S. BANACH, W. SIERPIŃSKI, W. STOŻEK

ARYTMETYKA I GEOMETRJA

DLA KLASY I SZKÓŁ ŚREDNICH

LWÓW
WYDAWNICTWO ZAKŁADU NARODOWEGO IMIENIA OSSOLIŃSKICH
1929

2270

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

CZYTANIE I PISANIE LICZB W ZAKRESIE DO 10.000.

System dziesiętny.

Powtórzenie zakresu liczb do 1000.

1. Przeczytaj następujące liczby:
7, 18, 20, 36, 48, 69, 99, 100, 106, 120, 304, 450, 706, 909, 990.
2. Napisz cyframi liczby:
siedm, dziewiętnaście, dwadzieścia sześć, pięćdziesiąt, siedmdziesiąt dwa, ośmdziesiąt dziewięć, dziewięćdziesiąt ośm, sto jeden, trzysta dwadzieścia, sześćset pięćdziesiąt cztery, dziewięćset ośmnaście, dziewięćset ośmdziesiąt jeden.
3. Licz:
a) od 37 do 56, *b)* od 118 do 132, *c)* od 906 do 945.
4. Licz po dziesięć:
a) od 10 do 200, *b)* od 340 do 500.
5. Licz wstecz:
a) od 96 do 78, *b)* od 315 do 291.
6. Licz wstecz po dziesięć:
a) od 120 do 10, *b)* od 760 do 590.
7. Wymień cyfry jednostek, dziesiątek i setek w następujących liczbach:
17, 36, 100, 136, 207, 999.
8. Ile to jest jednostek:
Jedna dziesiątka, 3 dzies., 9 dzies., 12 dzies., 35 dzies., 96 dzies.?
9. Ile to jest setek i dziesiątek:
15 dzies., 36 dzies., 42 dzies., 89 dzies.?

10. Ile to jest dziesiątek:
jedna setka, 5 setek, 8 setek, 9 setek?
11. Ile to jest jednostek:
3 dzies. i 6 jednostek, 5 setek 4 dzies. i 3 jednostki, 15 dzies. i 8 jednostek, 30 dzies. i 4 jednostki?
12. Ile dziesiątek zawiera liczba:
36, 40, 89, 101, 326, 718, 999?
13. Ile setek zawiera liczba:
100, 306, 709, 910?

Liczby mianowane proste i złożone.

Liczby służą nam nietylko do liczenia przedmiotów. Przy pomocy liczb wyrażamy również długości, ciężary, pojemności i t. p.

Chcąc np. zaznaczyć, że zwój sukna ma siedmnaście metrów długości, piszemy:

17 *m*

Wyrażenie powyższe nazywamy liczbą mianowaną (prostą); mówimy, że metr jest mianem tej liczby.

Podobnie wyrażenia:

11 *kg*, 30 godz., 15 *l* i t. p.

są liczbami mianowanemi o mianach: kilogram, godzina, litr.

Dla zaznaczenia, że zwój sukna ma dziewięć metrów i pięć decymetrów długości, piszemy:

9 *m* 5 *dm*

Wyrażenie powyższe nazywamy liczbą mianowaną złożoną lub wieloraką.

Podobnie liczbami wielorakiemi są następujące wyrażenia:

15 *kg* 325 *g*, 2 godz. 45 min. 15 sek.

Zadania.

1. Ile to jest *dm*:
a) 1 *m*, 7 *m*, 36 *m*, 5 *m* 2 *dm*, 10 *m* 3 *dm*?
b) Ile to jest *cm*:
1 *dm*, 8 *dm*, 12 *dm*, 1 *m*, 5 *m*, 1 *m* 2 *dm*, 7 *m* 6 *dm*, 4 *m* 3 *dm* 5 *cm*, 8 *m* 3 *cm*?
c) Ile to jest *mm*:
1 *cm*, 3 *cm*, 5 *cm* 2 *mm*, 23 *cm*, 1 *dm*, 5 *dm*, 3 *dm*, 5 *cm*, 7 *dm* 8 *cm* 3 *mm*?

d) Ile to jest *m*:
30 *dm*, 50 *dm*, 300 *dm*?
e) Ile to jest *dm*:
20 *cm*, 360 *cm*, 200 *mm*, 900 *mm*?
2. Ile to jest groszy:
a) 9, *b)* 23, *c)* 96 dziesięciogroszówek?
3. Ile to jest groszy:
a) 55 *zł*, *b)* 9 *zł*, 6 dziesięciogr. 3 *gr*?
4. Ile to złotych:
a) 10, *b)* 100, *c)* 230, *d)* 580 dziesięciogroszówek?

Jednostki różnych rzędów.

Zbiór, złożony z dziesięciu jakichś przedmiotów, nazywamy dziesiątką.

Zbiór, złożony z dziesięciu dziesiątek, nazywamy setką.

Zbiór, złożony z dziesięciu setek, nazywamy tysiącem.

Zbiór, złożony z dziesięciu tysięcy, nazywamy dziesięć tysięcy albo dziesiątką tysięcy.

Dziesiątkę, setkę, tysiąc, dziesięć tysięcy, nazywamy jednostkami wyższych rzędów. Dziesiątka jest jednostką drugiego rzędu, setka — trzeciego rzędu, tysiąc — czwartego rzędu, dziesięć tysięcy — piątego rzędu.

Jeśli mamy jeden przedmiot, np. jedną kulkę, to powiadamy, że mamy jednostkę pierwszego rzędu, lub krótko: jednostkę.

Przy pomocy tych pięciu jednostek i dziesięciu cyfr nauczymy się nazywać i pisać jeszcze większe liczby niż dotychczas.

Rozszerzenie zakresu liczb poza tysiąc.

Liczenie.

Jeżeli mamy policzyć jakieś przedmioty, np. kulki, to możemy to zrobić w następujący sposób:

Układamy najpierw kulki w dziesiątki. Otrzymamy w ten sposób pewną liczbę dziesiątek i kilka kulek osobno, np. sześć. Następnie zbieramy dziesiątki po dziesięć w setki. Wkońcu zostanie nam mniej niż dziesięć dziesiątek, np. pięć dziesiątek.

Połączmy jeszcze setki po dziesięć w tysiące i przypuśćmy, że w ten sposób otrzymamy np. ośm tysięcy i cztery setki.

Widzimy zatem, że nasz zbiór kulek składa się z ośmiu tysięcy, czterech setek, pięciu dziesiątek i z sześciu osobnych kulek.

Powiadamy, że mamy wszystkich kulek: ośm tysięcy czterysta pięćdziesiąt sześć.

Pisanie liczb.

Przypuśćmy, że, jak w poprzednim przykładzie, mamy ośm tysięcy czterysta pięćdziesiąt sześć kulek.

Liczbę tę zapisujemy w następujący sposób:

8456.

Znak ten złożony jest z czterech cyfr. Cyfra 6, stojąca na pierwszem miejscu (licząc od prawej ręki), wskazuje nam, ile kulek zostało osobno; cyfry, znajdujące się na drugiem, trzeciem i czwartem miejscu (licząc od prawej ręki), wskazują nam odpowiednio, ile otrzymaliśmy osobno dziesiątek, setek, tysięcy.

Jeśli, postępując jak poprzednio z jakimś zbiorem kulek, nie otrzymamy osobno bądź pojedynczych kulek, bądź też dziesiątek, setek lub tysięcy, to brak ten zaznaczamy, pisząc na odpowiednich miejscach cyfrę zero.

Jeśli np. otrzymaliśmy trzy tysiące, siedm setek i sześć kulek, to liczbę kulek piszemy:

3706.

Podobnie, jeślibyśmy otrzymali pięć setek i ośm kulek, a brak byłoby tysięcy i dziesiątek, to powinnibyśmy liczbę kulek napisać:

0508.

Zera jednak, znajdujące się na początku znaku liczby, opuszczamy, a więc liczbę powyższą piszemy:

508.

Czytanie liczb.

Cyfry, znajdujące się w znaku liczby, nazywamy kolejno (postępując od prawej ręki ku lewej) cyfrą jednostek, dziesiątek, setek, tysięcy.

Liczbę czytamy, wygłaszając pokolei liczbę tysięcy, setek, dziesiątek i jednostek, wskazanych przez cyfry tej liczby.

Zamiast mówić: dwie dziesiątki, pięć dziesiątek i t. d., mówimy: dwadzieścia, pięćdziesiąt i t. d.

Zamiast mówić: dwie setki, sześć setek i t. d., mówimy: dwieście, sześćset i t. d.

Jeśli na jakiemś miejscu, np. na miejscu setek, znajduje się zero, to w czytaniu pomijamy setki. Np. liczbę 5027 czytamy: pięć tysięcy dwadzieścia siedm.

UWAGA. Jezeli będzie dziesięć albo więcej tysięcy, np. piętnaście tysięcy, a nadto jeszcze cztery setki, dwie dziesiątki i jedna kulka osobno, to połączymy jeszcze dziesięć tysięcy w dziesiątkę tysięcy. Otrzymamy w ten sposób jedną dziesiątkę tysięcy, pięć tysięcy, cztery setki, dwie dziesiątki i jedną kulkę. Powiadamy, że kulek jest:

piętnaście tysięcy czterysta dwadzieścia jeden,

a liczbę tę piszemy:

15421.

Cyfry tej liczby wskazują nam, jak poprzednio, liczbę jednostek każdego rzędu.

Podobnie liczbę:

18736

czytamy: ośmnaście tysięcy siedmset trzydzieści sześć.

UWAGA. Powyższy sposób pisania liczb przy pomocy dziesięciu cyfr, wynaleziony przez Hindusów, nazywa się systemem (układem) dziesiętnym pozycyjnym.

W systemie tym przedstawiamy każdą liczbę zapomocą jednostek rozmaitych rzędów. Każda jednostka składa się z dziesięciu jednostek rzędu bezpośrednio niższego — stąd nazwa systemu dziesiętnego.

Każdą liczbę zapisujemy zapomocą dziesięciu znaków (cyfr), przyczem znaczenie każdej cyfry zależy od miejsca (pozycji), jakie zajmuje. Stąd pochodzi nazwa systemu pozycyjnego.

Porównywanie liczb.

Dwie liczby, napisane w systemie dziesiętnym, są tylko wtedy równe, jeśli w obu liczbach na odpowiednich miejscach znajdują się te same cyfry.

Dla wyrażenia równości dwóch liczb używamy znaku = (czytaj: równa się).

Np. $203 = 203$.

Dla zaznaczenia, że jedna liczba jest większa od drugiej, np., że 35 jest większe od 12, piszemy:

albo $35 > 12$ (czytaj: 35 większe od 12)
$12 < 35$ (czytaj: 12 mniejsze od 35).

Liczba 207 zawiera setki, liczba zaś 48 nie zawiera setek, więc:

$$207 > 48$$

Widzimy zatem, że z dwu liczb ta jest większa, która zawiera większą liczbę cyfr.

Np.: $18643 > 9867$

Liczba 5234 zawiera 5 tysięcy, liczba zaś 3894 zawiera 3 tysiące.

Oczywiście: $5234 > 3894$

Liczby 4527 i 4518 składają się z 4 tysięcy, 5 setek; pierwsza z nich składa się nadto z 2 dziesiątek, druga zaś tylko z 1 dziesiątki, więc:

$$4527 > 4518$$

Jeżeli zatem dwie liczby mają równą liczbę cyfr, to ta z nich jest większa, w której cyfra jednostek najwyższego rzędu jest większa; jeśli cyfry te są równe, to ta liczba jest większa, w której cyfra jednostek rzędu bezpośrednio niższego jest większa i t. d.

Np.: $14583 > 12697$
$9641 > 9640$

Zadania.

1. Ile to jest:

a) 6	tys.	4	set.	7	dzies.	i	3	jedn.?
b) 2	„	5	„	1	„		4	„
c) 9	„	—	„	5	„		8	„
d) 7	„	3	„	2	„		—	„
e) 6	„	—	„	—	„		6	„
f) 7	„	—	„	4	„		—	„

2. Przeczytaj następujące liczby:
1000, 2000, 9000, 15000, 8456, 7002, 6407, 5690, 16703, 19016, 1001, 10001.
3. Napisz cyframi liczby:
tysiąc dwa, trzy tysiące czterdzieści siedm, pięć tysięcy

sześćset trzy, dziesięć tysięcy ośmnaście, piętnaście tysięcy dwieście cztery, dziewięć tysięcy trzydzieści sześć, ośm tysięcy pięć, ośm tysięcy pięćset, dziewiętnaście tysięcy dwieście ośm, jedenaście tysięcy jeden.

4. Licz:
a) od 5980 do 6000, *b)* od 9995 do 10015,
c) po dziesięć od 15100 do 15300,
d) po sto od 18600 do 19200.
5. Wymień cyfry jednostek, dziesiątek, setek i tysięcy w liczbach: 4357, 6002, 7083, 1502.
6. Ile *a)* jednostek, *b)* dziesiątek, *c)* setek zawiera:
jeden tysiąc, 2 tys., 8 tys., 10 tys., 13 tys.?
7. *a)* Ile to jest tysięcy:
20 setek, 30 setek, 90 setek, 100 setek, 160 setek, 300 dzies., 800 dzies., 1200 dzies., 1500 dzies.?
b) Ile to jest setek:
jeden tysiąc, 5 tys., 10 tys., 13 tys.?
c) Ile to jest dziesiątek:
jeden tysiąc, 3 tys., 12 tys., 5 tys. 4 setki, 7 tys. 6 setek 3 dzies.?
8. Ile *a)* tysięcy, *b)* setek, *c)* dziesiątek zawiera liczba:
4618, 5203, 7049, 12154, 15003, 18149, 13200, 10500?
Odpowiedź: liczba 4618 zawiera *a)* 4 tysiące, *b)* 46 setek, *c)* 461 dziesiątek.
9. *a)* Ile to jest metrów:
1 *km*, 5 *km*, 15 *km*, 7 *km* 325 *m*, 14 *km* 123 *m*?
b) Ile to jest kilometrów:
1000 *m*, 3000 *m*, 13000 *m*, 19000 *m*?
c) Ile to jest decymetrów:
300 *m*, 250 *m*, 728 *m*, 125 *m* 5 *dm*, 327 *m* 3 *dm*?
d) Ile to jest milimetrów:
1 *m*, 6 *m*, 7 *m* 3 *dm*, 5 *m* 2 *dm* 3 *cm*, 4 *m* 8 *cm*?
10. *a)* Ile to jest gramów:
1 *kg*, 7 *kg*, 12 *kg*, 19 *kg*?
b) Ile to jest kilogramów:
1000 *g*, 8000 *g*, 14000 *g*, 20000 *g*?
11. *a)* Ile groszy zawiera:
Jeden banknot dziesięciozłotowy, 2 bank. dziesięciozł., 8 bank. dziesięciozł., 15 bank. dziesięciozł.?

b) Ile to jest groszy:
20 *zł,* 35 *zł,* 100 *zł,* 154 *zł*?
c) Ile to jest złotych i groszy:
1357 *gr,* 5036 *gr,* 10000 *gr,* 12306 *gr*?

12. Jakiego rzędu jednostkę przedstawia 1, jeśli dopiszemy: *a)* jedno, *b)* dwa, *c)* trzy zera?
13. Jeśli 10 jabłek kosztuje 1 *zł,* to ile kosztuje 100 jabłek?
14. Jeśli 100 *m* sznura kosztuje 3 *zł,* to ile kosztuje 1000 *m* sznura?
15. Ułóż wedle wielkości *a)* rosnących *b)* malejących liczby: 3583, 6409, 3581, 6418, 6509.
16. Umieść pomiędzy następującemi parami liczb odpowiednie znaki nierówności:
6783 i 7514, 5200 i 5184, 13101 i 13204, 19000 i 19001.
17. Napisz najmniejszą i największą liczbę:
a) dwucyfrową *b)* trzycyfrową *c)* czterocyfrową.
18. Ułóż a) największą b) najmniejszą liczbę czterocyfrową z cyfr: 2, 5, 7, 1.
19. Napisz dowolną liczbę czterocyfrową, następnie liczbę, powstałą z niej przez przestawienie cyfr dziesiątek i setek i porównaj obie liczby!
20. Napisz dowolną liczbę czterocyfrową, następnie liczbę, powstałą z niej przez napisanie cyfr w odwrotnym porządku i porównaj obie liczby!
21. W następujących liczbach oblicz sumę cyfr:
33, 157, 649, 1263, 5429, 8005, 10026, 15056.

Rzymska pisownia liczb.

Rzymianie używali do pisania liczb siedmiu znaków:

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

W systemie dziesiętnym cyfra oznaczać może jednostki rozmaitych rzędów, zależnie od tego, jakie miejsce w liczbie zajmuje. W pisowni rzymskiej natomiast jednostki różnych rzędów oznacza się różnemi znakami.

Oto są reguły oznaczania jednostek t e g o s a m e g o r z ę d u:

Chcąc oznaczyć dwie lub trzy jednostki, piszemy odpowiedni znak dwa lub trzy razy.

Np.: II = 2, III = 3, XX = 20, XXX = 30, CCC = 300.

Sześć, siedm, ośm jednostek oznaczamy, powtarzając po znaku pięciu jednostek znak jednostki jeden raz, dwa razy, trzy razy.

Np.: VI = 6, VII = 7, VIII = 8, LX = 60, DCCC = 800.

Cztery względnie dziewięć jednostek oznaczamy, pisząc jednostkę przed znakiem pięciu jednostek, względnie przed jednostką rzędu bezpośrednio wyższego.

Np.:

IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900.

Chcąc napisać liczbę znakami rzymskiemi, zapisujemy w powyższy sposób pokolei tysiące, setki, dziesiątki i jednostki, zaznaczone przez cyfry danej liczby.

Np.:

XXXVI = 36, XLIV = 44, CCLXX = 270, CDXXIII = 423,
MMMDCCCLXXXII = 3882.

Zadania.

1. Napisz znakami rzymskiemi liczby:
315, 89, 43, 481, 629, 936, 1041, 2349, 1493, 3613.
2. Napisz znakami rzymskiemi następujące daty z historji polskiej: chrzest Polski w r. 966, bitwa pod Grunwaldem w r. 1410, śmierć Batorego w r. 1586, odsiecz Wiednia w r. 1683, pierwszy rozbiór Polski w r. 1772, drugi w r. 1793, trzeci w r. 1795, konstytucja 3 maja w r. 1791, Polska niepodległa w r. 1918, wybór pierwszego Prezydenta Rzplitej w r. 1922.
3. Napisz cyframi arabskiemi liczby:

XXXIV, XLVII, XCIII, CXL, CCXCII, CCCXLI, CDXLII, DCCXC, CMLXXI, MMMCDXI, LXXIV, CIX, DCCCXXVIII, MCDXIV, MDCCCLXXIII.

DODAWANIE.

Określenia i własności.

Określenie sumy.

Jeśli zbiór 5 kulek połączymy ze zbiorem 3 kulek, otrzymamy zbiór, zawierający 8 kulek.

Liczbę 8 nazywamy **sumą** liczb 5 i 3. Liczby 5 i 3 nazywamy **dodajnikami** lub składnikami sumy.

Jeżeli dwa zbiory przedmiotów połączymy w jeden zbiór, to liczba przedmiotów tego zbioru jest sumą liczb przedmiotów każdego z danych zbiorów.

Sumę dwóch liczb oznaczamy, pisząc jeden dodajnik, następnie znak + (czytaj: więcej lub plus), a potem drugi dodajnik.

Piszemy więc:

$$5 + 3 = 8 \quad \text{lub} \quad 3 + 5 = 8$$

Podobnie:

$$9 + 21 = 30, \quad 18 + 7 = 25$$

Suma dwóch liczb, z których jedna jest zerem, równa się drugiej liczbie. Np.:

$$7 + 0 = 7$$
$$0 + 9 = 9$$
$$0 + 0 = 0$$

Zadania.

1. Jan ma 8 piór, Piotr 5; ile piór mają razem?
2. W jednym koszyku jest 9 jaj, w drugim 8; ile jaj jest razem?
3. Jan ma 9 jabłek, Piotr o 8 jabłek więcej; ile jabłek ma Piotr?

