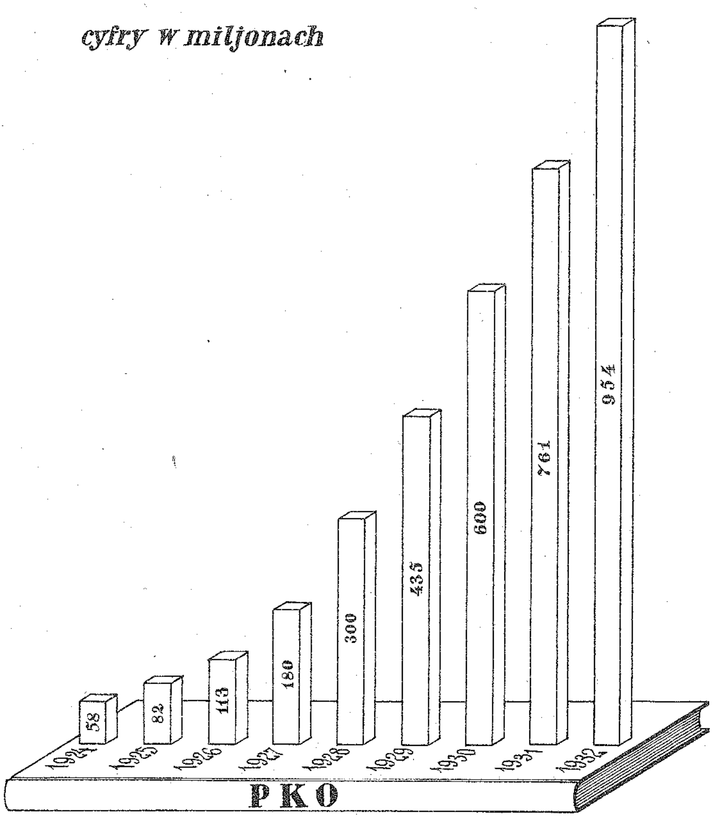
1. Ile czystego złota zawiera: *a)* 1 *£*, *b)* 100 *S*, *c)* 25 *G*, *d)* 100 *Kč*, *e)* 20 *RM*, *f)* 25 *zł*, *g)* 10 *R*, *h)* 20 Koron Skandynawskich, *i)* 10 *$*, *j)* 20 *Frs*, *k)* 20 *P*?
2. Ile: *a)* *£*, *b)* *S*, *c)* *G*, *d)* *Kč*, *e)* *RM*, *f)* *zł*, *g)* *R*, *h)* Koron Skandynawskich, *i)* *$*, *j)* *Frs*, *k)* *P* kosztuje 1 g czystego złota?
3. Jaka jest wartość w *zł* funta tureckiego, który waży 7,216 g i jest próby 0,916?
4. Jakiej próby jest 20 jenów (moneta japońska), jeśli moneta ta waży 16,6 g, a z 1 kg czystego złota wybija się $66\frac{2}{3}$ sztuk tej monety?
5. Jaka jest wartość: *a)* 25 *G*, *b)* 10 *R*, *c)* 20 *Frs* w *zł*?
6. Jaka jest wartość: *a)* 20 *P* w *Frs*, *b)* 1 *£* w *G*, *c)* 100 *Kč* w *RM*?

Instytucje finansowe

Instytucjami finansowemi są kasy oszczędności oraz banki. Ich zadaniem jest: *a)* gromadzić oszczędności społeczeństwa, *b)* udzielać kredytu (t. j. pożyczek), *c)* pośredniczyć w obrotach pieniężnych. Rozróżniamy instytucje finansowe prywatne, komunalne i państwowe. Np. Bank Polski, Pocztowa Kasa Oszczędności i Bank Gospodarstwa Krajowego są instytucjami państwowemi; Miejskie Kasy Oszczędności w Warszawie, Lwowie, Krakowie i t. d. są instytucjami komunalnemi; prócz tego istnieje wiele banków prywatnych.

W Polsce najwygodniej jest składać oszczędności w Pocztowej Kasie Oszczędności (P. K. O.), to też liczba książeczek oszczędności w P. K. O. stale wzrasta, jak to widać z rys. 32.

Wkłady oszczędnościowe, począwszy od 1 *zł*, przyjmują: Kasa Centrali P. K. O. w Warszawie, Kasy Oddziałów P. K. O. i wszyst-



Rys. 32.

kie urzędy pocztowe. Osoba, która złoży w P. K. O. pewną kwotę, otrzymuje książeczkę oszczędnościową, w której wpisuje się nazwisko właściciela i wysokość złożonej kwoty. Kwota złożona na książeczce daje obecnie 5% rocznie dochodu. W odróżnieniu od innych instytucyj finansowych mają książeczki P. K. O. tę zaletę, że ich właściciele mogą każdej chwili i w każdej miejscowości, w której znajduje się Urząd pocztowy, podjąć codziennie kwotę do 100 *zł*. Jest to wielka wygoda, zwłaszcza podczas podróży i wycieczek.

Zadania

1. Ktoś złożył w P. K. O. 3/I 1932 r. 60 *zł*, a 1/I 1933 r. 85 *zł*; ile będzie posiadał 1/I 1933 r., a ile 1/I 1934 r., jeśli uwzględnisz 5%?
2. Wartość 1 *zł* po upływie danej liczby lat przy 3%, 4%, 5%, 6%, 10%, 12% podaje tabelka:

Lata	1	2	3	4	5	10	15	20	25
3%	1,03	1,0609	1,0927	1,1255	1,1593	1,3439	1,5580	1,8061	2,0938
4%	1,04	1,0816	1,1249	1,1699	1,2167	1,4802	1,8009	2,1911	2,6658
5%	1,05	1,1025	1,1576	1,2155	1,2763	1,6289	2,0789	2,6533	3,3864
6%	1,06	1,1236	1,1910	1,2625	1,3382	1,7908	2,3966	3,2071	4,2919
10%	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,6105	2,5939	4,1776	6,7280	10,8356
12%	1,12	1,2544	1,4044	1,5725	1,7606	3,1035	5,4701	9,6387	16,9882

W tabelce powyższej uwzględniono t. zw. procent składany. Przy procencie składanym (np. 5%) po 1 roku mamy 105 *zł*; po upływie drugiego roku oblicza się procent nietylko od złożonych 100 *zł*, ale także od 5 *zł*, które przyrosły i t. d.

Uwaga. Wartość 1 *zł* oddanego na 5% wynosi po upływie 10 lat 1,6289 *zł* t. j. 1 *zł* 62 gr i 0,0089 *zł*. Jakkolwiek niema monety na tysięczne i dziesięciotysięczne 1 *zł*, to jednak cyfry tych jednostek są potrzebne, gdyż np. wartość 100 *zł* oddanych na 5% wynosi po upływie 10 lat 162 *zł* 89 gr.

Na początku 1930 r. złożono kwotę 2000 *zł* na 5%; do jakiej kwoty wzrośnie ten kapitał po upływie *a)* 5, *b)* 10, *c)* 15, *d)* 20 lat, licząc procent składany?

3. Na początku 1920 r. złożono do kasy na procent składany 4% 600 *zł*, na początku 1925 r. 300 *zł*, a na początku 1930 r. 400 *zł*; jaka będzie wartość wszystkich złożonych pieniędzy z końcem roku 1934?

   Powtórz to zadanie, przyjmując: *a)* 3%, *b)* 5%, *c)* 6%, *d)* 10%, *e)* 12%!

4. Oblicz wartość 1 *zł*, oddanego na procent składany: *a)* 3%, *b)* 4%, *c)* 5%, *d)* 6%, *e)* 10%, *f)* 12% po upływie 50 lat!

   Uwaga. Oblicz najpierw wartość 1 *zł* po upływie 25 lat, a następnie wartość otrzymanej kwoty znowu po upływie 25 lat!