4. Jaka liczba jest o 12 większa od 9?
5. Jaka liczba jest piąta zkolei po liczbie 8?
6. Piechur przeszedł w pierwszej godzinie 7 *km*, w drugiej 5 *km*; ile *km* przeszedł w dwóch godzinach?
7. Kamienica ma 13 *m* wysokości, a sąsiednia jest o 4 *m* wyższa; jaka wysoka jest druga kamienica?
8. Robotnik zarabiał w pierwszym tygodniu dziennie po 9 *zł*, a w drugim zarabiał dziennie o 2 *zł* więcej; ile zarabiał dziennie w drugim tygodniu?
9. Towar waży 12 *kg*, opakowanie 3 *kg*; ile waży towar z opakowaniem?
10. Kupiec kupił towar za 7 *zł*, sprzedał go z zyskiem 4 *zł*; za ile sprzedał ten towar?
11. Zegarek wskazuje 9-tą godzinę i 3 minuty, a spóźnił się o 6 minut; która jest godzina?
12. Napisz liczbę 1 i 2, obok ich sumę, następnie sumę dwóch ostatnich liczb, a potem znowu sumę dwóch ostatnich liczb, aż przekroczysz liczbę 100; otrzymane liczby, zwane liczbami Fibonacci'ego[1], spotyka się często w przyrodzie, np. liczba kwiatków w stokrotce.
13. Ile dni upłynęło od początku roku do 7 lutego włącznie?

Suma kilku liczb.

Jeżeli mamy kilka liczb połączonych znakami +, np.:

$$3 + 5 + 7 + 2,$$

to wyrażenie to oznacza nam liczbę, jaką otrzymamy, dodając do sumy liczb 3 i 5 liczbę 7, a do otrzymanej sumy liczbę 2.

Zatem: $3 + 5 + 7 + 2 = 17.$

Liczbę 17 nazywamy sumą liczb 3, 5, 7, 2.

Zadania.

1. Wieśniak sprzedał masła za 13 *zł*, jaj za 11 *zł*, mleka za 2 *zł* i kurę za 4 *zł*; ile pieniędzy razem otrzymał?
2. Jan kupił 7 książek szkolnych, płacąc za nie: 3 *zł*, 2 *zł*, 4 *zł*, 1 *zł*, 5 *zł*, 6 *zł*, 2 *zł*; ile zapłacił razem za wszystkie książki?

---

[1] Czytaj: Fibonacziego.

3. Kupiec w 6 dniach tygodnia zarobił kolejno: 15 *zł*, 10 *zł*, 11 *zł*, 13 *zł*, 12 *zł*, 8 *zł*; ile zarobił razem w tygodniu?
4. Ile dni posiada pierwszy kwartał roku? Ile inne kwartały?
5. Ile dni upłynęło w roku do 5 kwietnia włącznie?

Prawo przemienności sumy.

Suma $3 + 5 + 7 + 2$ oznacza nam liczbę kulek, którą otrzymamy, wrzucając do woreczka 3 kulki, następnie 5 kulek, potem 7 kulek, a wreszcie 2 kulki.

Gdybyśmy te kulki wrzucali w innym porządku do woreczka, np. naprzód 5, potem 2, potem 3, a wreszcie 7 kulek, otrzymalibyśmy tęsamą liczbę kulek w woreczku, co poprzednio. Możemy więc napisać:

$$3 + 5 + 7 + 2 = 5 + 2 + 3 + 7.$$

Wynika stąd, że:

Suma kilku liczb nie zależy od porządku, w jakim je dodajemy.

Własność powyższą sumy nazywamy prawem przemienności sumy.

Zadania.

1. Oblicz sumy:

a) $9 + 3 + 7 + 6$ *b)* $3 + 7 + 9 + 6$ *c)* $6 + 9 + 7 + 3$
d) $3 + 6 + 7 + 9$ *e)* $7 + 9 + 6 + 3$.

Jak wytłumaczysz, że wszystkie wyniki są równe?

2. W sumie $2 + 3 + 5$ przestaw dodajniki na wszystkie możliwe sposoby i za każdym razem oblicz sumę!
3. Oblicz sumę $8 + 7 + 2 + 3 + 5$ na dziesięć sposobów!
4. Do beczki wlano 20 *l* wina, 30 *l*, 40 *l*; ile litrów wina razem wlano? Czy musisz wiedzieć, w jakim porządku te ilości wina wlewano?

Prawo łączności sumy.

Cztery paczki o ciężarze 3 *kg*, 5 *kg*, 7 *kg* i 2 *kg* ważą razem:

$$3\,kg + 5\,kg + 7\,kg + 2\,kg.$$

Jeżeli dwie z tych paczek, np. paczki o ciężarze 5 *kg* i 7 *kg* spakujemy w jedną paczkę, to otrzymamy 3 paczki o ciężarze 3 *kg*, 12 *kg* i 2 *kg*, które razem ważą:

$$3\,kg + 12\,kg + 2\,kg.$$

Ponieważ tak w pierwszym, jak i w drugim wypadku paczki razem ważą to samo, więc:

$$3 + 5 + 7 + 2 = 3 + 12 + 2.$$

Podobnie, zastępując paczki o ciężarach 3 *kg* i 5 *kg* paczką o ciężarze 8 *kg*, przekonujemy się, że:

$$3 + 5 + 7 + 2 = 8 + 7 + 2.$$

Widzimy zatem, że:

Suma nie zmieni się, jeżeli kilka dodajników tej sumy zastąpimy przez ich sumę.

Powyższą własność sumy nazywamy prawem łączności.

Dla zaznaczenia, jakie dodajniki mamy zastąpić ich sumą, używamy nawiasów.

A więc wyrażenie:

$$3 + (5 + 7) + 2 \text{ oznacza } 3 + 12 + 2.$$

Podobnież $(3 + 5) + (7 + 2)$ oznacza $8 + 9$.

Chcąc więc obliczyć sumę, w której występują nawiasy, zastępujemy każdy nawias liczbą, jaką otrzymamy, wykonując działania zaznaczone w tym nawiasie.

Zadania.

1. Wykonaj następujące działania:

a) $2 + (3 + 5) + 7$ *b)* $(3 + 5) + (8 + 4)$
c) $3 + (7 + 5 + 2)$ *d)* $(3 + 2) + (4 + 7) + (5 + 6)$.

2. Wyznacz bez rachowania, które z poniżej podanych sum są sobie równe?

$(12 + 9) + (11 + 4 + 5)$
$(7 + 3) + 8 + (12 + 5)$
$(9 + 11 + 12) + (5 + 4)$
$(3 + 8) + (7 + 5) + 12$
$(5 + 12) + (3 + 8 + 7)$
$4 + (5 + 12) + (11 + 9)$.

3. Oblicz na kilka sposobów sumy:

a) $(8 + 7) + (2 + 3)$ *b)* $(2 + 5 + 7) + (4 + 3)$
c) $6 + (3 + 9) + (4 + 11)$.

4. Zaznacz nawiasami, w jaki sposób najdogodniej obliczyć sumy:

a) $12 + 3 + 5 + 11 + 9 + 3 + 4 + 3$.
Odp. $(12 + 3 + 5) + (11 + 9) + (3 + 4 + 3)$.
b) $3 + 7 + 4 + 6 + 5$.
c) $11 + 9 + 13 + 7 + 8$.
d) $4 + 6 + 13 + 2 + 5 + 29 + 11 + 12$.
e) $17 + 13 + 10 + 21 + 19 + 3$.
f) $27 + 23 + 31 + 19 + 41 + 2 + 7$.

5. Oblicz w najdogodniejszy sposób następujące sumy:

a) $6 + 2 + 4 + 8 + 3$.
Odp. $(6 + 4) + (2 + 8) + 3$.
b) $9 + 18 + 7 + 1 + 12$.
c) $2 + 7 + 6 + 8 + 5 + 3 + 5 + 4$.

6. Oblicz sumę liczb od 1 do 9, jak następuje:

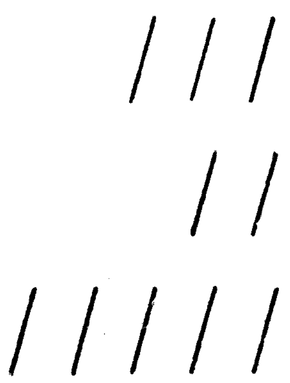
$$(1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5.$$

Oblicz w podobny sposób sumę liczb: *a)* od 1 do 19, *b)* od 23 do 27, *c)* od 12 do 38, *d)* od 45 do 55.

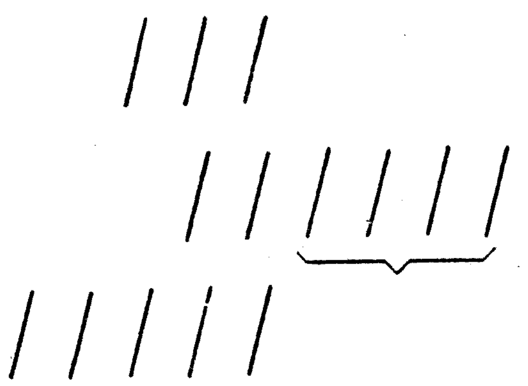
7. Jeden robotnik zarobił 3 *zł*, drugi o 2 *zł* więcej; ile zarobili razem? Odp. $3 + (3 + 2)$.
8. Ktoś zaoszczędził w pierwszym kwartale 20 *zł*, a w każdym następnym o 5 *zł* więcej; ile zaoszczędził w całym roku?
9. Jaś miał 2 *zł*, Staś o 5 *zł* więcej, Piotruś zaś o 3 *zł* więcej niż Jaś i Staś razem; ile pieniędzy mieli razem?
10. Jeden chłopiec miał 3 jabłka i 5 gruszek, drugi zaś o 2 jabłka i 4 gruszki więcej; ile owoców mieli razem?

Zmiany sumy.

Mamy na rys. 1. w pierwszym wierszu 3 kreski, w drugim 2 kreski, a w trzecim 5 kresek.



Rys. 1.



Rys. 2.

Razem więc jest kresek:

$$3 + 2 + 5 = 10.$$

Jeżeli w którymkolwiek wierszu dopiszemy 4 kreski, np. w drugim, (rys. 2), to oczywiście liczba wszystkich kresek wzrośnie o 4.

Zatem:

$$3 + (2 + 4) + 5 = 10 + 4.$$

A więc:

Jeśli jeden z dodajników sumy powiększymy o pewną liczbę, to suma powiększy się o tę liczbę.

Zadania.

1. Nie obliczając sumy wskaż, która ze sum jest większa i o ile:

a) $2 + 5 + 8 + 12, \quad 2 + 5 + 9 + 12$.
b) $38 + 49 + 63 + 27, \quad 38 + 49 + 70 + 27$.
c) $253 + 348 + 127, \quad 348 + 120 + 253$.
d) $15 + 43 + 37 + 52 + 9, \quad 52 + 9 + 30 + 15 + 43$.
e) $25 + 13 + 64 + 19, \quad 64 + 25 + 13$.
f) $13 + 154 + 69 + 4, \quad 69 + 154 + 13 + 4 + 2$.
g) $2 + (5 + 8) + 9, \quad 2 + 15 + 9$.
h) $16 + (4 + 9) + 7, \quad 16 + (12 + 9) + 7$.
i) $18 + (6 + 11) + (4 + 3), \quad 18 + (5 + 10) + (2 + 5)$.

2. Do jednego dodajnika dodaliśmy 3; do drugiego 5; o ile zwiększyła się suma? Podaj przykład!
3. W jednem naczyniu było 5 *l* mleka, w drugiem 4 *l*, w trzeciem 8 *l*; do pierwszego naczynia dolano 3 *l*, do drugiego 7 *l*. Ile *l* jest razem i o ile więcej niż przedtem?
4. Jaś dostał jednego dnia 8 jabłek, a Piotruś o 3 jabłka więcej; drugiego dnia Piotruś dostał 5 jabłek, a Jaś o 2 jabłka więcej. Który z nich więcej otrzymał i o ile?
5. Uporządkuj następujące sumy wedle wielkości, nie obliczając ich:

$$23 + 15 + 16 + 9, \quad 23 + 15 + 8 + 12, \quad 16 + 25 + 9 + 17,$$
$$9 + 23 + 16 + 17, \quad 15 + 9 + 23 + 12.$$

Obliczanie sumy w systemie dziesiętnym.

Przypadek I.

Mamy jakąś liczbę, np. 4235. Liczba ta przedstawia nam ile kulek otrzymamy, biorąc 4 tysiące, 2 setki, 3 dziesiątki i 5 kulek. Możemy więc napisać:

$$4235 = 4000 + 200 + 30 + 5.$$

Podobnie:

$$4206 = 4000 + 200 + 6.$$

Wynika stąd łatwy sposób obliczania takiej sumy, w której każdy dodajnik ma inną liczbę cyfr, przyczem w każdym dodajniku tylko pierwsza cyfra jest różna od zera.

Np.

$$3000 + 600 + 70 + 5 = 3675$$
$$50 + 4000 + 3 + 200 = 4253.$$

Zadania.

1. Przedstaw jako sumy jednostek, dziesiątek, setek, tysięcy i t. d. następujące liczby:

   5732, 494, 638, 4264, 15231, 47, 2537.

2. Oblicz następujące sumy:
   a) 300 + 9 + 5000 + 20.
   b) 4 + 200 + 70.
   c) 90 + 4000 + 7 + 300.
   d) 30 + 10000 + 5 + 200 + 3000.
   e) 1000 + 70 + 10000.
   f) 2 + 3000 + 200.
   g) 3 + 10000 + 500.

Przypadek II.

Zajmiemy się teraz obliczaniem sumy w wypadku, gdy dodajniki mają tę samą liczbę cyfr, przyczem w każdym dodajniku tylko pierwsza cyfra jest różna od zera, np.

$$400 + 300 + 200.$$

Liczby te przedstawiają nam odpowiednio 4 setki, 3 setki i 2 setki, a więc razem mamy 9 setek.

Zatem:

$$400 + 300 + 200 = 900.$$

Tak samo:

$$1000 + 3000 + 4000 = 8000.$$
$$10 + 30 + 20 + 30 = 90.$$

Aby do siebie dodać liczby 800 i 400, zwróćmy uwagę, że to jest razem 8 setek i 4 setki, a więc 12 setek.

Lecz 12 setek to jest 10 setek i 2 setki, czyli 1 tysiąc i 2 setki.

Zatem:

$$800 + 400 = 1200.$$

Tak samo:

$$500 + 600 = 1100.$$
$$70 + 80 = 150.$$

Postępując podobnie, znajdziemy:

$$40 + 50 + 30 = 120.$$

Zadania.

Oblicz następujące sumy:

I. *a)* 20 + 30. *b)* 30 + 50. *c)* 200 + 700. *d)* 2000 + 5000. *e)* 2000 + 6000.

II. *a)* 70 + 50. *b)* 40 + 90. *c)* 300 + 800. *d)* 500 + 900. *e)* 5000 + 8000. *f)* 7000 + 6000.

III. *a)* 3000 + 2000 + 8000. *b)* 20 + 30 + 80 + 70. *c)* 400 + 500 + 600. *d)* 2000 + 5000 + 7000.

Przypadek III (ogólny).

Mamy dodać do siebie kilka liczb, np. 437, 726 i 678.

Napiszmy wszystkie dodajniki pod sobą tak, by cyfry jednostek były w jednej kolumnie, podobnie cyfry dziesiątek, setek i t. d. i podkreślmy.

W naszym więc wypadku napiszemy:

$$\begin{array}{r} 437 \\ 726 \\ \underline{678} \\ 1841 \\ {\scriptstyle (12)} \end{array}$$

Każda z tych liczb jest sumą pewnej liczby setek, dziesiątek i jednostek. Ponieważ w sumie możemy dodajniki dowolnie łączyć i w dowolnym porządku dodawać, więc dodajmy najpierw jednostki.

Otrzymamy jednostek: 8 + 6 + 7 = 21, t. j. 2 dzies. i **1** jedn.

Otrzymane 2 dzies. dodajemy do dziesiątek.

Będziemy mieć dziesiątek: $2 + 7 + 2 + 3 = 14$, t. j. 1 setka i **4** dzies.

Otrzymaną setkę dodajemy do setek.

Będziemy mieć setek: $1 + 6 + 7 + 4 = 18$ t. j. **1** tysiąc i **8** setek.

Otrzymaliśmy więc razem:

1 tysiąc 8 setek 4 dzies. 1 jedn., czyli 1841.

Rachunek powyższy wygłaszamy w następujący sposób:

8 a 6 jest 14, a 7 jest 21. Piszę 1, a 2 doliczam do dziesiątek. 2 a 7 jest 9, a 2 jest 11, a 3 jest 14. Piszę 4, a 1 doliczam do setek. 1 a 6 jest 7, a 7 jest 14, a 4 jest 18. Piszę 18.

Podobnie obliczamy sumy następujące:

$$\begin{array}{r} 1457 \\ 683 \\ \underline{2795} \\ 4935 \\ {\scriptstyle (121)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2158 \\ 308 \\ 27 \\ 6 \\ \underline{3045} \\ 5544 \\ {\scriptstyle (13)} \end{array}$$

Próba dodawania.

Przy dodawaniu dodajemy zwyczajnie cyfry tej samej kolumny pokolei bądź z dołu do góry, bądź też z góry nadół. Aby zbadać, czy nie popełniliśmy błędów w dodawaniu, obliczamy jeszcze raz sumę danych liczb, dodając cyfry tej samej kolumny w odwrotnym porządku, niż za pierwszym razem, a więc np. z góry nadół, jeśli za pierwszym razem sumowaliśmy z dołu do góry.

Zadania.

1. Oblicz sumy i sprawdź:

$$a)\ \begin{array}{r} 358 \\ 327 \\ 159 \\ \underline{203} \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{r} 308 \\ 27 \\ 590 \\ \underline{731} \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{r} 2538 \\ 3020 \\ \underline{7125} \end{array} \qquad d)\ \begin{array}{r} 7082 \\ 35 \\ 127 \\ 2418 \\ \underline{8} \end{array}$$

2. Oblicz sumy i sprawdź:

a) $257 + 459$. *b)* $3457 + 6543$. *c)* $7896 + 455$.
d) $4578 + 312 + 5296$. *e)* $5256 + 3025 + 28 + 104$.
f) $475 + 3083 + 7250 + 932$. *g)* $5 + 5025 + 48 + 7530$.

3. Utwórz sumę wypisanych liczb dwoma sposobami:
   1) dodawaj liczby kolumnami, a następnie dodaj otrzymane wyniki;
   2) dodawaj liczby wierszami, a następnie dodaj otrzymane wyniki.

a)

358	28	735
1258	394	407
230	721	2053

b)

438	25	329	203
257	304	50	28
1230	480	209	70
576	269	921	6

c)

15	327	7	85	204
947	38	83	189	289
43	5	687	137	300
205	100	1001	26	128
35	27	89	6	53

4. Utwórz sumę następujących liczb mianowanych:

235 *zł* 45 *gr* i 387 *zł* 84 *gr*.

Rozwiązanie:

$$\begin{array}{rr} 235\ \textit{zł} & 45\ \textit{gr} \\ 387\ „ & \underline{84\ „} \\ 622\ \textit{zł} & 129\ \textit{gr} \end{array}$$

Ponieważ 129 *gr* = 1 *zł* 29 *gr*, więc dodając 1 *zł* do złotych, otrzymamy razem: 623 *zł* 29 *gr*.