5. Oblicz wartość 100 *zł*, oddanych na procent składany 4% po upływie: *a)* 40 lat, *b)* 60 lat, *c)* 9 lat, *d)* 45 lat!

6. Powtórz zadanie (5), biorąc inny procent składany!

Bezgotówkowe środki zapłaty

Pod względem gospodarczym jest bardzo dla Państwa rzeczą ważną zastąpić częściowo obieg pieniędzy takiemi środkami, które nie wymagają natychmiastowej wypłaty gotówki.

Konta

Jeżeli ktoś w banku albo kasie oszczędności złoży gotówkę na t. zw. rachunek czekowy (konto czekowe), wówczas otrzymuje książeczkę czekową, zawierającą poszczególne blankiety, zwane czekami kasowemi. Właściciel takiej książeczki może np. kupując towar, wręczyć kupcowi czek zamiast gotówki.

Aby czek był ważny musi zawierać:

1) miejsce i datę wystawienia czeku,
2) nazwę banku lub kasy oszczędności, która ma wypłacić podaną kwotę,
3) wydrukowane słowo „czek“ na blankiecie,
4) polecenie wypłacenia oznaczonej kwoty pieniężnej, którą wyszczególnia się cyframi, a nadto słowami,
5) podpis właściciela książeczki czekowej.

Niżej podajemy wzór ważnie wystawionego czeku:

B A N K P O L S K I

№ 0591401 A. zł *100* gr —

Bank Polski Oddział *we Lwowie*

wypłaci okazicielowi niniejszego czeku z mego/~~naszego~~ rachunku żyrowego

złotych *sto*

We Lwowie, dnia 1 sierpnia 1933.

Adam Górowski

Ten, który otrzymał czek, udaje się z nim do banku i otrzymuje wyszczególnioną na czeku kwotę pieniężną. Czek jest zatem bezgotówkowym środkiem zapłaty.

Można również posiadać konto w banku, czy też w kasie oszczędności, oparte na kredycie. Np.: fabrykant, posiadający zabudowania, maszyny, może uzyskać w banku kredyt do pewnej wysokości (np. do 10 000 *zł*), to znaczy, że może rozporządzać tą kwotą tak, jakby złożył gotówkę. Bank zabezpiecza sobie tę kwotę na majątku fabrykanta. Zapomocą czeków można również nietylko zlecić wypłatę pewnej gotówki, ale także przekazać (przelać) pewną kwotę z konta jednego właściciela na konto drugiego.

Zadania

1. Wystaw czek z datą 8/III 1934 do Banku Dyskontowego w Warszawie z poleceniem wypłaty 600 *zł* p. Aleksandrowi Malinowskiemu!
2. Kupiec złożył do banku na rachunek czekowy 5000 *zł*. Zamawiając w różnych fabrykach potrzebne mu towary, płacił czekami zamiast gotówką i tak 1/II wystawił czek na 640 *zł*, 4/II na 250 *zł*, 10/II na 330 *zł*, 17/II na 150 *zł*, 22/II na 720 *zł*, 27/II na 90 *zł*; jaką kwotę posiada w dniu 1/III (saldo)?
3. Przemysłowiec posiadał konto czekowe, na które składał swe dochody i za pośrednictwem którego uskuteczniał wydatki. Rachunek jego konta przedstawiał się w sposób następujący:

Wpłynęło

Data	Kwota *zł*	Kwota *gr*
1/II	1600	—
10/II	550	—
20/II	420	—
1/III	840	—
10/III	920	—
20/III	280	—

Wypłacono

Data	Numer czeku	Kwota *zł*	Kwota *gr*
3/II	26845	65	30
7/II	26846	190	50
11/II	26847	240	—
18/II	26848	85	20
25/II	26849	450	—
5/III	26850	620	50
12/III	26851	115	80
20/III	26852	320	40
28/III	26853	556	20

Oblicz saldo w dniu 1/IV!

4. Firma „Przemysł Drzewny" złożyła w dniu 2 stycznia 1933 r. na konto czekowe kwotę 30 000 *zł*. Z powyższej kwoty wypłacono I/IV 1933 r. 5 000 *zł*, a 1/VI 1933 r. — 4000 *zł*. Jaką kwotę posiada firma z końcem czerwca 1933 r. na rachunku czekowym, jeśli bank płaci 5% rocznie? (Dodaj do 30 000 *zł* procenta za 3 miesiące, odejmij 5000 *zł*, do otrzymanej kwoty dodaj procenta za 2 miesiące, odejmij 4000 *zł*, a wreszcie dodaj procenta za 1 miesiąc).

Blankiety nadawcze P. K. O.

Jeżeli jakaś osoba lub firma posiada rozgałęzione stosunki handlowe lub finansowe, zwłaszcza w różnych miejscowościach, wówczas zakłada swoje konta w P. K. O. Właściciel konta otrzymuje blankiety zwane nadawczemi, zaopatrzone numerem konta, a następnie rozsyła je osobom, od których ma otrzymać pieniądze. Osoba, która ma zapłacić, wypełnia blankiet nadawczy, poczem wpłaca wymienioną kwotę w Urzędzie Pocztowym. Blankiety nadawcze zastępują więc przekazy pieniężne pocztowe, a mają tę dogodność, że nie są połączone z kosztami przesyłki. Blankiety nadawcze składają się z trzech części: *a)* potwierdzenia dla wpłacającego (tę część zatrzymuje nadawca), *b)* dowodu wpłaty (otrzymuje adresat), *c)* dowodu wpisu (zatrzymuje Urząd Pocztowy lub Oddział P. K. O.).

Obok podajemy wzór wypełnionego blankietu nadawczego:

Potwierdzenie dla wpłacającego.

Dnia *10 stycznia 1934*

przyjęto wpłatę

złotych *Trzydzieści*

na konto czekowe w Pocztowej Kasie Oszczędności w Warszawie **Nr. 500.800**

właściciel konta:

KSIĄŻNICA-ATLAS

Zjednoczone Zakłady Kartograficzne i Wydawnicze T. N. W. Sp. Akc.

Lwów

Stempel dzienny pocztowy

Podpis urzędnika pocztowego:

BLANKIET NADAWCZY

na „Świat i Życie"

Dowód wpłaty.

Wpłatę zł. *30* gr. —

uskutecznił(a) *Władysław*

Szczerbiński

w *Poznaniu*

ulica, numer domu

Wysoka 42, II p.

na konto **Nr. 500.800**

dnia *10 stycznia* 19 *34*

500 W

Stempel dzienny pocztowy

Dowód wpisu.

Wpłatę zł. *30* gr. —

słownie złotych *Trzydzieści*

uskutecznił(a) *Władysław*

Szczerbiński

w *Poznaniu*

Wysoka 42, II p.

na konto **Nr. 500.800**

dnia *10 stycznia* 19 *34*

500 W

Stempel dzienny pocztowy

Urzędnik pocztowy winien dowód wpłaty wraz z dowodem wpisu odłączyć i przesłać z wykazem dziennym do P. K. O. w Warszawie.

1. Kup w Urzędzie Pocztowym blankiet nadawczy i wypełnij go na kwotę 20 *zł*, którą chcesz przesłać panu M. N., będącemu właścicielem konta Nr. 345 600.
2. Kupiec na prowincji spłacał pożyczkę przesyłając blankietem nadawczym P. K. O. przez cały rok co miesiąc 150 *zł*; ile zapłaciłby za przesyłkę zapomocą przekazów pieniężnych?

Zobowiązania pieniężne

Jeżeli ktoś chce pożyczyć w banku, względnie w Kasie Oszczędności pewną kwotę pieniędzy, wówczas składa zazwyczaj pisemne zapewnienie, że kwotę powyższą zwróci w oznaczonym czasie. Zapewnienie takie, wystawione na specjalnym urzędowym blankiecie, nazywamy wekslem. Jeżeli pożyczający (dłużnik) nie zwróci w oznaczonym czasie pożyczonych pieniędzy (t. j. nie wykupi weksla), wówczas wypożyczający (wierzyciel) może dłużnika zaskarżyć. Na skutek takiej skargi sąd w krótkim czasie zarządza przymusowe ściągnięcie należnej kwoty.