5. Wykonaj następujące zadania:

$$a)\ \begin{array}{rr} 236\ \textit{zł} & 45\ \textit{gr} \\ 732\ „ & \\ 58\ „ & 89\ „ \\ \hline \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rr} 5020\ \textit{zł} & 20\ \textit{gr} \\ 428\ „ & 5\ „ \\ 16\ „ & 93\ „ \\ 8\ „ & 52\ „ \\ \hline \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{rr} 4253\ \textit{zł} & 37\ \textit{gr} \\ 348\ „ & 52\ „ \\ 1618\ „ & 29\ „ \\ \hline \end{array}$$

$$d)\ \begin{array}{rr} 358\ \textit{kg} & 732\ \textit{g} \\ 108\ „ & 52\ „ \\ 932\ „ & 41\ „ \\ \hline \end{array} \qquad e)\ \begin{array}{rr} 3768\ \textit{kg} & 439\ \textit{g} \\ 4309\ „ & 695\ „ \\ 706\ „ & 240\ „ \\ \hline \end{array} \qquad f)\ \begin{array}{rr} 2536\ \textit{kg} & 321\ \textit{g} \\ 532\ „ & 500\ „ \\ 3759\ „ & 418\ „ \\ 4289\ „ & 512\ „ \\ \hline \end{array}$$

g)	h)	i)
438 *m* 4 *dm*	538 *m* 7 *dm*	53 *km* 235 *m*
325 „ 7 „	29 „ 6 „	458 „ 53 „
768 „ 6 „	452 „ 5 „	1536 „ 172 „
	59 „ — „	

j)	k)	l)
128 *km* — *m*	15 *m* 4 *dm* 3 *cm*	157 *m* 3 *dm* 4 *cm*
4236 „ 523 „	235 „ 8 „ 9 „	4468 „ 5 „ 1 cm
53 „ 177 „	561 „ 9 „ 7 „	8644 „ 7 „ 8 cm
831 „ 699 „		

Rachunek pamięciowy i ułatwienia.

1.

2	9	8	5	9	9	5	3	2	7	2	8	7	8	7
5	1	8	6	1	1	1	2	7	2	4	7	5	7	4
6	9	8	4	4	6	5	6	2	5	5	7	9	9	7
8	7	8	9	6	5	4	7	5	9	4	8	7	9	7
9	3	9	2	7	3	7	2	4	9	1	1	6	4	3
8	8	9	6	6	5	8	7	5	6	6	6	9	9	4
4	8	5	4	6	9	1	2	2	9	8	3	7	8	7
4	1	6	3	2	1	6	3	6	1	4	7	6	4	6
4	7	5	9	6	1	7	4	2	8	8	1	7	9	3
6	9	4	3	2	3	9	7	3	6	9	8	9	8	7
6	4	2	6	4	5	2	3	2	5	2	7	7	3	7
6	5	9	8	7	3	9	6	8	8	8	8	7	9	5
4	2	8	8	9	6	4	8	4	6	2	5	5	7	6
4	8	7	3	9	9	1	5	4	6	9	3	5	6	6
9	8	6	5	9	8	4	5	2	6	7	7	5	2	6

a) Dodaj w każdej kolumnie, licząc z góry nadół, pierwszą i drugą liczbę; później drugą i trzecią; potem trzecią i czwartą i t. d.

b) Dodaj w każdej kolumnie pierwszą, drugą i trzecią liczbę; następnie drugą, trzecią i czwartą; potem trzecią, czwartą i piątą i t. d.

c) Postępuj tak dalej, dodając po cztery, po pięć liczb i t. d.

2. Poczynając od 0, dodawaj: *a)* po 2, *b)* po 3, *c)* po 4, *d)* po 5, *e)* po 6, *f)* po 7, *g)* po 8, *h)* po 9, *j)* po 10 tak długo, aż otrzymasz sumę większą od 100.

Powtórz to samo, poczynając od którejkolwiek liczby z pomiędzy liczb 1, 2, ... 10!

3. Przedstaw każdą z liczb od 2 aż do 20 jako sumę dwóch liczb na wszystkie możliwe sposoby!

4. Co należy dodać do każdej z liczb 1, 7, 3, 8, 9, 6, 5, 4, 2, *a)* aby otrzymać 10, *b)* aby otrzymać 100, *c)* aby otrzymać 415?

5. Dodaj w pamięci:

20 + 40,	200 + 500,	2000 + 5000,
40 + 50,	700 + 800,	3000 + 9000,
30 + 70,	600 + 900,	8000 + 6000,
10 + 18,	100 + 500,	7000 + 7000,
90 + 60,	400 + 300,	5000 + 8000.

6. Dodaj w pamięci:

21 + 3,	14 + 20,	358 + 500,	3691 + 9000,
4583 + 5,	256 + 70,	11856 + 200,	417 + 5000,
356 + 7,	3291 + 30,	17329 + 300,	12516 + 4000,
12238 + 9,	85 + 50,	93 + 900,	89 + 6000,
87 + 8,	14351 + 90,	4516 + 300,	613 + 7000,
453 + 1,	11232 + 80,	897 + 900,	1025 + 2000,
3025 + 3,	371 + 40,	64 + 800,	4572 + 8000.

Aby obliczyć w pamięci sumę dwóch liczb, np. 256 + 387, rozkładamy jeden z dodajników, np. 256 na sumę 200 + 50 + 6 i do 387 dodajemy 200, potem 50, a wreszcie 6.

Rachunek w myśli przeprowadza się w sposób następujacy:

387 + 200 = 587,
587 + 50 = 637,
637 + 6 = 643.

7. 25, 49, 32, 76, 82, 41, 19, 83, 57, 38,
182, 247, 521, 413, 655, 221, 716, 902, 404, 548,

dodaj w pamięci:

a) w pierwszym wierszu pierwszą liczbę do drugiej; drugą do trzeciej; i t. d.

b) w pierwszym wierszu pierwszą liczbę do trzeciej; drugą do czwartej i t. d.

c) liczby w pierwszej kolumnie, drugiej i t. d.

d) w drugim wierszu postąp podobnie jak w *a)* i *b)*.

8. Dodaj w pamięci:

15 + 18 + 5,	12 + 36 + 7,	21 + 19 + 4,
16 + 35 + 12,	18 + 40 + 11,	15 + 27 + 27,
37 + 28 + 7,	25 + 15 + 14,	325 + 47 + 18,
	17 + 18 + 12,	
	16 + 58 + 72,	
	18 + 45 + 27 + 5.	

Jeśli dodajnik jest liczbą, kończącą się cyfrą 8 lub 9, to zaokrąglamy go do najbliższych dziesiątek, a następnie sumę pomniejszamy o tyle, o ileśmy dodajnik powiększyli.

Np.: *a)* 35 + 99; rachujemy: 35 + 100 = 135; otrzymana suma jest o 1 za duża, zatem:

$$35 + 99 = 134.$$

b) 27 + 58; rachujemy: 27 + 60 = 87; otrzymana suma jest o 2 za duża, zatem:

$$27 + 58 = 85.$$

9. Do liczb:

16, 45, 87, 92, 245, 567, 5234, 11127,

dodawaj pokolei:

8, 9, 11, 12, 38, 39, 98, 99, 101, 102, 998, 999.

10. Robotnik miał 98 *zł*, zarobił 35 *zł*; ile ma razem?
11. Staś miał 47 marek, dostał 12 marek i kupił sobie 8 marek; ile marek ma razem?
12. Syn ma 17 lat, a ojciec jest o 28 lat starszy; ile lat ma ojciec?
13. Staś na wycieczce w pierwszym dniu przebył 26 *km*, w drugim 18 *km*, a w trzecim 15 *km*; ile *km* przeszedł?
14. Jan ma 43 *zł*, Stanisław o 18 *zł* więcej; ile mają razem?
15. Kupcowi zostało w jednym worku 46 *kg* mąki, w drugim 32 *kg*, a w trzecim 29 *kg*; ile *kg* mąki zostało?
16. Kupiec sprzedał 17 *kg* towaru za 323 *zł* i 38 *kg* tego samego towaru za 722 *zł*; ile *kg* towaru sprzedał i za jaką cenę?
17. Zegar wskazuje 1 godzinę i 17 minut, a spóźnił się o 39 minut; jaki jest prawdziwy czas?

18. Materjał na ubranie kosztuje 112 *zł*, dodatki 35 *zł*, a robota 59 *zł*; ile kosztuje ubranie?
19. Dłużnik zapłacił połowę swego długu, t. j. 298 *zł*; ile wynosi cały dług?
20. Z beczki odlano trzecią część jej zawartości, t. j. 66 *l*; ile litrów pozostało w beczce?

Ćwiczenia.

1. Kupiec sprzedał towar za 5246 *zł* i stracił na tej sprzedaży 1387 *zł*; ile zapłacił za ten towar?
2. Archimedes umarł w r. 212 prz. Chr.; ile lat upłynęło od jego śmierci?
3. Mickiewicz ur. się w r. 1798, a żył 57 lat; w którym roku umarł?
4. Ile dni upłynęło do dzisiaj od początku roku?
5. Jaką ma datę 57-my dzień po 13 maja?
6. W ciągu roku jeden kupiec zarobił 3264 *zł*, drugi o 2560 *zł* więcej, a trzeci o 1652 *zł* więcej, niż dwaj pierwsi razem; ile zarobił z nich każdy i ile zarobili razem?
7. Poszczególne części granicy Polski mają: wybrzeże morskie 143 *km*, granica z Gdańskiem 139 *km*, z Niemcami 1662 *km*, z Litwą 521 *km*, z Łotwą 102 *km*, z Sowietami 1412 *km*, z Rumunją 388 *km*, z Czechosłowacją 920 *km*; jaka jest długość granic Polski?
8. Długość Odry wynosi 860 *km*; Niemen jest o 18 *km* dłuższy, Wisła jest o 189 *km* dłuższa niż Niemen, a Dniestr jest o 305 *km* dłuższy od Wisły; jak długie są te rzeki?
9. Najwyższy szczyt w Tatrach polskich, Rysy, wznosi się 2503 *m* ponad poziom morza, a najwyższy szczyt w całych Tatrach, Garłuch, jest o 160 *m* wyższy; jaki wysoki jest Garłuch?
10. Najwyższy szczyt na ziemi, Gaurisankar, ma wysokość 8840 *m* ponad poziom Oceanu Spokojnego, którego największa głębokość wynosi 8960 *m*; jak wysoko wznosi się ten szczyt ponad tem najgłębszem miejscem?
11. Kupiec odbył podróż okrężną z Warszawy do Krakowa (364 *km*), z Krakowa do Lwowa (343 *km*), ze Lwowa do Lublina (327 *km*) i z Lublina do Warszawy (186 *km*); ile *km* przejechał?

12. Z Warszawy do Poznania można jechać przez Toruń i Gniezno, lub przez Kutno i Strzałkowo.
Która droga jest krótsza, jeśli odległość z Warszawy do Torunia wynosi 244 *km*, z Torunia do Gniezna 91 *km*, a z Gniezna do Poznania 50 *km*; odległość z Warszawy do Kutna wynosi 133 *km*, z Kutna do Strzałkowa 111 *km*, ze Strzałkowa do Poznania 68 *km*?

13. Odległość z Warszawy do Torunia wynosi 244 *km*, z Torunia do Berlina 407 *km*, z Berlina do Paryża 1081 *km*, z Paryża do Madrytu 1465 *km*; ile *km* wynosi odległość z Warszawy do Paryża przez Berlin, a ile do Madrytu?

14. Przekonaj się, że niżej podane kwadraty są t. zw. kwadratami magicznemi, to znaczy, że sumy liczb każdego wiersza, każdej kolumny i każdej przekątnej są sobie równe.

a)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

b)

1	18	21	22	3
20	14	9	16	6
19	15	13	11	7
2	10	17	12	24
23	8	5	4	25

c)

13	21	19	2	10
4	7	15	23	16
25	18	1	9	12
6	14	22	20	3
17	5	8	11	24

15. Utwórz kwadrat magiczny, wypełniając puste miejsca liczbami od 1 do 6 tak, by suma każdego wiersza, przekątnej i kolumny wynosiła 15.

8		
		7
	9	

16. Kamień wolno puszczony z wieży przebiegł w pierwszej sekundzie 490 *cm*, a w każdej następnej sekundzie o 980 *cm* więcej, niż w poprzedniej; jaka wysoka jest wieża, jeśli spadał 4 sekundy?
17. Opierając się na danych poprzedniego zadania, oblicz, w której sekundzie spadnie kamień z wysokości 150 *m*.
18. Zwyczajnie przy wagach są ciężarki:

1 *g*, 2 *g*, 2 *g*, 5 *g*, 10 *g*, 20 *g*, 20 *g*, 50 *g*.

Ciężarkami temi możemy zważyć ciężar od 1 *g* do 110 *g*. Jak zważysz:

17 *g*, 25 *g*, 39 *g*, 43 *g*, 58 *g*, 67 *g*, 75 *g*, 84 *g*, 99 *g*, 108 *g*.

19. Mając jeden ciężarek 1 *g*, jeden ciężarek 2 *g*, jeden ciężarek 4 *g*, wreszcie jeden ciężarek 8 *g*, przekonaj się, że każdy ciężar od 1 *g* do 15 *g* potrafisz utworzyć, a więc zważyć. Np.:

$$10\,g = 2\,g + 8\,g.$$

20. Mając 2 ciężarki po 1 *g*, 2 ciężarki po 3 *g*, 2 ciężarki po 9 *g*, można utworzyć wszystkie ciężary od 1 *g* do 26 *g*. Utwórz ciężary od 10 *g* do 20 *g*!
21. Jak obliczysz cenę, za którą kupiec sprzedaje towar, wiedząc, ile kupca kosztuje towar i jaki ma zysk? Podaj przykład liczbowy!
22. Jak obliczysz cenę, za którą fabrykant sprzedaje towar, wiedząc, ile zapłacił za surowiec, za robociznę i jaki ma zysk? Podaj przykład liczbowy!
23. Ciężar towaru wraz z opakowaniem nazywa się brutto, ciężar opakowania nazywa się tara, a ciężar samego towaru nazywa się netto; jak obliczysz brutto, znając tarę i netto? Podaj przykład liczbowy!
24. Jak obliczysz zarobek robotnika w dwóch tygodniach, wiedząc, ile zarobił w jednym tygodniu i o ile więcej zarobił w drugim tygodniu? Podaj przykład liczbowy!

25. Staś zabawiał się z Jasiem następującą grą: Staś podał jakąś liczbę od 1 do 9. Następnie Jaś liczbę większą od poprzedniej co najwyżej o 9; potem Staś podał znowu większą od poprzedniej co najwyżej o 9 i t. d. Ten wygrywa, kto pierwszy powie 99.

Spróbuj zagrać w tę grę z kolegą. (Kto grę zaczyna, powinien wygrać.)

26. W miejsca oznaczone kropkami

1
1 1
1 2 1
1 . . 1
1 . . . 1
1 1
1 1

należy wpisywać kolejno sumę dwóch najbliższych liczb z poprzedniego wiersza. Otrzymany w ten sposób trójkąt liczb nazywa się *trójkątem Pascala*[1]. Utwórz trójkąt Pascala, mający dziesięć wierszy! Oblicz sumę liczb każdego wiersza!

[1] Czytaj: Paskala.

ODEJMOWANIE.

Określenia i własności.

Określenia.

Jeżeli ze zbioru 9 kulek usuniemy 5 kulek, to pozostaną 4 kulki. Jeżelibyśmy do tych kulek, które nam zostały (4 kulki), dołączyli kulki usunięte (5 kulek), to otrzymalibyśmy pierwotny zbiór kulek (9 kulek).

Liczbę **4** nazywamy *różnicą* lub *resztą*, powstałą z odjęcia liczby **5** zwanej *odjemnikiem* od liczby **9** zwanej *odjemną*.

Różnica dwóch liczb, z których pierwszą nazywamy odjemną, a drugą odjemnikiem, jest to liczba, która dodana do odjemnika daje na wynik odjemną.

Różnicę dwóch liczb oznaczamy, pisząc odjemną, następnie znak — (czytaj mniej, lub minus) a potem odjemnik.

A więc piszemy:

$$9 - 5 = 4.$$

Podobnie:

$$16 - 9 = 7, \quad \text{bo} \quad 9 + 7 = 16.$$
$$37 - 12 = 25, \quad \text{bo} \quad 12 + 25 = 37.$$

Oczywiście możemy mówić o różnicy dwóch liczb tylko wówczas, gdy odjemna jest większa lub równa odjemnikowi.

Jeżeli odjemna równa się odjemnikowi, to różnica równa się zeru.

A więc:

$$9 - 9 = 0, \quad \text{bo} \quad 9 + 0 = 9.$$
$$0 - 0 = 0, \quad \text{bo} \quad 0 + 0 = 0.$$

Jeśli odjemnik jest zerem, to różnica równa się odjemnej.

Np.: $8 - 0 = 8$, bo $0 + 8 = 8$.
$15 - 0 = 15$, bo $0 + 15 = 15$.

Zadania.

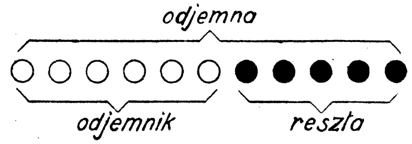
1. Jaś miał 8 *zł*, wydał 5 *zł*; ile mu zostało?
2. Kupiec miał 30 *kg* cukru, sprzedał 20 *kg*; ile mu zostało?
3. Jaś ma 15 jabłek, a Staś o 4 jabłka mniej; ile jabłek ma Staś?
4. Dłużnik winien 70 *zł*, zapłacił 40 *zł*; ile jest jeszcze winien?
5. Piechur przebył 13 *km* w dwóch godzinach; w pierwszej przebył 7 *km*; ile *km* przebył w drugiej?
6. Pal o długości 28 *dm* wbito w ziemię na 2 *dm* głęboko; ile *dm* wystaje nad ziemią?
7. Towar waży brutto 21 *kg*, a opakowanie 3 *kg*; ile waży netto?
8. Kupiec zapłacił za towar 36 *zł*, a sprzedał za 41 *zł*; ile zarobił?
9. Zegar wskazuje 9 godzinę i 20 minut, a spieszy o 13 minut; która jest godzina?
10. Którą liczbą zkolei po 13 jest liczba 20?
11. Po której liczbie jest liczba 50 ośmnastą zkolei?
12. Ile dni upłynie do końca stycznia od 13 stycznia?
13. Staś ukończył 11 lat; za ile lat ukończy 18 lat?
14. Staś jest od Jasia o 8 *cm* wyższy, Piotruś zaś jest o 9 *cm* niższy od Stasia; kto jest wyższy, czy Jaś, czy Piotruś i o ile?
15. Różnica dwóch liczb równa się 5, a odjemnik równa się 8; ile wynosi odjemna?
16. Różnica dwóch liczb równa się 10, a odjemna równa się 17; ile wynosi odjemnik?

Odjemna, odjemnik i różnica.

Jak z określenia różnicy wynika, odjemną otrzymujemy, dodając do odjemnika resztę.

Np. Jeśli 7 jest odjemnikiem, a 16 resztą, to odjemna równa się $7 + 16$, t. j. 23.

Na rys. 3. mamy 11 kółek, z czego 6 jest białych, a reszta czarnych. Kółek czarnych jest zatem 5, bo



$$\underset{\text{odjemna}}{11} - \underset{\text{odjemnik}}{6} = \underset{\text{reszta}}{5}$$

Rys. 3.

Z rysunku widzimy, że: odjemnik otrzymamy, odejmując od odjemnej resztę.

Zatem:
$$6 = 11 - 5.$$

Podobnie, mamy:
$$28 - 13 = 15,$$
więc
$$13 = 28 - 15.$$

Zadania.

1.

	odjemna	odjemnik	reszta
a)	8	5	?
b)	10	?	3
c)	?	7	8
d)	16	?	9
e)	12	9	?
f)	?	12	15.

W miejsce pytajników wstaw odpowiednie liczby!

2. W miejsce liter wstaw odpowiednie liczby:

$40 - x = 30$; $15 - 12 = y$; $x - 8 = 20$; $17 - x = 8$;
$z - 16 = 6$; $x + 8 = 27$; $16 + z = 30$.

Własności różnicy.