Obok podajemy wzór weksla.

Aby weksel był ważny musi zawierać:

a) miejsce i datę wystawienia,

b) datę terminu wykupienia weksla,

c) słowo „weksel" wydrukowane na blankiecie,

d) kwotę do zapłacenia wypisaną cyframi i słowami,

e) osobę, albo kasę (bank), której kwota ma być zapłacona,

f) własnoręczny podpis.

Cena blankietu zależy od kwoty, na którą weksel ma być wystawiony.

W handlu i przemyśle używa się weksli niętylko przy pożyczaniu pieniędzy, ale także przy płaceniu za towar. Jeżeli kupiec pobrał w fabryce towar, którego nie płaci gotówką, wówczas wystawia weksel na odpowiednią sumę. W ten sposób kupiec zyskuje czas do zebrania przez rozsprzedaż towaru potrzebnej gotówki.

Oprócz pożyczek na weksel, które są zazwyczaj krótkoterminowe (to znaczy muszą być zwrócone w kilku miesiącach), istnieją pożyczki długoterminowe (zwrotne w ciągu kilkunastu albo nawet kilkudziesięciu lat), noszące nazwę hipotecznych. Pożyczkę hipoteczną można uzyskać o ile posiada się ziemię, dom i t. p. Majątek dłużnika służy jako zabezpieczenie pożyczonej kwoty i nie może być sprzedany przed zapłaceniem długu bez zgody wierzyciela.

Zadania

1. Wypełnij weksel z datą dzisiejszą na kwotę 200 *zł* płatną w Banku Gosp. Kraj. w trzy miesiące od daty wystawienia!
2. Ktoś pożyczył na weksel: *a)* 600 *zł*, *b)* 800 *zł*, *c)* 1100 *zł* na: *a)* 9%, *b)* $9\frac{1}{2}$%, *c)* 10%. Kasa przy wypłacie gotówki potrąciła procent za 3 miesiące; ile gotówki otrzymał?
3. Weksel na 500 *zł* jest płatny za trzy miesiące. W chwili obecnej wart jest jednak mniej o pewien procent, zwany dyskontem.

Urzędowy blankiet wekslowy

Cena wraz z dodatkiem 10%-owym 66 *gr.* Dla weksli, których suma nie przewyższa 200 *zł.*