Jeśli Jan zarobił 12 *zł*, a wydał następnie 7 *zł*, to zaoszczędził 5 *zł*, bo:
$$12 - 7 = 5.$$

Widzimy stąd, że:
$$\underbrace{\text{Zarobek}}_{\text{odjemna}} - \underbrace{\text{wydatki}}_{\text{odjemnik}} = \underbrace{\text{oszczędności}}_{\text{reszta}}$$

Jeżeli Stanisław zarobił o 3 *zł* więcej, niż Jan, a wydatki miał te same, to jego oszczędności będą o 3 *zł* większe, niż Jana. Możemy więc napisać:

$$\underbrace{(12 + 3)}_{\text{odjemna}} - \underbrace{7}_{\text{odjemnik}} = \underbrace{5 + 3}_{\text{reszta}}$$

Podobnie otrzymamy:

$$(12 - 3) - 7 = 5 - 3.$$

Zatem:

Jeśli odjemną zwiększymy (względnie pomniejszymy) *o pewną liczbę, to o tę samą liczbę zwiększy* (względnie zmniejszy) *się reszta.*

Należy pamiętać, że odjemną można zmniejszyć tylko o taką liczbę, aby odejmowanie było nadal możliwe.

Przypuśćmy teraz, że Stanisław zarobił tyle co Jan, lecz wydał o 3 *zł* więcej, niż Jan. Oczywiście oszczędności Stanisława będą o 3 *zł* mniejsze niż Jana.

Możemy więc napisać:

$$\underbrace{12}_{\text{odjemna}} - \underbrace{(7 + 3)}_{\text{odjemnik}} = \underbrace{5 - 3}_{\text{reszta}}$$

Podobnie otrzymamy:

$$12 - (7 - 3) = 5 + 3.$$

Zatem:

Jeśli odjemnik zwiększymy (względnie pomniejszymy) *o pewną liczbę, to o tę samą liczbę zmniejszy się* (względnie zwiększy) *reszta.*

Gdyby Stanisław zarobił o 3 *zł* więcej, niż Jan, i wydał o 3 *zł* więcej, niż Jan, to zostałoby mu to samo, co Janowi.

Zatem:

$$(12 + 3) - (7 + 3) = 5,$$

Podobnie otrzymamy:

$$(12 - 3) - (7 - 3) = 5$$

A więc:

Jeżeli odjemną i odjemnik równocześnie powiększymy lub równocześnie pomniejszymy o tę samą liczbę, to reszta się nie zmieni.

Zadania.

1. Jak się zmieniła różnica, jeśli:
   a) do odjemnej dodano 2;
   b) do odjemnika dodano 2;
   c) od odjemnej odjęto 2;
   d) od odjemnika odjęto 2;
   e) do odjemnej i odjemnika dodano 2;
   f) do odjemnej dodano 4, do odjemnika dodano 2;
   g) do odjemnej dodano 2, do odjemnika dodano 4;
   h) od odjemnej odjęto 4, do odjemnika dodano 2.

   Uzasadnij odpowiedzi na dobranych przez siebie przykładach!

2. Możemy, nie wykonując odejmowania, zauważyć, że różnica 28 — 17 jest od różnicy 25 — 17 o 3 większa; odjemniki bowiem są te same, a odjemna w pierwszej różnicy jest o 3 większa od odjemnej w drugiej różnicy. W podobny sposób postępując, podaj (bez rachowania), która z różnic jest większa i o ile:

   a) 218 — 35 i 215 — 35; *b)* 635 — 100 i 638 — 100;
   c) 542 — 85 i 542 — 100; *d)* 750 — 120 i 750 — 90;
   e) 1215 — 14 i 1217 — 16; *f)* 24 — 10 i 20 — 6.

3. Podaj (bez rachowania), która z różnic jest większa i o ile:
   a) (30 — 5) — 8 i 30 — 8;
   b) (27 + 8) — 9 i 27 — 9;
   c) 258 — 123 i 258 — (123 + 17);
   d) 763 — 428 i 763 — (428 — 100);
   e) (358 + 20) — (231 + 20) i 358 — 231;
   f) (418 — 30) — (315 — 30) i 418 — 315;
   g) (100 — 20) — (50 + 15) i 100 — 50;
   h) (306 + 25) — (200 — 20) i 306 — 200;
   i) (35 + 27 + 14) — (58 + 16) i (35 + 27) — 58;
   k) (63 + 92 — 17) — (37 + 25) i (63 + 92) — 37.

4. Dłużnik był winien 1000 *zł* i zapłacił 600 *zł*; ile jest winien? Ile byłby winien, gdyby spłacił o 100 *zł* więcej, a ile, gdyby spłacił o 200 *zł* mniej?

5. Jaś i Staś mieli tę samą ilość pieniędzy. Jaś wydał 8 *zł*, Staś zaś 5 *zł*; komu zostało więcej i o ile?
   Jaka byłaby odpowiedź, gdyby na początku Jaś miał o 6 *zł* więcej niż Staś?

6. Jeden balon znajduje się 300 m, a drugi 200 m nad ziemią. Jaka jest różnica ich wysokości? Jak zmieni się różnica ich wysokości, jeśli:
   a) pierwszy wzniesie się o 20 m, a drugi wzniesie się o 30 m?
   b) pierwszy wzniesie się o 20 m, a drugi opadnie o 30 m?
   c) pierwszy opadnie o 20 m, a drugi opadnie o 30 m?
   d) pierwszy opadnie o 20 m, a drugi wzniesie się o 30 m?
7. Jeden wieśniak ma o 5 kur więcej niż gęsi, drugi zaś ma o 3 kury więcej, niż pierwszy, i o 8 gęsi więcej, niż pierwszy; czego ma więcej drugi wieśniak: kur, czy gęsi?

Zmiany różnicy.

1. Czy reszta powiększy się, czy pomniejszy, jeśli:
   a) odjemną zwiększymy;
   b) odjemną zmniejszymy;
   c) odjemnik zwiększymy;
   d) odjemnik zmniejszymy.

   Objaśnij odpowiedzi na przykładach!
2. Podaj (bez rachowania), która z różnic jest większa:

   a) 4568 — 296 i 4568 — 693;
   b) 2327 — 1538 i 3691 — 1538;
   c) 7358 — 3025 i 5643 — 3025;
   d) 2436 — 1253 i 2436 — 894;
   e) 3258 — 2326 i 4367 — 2326.
3. *a*) Jaś miał więcej pieniędzy niż Staś, a wydał mniej, niż Staś; komu więcej zostało?
   b) Kupiec miał więcej kilogramów cukru, niż mąki, a sprzedał więcej mąki, niż cukru; czego mu więcej zostało?
   c) W jednej sali było więcej ludzi, niż w drugiej; z pierwszej wyszło mniej ludzi, niż z drugiej. W której sali zostało więcej ludzi?

   Objaśnij odpowiedzi na liczbowych przykładach!
4. Czy różnica zwiększy się, czy zmniejszy, jeśli:
   a) odjemną powiększymy i równocześnie odjemnik pomniejszymy?

   b) odjemną pomniejszymy i równocześnie odjemnik powiększymy?

   Objaśnij odpowiedzi na liczbowych przykładach!
5. Podaj (bez rachowania), która z różnic jest większa:

   a) 2325 — 1796 i 3251 — 1200;
   b) 5100 — 586 i 4921 — 782;
   c) 1236 — 1000 i 1111 — 1096;
   d) 4050 — 2003 i 5209 — 1928.
6. Jeśli wiesz, że różnica zwiększyła się, a odjemnik nie zmienił się, co można powiedzieć o odjemnej? Objaśnij na przykładzie!
7. Jeśli wiesz, że różnica nie zmieniła się, a odjemnik powiększył się, to jak zmieniła się odjemna? Objaśnij na przykładzie!
8. Jaś miał więcej pieniędzy, niż Staś i wydał więcej, niż Staś; czy możesz powiedzieć komu zostało więcej pieniędzy? Objaśnij odpowiedź na przykładzie!
9. Najwyższym szczytem w Tatrach jest Garłuch, a po nim Łomnica; Rysy są wyższe od Świnnicy. Gdzie jest większa różnica wysokości, czy pomiędzy Garłuchem a Świnnicą, czy też pomiędzy Łomnicą a Rysami?
10. Liczba ludności we Francji jest większa, niż w Polsce, natomiast roczny przyrost ludności jest większy w Polsce, niż we Francji; czy różnica między ludnością we Francji i w Polsce wzrasta z roku na rok, czy maleje?

Łączne dodawanie i odejmowanie.

Jeżeli mamy kilka liczb, połączonych znakami + i — jak np.:

$$18 - 7 - 6 + 5 - 3,$$

to wyrażenie takie oznacza nam liczbę, którą otrzymamy, wykonując pokolei naznaczone działania.

W naszym więc wypadku należy od 18 odjąć 7, od otrzymanej różnicy odjąć 6, do tej różnicy dodać 5 i od otrzymanej sumy odjąć 3.

A więc:

$$18 - 7 - 6 + 5 - 3 = 7.$$

Podobnie: $45 - 12 + 8 - 16 + 1 = 26.$

Zadania.

1. Oblicz:

   a) $15 - 7 - 8 + 16$, *b*) $23 + 12 - 5 - 7 + 1$,
   c) $35 - 1 - 3 - 7 - 10$, *d*) $17 - 15 + 3 - 5$,
   e) $48 - 25 + 25 - 6 + 6$.

2. Do beczki wlano 100 *l* wina, sprzedano z tego 30 *l*, a potem 15 *l*, dolano następnie 20 *l* i sprzedano znowu 40 *l*; ile wina zostało w beczce?
   Odp.: $100 - 30 - 15 + 20 - 40$.
3. Piechur przeszedł w pierwszym dniu 40 *km*, w drugim o 10 *km* mniej, w trzecim o 5 *km* więcej, niż w drugim, a w czwartym o 7 *km* mniej niż w trzecim; jaką drogę przebył w czwartym dniu?
4. Robotnik zarobił jednego dnia 8 *zł*, wydał 5 *zł*, drugiego dnia zarobił 4 *zł*, a wydał 6 *zł*; ile pieniędzy mu zostało?
5. Balon wzniósł się na 1000 *m* wgórę, następnie opadł o 50 *m*, znów wzniósł się o 60 *m* i opadł wreszcie o 80 *m*; na jakiej wysokości znajduje się balon?

Podobnie jak przy dodawaniu dajemy nawias dla zaznaczenia, że najpierw należy wykonać działania naznaczone w nawiasie. Np.:

$$(12 + 3) - 7 = 15 - 7 = 8,$$
$$15 + (8 - 6) + (10 - 3) = 15 + 2 + 7 = 24.$$

6. Oblicz:
   a) $12 - (7 - 6) + 3$;
   b) $20 + (12 - 5) - (10 - 6)$;
   c) $(30 - 15) - (40 - 25)$;
   d) $80 - 25 + (30 - 20) - (15 - 6)$;
   e) $(20 - 5 + 6) - (30 - 15 - 7) + (40 - 20)$.
7. Z dwóch stacyj, odległych od siebie o 400 *km*, wychodzą równocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi. Po pewnym czasie pierwszy przebył 120 *km*, a drugi 80 *km*; w jakiej odległości znajdują się teraz te pociągi?
8. W jednym koszyku było 60 jabłek, a w drugim 40 jabłek. Staś wziął z pierwszego koszyka 18 jabłek, a Jaś wziął z drugiego koszyka 12 jabłek; ile jabłek razem zostało?
9. Zegar spóźnił się o 5 minut, posunięto wskazówki naprzód o 15 minut i wtedy zegar wskazywał 3 godzinę i 25 minut; która godzina była wtedy naprawdę?

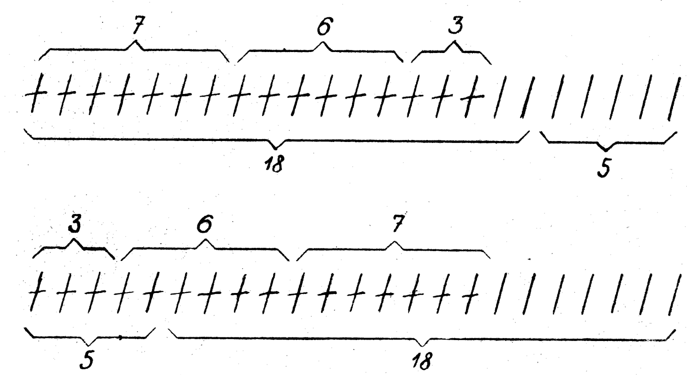
10. Sprowadzono dwie skrzynie cukru. Jedna waży brutto 56 *kg*, druga zaś 65 *kg*; opakowanie pierwszej (tara) waży 7 *kg*, drugiej zaś 9 *kg*. W której skrzynce jest więcej cukru i o ile?

Własności łącznego dodawania i odejmowania.

Mamy obliczyć:

$$18 - 7 - 6 + 5 - 3.$$

Rachunek, jaki wykonujemy, obliczając powyższe wyrażenie, możemy sobie uzmysłowić, rysując najpierw 18 kresek, następnie przekreślając 7 kresek, potem przekreślając jeszcze 6 kresek, następnie dorysowując 5 nowych kresek, a wkońcu przekreślając jeszcze 3 kreski. Rys. 4 (górna figura).



Rys. 4.

Taki sam wynik otrzymamy, jeżeli w tej samej liczbie co poprzednio, ale w innym porządku będziemy kreski dopisywali i przekreślali. Moglibyśmy więc narysować najpierw 5 kresek, przekreślić 3, dorysować 18 kresek, przekreślić 6 i znowu przekreślić 7 kresek, rys. 4 (dolna figura). Zostanie taka sama liczba nieprzekreślonych kresek, jak poprzednio.

Zatem:

$$18 - 7 - 6 + 5 - 3 = 5 - 3 + 18 - 6 - 7.$$

Widzimy stąd, że, mając zaznaczone na liczbach kolejne działanie dodawania i odejmowania, możemy te działania wykonywać w dowolnym porządku (byle tylko odejmowania były zawsze możliwe).

Z rys. 4 widoczne jest, że:

$$18 - 7 - 6 + 5 - 3 = (18 + 5) - (7 + 6 + 3).$$

Wynika stąd prosty sposób obliczania wyrażenia złożonego z kilku liczb, połączonych znakami + lub —:

Do liczby pierwszej dodajemy te liczby, które należy dodać, następnie tworzymy sumę tych liczb, które należy odjąć, i od pierwszej sumy odejmujemy drugą.

Zadania.

1. Wylicz kilkoma sposobami niżej podane wyrażenia:
   a) $18 - 15 + 7 + 15 - 8 + 3$;
   b) $27 - 15 - 8 + 1 + 7 - 6$;
   c) $120 - 35 - 25 - 40 + 7 + 15$;
   d) $2 - 1 + 3 - 2 + 4 + 2 - 1 - 3 + 1$;
   e) $8 - 8 + 8 - 8 + 8$;
   f) $12 - 7 + 6 + 7 - 6$;
   g) $40 - 15 + 9 - 5 + 15 + 5 - 9$.
2. Ktoś zarobił pierwszego dnia 20 *zł*, a wydał 8 *zł*, drugiego dnia zarobił 10 *zł*, a wydał 12 *zł*, trzeciego dnia zarobił 18 *zł*, a wydał 7 *zł*; ile zarobił i ile wydał w trzech dniach, ile zaoszczędził w pierwszym dniu, ile w dwóch pierwszych dniach, ile w trzech dniach?
3. W jednej sali było 30 ludzi, a w drugiej 50 ludzi. Z pierwszej sali przeszło do drugiej 15 ludzi, a potem z drugiej sali przeszło do pierwszej 18 ludzi i wreszcie jeszcze raz z drugiej sali przeszło do pierwszej 13 ludzi; ile było wkońcu osób w pierwszej, a ile w drugiej sali?
4. Woda w rzece podniosła się o 15 *cm* ponad stan normalny, opadła następnie o 18 *cm* i wzniosła się znowu o 2 *cm*; czy wkońcu poziom rzeki był powyżej, czy poniżej stanu normalnego i o ile *cm*?

Odejmowanie w systemie dziesiętnym.

Od liczby 641 mamy odjąć liczbę 432.

Napiszmy odjemnik pod odjemną tak, by cyfry jednostek były w jednej kolumnie, podobnież cyfry dziesiątek, setek i t. d., a następnie podkreślmy.

$$\begin{array}{r} 647 \\ -\,432 \\ \hline 215 \end{array}$$

Dla zaznaczenia, że chodzi o odejmowanie, piszemy czasem przed odjemnikiem znak: —

Ponieważ reszta dodana do odjemnika daje na wynik odjemną, więc szukana reszta musi mieć na miejscu jednostek cyfrę, która dodana do 2 daje 7, a więc cyfrę 5; na miejscu dziesiątek musi mieć cyfrę, która dodana do 3 daje 4, a więc cyfrę 1; na miejscu setek musi mieć cyfrę, która dodana do 4 daje 6, a więc 2. Zatem reszta wynosi 215. Rachunek powyższy wygłaszamy w następujący sposób:

2 a **5** jest 7, piszemy 5; 3 a **1** jest 4, piszemy 1; 4 a **2** jest 6, piszemy 2.

Gdy cyfra jednostek odjemnika jest większa od cyfry jednostek odjemnej, np.:

$$\begin{array}{r} 385 \\ -\,258 \\ \hline 127 \end{array}$$

to cyfra jednostek różnicy musi wynosić 7, bo 8 a 7 równa się 15. Ponieważ 15 równa się 5 + 10, więc powiększamy odjemną o 10. Aby wobec tego reszta nie zmieniła się, powiększymy także odjemnik o 10.

Z tego powodu rachujemy:

8 a **7** jest 15, piszę 7, a 1 doliczam do dziesiątek; 1 a 5 jest 6, 6 a **2** jest 8, piszę 2; 2 a **1** jest 3, piszę 1.

Podobnie postępujemy, gdy niektóre cyfry odjemnika są większe od odpowiednich cyfr odjemnej.

$$\begin{array}{r} 8375 \\ -\,4897 \\ \hline 3478 \end{array}$$

7 a **8** jest 15, piszę 8, a 1 doliczam do dziesiątek; 1 a 9 jest 10, 10 a **7** jest 17, piszę 7, a 1 doliczam do setek; 1 a 8 jest 9, 9 a **4** jest 13, piszę 4, a 1 doliczam do tysięcy; 1 a 4 jest 5, 5 a **3** jest 8, piszę 3.

Próba odejmowania.

Aby zbadać, czy nie popełniliśmy błędu w odejmowaniu, dodajemy resztę do odjemnika. Oczywiście na wynik powinniśmy otrzymać odjemną.

Zadania.

1. Oblicz różnicę i sprawdź:

a) 5727
— 4328

b) 8630
— 4902

c) 15027
— 6090

d) 18343
— 13258

e) 10000
— 8276

2. Oblicz różnicę i sprawdź:

a) 538 — 227, *b*) 1457 — 738, *c*) 9235 — 4536,
d) 10050 — 8734, *e*) 15327 — 12408.

3. Oblicz i sprawdź:

a) 12458 — 6407 — 3256 — 1128;
b) 14653 — 7234 + 2537 — 5604;
c) 3725 — 1246 + 18 — 458 + 3 — 1456.

4. W każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdej przekątnej, odejm sumę liczb zaznaczonych tłustym drukiem od sumy pozostałych.

400	3825	**1550**
525	625	1775
2800	**2575**	1650

5. Napisz na pustych polach takie liczby, by powstał kwadrat magiczny, w którym suma liczb każdej kolumny, każdego wiersza i każdej przekątnej równa się 9231.

	2689	4256
	3077	

6. Mamy wykonać odejmowanie:

(100)
5397 *zł* 38 *gr*
— 2458 „ 65 „
2938 *zł* 73 *gr*

Ponieważ 65 *gr* nie możemy odjąć od 38 *gr*, więc 1 *zł* zamieniamy na 100 *gr* i dodajemy do groszy. Zapisujemy to, pisząc kropkę nad 7, aby pamiętać, że w odjemnej mamy 5396 *zł*, a 100 piszemy nad 38 *gr* dla zaznaczenia, że mamy 138 *gr*.
Następnie odejmujemy grosze od groszy, złote od złotych.

Wykonaj następujące odejmowania:

a) 12456 *zł* 27 *gr*
— 8387 „ 69 „

b) 7650 *zł* 13 *gr*
— 5816 „ 45 „

c) 1000 *zł* — *gr*
— 256 „ 36 „

d) 5290 *kg* 375 *g*
— 4981 „ 536 „

e) 2823 *kg* 15 *g*
— 1284 „ 68 „

f) 1275 *m* 3 *dm*
— 458 „ 5 „

g) 3600 *m* 2 *dm*
— 1983 „ 7 „

h) 2000 *m* — *cm*
— 1328 „ 17 „

i) 4225 *m* 7 *dm* 3 *cm*
— 2786 „ 5 „ 7 „

j) 3176 *m* 8 *dm* 3 *cm*
— 1815 „ 9 „ 4 „

k) 5 *dm* 3 *cm* 7 *mm*
— 3 „ 7 „ 9 „

l) 23 godz. 15 min. 18 sek.
— 17 „ 23 „ 37 „

m) 18 godz. 35 min. 12 sek.
— 16 „ 49 „ 37 „

n) 9 godz. — min. 10 sek.
— 4 „ 15 „ 25 „

o) 5 dni 16 godz. 3 min.
— 4 „ 12 „ 15 „

p) 12 dni — godz. — min.
— 8 „ 14 „ 25 „

q) 6 dni 5 godz. 14 min. 2 sek.
— 3 „ 16 „ 20 „ 15 „

r) 5 kóp 3 tuziny 3 sztuki
— 3 „ 4 „ 9 „

s) 12 kóp 1 tuzin — sztuk
— 8 „ 3 „ 11 „

Rachunek pamięciowy. Uproszczenia.

1. Odejmuj od 100 po 2, po 3, po 5 tak długo, jak można.
2. Odejmuj od 87 po 4, po 6, po 8.
3. Odejmuj od 101 po 7, po 9.
4. Wykonaj następujące odejmowania:

25 — 3,	2340 — 3,	8013 — 9,
128 — 6,	1380 — 6,	12325 — 7,
345 — 3,	4720 — 5,	15647 — 9,
728 — 7,	3250 — 7,	10000 — 6,
309 — 8,	7500 — 8,	14500 — 8.

5. Wykonaj następujące odejmowania:

68 — 20,	675 — 200,	8253 — 4000,
178 — 90,	1827 — 500,	15127 — 6000,
908 — 40,	7128 — 800,	18000 — 9000,
4251 — 60,	9002 — 400,	12300 — 3000,
15394 — 80,	13000 — 600,	11101 — 5000.

UWAGA: Oblicz różnicę 1238 — 300 w następujący sposób: 1238 równa się 12 setek i 38. 12 setek — 3 setki jest 9 setek: a więc różnica wynosi 9 setek i 38 czyli 938.

6. Obliczamy w pamięci różnicę dwóch liczb, np. 12576 — 8432 w następujący sposób:

12576 — 8000 = 4576;
4576 — 400 = 4176;
4176 — 30 = 4146;
4146 — 2 = 4144.

Zatem 12576 — 8432 = 4144.

Rachunki powyższe wykonujemy w myśli.

Oblicz w pamięci:

375 — 26,	3000 — 437,	8200 — 4300,
738 — 429,	2321 — 1400,	11256 — 4891,
1421 — 563,	5207 — 3007,	10000 — 3285.

7. *a*) Uzupełnij do 100 (t. zn. odejmij od 100) następujące liczby:

23, 45, 58, 81.

b) Uzupełnij do 1000:

421, 536, 648, 796.

c) Uzupełnij do 10000:

3251, 5726, 1291, 6827.

8. Odejmuj od 213 po 15, po 25.
9. Jeżeli mamy odjąć liczbę, kończącą się cyfrą 8 lub 9, to zaokrąglamy ją do najbliższych dziesiątek, a następnie różnicę powiększamy, o tyle, o ileśmy odjemnik powiększyli. Np. 357 — 99; rachujemy 357 — 100 = 257; otrzymana różnica jest o **1** za mała, zatem:

357 — 99 = 258.

Oblicz w powyższy sposób:

127 — 18,	848 — 99,	5361 — 998,
238 — 49,	724 — 98,	8429 — 999,
726 — 68,	653 — 108,	6118 — 1099.

10. Odejmuj:

a) od 196 po 29,
b) od 738 po 99,
c) od 457 po 68.

11. Kupiec sprzedał towar za 5238 *zł*, a zarobił 998 *zł*; ile kupca towar kosztował?
12. Dostawca miał dostarczyć 2500 *kg* cukru, a dostarczył 1900 *kg*; ile ma jeszcze dostarczyć?
13. Poziom Wisły w Krakowie wynosi 222 *m* nad poziom morza, a w Warszawie poziom Wisły jest o 101 *m* niższy, niż w Krakowie; jaki jest poziom Wisły w Warszawie?
14. Wieśniak sprzedał masło i jaja za 32 *zł*; za masło otrzymał 19 *zł* 25 *gr*. Ile otrzymał za jaja?
15. Odległość kolejowa z Warszawy do Częstochowy wynosi 230 *km*, a do Krakowa (przez Częstochowę) 364 *km*; ile *km* wynosi odległość kolejowa z Częstochowy do Krakowa?
16. W I klasie jest 45 uczniów, w II o 8 uczniów mniej, a w III o 49 uczniów mniej, niż w I i II klasie razem; ile jest uczniów w każdej klasie?

17. Pociąg wyjeżdża z Warszawy o godz. 21 min. 40 i jedzie do Lwowa 11 godz. i 5 min.; o której godzinie pociąg ten przychodzi do Lwowa?

Ćwiczenia.

1. W jednym worku było 6 *kg* 325 *g* cukru, a w drugim o 2 *kg* 675 *g* mniej; ile cukru było w drugim worku, a ile było razem?
2. Ktoś wydał 40 *zł*, pożyczył 50 *zł*, wydał znowu 20 *zł* i zostało mu 60 *zł*; ile pieniędzy miał na początku?
3. W pociągu jechało 418 podróżnych, z czego w III klasie jechało 238, w drugiej klasie o 119 mniej; ilu podróżnych jechało I klasą?
4. Kupiec miał 756 *kg* cukru, sprzedał 487 *kg* i dokupił 237 *kg*; ile cukru posiada?
5. Najwyższy szczyt w Tatrach Garłuch ma 2663 *m*, a najwyżej położony Staw Furkotny znajduje się na wysokości 2154 *m*; o ile wyżej wznosi się Garłuch nad Stawem Furkotnym?
6. Ojciec rozdzielił 7926 *zł* pomiędzy dwóch synów, dając jednemu 4325 *zł*, a drugiemu resztę; o ile więcej otrzymał pierwszy, niż drugi?
7. Kasjer otrzymał 3000 biletów kolejowych. Z tego sprzedał: w poniedziałek 318 biletów za 1483 złotych, we wtorek 294 biletów za 1829 złotych, we środę 435 biletów za 2067 złotych, we czwartek 188 biletów za 995 złotych, w piątek 392 biletów za 2181 złotych, w sobotę 543 biletów za 3227 złotych, w niedzielę 368 biletów za 1915 złotych. Ile biletów pozostało w kasie i ile pieniędzy otrzymano za sprzedane bilety?
8. Pewien przedsiębiorca miał w pierwszym kwartale 364 *zł* 75 *gr* zysku, w drugim kwartale 89 *zł* 50 *gr* straty, w trzecim 127 *zł* zysku i w czwartym 406 *zł* 25 *gr* zysku. Jaki zysk miał przedsiębiorca w ciągu całego roku?
9. Ktoś spłaca dług w 4 ratach; pierwsza rata wynosi 500 *zł*, a każda następna jest o 35 *zł* mniejsza; ile wynosi całkowity dług?
10. Ktoś kupił używany samochód za 8000 *zł*, za odlakierowanie zapłacił 120 *zł*, za gumy 240 *zł*, a za ogólny remont 500 *zł*; ile zarobił, jeśli sprzedał ten samochód za 11000 *zł*?

11. Kupiec sprzedając towar za 3927 *zł*, stracił 256 *zł*. Za ile *zł* powinien był sprzedać towar, żeby zarobić 318 *zł*?
12. Gdyby Jaś miał o 7 *zł* więcej, niż ma, to mógłby kupić książkę za 19 *zł* i 35 *gr* i zostałoby mu 6 *zł* 48 *gr*; ile Jaś ma pieniędzy?
13. Kupiec ma zapłacić za towar 5329 *zł*. Gdyby mu dłużnik zwrócił dług 3254 *zł*, to kupiec zapłaciłby za towar i zostałoby mu 1249 *zł*; jaką gotówkę ma kupiec?
14. Jadąc koleją z Warszawy przez Białystok i Grodno do Wilna przejeżdżamy 429 *km*. Odległość z Warszawy do Grodna wynosi 272 *km*, a z Białegostoku do Wilna 240 *km*; ile *km* wynosi odległość z Białegostoku do Grodna?
15. W pewnem gimnazjum jest 327 uczniów, w klasach od I do IV włącznie jest 196 uczniów, a w klasach od IV włącznie do VIII jest 215; ilu uczniów jest w IV klasie?
16. Odległość kolejowa z Warszawy do Lwowa przez Przemyśl wynosi 513 *km*, z Warszawy do Przemyśla 415 *km*, zaś z Krakowa do Lwowa (przez Przemyśl) 343 *km*; ile *km* wynosi odległość kolejowa z Krakowa do Przemyśla?
17. Na jednej szalce wagi położono 65 *g*, a na drugiej położono towar i 37 *g*; waga jest w równowadze. Ile waży towar?
18. Mając po jednym ciężarku:

$$1\,g,\ 3\,g,\ 9\,g,\ 27\,g,\ 81\,g,$$

możemy zważyć każdy ciężar od 1 *g* do 121 *g*, jeśli wolno kłaść ciężarki na obu szalkach. Np. przedmiot o ciężarze 95 *g* zważymy, kładąc na jednej szalce 81 *g* i 27 *g*, a na drugiej 9 *g*, 3 *g*, 1 *g* i ten przedmiot.

Mamy bowiem:

$$95\,g = 81\,g + 27\,g - 9\,g - 3\,g - 1\,g.$$

Jakbyś zważył ciężary:

a) wszystkie od 1 *g* do 10 *g*;
b) 11 *g*, 12 *g*, 18 *g*, 23 *g*, 25 *g*?

19. Jak obliczysz resztę, którą kupiec ma ci wydać, znając cenę towaru i kwotę pieniędzy, którą mu wręczyłeś? Podaj przykład liczbowy!

20. Jak obliczysz zarobek roczny przedsiębiorstwa, znając jego roczne dochody i rozchody? Podaj przykład liczbowy!
21. Jak obliczysz netto, znając brutto i tarę? Podaj przykład liczbowy!
22. Jak obliczysz zysk (względnie stratę) wiedząc, ile kupiec na jednym towarze zarobił i ile na drugim stracił? Podaj przykład liczbowy!

MNOŻENIE.

Określenia i własności mnożenia.

Określenia.

Przypuśćmy, że mamy daną sumę, w której wszystkie dodajniki są równe, np.:

$$3 + 3 + 3 + 3.$$

Sumę taką oznaczamy krócej, pisząc najpierw dodajnik 3, następnie znak $\times$ lub . (czytaj razy), a potem liczbę wskazującą, ile razy powtarza się dodajnik 3.

A więc piszemy:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4.$$

Stąd:

$$3 \times 4 = 12.$$

Liczbę 3 nazywamy mnożną, 4 mnożnikiem, 12 iloczynem liczby 3 przez liczbę 4.

Liczby 3 i 4 nazywamy czynnikami iloczynu.

Iloczyn dwóch liczb, z których pierwsza nazywa się mnożną a druga mnożnikiem, jest to suma o dodajnikach równych mnożnej, przyczem tych dodajników jest tyle, ile wskazuje mnożnik.

A więc:

$$7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35.$$

W przypadku, gdy jeden z czynników równa się 1, iloczyn równa się drugiemu czynnikowi.

A więc:

$$7 \times 1 = 7, \quad 1 \times 12 = 12, \quad 1 \times 1 = 1.$$

W p r z y p a d k u, g d y j e d e n z c z y n n i k ó w r ó w n a s i ę z e r u, i l o c z y n r ó w n a s i ę z e r u.

A więc:

$$5 \times 0 = 0, \qquad 0 \times 6 = 0, \qquad 0 \times 0 = 0.$$

Liczby, jakie otrzymamy, mnożąc daną liczbę przez 1, 2, 3 ...., nazywamy w i e l o k r o t n o ś c i a m i danej liczby.

Np.: Wielokrotnościami liczby 8 są liczby:

8, 16, 24, 32, 40, ...

UWAGA: Mnożna może byé liczbą mianowaną np.:

12 *zł* × 5 = 12 *zł* + 12 *zł* + 12 *zł* + 12 *zł* + 12 *zł* = 60 *zł*.

Należy pamiętać, że mnożnik nie może być liczbą mianowaną, bo mnożnik wskazuje, ile razy mnożna powtarza się, jako dodajnik.

Zadania.

1. Napisz w postaci iloczynu następujące sumy:

a) 25 + 25 + 25, *b*) 7 + 7 + 7 + 7, *c*) 81 + 81 + 81 + 81 + 81, *d*) 9 *m* + 9 *m* + 9 *m* + 9 *m*, *e*) 13 *zł* + 13 *zł* + 13 *zł*, *f*) 3 *kg* 250 *g* + 3 *kg* 250 *g* + 3 *kg* 250 *g*.

2. Przedstaw w postaci sumy następujące iloczyny:

a) 7 . 5, *b*) 213 . 3, *c*) 2863 . 2, *d*) 7 *m* × 6, *e*) 13 *zł* 25 *gr* × 4, *f*) 5 *kg* 312 *g* × 3.

3. Kilogram towaru kosztuje 3 *zł*; ile kosztuje 7 *kg* tego towaru?
4. Robotnik zarabia dziennie 9 *zł*; ile zarabia w ciągu tygodnia (bez niedzieli)?
5. Piechur przechodzi w ciągu godziny 6 *km*; ile *km* przejdzie w ciągu 5 godzin?
6. Pewną kwotę rozdzielono równo pomiędzy 4 osoby, dając każdej po 12 *zł*; jaką kwotę rozdzielono?
7. Pewną pracę wykona 6 robotników w 5 dniach; w jakim czasie wykonałby tę pracę 1 robotnik?
8. Ile *kg* cukru mieści się w 7 paczkach pięciokilogramowych?
9. Zegarek śpieszy 2 minuty na godzinę; ile przyśpieszy na dobę?
10. Jaka liczba jest 3 razy większa od 8?

11. Jaś ma 3 *zł* a Piotruś ma 5 razy więcej; ile złotych ma Piotruś?
12. Podaj wszystkie wielokrotności, mniejsze od 100 następujących liczb: 9, 15, 20!
13. Kosz jabłek rozdzielono na 4 równe części, a każdą z tych części rozdzielono znowu na 3 równe części; na ile równych części rozdzielono jabłka?
14. Obwód koła u wozu wynosi 2 *m*; ile *m* przebiegnie wóz po 35 obrotach?

Iloczyn kilku liczb.

Jeżeli mamy kilka liczb połączonych znakami ×, jak np.:

$$3 \times 5 \times 4 \times 2,$$

to wyrażenie takie oznacza nam liczbę, którą otrzymamy, wykonując pokolei naznaczone mnożenia.

Należy więc 3 pomnożyć przez 5, otrzymany iloczyn przez 4, a ten iloczyn wreszcie przez 2.

A więc:

$$3 \times 5 \times 4 \times 2 = 120.$$

UWAGA: Jeżeli w jakiemś wyrażeniu występują nawiasy, to należy najpierw wykonać działania naznaczone w nawiasach.

Np.:

$$3 \times (4 \times 7) \times 2 = 3 \times 28 \times 2,$$
$$3 \times (5 + 2) \times (5 - 3) = 3 \times 7 \times 2.$$

Zadania.

1. Oblicz następujące iloczyny:

a) 1 . 2 . 3, *b*) 2 . 3 . 4 . 5, *c*) 2 . 25 . 4, *d*) 50 . 3 . 4.

2. Oblicz następujące wyrażenia:

a) (2 . 5) . (7 . 8), *b*) 3 . (5 . 4) . 2, *c*) 5 . (2 . 3) . (2 . 4), *d*) 2 . (8 + 7), *e*) 3 . (2 + 3) . (2 . 3), *f*) (5 + 3) . (5 — 3), *g*) (4 . 5) . (3 + 7) . (8 — 6).

3. Robotnik zarabiał dziennie 9 *zł*, a wydawał 6 *zł*; ile zaoszczędził w ciągu 6 dni?
4. Ile kosztuje materjał na 5 ubrań, jeżeli na jedno ubranie potrzeba 3 *m* materjału po 40 *zł* za 1 *m*?
5. Ile należy się 5 robotnikom za 4 dni pracy, jeśli każdy z nich pracuje 8 godzin dziennie, zarabiając 2 *zł* za godzinę?

6. Kupiec płacił 10 *zł* za *kg* towaru, a sprzedawał za 12 *zł*; ile zarobił na 20 *kg* tego towaru?
7. W kamienicy czteropiętrowej jest na każdem piętrze 5 mieszkań trzypokojowych; ile jest pokoi w tej kamienicy?
8. Ile kosztuje 6 tuzinów piór, jeśli pióro kosztuje 5 groszy?
9. Szafa ma 5 półek, każda półka ma 4 przegródki, w każdej przegródce jest 6 książek; ile jest wszystkich książek?
10. Człowiek przechodzi szybkim krokiem 5 *km* na godzinę; pociąg pośpieszny jedzie 10 razy prędzej, a samolot leci 3 razy szybciej, niż pociąg pośpieszny; ile *km* przelatuje samolot na godzinę?
11. Pułk ma 3 bataljony, bataljon 3 kompanje, kompanja 3 plutony, pluton 4 sekcje, sekcja 9 ludzi; ilu ludzi liczy pułk?

Potęgi.

Kwadratem jakiejś liczby nazywamy iloczyn tej liczby przez siebie samą.

Np. kwadratem liczby 7 jest iloczyn:

$$7 \cdot 7,$$

t. j. 49.

Kwadrat jakiejś liczby oznaczamy, pisząc tę liczbę i u góry małą dwójkę; a więc kwadrat liczby 7 oznaczamy:

$$7^2$$

i czytamy: siedm do kwadratu lub siedm do drugiej potęgi.

Zatem:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \cdot 1 = 1, \\ 2^2 &= 2 \cdot 2 = 4, \\ 3^2 &= 3 \cdot 3 = 9, \\ 10^2 &= 10 \cdot 10 = 100, \\ 20^2 &= 20 \cdot 20 = 400. \end{aligned}$$

Jeżeli jakąś liczbę pomnożymy przez siebie, a otrzymany iloczyn jeszcze raz przez tę liczbę, to otrzymany wynik nazywamy sześcianem danej liczby.

Np. sześcianem liczby 4 jest iloczyn

$$4 \cdot 4 \cdot 4,$$

t. j. 64.

Sześcian jakiejś liczby oznaczamy, pisząc tę liczbę i u góry małą trójkę; a więc sześcian liczby 4 oznaczamy:

$$4^3$$

i czytamy: cztery do sześcianu lub cztery do trzeciej potęgi.

Zatem:

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \\ 2^3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ 3^3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \\ 10^3 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000. \end{aligned}$$

Zadania.

1. Oblicz kwadraty i sześciany wszystkich liczb od 1 do 10.
2. Jakiej liczby kwadratem jest liczba:

   81, 16, 49, 25?
3. Jakiej liczby sześcianem jest liczba:

   64, 8, 27, 125?
4. Oblicz *a*) sumę kwadratów wszystkich liczb od 1 do 9
   b) sumę sześcianów „ „ „ 1 „ 9.
5. Kwadrat dowolnie obranej liczby np. 4 otrzymasz dodając do siebie 4 początkowe liczby nieparzyste; a więc

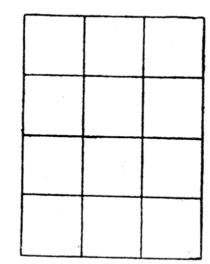
   $$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7.$$

   Sprawdź tę regułę na kwadratach liczb od 2 do 10!

Prawo przemienności iloczynu.

Na rys. 5 mamy szachownicę mającą trzy kolumny i cztery wiersze. Ponieważ w każdym wierszu są 3 pola, a wierszy jest 4, więc wszystkich pól mamy:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4.$$



Rys. 5.