Opłata stemplowa 60 *gr*

60 groszy

Lwów, dnia *1 sierpnia* 19*33* r. Na *200 zł*

Dnia 30 września 1933 zapłac*ę* za ten *sola*

weksel na zlecenie *Adama Górowskiego w Krakowie* sumę

złotych dwieście

Jan Biesiadzki

Płatny *we Lwowie*

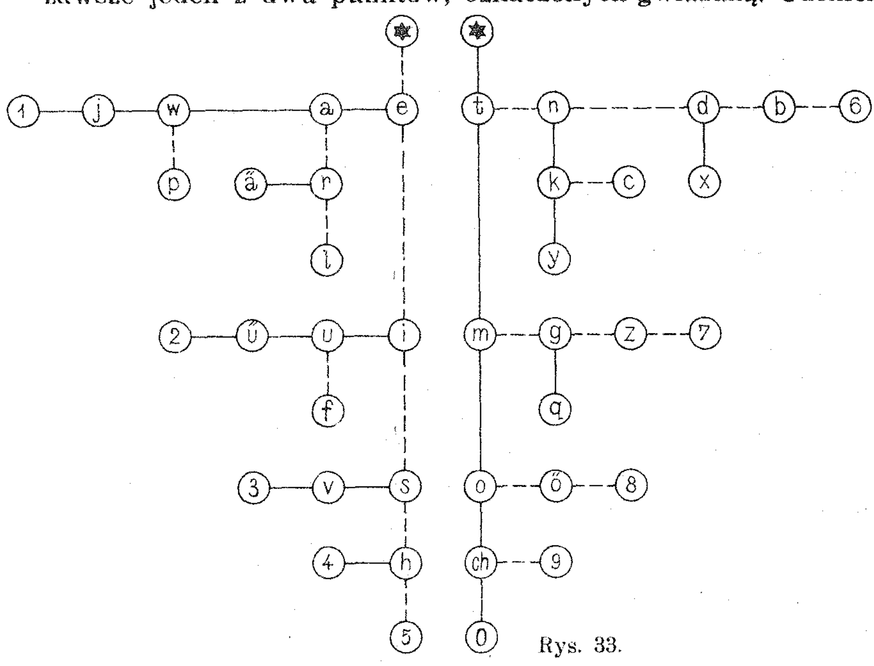
Oblicz wartość tego weksla w chwili obecnej, jeżeli dyskonto wynosi 12% t. j. oblicz, jaki kapitał oddany na 12% da po 3 miesiącach 500 *zł*!

4. Oblicz wartość weksli w dniu 1 kwietnia przy dyskoncie 9% na kwotę: *a)* 600 *zł* płatnych 1 lipca, *b)* 850 *zł* płatnych 15 lipca, *c)* 1500 *zł* płatnych 20 lipca!
5. Kupiec zakupił towar za 5000 *zł*, przyczem część zapłacił gotówką, a nadto wystawił weksle: jeden na 1500 *zł*, płatny za 3 miesiące, i drugi na 2000 *zł*, płatny za 5 miesięcy; ile zapłacił gotówką, jeżeli dyskonto wynosiło 10% (oblicz wartość każdego weksla w chwili wystawienia)!
6. Kwota: *a)* 800 *zł*, *b)* 1200 *zł*, *c)* 2000 *zł*, pożyczona na weksel na: *a)* $9\frac{1}{2}$%, *b)* 9%, *c)* 10 %, ma być spłacona w ratach, płatnych co trzy miesiące, przyczem za każdym razem dłużnik spłaca: *a)* czwartą, *b)* ósma, *c)* dziesiątą część pożyczonego kapitału; ile wynosi każda rata?

   Licz: pierwsza rata w zadaniu *a)* wynosi 200 *zł* i $9\frac{1}{2}$% od 600 *zł* za 3 miesiące.

Dodatek

1. Na rys. 33 podany jest alfabet Morsego. Punktem wyjścia jest zawsze jeden z dwu punktów, oznaczonych gwiazdką. Odcinek



Rys. 33.

pełny między dwoma kolejnemi kółkami liczymy za kreskę, przerywany zaś za kropkę. Np. chcąc odczytać . . — — — idziemy lewą gałęzią i dochodzimy do kółka, w którem jest 2. Zatem . . — — — oznacza 2.

a) Odczytaj:

— — . — — . — — . — — — . — — — . — . —

. — . — — — — . —

. — — — — — — — — . . . . — — . . — — —

b) Napisz znakami Morsego:

1) swój rok urodzenia, 2) zdanie: Matematyka jest królową nauk.

2. Ponumeruj litery alfabetu polskiego (a ą b c ć d e ę f g h i j k l m n o ó p r s ś t u w y z ź ż), poczynając od litery a, tak, że a otrzymuje numer 10, ą numer 11, b numer 12 i t. d. W ten sposób każda litera może być zastąpiona liczbą. Jest to tak zwany „szyfr". Klucz do tego szyfru podany jest w tabelce:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g
2	h	i	j	k	l	m	n	o	ó	p
3	r	s	ś	t	u	w	y	z	ź	ż

a) Wytłumacz, jak ten klucz jest urządzony!

b) Odczytaj:
24 34 12 21 17 26 10 34 23 17
25 10 33 16 25 10 33 36 23 21.

c) Napisz w powyższy sposób:
„Jestem uczniem pierwszej klasy gimnazjalnej".