Z drugiej strony zauważmy, że w każdej kolumnie są 4 pola, a kolumn jest 3, więc wszystkich pól jest:

$$4 + 4 + 4 = 4 \times 3.$$

Wynika stąd, że:

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Podobnie:

$$5 \times 7 = 7 \times 5$$
$$25 \times 39 = 39 \times 25.$$

Przypuśćmy teraz, że mamy iloczyn trzech liczb, np.:

$$2 \times 4 \times 5.$$

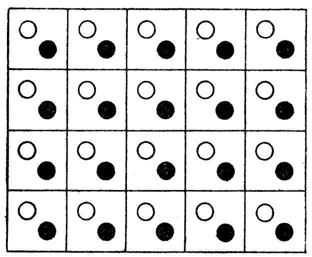
Jeśli zmienimy porządek czynników, jak np.:

$$5 \times 2 \times 4 \text{ lub } 4 \times 5 \times 2,$$

to obliczając te iloczyny, przekonamy się, że otrzymamy tensam wynik, t. j. 40. A więc:

$$2 \times 4 \times 5 = 5 \times 2 \times 4 = 4 \times 5 \times 2.$$

Wynik ten możemy uzmysłowić sobie na następującym przykładzie: jeżeli na szachownicy, jak na rys. 6, umieścimy na każdem polu 1 kulkę białą i 1 kulkę czarną, to iloczyn



Rys. 6.

$$2 \times 4 \times 5$$

daje nam liczbę wszystkich kulek. Widać bowiem, że 2×4 jest to liczba kulek w jednej kolumnie. Ponieważ kolumn jest 5, więc wszystkich kulek jest:

$$2 \times 4 \times 5.$$

Podobnie iloczyn $5 \times 2 \times 4$ przedstawia nam również liczbę wszystkich kulek. Iloczyn bowiem 5×2 daje nam liczbę kulek w jednym wierszu. Ponieważ wierszy jest 4, więc wszystkich kulek jest:

$$5 \times 2 \times 4.$$

Iloczyn $4 \times 5 \times 2$ daje nam również liczbę wszystkich kulek. Iloczyn bowiem 4×5 daje nam liczbę kulek białych, a ponieważ takasama jest liczba kulek czarnych, więc wszystkich kulek jest:

$$4 \times 5 \times 2.$$

Widzimy zatem, że:

W iloczynie możemy porządek czynników dowolnie zmieniać.

Własność powyższą iloczynu nazywamy prawem przemienności. Stosuje się ona do iloczynu dowolnej liczby czynników.

Mamy więc np.:

$$2 \times 7 \times 8 \times 5 = 2 \times 5 \times 8 \times 7 =$$
$$= 5 \times 8 \times 7 \times 2$$

Zadania.

1. Oblicz następujące pary iloczynów:

   a) 3 . 5 i 5 . 3, *b)* 12 . 6 i 6 . 12, *c)* 7 . 4 i 4 . 7.

   Do każdego zadania narysuj szachownicę, na której mógłbyś wykazać, że oba iloczyny są sobie równe!
2. Są 4 domy i 3 studnie. Z każdego domu prowadzi ścieżka do każdej studni. Oblicz dwoma sposobami liczbę wszystkich ścieżek!
3. Ile jest liczb dwucyfrowych, których pierwsza cyfra jest 1, 2 albo 3, druga zaś 1, 2, 3 lub 4? Oblicz dwoma sposobami!
4. Każdy uczeń I klasy grał jedną partję szachów z każdym uczniem II klasy. Ile było wszystkich gier, jeśli w I kl. było 30 uczniów, w drugiej zaś 20? Oblicz dwoma sposobami!
5. Zamieniając niżej podane sumy na iloczyny, przekonaj się, że są sobie równe:

   a) $3 + 3 + 3 + 3$ i $4 + 4 + 4$,

   b) $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$ i $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7$.
6. *a)* Jan zarabiał przez 5 dni po 3 *zł*, a Piotr zarabiał przez 3 dni po 5 *zł*: porównaj ich zarobki!
   Odp. Jan zarobił 3 *zł* . 5 = (3 . 5) *zł*, a Piotr zarobił 5 *zł* . 3 = (5 . 3) *zł*. Zarobili więc równo.

   b) Jeden kupiec miał 4 paczki po 2 *kg* herbaty, a drugi miał 2 paczki po 4 *kg* herbaty; porównaj ich zapasy herbaty!

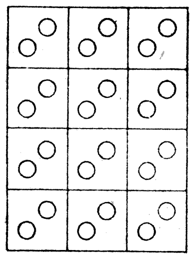
   c) Jeden piechur szedł 5 godzin przechodząc 6 *km* na godzinę, drugi zaś szedł 6 godzin przechodząc 5 *km* na godzinę; porównaj ich drogi!
7. Jaka liczba jest 4 razy większa od 8, a jaka jest 8 razy większa od 4?
8. W iloczynie $2 \times 7 \times 3$ przestaw czynniki na wszystkie możliwe sposoby i przekonaj się, że za każdym razem otrzymasz ten sam wynik!
9. Na każdem polu szachownicy o 6 kolumnach i 5 wierszach umieść po 3 kulki. Obliczając dwoma sposobami liczbę wszystkich kulek, przekonaj się, że:

$$3 \times 5 \times 6 = 3 \times 6 \times 5.$$

10. Na każdem polu szachownicy o 3 kolumnach i 4 wierszach znajduje się 5 kulek białych i 5 kulek czarnych. Oblicz kilkoma sposobami liczbę wszystkich kulek!

Prawo łączności.

Szachownica, jak na rys. 7, ma cztery wiersze i trzy kolumny. Na każdem polu szachownicy umieszczamy dwie kulki.



Rys. 7.

Możemy obliczyć liczbę wszystkich kulek kilkoma sposobami:

1. Ponieważ w jednej kolumnie jest:

$$2 \times 4$$

kulek, a kolumn jest 3, przeto wszystkich kulek jest:

$$(2 \times 4) \times 3.$$

2. Ponieważ wszystkich pól jest

$$4 \times 3,$$

a w każdem polu są dwie kulki, więc wszystkich kulek jest

$$2 \times (4 \times 3).$$

3. Ponieważ w każdym wierszu jest

$$2 \times 3$$

kulek, a wierszy jest 4, przeto wszystkich kulek jest:

$$(2 \times 3) \times 4.$$

Widzimy stąd, że:

$$(2 \times 4) \times 3 = 2 \times (4 \times 3) = (2 \times 3) \times 4.$$

Zatem w iloczynie trzech czynników, możemy dwa czynniki zastąpić ich iloczynem.

Można się też przekonać, że w iloczynie ilukolwiek czynników, możemy kilka czynników zastąpić ich iloczynem.

Np.:

$$5 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 = 720.$$

Zastępując 6, 4, 3, ich iloczynem 72, widzimy że:

$$5 \times 72 \times 2 = 720.$$

A więc:

$$5 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 = 5 \times (6 \times 4 \times 3) \times 2.$$

Powyższą własność iloczynu nazywamy prawem łączności.

Zadania.

Zadania od 1 do 5 oblicz dwoma sposobami!

1. Ile groszy jest zawartych w 8 rulonach, z których każdy zawiera 50 sztuk dwugroszówek?
2. Przy ulicy było 8 domów trzypiętrowych, a na każdem piętrze po 4 mieszkania; ile było wszystkich mieszkań?
3. Kupiec sprzedał 7 beczek, z których każda zawierała 50 *l* wina; ile zapłacił za wino, płacąc 4 *zł* za *l*?
4. Ile jest kwadransów w 5 dniach?
5. Pięciu robotników pracowało przez cztery dni po 6 godzin dziennie, przyczem każdy zarabiał przeciętnie 2 *zł* za godzinę; ile pieniędzy potrzeba było do wypłaty?
6. Oblicz iloczyny niżej podane, łącząc sąsiednie czynniki w najdogodniejszy sposób:

   a) 3 . 5 . 2, *b*) 7 . 8 . 5, *c*) 4 . 15 . 2 . 3,
   d) 8 . 2 . 5 . 25 . 4, *e*) 4 . 5 . 6 . 5 . 8 . 5.

7. Przekonaj się, że iloczyny w *a*), *b*) lub *c*) są sobie równe, nie obliczając tych iloczynów:

   a) (3 . 15) . (27 . 9) i 3 . (15 . 27) . 9,
   b) 18 . (15 . 3 . 26) . 14 i 18 . (15 . 3) . (26 . 14),
   c) 8 . 5 . 4 . 26 i 8 . 20 . 26.

8. Przestaw i połącz czynniki następujących iloczynów w taki sposób, aby rachunek był najdogodniejszy:

   a) 2 . 2 . 2 . 5 . 5 . 5, *b*) 25 . 6 . 15 . 4, *c*) 25 . 5 . 4 . 2.

9. W iloczynie $8 \times 4 \times 5$ powiększ jeden z czynników *a*) 2 razy, *b*) 3 razy, *c*) 4 razy; ile razy powiększy się iloczyn?
10. W iloczynie $3 \times 2 \times 6$ powiększ jeden czynnik 2 razy, inny czynnik 5 razy; ile razy powiększy się iloczyn?
11. W iloczynie $3 \times 5 \times 8$ powiększ każdy czynnik 2 razy; ile razy powiększy się iloczyn?
12. Jedna szachownica ma dwa razy więcej kolumn i 3 razy więcej wierszy, niż druga; ile razy więcej pól ma pierwsza szachownica od drugiej?
13. Jeden robotnik pracował 5 dni i zarabiał 3 *zł* dziennie, drugi zaś pracował 3 razy dłużej i zarabiał 2 razy więcej dziennie; ile razy więcej zarobił drugi robotnik?

Zmiany iloczynu.

1. W iloczynie $3 \times 5 \times 6$, *a*) powiększ którykolwiek czynnik, *b*) pomniejsz którykolwiek czynnik; jak w każdym wypadku zmieni się iloczyn?
2. Wskaż, który z iloczynów w *a*), *b*), *c*) lub *d*) jest większy, nie obliczając tych iloczynów:

   a) 25 . 13 i 20 . 13;
   b) 8 . 10 . 5 i 8 . 9 . 5;
   c) 12 . 13 . 15 i 14 . 13 . 12;
   d) 8 . 3 . 5 . 2 i 2 . 8 . 4 . 3.
3. Uporządkuj wedle wielkości następujące iloczyny, nie obliczając ich:

   23 . 15 . 16 . 9, 23 . 15 . 8 . 12, 16 . 25 . 9 . 17,
   9 . 23 . 16 . 17, 15 . 9 . 23 . 12.

Prawo rozdzielności względem dodawania.

Pomiędzy 7 chłopców rozdzielono pewną ilość jabłek w ten sposób, że za pierwszym razem dano każdemu po 3 jabłka, za drugim razem po 2 jabłka, a za trzecim razem po 4 jabłka. Ile jabłek rozdzielono?

Możemy to obliczyć dwoma sposobami:

1. Każdy z chłopców otrzymał jabłek:

$$3 + 2 + 4.$$

Ponieważ chłopców było 7, więc rozdzielono jabłek;

$$(3 + 2 + 4) \times 7.$$

2. Za pierwszym razem rozdzielono jabłek:

$$3 \times 7.$$

Za drugim razem rozdzielono jabłek:

$$2 \times 7,$$

a za trzecim razem rozdzielono jabłek:

$$4 \times 7.$$

Razem więc rozdzielono jabłek:

$$(3 \times 7) + (2 \times 7) + (4 \times 7).$$

Porównując oba wyniki widzimy, że:

$$(3 + 2 + 4) \times 7 = (3 \times 7) + (2 \times 7) + (4 \times 7).$$

Zatem: s u m ę m n o ż y m y p r z e z l i c z b ę, d o d a j ą c d o s i e b i e i l o c z y n y p o s z c z e g ó l n y c h d o d a j n i k ó w p r z e z t ę l i c z b ę.

Np.:

$$(8 + 2) \times 3 = (8 \times 3) + (2 \times 3),$$
$$5 \times (7 + 6) = (5 \times 7) + (5 \times 6).$$

Własność powyższą iloczynu nazywamy prawem r o z d z i e l n o ś c i iloczynu względem dodawania.

Prawo rozdzielności iloczynu względem odejmowania.

Rozdzielono między chłopców jabłka, dając każdemu po 5 jabłek. Odebrano później od każdego z nich po 2 jabłka. Ile jabłek rozdano ostatecznie?

Ilość jabłek, którą rozdzielono ostatecznie, możemy obliczyć dwoma sposobami:

1. Ponieważ każdy z chłopców otrzymał jabłek:

$$5 - 2,$$

więc rozdzielono jabłek:

$$(5 - 2) \times 7.$$

2. Za pierwszym razem rozdano jabłek:

$$5 \times 7,$$

za drugim razem odebrano jabłek:

$$2 \times 7,$$

a więc rozdzielono jabłek:

$$(5 \times 7) - (2 \times 7).$$

Wynika stąd, że:

$$(5 - 2) \times 7 = (5 \times 7) - (2 \times 7).$$

Zatem: r ó ż n i c ę m n o ż y m y p r z e z l i c z b ę, o d e j m u j ą c o d i l o c z y n u o d j e m n e j p r z e z t ę l i c z b ę, i l o c z y n o d j e m n i k a p r z e z t ę l i c z b ę.

Np.:

$$(8 - 3) \times 6 = (8 \times 6) - (3 \times 6),$$
$$7 \times (9 - 3) = (7 \times 9) - (7 \times 3).$$

Własność powyższą iloczynu nazywamy prawem r o z d z i e l n o ś c i iloczynu względem odejmowania.

Zadania.

1. Sprawdź następujące równości:
   a) $(3 + 2) . 5 = (3 . 5) + (2 . 5)$;
   b) $(7 + 3 + 5) . 2 = (7 . 2) + (3 . 2) + (5 . 2)$;
   c) $(6 - 2) . 5 = (6 . 5) - (2 . 5)$;
   d) $(10 - 3 - 2 + 4) . 3 = (10 . 3) - (3 . 3) - (2 . 3) + (4 . 3)$;
   e) $(2 . 3) + (5 . 3) = (2 + 5) . 3$.
2. Rozwiąż następujące zadanie dwoma sposobami:
   a) Kupiec płacił za *kg* towaru 10 *zł*, a sprzedawał po 12 *zł*; ile zarobił na 7 *kg*?
   b) Ze szachownicy o 6 wierszach i 7 kolumnach odcięto 4 kolumny; ile jest oczek w pozostałej części? Zrób rysunek!
   c) Ktoś zarabia dziennie 12 *zł*, a wydaje 8 *zł*; ile zaoszczędzi w 6 dniach?
   d) Ojciec zarabiał dziennie 8 *zł*, syn zaś 5 *zł*, na utrzymanie domu wydawano 10 *zł* dziennie; ile zaoszczędzono w ciągu 6 dni?
3. Sprawdź następujące równości:
   a) $5 \times (3 + 7) = (5 \times 3) + (5 \times 7)$;
   b) $3 \times (2 + 1 + 9) = (3 \times 2) + (3 \times 1) + (3 \times 9)$;
   c) $8 \times (10 - 6) = (8 \times 10) - (8 \times 6)$;
   d) $3 \times (12 - 5 - 6 + 4) = (3 \times 12) - (3 \times 5) - (3 \times 6) + (3 \times 4)$;
   e) $(4 \times 7) + (4 \times 2) = 4 \times (7 + 2)$.
4. Rozwiąż następujące zadania dwoma sposobami:
   a) Kupiec sprzedał jednego dnia 5 *kg*, drugiego 6 *kg* towaru po 2 *zł* za *kg*; ile otrzymał za towar?
   b) Kupiec sprzedał najpierw 4 tuziny piór, potem 5 tuzinow, a wreszcie 1 tuzin; ile piór sprzedał?
   c) Jeden robotnik pracował 6 dni, drugi zaś 10 dni; o ile więcej zarobił drugi niż pierwszy, jeśli zarabiali po 12 *zł* dziennie?
   d) Piechur szedł pierwszego dnia 5 godzin po 6 *km*, a drugiego dnia 4 godziny też po 6 *km*; ile *km* przeszedł w obu dniach?
5. *a)* Ile razy należy dodać 4 do $4 . 3$, aby otrzymać $4 . 9$?
   b) Ile razy należy dodać 9 do $9 . 5$, aby otrzymać $9 . 11$?

   c) Ile razy należy dodać 15 do $15 . 12$, aby otrzymać $15 . 20$?
6. W iloczynie, którego jeden czynnik jest 5, *a)* powiększono drugi czynnik o 2; *b)* pomniejszono drugi czynnik o 3; jak zmienił się za każdym razem iloczyn i o ile?

Mnożenie liczb w systemie dziesiętnym.

Wypadek pierwszy.

Mamy obliczyć iloczyn, w którym mnożnik (lub mnożna) jest 10, np.:

$$247 \times 10.$$

Jeśli mamy 247 dziesięciogroszówek, to iloczyn powyższy przedstawia nam, ile to jest groszy.

Aby obliczyć liczbę tych groszy, zauważmy, że 247 dziesięciogroszówek jest to:

2 setki dziesięciogr., 4 dziesiątki dziesięciogr. i 7 dziesięciogroszówek. Ale

setka dziesięciogr. jest tysiąc *gr*,
dziesiątka dziesięciogr. jest sto *gr*.

Mamy zatem

2 tysiące *gr*, 4 setki *gr* i 7 dziesiątek *gr*.

Razem więc mamy:

2470 *gr*.

A zatem:

$$247 \times 10 = 2470.$$

Podobnie:

$$635 \times 10 = 6350,$$
$$10 \times 819 = 819 \times 10 = 8190.$$

Widzimy zatem, że liczbę mnożymy przez 10, dopisując jedno zero na końcu.

Przypuśćmy teraz, że mnożnik jest 100, np.:

$$49 . 100.$$

Ponieważ $100 = 10 \times 10$, więc:

$$49 \times 100 = 49 \times 10 \times 10.$$

Zatem

$$49 \times 100 = 490 \times 10 = 4900.$$

Podobnie:

$$136 . 100 = 13600.$$

Widzimy zatem, że liczbę mnożymy przez 100, dopisując dwa zera na końcu.

Podobnie mnożymy liczbę przez 1000, dopisując trzy zera na końcu.

Np.:

$$15 \times 1000 = 15 \times 100 \times 10 =$$
$$= 1500 \times 10 = 15000.$$

Zadania.

1. Oblicz następujące iloczyny:
   a) 21 . 100, 10 . 37, 100 . 39, 115 . 100, 100 . 236, 1000 . 12;
   b) 30 . 10, 10 . 200, 100 . 30;
   c) 10 . 25 . 10, 100 . 2 . 100, 10 . 16 . 100.
2. Oblicz następujące iloczyny:
   a) 10 . 100, 100 . 100, 1000 . 10, 10 . 1000, 100 . 10;
   b) 10 . 10 . 10, 10 . 100 . 10;
   c) 10 . 10 . 10 . 10;
   d) 10^2, 10^3, 100^2.
3. *a*) Ile *dm* ma 1 *m*, 10 *m*, 100 *m*, 1 *km*?
   b) Ile *cm* ma 37 *m*, 89 *m*, 113 *m*?
   c) Ile groszy ma 10 *zł*, 100 *zł*?
   d) Ile groszy ma 8 *zł*, 27 *zł*, 58 *zł*, 123 *zł*?

Wypadek drugi.

Mamy obliczyć iloczyn, w którym mnożnik jest liczbą jednocyfrową, np.:

$$567 \times 3.$$

Wiemy, że $567 \times 3 = 567 + 567 + 567.$

Chcąc obliczyć ostatnią sumę, piszemy:

$$\begin{array}{r} 567 \\ 567 \\ \underline{567} \\ 1701 \end{array}$$

Dodawanie powyższe możemy wygłosić w następujący sposób:

7 × 3 równa się 21, piszę 1, a 2 doliczam;
6 × 3 równa się 18, a 2 równa się 20, piszę 0, a 2 doliczam;
5 × 3 równa się 15, a 2 równa się 17, piszę 17.

W praktyce nie przedstawiamy iloczynu w postaci sumy, tylko rachujemy jak wyżej, pisząc wyniki pod mnożną.

A więc

$$\begin{array}{l} \underline{567} \times 3 \\ 1701 \\ \scriptstyle (2\,2) \end{array} ; \qquad \begin{array}{l} \underline{249} \times 5 \\ 1245 \\ \scriptstyle (2\,4) \end{array}$$

UWAGA: Gdy w mnożniku tylko pierwsza cyfra jest różna od zera, to iloczyn otrzymamy, mnożąc mnożną przez tę cyfrę i dopisując tyle zer, ile jest w mnożniku.

Np.:

$$236 \times 40 = 236 \times 4 \times 10$$

lecz

$$\begin{array}{l} \underline{236} \times 4 \\ 944 \\ \scriptstyle (1\,2) \end{array}$$

więc

$$236 \times 40 = 944 \times 10 = 9440.$$

Zadania.

1. Oblicz następujące iloczyny:

a) 25 . 6,	*b*) 236 . 3,	*c*) 2354 . 5,
38 . 7,	108 . 7,	1268 . 9,
43 . 6,	610 . 8,	2354 . 8.

2. Oblicz:
   26 . 30, 47 . 200, 349 . 50, 250 . 30.
3. *a*) Ile sekund ma 1 minuta, 1 godzina, 5 godzin?
   b) Ile minut ma doba, tydzień?
   c) Ile sztuk ma kopa, 10 kóp, 36 kóp, 258 kóp?

Wypadek ogólny.

Mamy obliczyć iloczyn dwóch liczb np.:

$$137 . 128.$$

Lecz: 137 . 128 = 137 . (100 + 20 + 8) = (137 . 100) + + (137 . 20) + (137 . 8). Na podstawie poprzednich reguł mnożenia mamy:

137 . 8 = 1096
137 . 20 = 2740
137 . 100 = 13700
17536

Rachunek powyższy możemy zapisać krócej w następujący sposób:

```
 137 . 128
 1096
 274
137
17536
```

W rachunku więc praktycznym mnożymy mnożną kolejno przez każdą cyfrę mnożnika (zaczynając od cyfry jednostek), za każdym razem piszemy poszczególny iloczyn pod poprzednim, przesuwając go jednak o jedno miejsce na lewo; następnie dodajemy poszczególne iloczyny tak, jakby na opuszczonych miejscach były zera.

Jeżeli któraś cyfra mnożnika jest zerem, to, iloczyn mnożnej przez tę cyfrę jest oczywiście zerem. Dlatego też nie wypisujemy tego iloczynu, tylko następny częściowy iloczyn piszemy przesuwając go o dwa miejsca na lewo.

Np.:

```
  127 × 105
  635
127
13335
```

UWAGA. Mnożenie możemy wykonać jeszcze w taki sposób, że mnożymy mnożną kolejno przez każdą cyfrę mnożnika, zaczynając jednak od cyfry, stojącej na najwyższem miejscu w mnożniku; poszczególne iloczyny podpisujemy, przesuwając je odpowiednio o jedno miejsce na prawo.

Np.:

```
137 . 128
137
 274
  1096
17536
```


Próba mnożenia.

Chcąc przekonać się, czy mnożenie jest dobrze wykonane, mnożymy jeszcze raz, przestawiając mnożną i mnożnik.

Zadania.

1. Oblicz następujące iloczyny:

a) 27 . 38	*b*) 459 . 38	*c*) 135 . 124	*d*) 1437 . 13
36 . 74	136 . 59	107 . 108	1205 . 15
43 . 56	608 . 26	130 . 116	1079 . 18.

2. Oblicz następujące iloczyny:

a) 10 . 15 . 26; *b*) 29 . 27 . 18; *c*) 13 . 12 . 115; *d*) 25 . 36 . 15.

3. *a*) Ile godzin ma doba, ile tydzień, ile rok zwyczajny?
   b) Ile minut ma godzina, doba, tydzień?
4. Głos przebywa w 1 sekundzie 333 *m*; w jakiej odległości uderzył piorun, jeśliś usłyszał go w 15 sekund po błyskawicy?
5. Ktoś zarabia miesięcznie 386 *zł*; ile zarobi rocznie?
6. Ktoś zrobił 175 kroków; jaką drogę przeszedł, licząc średnio 75 *cm* na jeden krok?
   Spróbuj zapomocą kroków obliczać rozmaite odległości!
7. Obwód koła roweru wynosi 22 *dm*; jaką drogę odbył rowerzysta, jeśli koło obróciło się 758 razy?
8. Na jednej stronicy książki jest 43 wierszy, a w każdym wierszu jest przeciętnie 36 liter; ile liter jest na jednej stronie?
9. Ile kosztuje 7 zwoi sukna, jeśli każdy zwój ma 75 *m*, przyczem za 1 *m* płacono 34 *zł*?
10. Ktoś ma 35 lat; ile dni przeżył, licząc każdy rok po 365 dni?
11. Oblicz:
    a) 12 *m* 4 *dm* × 53; *d*) 213 *kg* 315 *g* × 36;
    b) 23 *m* 5 *dm* × 257; *e*) 27 *zł* 35 *gr* × 435;
    c) 38 *m* 2 *dm* 3 *cm* × 457; *f*) 15 *m* 3 *dm* 7 *cm* 4 *mm* × 259.

UWAGA: 12 *m* 4 *dm* × 53 = (12 *m* × 53) + (4 *dm* × 53).

Ponieważ 12 *m* × 53 = 636 *m*, a 4 *dm* × 53 = 212 *dm* = = 21 *m* 2 *dm*, zatem:

12 *m* 4 *dm* × 53 = 636 *m* + 21 *m* 2 *dm* = 657 *m* 2 *dm*.

12. Kupiec sprowadził 25 pak towaru. Każda paka zawiera 125 *kg* 525 *g* tego towaru; ile towaru sprowadził kupiec?
13. Worek zawierał 85 *kg* soli. Ile kosztowała ta sól, licząc 26 groszy za *kg*?
14. *a*) Ile to jest minut: 3 godz. 14 min.; 15 godz. 36 min.; 45 godz. 17 min.?
    b) Ile to jest sekund: 35 min. 12 sek; 58 min. 2 sek.; 3 godz. 15 min. 12 sek.?

Mnożenie pamięciowe i ułatwienia.

Liczbę kilkucyfrową przez liczbę jednocyfrową mnożymy w pamięci w ten sposób, że mnożymy osobno tysiące, setki, dziesiątki i jednostki przez liczbę jednocyfrową, a następnie wyniki do siebie dodajemy.

Np. 528×3 liczymy:
$500 \times 3 = 1500$,
$20 . 3 = 60$, razem więc 1560; $8 \times 3 = 24$, razem więc 1584.

1. Pomnóż przez 2 liczby: 12, 24, 49, 96, 135, 458, 736, 845.
2. Pomnóż przez 4 liczby: 11, 36, 45, 77, 305, 622.
3. Pomnóż przez 8 liczby: 13, 25, 52, 85, 254, 316; możesz liczyć, mnożąc trzy razy z kolei przez 2.
4. Pomnóż przez 3 liczby: 18, 32, 57, 346, 512.
5. Pomnóż przez 6 liczby: 15, 32, 54, 456, 712; mnóż przez 3, a wynik przez 2!
6. Pomnóż przez 5 liczby: 26, 45, 386, 534; mnóż przez 10, a wynik podziel przez 2!

   Np. $35 . 5 = 350 : 2 = 175$.
7. Pomnóż przez 9 liczby: 35, 48, 52, 325, 815; mnóż liczbę przez 10, a od wyniku odejmuj tę liczbę!

   Np. $27 . 9 = 270 - 27 = 243$.
8. Pomnóż przez 11 liczby: 26, 49, 513, 698, 753; mnóż liczbę przez 10, a do wyniku dodaj tę liczbę!

   Np. $47 . 11 = 470 + 47 = 517$.
9. Pomnóż przez 25 liczby: 16, 28, 36, 51, 76, 126; mnóż przez 100 i wynik dziel przez 4!

   Np. $32 . 25 = 3200 : 4 = 800$.

10. Wykonaj mnożenia:

    $250 . 20$, $50 . 87$, $250 . 44$,
    $320 . 60$, $110 . 36$, $90 . 68$;

    mnóż liczby, opuszczając końcowe zera, a do wyniku dopisz tyle zer, ile odrzuciłeś.
    Np. $340 . 20$; ponieważ $34 . 2 = 68$, zatem wynik jest: 6800.
11. Pomnóż:

    $11 . 15$, $19 . 35$, $39 . 52$, $32 . 101$, $36 . 12$,
    $14 . 19$, $21 . 46$, $87 . 99$, $45 . 51$, $28 . 22$,
    $17 . 18$, $86 . 49$, $28 . 29$, $56 . 41$, $53 . 18$;

    jeżeli mnożna lub mnożnik niewiele się różnią od liczby kończącej się na 0, to iloczyn obliczamy jak wskazują przykłady:

$64 . 29 = 64 . (30 - 1) = (64 . 30) - 64 = 1920 - 64 = 1856$,
$23 . 41 = 23 . (40 + 1) = (23 . 40) + 23 = 920 + 23 = 943$,
$13 . 99 = 13 . (100 - 1) = (13 . 100) - 13 = 1300 - 13 = 1287$.

12. Arkusz papieru kosztuje 3 grosze; ile kosztuje 500 arkuszy?
13. Kilogram soli kosztuje 25 groszy; ile kosztuje 36 *kg*?
14. Ktoś wydaje dziennie 12 *zł*; ile wydaje miesięcznie?
15. Ile jest dni w 52 tygodniach?
16. Jajo kosztuje 23 groszy; ile kosztuje kopa?
17. Ile sztuk zawiera 19 tuzinów?
18. Koszta wycieczki obliczone na jedną osobę wynoszą 268 *zł*; ile kosztowała wycieczka, jeśli brało w niej udział 50 osób?
19. Dolar kosztuje 9 *zł*; ile trzeba zapłacić za 86 dolarów?
20. Pociąg składa się z 14 wagonów, a w każdym wagonie jest 50 miejsc; ile jest miejsc w tym pociągu?
21. Zegarek przyśpiesza 25 sekund na godzinę; ile przyśpieszy po 24 godzinach?
22. Człowiek robi 17 oddechów na minutę; ile oddechów robi w ciągu godziny?
23. Puls człowieka uderza przeciętnie 70 razy na minutę; ile razy uderza na godzinę?
24. Pociąg pośpieszny przebiega przeciętnie 57 *km* na godzinę; jaką drogę zrobi w 9 godzinach?

Ćwiczenia.

1. W ciągu minuty wypływa kurkiem 14 *l* wody; ile wody wypłynie w ciągu 12 godzin?
2. Ktoś zarabia 239 *zł* 54 *gr* miesięcznie; ile zarobi w ciągu roku?
3. W fabryce pracowało przez 25 dni 27 robotników, zarabiających po 4 *zł* dziennie i 13 robotników zarabiających po 5 *zł* dziennie; ile zapłacił fabrykant tym robotnikom?
4. Kupiec kupił 325 *kg* towaru za 10000 *zł*, a sprzedawał 1 *kg* po 39 *zł*; ile zarobił?
5. O ile trzeba powiększyć liczbę 246, aby otrzymać liczbę 8 razy większą, a o ile, aby otrzymać 11 razy większą?
6. Maszyna zużywa 25 *kg* węgla na godzinę. Ile kosztował węgiel, który zużyła w 12 godzinach, jeśli za 1 *kg* węgla płaci się 45 *gr*?
7. Samochód jechał przeciętnie z szybkością 45 *km* na godzinę. Jaką drogę przebył, jeśli w pierwszym dniu był w drodze 8 godzin, w drugim 6 godzin, a trzecim 5 godzin?
8. W piwnicy ustawiono w rzędy beczki, z których każda zawierała 120 *l* wina. Ile wynosił zapas wina, jeśli było 6 rzędów po 25 beczek?
9. Dłużnik był winien 9836 *zł*; zapłacił 15 rat po 386 *zł*, Ile jest jeszcze winien?
10. Robotnik zarabia dziennie 8 *zł*; ile zarabia rocznie, jeśli odpoczywa 70 dni w ciągu roku?
11. Ojciec rozdzielił majątek pomiędzy 4 synów i 3 córki w ten sposób, że każdemu synowi dał po 2350 *zł*, każdej zaś córce po 3500 *zł*; ile wynosił ten majątek?
12. Pompa studni dostarcza 4 *l* wody przy jednem poruszeniu dźwigni; ile wody można wydobyć w ciągu 25 minut, robiąc 12 poruszeń dźwigni na 1 minutę?
13. Kasjer miał w kasie 317 banknotów 2-złotowych, 421 banknotów 5-złotowych, 256 banknotów 10-złotowych, 137 banknotów 20-złotowych, 48 banknotów 50-złotowych; ile wynosiła gotówka?
14. Wiedząc, że samolot w 2 minutach przelatuje przeciętnie 5 *km*, oblicz ile przeleci w dwu godzinach!
15. Ile napiszesz cyfr, wypisując wszystkie liczby od 1 do 1000?

16. Chłopiec miał kupić 5 książek; gdyby za nie płacił po 2 *zł* 35 *gr*, brakłoby mu 3 *zł* 75 *gr*; ile złotych miał chłopiec?
17. Ktoś mierzył metrem fałszywym, mianowicie o 2 *cm* krótszym i wymierzył 17 metrów; jaka jest prawdziwa długość?
18. Z dwóch stacyj biegną naprzeciw siebie dwa pociągi, jeden z szybkością 58 *km* na godzinę, a drugi z szybkością 43 *km* na godzinę. Spotykają się po 8 godzinach; jaka jest odległość tych stacyj? Jaka była odległość tych pociągów w 2 godziny po wyruszeniu?
19. Kamień spadający przebiega w pierwszej sekundzie 4 *m* 9 *dm*, w drugiej 3 razy więcej niż w pierwszej, w trzeciej 5 razy więcej niż w pierwszej, a w czwartej 7 razy więcej niż w pierwszej; z jakiej wysokości spadł, jeśli spadał 4 sekundy?
20. Przekonaj się na kilku przykładach, że liczba w którejkolwiek kratce (nie na brzegu), pomnożona przez 8 równa się sumie ośmiu liczb otaczających ją.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

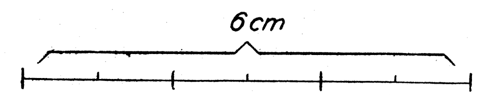
21. Jak obliczysz zarobek kupca wiedząc, ile kilogramów towaru sprzedał i ile na każdym kilogramie zarobił? Podaj przykład liczbowy!
22. Jak obliczysz drogę, jaką pociąg przebył, wiedząc, ile godzin jechał i jaką drogę przeciętnie w godzinie przebywał? Podaj przykład liczbowy!

DZIELENIE.

Określenie i własności.

Podział.

Przypuśćmy, że mamy jakąś wielkość podzielić na kilka równych części, np. odcinek 6 *cm* na 3 równe części. Jak wielka jest każda z tych części?



Rys. 8.

Z rys. 8 widać, że mamy znaleźć odcinek, który dodany do siebie 3 razy (czyli pomnożymy przez 3), daje odcinek 6 *cm*.

Zadanie nasze możemy tak napisać:

$$? \, cm \, . \, 3 = 6 \, cm \quad (\text{? czytaj ile}).$$

Widzimy, że zadanie sprowadza się do wyszukania mnożnej, przyczem znamy mnożnik i wartość iloczynu.

Szukana mnożna jest 2 *cm*, albowiem:

$$2 \, cm \, . \, 3 = 6 \, cm.$$

Wielkość, którą dzielimy, nazywamy *dzielną*, liczbę wskazującą, na ile części dzielimy — *dzielnikiem*, wynik podziału *ilorazem*.

W naszem zadaniu dzielna jest 6 *cm*, dzielnik jest 3, iloraz jest 2 *cm*.

Widzimy, że iloraz pomnożony przez dzielnik daje dzielną. Iloraz oznaczamy, pisząc dzielną, następnie dwukropek : a potem dzielnik.

A więc:

$$6\,cm : 3 = 2\,cm,$$

co czytamy:

6 *cm* podzielone przez 3 równa się 2 *cm*.

Przykład: 18 *zł* podzielono równo między 6 chłopców; ile *zł* każdy otrzymał?

Szukamy więc wartości ilorazu:

$$18\,zł : 6.$$

Mamy zatem rozwiązać zadanie:

$$?\,zł \cdot 6 = 18\,zł.$$

Odpowiedź jest 3 *zł*, gdyż:

$$3\,zł \cdot 6 = 18\,zł.$$

A więc:

$$18\,zł : 6 = 3\,zł.$$

Zadania.

1. *a*) Kwotę 54 *gr* rozdzielono równo między 6 ubogich; ile każdy otrzymał?
   b) Robotnik otrzymał za 5 dni pracy 30 *zł*; ile zarabiał dziennie?
   c) Roczna przedpłata pewnego tygodnika wynosiła 48 *zł*; ile wynosi przedpłata półroczna, kwartalna, miesięczna?
   d) Piechur odbył w 4 godzinach 20 *km*; ile *km* przebywał w godzinie?
   e) Kupiec sprzedał 6 *kg* kawy za 54 *zł*; po ile sprzedawał 1 *kg* kawy?

2. $?\,cm \cdot 5 = 15\,cm$; $?\,kg \cdot 7 = 56\,kg$;
   $?\,kg \cdot 8 = 24\,kg$; $?\,l \cdot 9 = 63\,l$;
   $?\,gr \cdot 6 = 54\,gr$; $?\,\text{godz.} \cdot 4 = 20\,\text{godz.}$;
   $?\,l \cdot 12 = 48\,l$;
   $?\,zł \cdot 15 = 45\,zł$;
   $?\,\text{min.} \cdot 18 = 54\,\text{min.}$

Przedstaw szukane mnożne w postaci ilorazu!

3. $16\,kg : 2 = ?$; $45\,zł : 9 = ?$;
   $58\,cm : 2 = ?$; $54\,m : 18 = ?$;

$28\,l : 7 = ?$; $36\,\text{godz.} : 12 = ?$;
$96\,gr : 32 = ?$; $42\,g : 6 = ?$.

Napisz iloczyny, w których mnożna będzie szukanym ilorazem!

Mieszczenie.

Przypuśćmy, że mamy zbadać, ile razy jakaś wielkość mieści się w drugiej, to znaczy, ile razy tę wielkość możemy odjąć od drugiej; np. ile sztuk 3-metrowych można odciąć z 12-metrowego zwoja sukna.

Szukamy więc liczby, która wskazuje, ile należy wziąć sztuk 3-metrowych, aby otrzymać 12 *m*, czyli szukamy liczby, przez którą pomnożone 3 *m* daje 12 *m*.

Zadanie nasze możemy tak napisać:

$$3\,m \cdot ? = 12\,m.$$

Widzimy, że zadanie sprowadza się do wyszukania mnożnika, przyczem znamy mnożną i wartość iloczynu.

Szukany mnożnik jest 4, albowiem:

$$3\,m \cdot 4 = 12\,m.$$

Wielkość, od której odcinaliśmy, nazywamy dzielną, wielkość, którą odcinaliśmy — dzielnikiem, liczbę, wskazującą, ile razy dzielnik mieści się w dzielnej — ilorazem.

W naszem zadaniu dzielna jest 12 *m*, dzielnik 3 *m*, iloraz 4.

Widzimy, że dzielnik pomnożony przez iloraz daje dzielną.

Iloraz oznaczamy podobnie jak poprzednio:

$$12\,m : 3\,m = 4.$$

Czytaj:

3 *m* mieści się w 12 *m* 4 razy.

Przykład: Rozdzielono równo 24 *zł* pomiędzy chłopców, dając każdemu po 6 *zł*; ilu było chłopców?

Szukamy więc wartości ilorazu:

$$24\,zł : 6\,zł$$

Mamy zatem rozwiązać zadanie:

$$6\,zł \cdot ? = 24\,zł$$

Odpowiedź jest 4, gdyż:

$$6\,zł \,.\, 4 = 24\,zł$$

A więc:

$$24\,zł : 6\,zł = 4.$$

Zadania.