3. Na globusie narysowany jest równik i wszystkie równoleżniki (co 1^0); ile jest wszystkich kół?
4. Zegar potrzebuje 6 sekund na wybicie 6 uderzeń; ile potrzebuje czasu na wybicie 12 uderzeń?
5. Przy pomocy dwójek napisz; 7, 23, 28!
6. Napisz 100 zapomocą: *a)* 4 dziewiątek, *b)* 6 dziewiątek, *c)* 5 jedynek, *d)* 5 trójek, *e)* 5 piątek!
7. Jaka liczba podzielona przez swoją piątą część daje na wynik 5?

8.

1	1 + b + c + d	1 + a + b	1 + a + c + d
1 + a + b + c	1 + a + d	1 + c	1 + b + d
1 + c + d	1 + b	1 + a + b + c + d	1 + a
1 + a + b + d	1 + a + c	1 + d	1 + b + c

Podstaw w miejsce liter a, b, c, d, dowolne liczby całkowite, a otrzymasz t. zw. kwadrat magiczny, w którym suma liczb każdej kolumny, wiersza lub przekątnej będzie ta sama. Przyjmij np. $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 8$.

9. Ziemia opasana jest sznurem wzdłuż równika i podobnie pomarańcza. Przedłużamy każdy z tych sznurów o 1 *m* i odpowiednio formujemy z nich koła współśrodkowe do kół równikowych. Które z tych kół bardziej odstaje, czy koło opasujące pomarańczę, czy też opasujące ziemię?

10. Są 3 naczynia o pojemności 8 *l*, 5 *l* i 3 *l*; naczynie największe jest pełne wody. W jaki sposób można, posługując się tylko temi trzema naczyniami, przelać wodę tak, aby w dwóch naczyniach było po 4 *l* wody?

11. Na papierze kratkowanym zaznacz 4 wierzchołki kwadratu. Naprzemian z kolegą łącz odcinkami sąsiednie punkty kratki. Jest to tak zwana gra „w szewca". Niech grę zaczyna twój kolega. Ty za każdym razem rysuj odcinek symetrycznie położony ze względu na środek kwadratu. Jeśli kwadrat ma nieparzystą liczbę kratek, to tym sposobem grę wygrasz, jeśli zaś liczba kratek jest parzysta, to uzyskasz remis.

Odpowiedzi.

3. 179.
4. Więcej niż 12 sekund, bo przy 6 uderzeniach jest 5 przerw, a przy 12 uderzeniach 11 przerw.
5. $7 = 2^2 + 2 + \frac{2}{2}$, $23 = 22 + \frac{2}{2}$, $28 = 2 + 2 + 2 + 22$.
6. $100 = 99 + \frac{9}{9} = 99 + \frac{99}{99} = 111 - 11 = 3 . 33 + \frac{3}{3} = 5 . 5 . 5 - 5 . 5$, albo $(5 + 5 + 5 + 5) . 5$.
7. Każda ($\pm$ 0).
9. Oba koła jednakowo odstają, gdyż w obu wypadkach promień wzrósł o $\frac{1}{2\pi}$ *m*.

10. Z początku największe naczynie było pełne wody, średnie i najmniejsze puste, co zapisujemy: 8, 0, 0. Następnie przelano z największego naczynia do średniego 5 *l* wody, co zapisujemy: 3, 5, 0. W jaki sposób dalej należy wodę przelewać podają następujące trójki liczb: 3, 2, 3; 6, 2, 0; 6, 0, 2; 1, 5, 2; 1, 4, 3; 4, 4, 0 albo 8, 0, 0; 5, 0, 3; 5, 3, 0; 2, 3, 3; 2, 5, 1; 7, 0, 1; 7, 1, 0; 4, 1, 3; 4, 4, 0.

Spis treści

Znakowanie literowe

Wielkości proporcjonalne

Procenty

Wiadomości o oszczędnościach i kredycie. P. K. O.