1. *a*) Ile naczyń 3-litrowych można napełnić, mając 27 *l* mleka?
   b) Ile razy odcinek 24 *cm* jest dłuższy od odcinka 6 *cm*?
   c) Kupiec sprzedaje 1 *kg* pewnego towaru po 5 *zł*; ile *kg* tego towaru można kupić za 20 *zł*?
   d) Robotnik zarabia dziennie 6 *zł*; w ilu dniach zarobi 48 *zł*?
   e) Piechur robi średnio na godzinę 6 *km*; w ilu godzinach przejdzie 30 *km*?
2. 5 *cm* × ? = 20 *cm*; 7 *cm* × ? = 42 *cm*; 12 *kg* × ? = 36 *kg*; 18 *g* × ? = 54 *g*; 9 *l* × ? = 36 *l*; 15 *zł* × ? = 60 *zł*; 25 *gr* × ? = 75 *gr*; 3 godz. × ? = 24 godz.; 16 min. × ? = 48 min.

   Przedstaw szukane mnożniki w postaci ilorazu!
3. 35 *kg* : 7 *kg* = ?; 27 *zł* : 9 *zł* = ?; 36 *g* : 12 *g* = ?; 54 *l* : 9 *l* = ?; 24 *m* : 12 *m* = ?; 45 godz. : 5 godz. = ?; 48 *cm* : 3 *cm* = ?; 42 *gr* : 14 *gr* = ?; 60 min. : 5 min. = ?.

   Napisz iloczyny, w których mnożnik będzie szukanym ilorazem!

Iloraz liczb niemianowanych.

Zadania na podział wielkości sprowadzały się do szukania mnożnej, zadania zaś na mieszczenie do szukania mnożnika, przyczem w obu wypadkach znaliśmy wartość iloczynu i drugi czynnik.

Podobne zadania można postawić dla liczb niemianowanych.

Przypuśćmy np., że wartość iloczynu jest 24, a jeden jego czynnik jest 6; ile wynosi drugi czynnik?

Jeśli szukany czynnik jest mnożną, to zadanie to możemy tak napisać:

$$? \times 6 = 24;$$

jeśli szukany czynnik jest mnożnikiem, to tak napiszemy:

$$6 \times ? = 24.$$

W obu wypadkach odpowiedź jest ta sama, t. j. 4, albowiem:

$$4 \times 6 = 6 \times 4 = 24.$$

Widzimy więc, że dla liczb niemianowanych obojętną jest rzeczą, czy szukany czynnik jest mnożną, czy mnożnikiem.

W zadaniach na pomiar wielkości i mieszczenie szukany czynnik nazywaliśmy ilorazem, dany czynnik dzielnikiem, a wartość iloczynu dzielną.

Podobnie i teraz 24 nazwiemy dzielną, 6 dzielnikiem, 4 ilorazem.

Widzimy, że iloraz pomnożony przez dzielnik, daje dzielną. Możemy zatem powiedzieć:

Ilorazem dwóch liczb, z których pierwsza nazywa się dzielną, a druga dzielnikiem, jest liczba, przez którą pomnożony dzielnik daje dzielną.

Iloraz dwóch liczb niemianowanych oznaczamy jak poprzednio. A więc piszemy:

$$24 : 6 = 4.$$

Podobnie:

14 : 7 = 2	bo 2 . 7 = 14
25 : 1 = 25	„ 1 . 25 = 25.

W zagadnieniach, które prowadzą do dzielenia, dzielnik nigdy nie jest zerem (np. nic nie znaczy: podzielić wielkość na 0 części), dlatego też o dzieleniu będziemy mówić tylko wówczas, gdy dzielnik nie jest zerem. Należy o tem dobrze pamiętać. Jeżeli dzielna jest zerem, to iloraz zawsze równa się zeru.

Np.: 0 : 5 = 0 bo 0 . 5 = 0.

UWAGA. Niezawsze możemy mówić o ilorazie dwóch liczb. Nie możemy np. 7 piór rozdzielić równo pomiędzy 3 chłopców.

Jeżeli istnieje iloraz dwóch liczb, to mówimy, że dzielna jest podzielna przez dzielnik; o ilorazie zaś mówimy, żeśmy go otrzymali, pomniejszając dzielną tyle razy, ile wskazuje dzielnik; oczywiście, że w tym wypadku dzielna jest wielokrotnością dzielnika.

Np. $18 : 3 = 6$

A więc 18 jest podzielne przez 3; 18 zmniejszone 3 razy daje na wynik 6.

Zadania.

1. $5 \times ? = 30$; $8 \times ? = 72$; $? \times 7 = 70$; $? \times 12 = 84$.

Przedstaw szukane czynniki w postaci ilorazu!

2. $96 : 3 = ?$; $36 : 4 = ?$; $72 : 12 = ?$; $51 : 17 = ?$

Napisz iloczyny, w których *a)* mnożna *b)* mnożnik będzie szukanym ilorazem!

3. Ile wynosi mnożna, jeżeli:
   a) iloczyn wynosi 15 a mnożnik 3
   b) „ „ 36 „ „ 12
   c) „ „ 45 „ „ 9?
4. Ile wynosi mnożnik, jeżeli:
   a) iloczyn wynosi 18 a mnożna 6
   b) „ „ 96 „ „ 3
   c) „ „ 38 „ „ 19?
5. Jaką liczbę należy pomnożyć przez 5, aby otrzymać 35?
6. Od jakiej liczby jest 18 sześć razy większe?
7. Dzielnik wynosi 5, iloraz 6; ile wynosi dzielna?
8. Jaka liczba jest 7 razy mniejsza od 21?
9. Ile razy należy 8 do siebie dodać, aby otrzymać 40?
10. Ile razy można 5 odjąć od 30?
11. Napisz liczbę 8 przy pomocy liczb 24 i 3!
12. Jaka liczba dzielona: *a)* przez 3 daje iloraz 5?
    b) „ 7 „ „ 4?
    c) „ 8 „ „ 6?
13. Iloczyn dwóch liczb wynosi 28; jedna z tych liczb jest 4; ile wynosi druga?
14. Które z pośród liczb: 0, 1, 4, 5, 9, 12, 16, 18, są podzielne przez dwa? Które przez trzy? Które przez cztery?
15. Wypisz te z pośród liczb od 1 do 20, które są podzielne *a)* przez 1, *b)* przez 2, *c)* przez 3, *d)* przez 4, *e)* przez 5, *f)* przez 6, *g)* przez 7.

Własności ilorazu.

Dzielna, dzielnik, iloraz.

Jeśli 1 *kg* towaru kosztuje 3 *zł*, to za 18 *zł* można kupić 6 *kg* towaru gdyż:

18 *zł* : 3 *zł* = 6

Gdybyśmy znali dzielną i wartość ilorazu, t. j. wiedzieli, że za 18 *zł* można kupić 6 *kg* towaru, to obliczylibyśmy cenę 1 *kg* towaru, dzieląc 18 *zł* : 6.

A więc

3 *zł* = 18 *zł* : 6.

Zatem:

Dzielnik równa się dzielnej, podzielonej przez iloraz.

Zadania.

1. Ile wynosi dzielna, jeżeli:
   a) dzielnik wynosi 6 a iloraz 5
   b) „ „ 9 „ „ 2
   c) „ „ 5 „ „ 6?
2. Ile wynosi dzielnik, jeżeli:
   a) dzielna wynosi 8 a iloraz 2
   b) „ „ 27 „ „ 3
   c) „ „ 60 „ „ 12?
3. Rozwiąż następujące zadania:
   a) $? : 5 = 7$; *b)* $84 : ? = 4$; *c)* $65 : ? = 13$; *d)* $? : 17 = 5$; *e)* $? : 9 = 11$; *f)* $72 : ? = 2$.
4. *a)* 8 *kg* towaru kosztuje 56 *zł*; ile kosztuje 1 *kg*?
   b) kupiono towaru za 96 *zł*, płacąc 12 *zł* za 1 *kg*; ile *kg* kupiono?
5. *a)* pociąg przebył w 3 godz. 105 *km*; ile *km* przebył w 1 godz.?
   b) piechur przebył 20 *km* z prędkością 5 *km* na godzinę; ile godzin był w drodze?
6. *a)* Szachownica ma 32 pól i 8 kolumn; ile ma wierszy?
   b) Szachownica ma 45 pól i 9 wierszy; ile ma kolumn?
7. Oblicz następujące wyrażenia:
   a) $(27 : 3) \times 3$; *b)* $(75 : 5) \times 5$;
   c) $(34 : 17) \times 17$; *d)* $(156 : 12) \times 12$.

Zauważ, że w powyższych iloczynach jeden czynnik jest ilorazem, a drugi dzielnikiem tego ilorazu.

Własności ilorazu.

Jeżeli za 24 *zł* kupiono 6 *kg* towaru, to 1 *kg* tego towaru kosztuje 4 *zł*, gdyż:

$$24 : 6 = 4.$$

Widzimy stąd, że:

$$\underbrace{\text{cena}}_{\text{dzielna}} : \underbrace{\text{ilość } kg}_{\text{dzielnik}} = \underbrace{\text{cena 1 } kg}_{\text{iloraz}}$$

Gdybyśmy dwa razy więcej zapłacili za tę samą ilość towaru, to cena 1 *kg* towaru byłaby dwa razy większa.

Możemy więc napisać:

$$\underbrace{(24 \,.\, 2)}_{\text{dzielna}} : \underbrace{6}_{\text{dzielnik}} = \underbrace{4 \,.\, 2}_{\text{iloraz}}$$

Podobnie otrzymamy:

$$(24 : 2) : 6 = 4 : 2.$$

Zatem:

Ile razy zwiększymy (względnie zmniejszymy) *dzielną, tyle razy zwiększy się* (względnie zmniejszy się) *iloraz.* Oczywiście możemy dzielną zmniejszyć tylko tyle razy, aby zmniejszona dzielna była nadal podzielna przez dzielnik.

Gdybyśmy za 24 *zł* kupili nie 6 *kg* towaru, ale dwa razy więcej, to cena 1 *kg* byłaby dwa razy mniejsza.

Możemy więc napisać:

$$\underbrace{24}_{\text{dzielna}} : \underbrace{(6 \,.\, 2)}_{\text{dzielnik}} = \underbrace{4 : 2}_{\text{iloraz}}$$

Podobnie:

$$24 : (6 : 2) = 4 \,.\, 2.$$

Zatem:

Ile razy zwiększymy (względnie zmniejszymy) *dzielnik, tyle razy zmniejszy się* (względnie powiększy) *iloraz.*

Oczywiście możemy dzielnik zwiększyć tylko tyle razy, aby dzielna była nadal przez zwiększony dzielnik podzielna.

Gdybyśmy zapłacili dwa razy więcej za dwa razy większą ilość towaru, albo też dwa razy mniej za dwa razy mniejszą

ilość towaru, to w obu wypadkach cena 1 *kg* towaru byłaby ta sama, co na początku.

Możemy więc napisać:

$$(24 \,.\, 2) : (6 \,.\, 2) = 4$$
$$(24 : 2) : (6 : 2) = 4.$$

Zatem:

Jeżeli dzielną i dzielnik równocześnie taką samą ilość razy powiększymy, lub równocześnie taką samą ilość razy pomniejszymy, to iloraz się nie zmieni.

Mamy rozdzielić równo 6 pudełek po 24 piór pomiędzy 3 chłopców. Ile piór otrzyma każdy chłopiec?

Ponieważ wszystkich piór jest 24×6, więc każdy chłopiec otrzyma:

$$(24 \times 6) : 3.$$

Podział ten możemy wykonać, rozdzielając równo pudełka pomiędzy chłopców, więc każdy otrzyma 2 pudełka po 24 piór, t. j. otrzyma piór:

$$24 \times 2.$$

Widzimy zatem, że:

$$(24 \times 6) : 3 = 24 \times 2.$$

Podział ten moglibyśmy również uskutecznić, rozdzielając zawartość każdego pudełka zosobna. Każdy chłopiec otrzyma piór:

$$8 \times 6.$$

Zatem

$$(24 \times 6) : 3 = 8 \times 6.$$

Wynika stąd, że:

Iloczyn dzielimy przez liczbę, dzieląc jeden z jego czynników przez tę liczbę.

Podobnie:

$$(\mathbf{28} \,.\, 5) : 7 = 4 \,.\, 5$$
$$(16 \,.\, \mathbf{18} \,.\, 7) : 9 = 16 \,.\, 2 \,.\, 7.$$

Zadania.

1. Jak zmieni się iloraz, jeżeli:
   a) dzielną pomnożymy przez 2;
   b) dzielnik pomnożymy przez 2;
   c) dzielną podzielimy przez 2;

d) dzielnik podzielimy przez 2;
e) dzielną i dzielnik pomnożymy przez 2;
f) dzielną pomnożymy przez 4, dzielnik przez 2;
g) dzielną pomnożymy przez 2, dzielnik przez 4;
h) dzielną podzielimy przez 4, dzielnik pomnożymy przez 2?

Uzasadnij odpowiedź na dobranych przez siebie przykładach!

2. Opierając się na własnościach ilorazu, podaj, który z podanych ilorazów jest większy i ile razy:

a) 100 : 2; 50 : 2; *b*) 600 : 20; 600 : 40;
c) 333 : 3; 333 : 9; *d*) 100 : 5; 50 : 10;
e) 1000 : 250; 100 : 25; *f*) 200 : 40; 800 : 160.

3. Podaj bez rachowania, który z ilorazów jest większy i ile razy:

a) (30 : 2) : 5 i 30 : 5; *b*) (60 × 2) : 10 i 60 : 10;
c) 250 : 25 i 250 : (25 : 5); *d*) 630 : 9 i 630 : (9 × 2);
e) 88 : 11 i (88 × 2) : (11 × 2); *f*) 196 : 14 i (196 : 2) : (14 : 2);
g) 100 : 20 i (100 × 6) : (20 × 2); *h*) 84 : 4 i (84 × 2) : (4 : 2);
i) 196 : 14 i (196 : 2) : (14 × 7).

4. Rozwiąż następujące zagadnienia opierając się na własnościach ilorazu:

a) Jeden robotnik zarobił w sześciu dniach 24 *zł*, a drugi w czasie dwa razy krótszym dwa razy więcej; ile razy więcej zarabiał dziennie drugi robotnik?

b) Dłużnik spłaca dług 360 *zł* równemi ratami, przez 12 miesięcy; w ilu miesiącach spłaci dług, jeśli będzie płacił cztery razy większe raty?

c) Jaś ma dwa razy mniej jabłek niż Piotruś, a Staś ma sześć razy mniej jabłek, niż Piotruś; ile razy mniej jabłek ma Staś niż Jaś? Podaj przykład liczbowy!

d) Pociąg przebył drogę 120 *km* w dwóch godzinach, a cyklista przebył drogę trzy razy krótszą w czasie dwa razy dłuższym; ile razy dłuższą drogę przebywał w godzinie pociąg niż cyklista?

e) Kupiec sprzedał 6 *kg* jednego towaru za 36 *zł*, a drugiego 3 razy więcej za 6 razy większą sumę; ile razy był droższy *kg* drugiego towaru niż pierwszego?

5. Opierając się na twierdzeniu, że iloczyn dzielimy dzieląc jeden jego czynik, oblicz następujące ilorazy:

a) (28 × 25) : 14; *b*) (36 × 30) : 9; *c*) (54 × 36) : 27;
d) (6 × 8 × 5) : 4; *e*) (27 × 36 × 50) : 18.

6. Iloraz (27 × 36 × 54) : (9 × 24) obliczamy w następujący sposób: dzielimy dzielną i dzielnik przez 9, otrzymamy: (**3** × 36 × 53) : 24; dzielimy dzielną i dzielnik przez 6, otrzymamy: (3 × **6** × 54) : 4; dzielimy dzielną i dzielnik przez 2, otrzymamy: (3 × **3** × 54) : 2 = 3 × 3 × 27 = 243.

Oblicz w ten sam sposób następujące ilorazy:

a) (15 × 24 × 42) : (16 × 35);
b) (72 × 35 × 10) : (14 × 75);
c) (48 × 1000 × 225) : (270 × 50 × 75).

Zmiany ilorazu.

1. W ilorazie 48 : 4 *a*) powiększ kilka razy dzielną, *b*) pomniejsz 2 lub 3 razy dzielną; jak w każdym wypadku zmieni się iloraz?
2. W ilorazie 72 : 12 *a*) powiększ dzielnik 2 lub 3 razy, *b*) pomniejsz dzielnik 2 lub 3 razy; jak w każdym wypadku zmieni się iloraz?
3. Podaj bez rachowania, który z ilorazów jest większy:

   a) 6300 : 25 i 6300 : 100; *b*) 2736 : 9 i 1368 : 18;
   c) 200 : 25 i 100 : 25.

4. Jeden kupiec sprzedaje 2 *kg* pewnego towaru za 3 *zł*, drugi 6 *kg* tego samego towaru za 8 *zł*; który sprzedaje taniej?
5. Jeden robotnik zarabia w ciągu tygodnia 24 *zł*, drugi w dwóch tygodniach 54 *zł*; który więcej zarabia dziennie?
6. Jeden zegarek przyśpiesza na dobę o 36 minut, drugi zegarek przyśpiesza na 12 godzin o 24 minut; który więcej przyśpiesza na godzinę?

Rozdzielność dzielenia względem dodawania.

Pomiędzy 4 chłopców rozdzielono równo za pierwszym razem 12 piór, za drugim razem 20 piór. Ile piór razem otrzymał każdy chłopiec? Możemy to obliczyć dwoma sposobami

1. Rozdzielono razem $12 + 20$ piór pomiędzy 4 chłopców, a więc każdy otrzymał piór:

$$(12 + 20) : 4$$

2. Za pierwszym razem każdy chłopiec otrzymał piór:

$$12 : 4,$$

a za drugim razem otrzymał piór:

$$20 : 4,$$

a więc razem otrzymał:

$$(12 : 4) + (20 : 4).$$

Widzimy zatem, że

$$(12 + 20) : 4 = (12 : 4) + (20 : 4).$$

S u m ę d z i e l i m y p r z e z l i c z b ę, d z i e l ą c k a ż d y z d o d a j n i k ó w p r z e z t ę l i c z b ę i d o d a j ą c o t r z y m a n e w y n i k i.

Np.: $(18 + 6) : 3 = (18 : 3) + (6 : 3)$;
$(15 + 20 + 35) : 5 = (15 : 3) + (20 : 5) + (35 : 5)$.

Oczywiście regułę powyższą możemy tylko wówczas stosować, gdy dzielnik mieści się bez reszty w każdym z dodajników.

Prawo powyższe nazywamy prawem r o z d z i e l n o ś c i dzielenia względem dodawania.

Rozdzielność dzielenia względem odejmowania.

Pomiędzy 4 chłopców rozdzielono 32 piór w ten sposób, żo najpierw rozdzielono 20 piór, a potem resztę. Ile piór otrzymał każdy chłopiec za drugim razem? Możemy to obliczyć dwoma sposobami:

1. Za drugim razem rozdzielono piór $32 - 20$ pomiędzy 4 chłopców, a więc każdy chłopiec otrzymał (za drugim razem) piór:

$$(32 - 20) : 4.$$

2. Każdy chłopiec otrzymał razem piór:

$$32 : 4$$

Ponieważ najpierw otrzymał piór:

$$20 : 4$$

a więc za drugim razem otrzymał piór:

$$(32 : 4) - (20 : 4).$$

Widzimy zatem, że:

$$(32 - 20) : 4 = (32 : 4) - (20 : 4).$$

R ó ż n i c ę d z i e l i m y p r z e z l i c z b ę, o d e j m u j ą c o d i l o r a z u o d j e m n e j p r z e z t ę l i c z b ę, i l o r a z o d j e m n i k a p r z e z t ę l i c z b ę.

Oczywiście regułę powyższą możemy tylko wówczas stosować, gdy dzielnik mieści się bez reszty w odjemnej i w odjemniku.

Prawo powyższe nazywamy prawem r o z d z i e l n o ś c i dzielenia względem odejmowania.

A więc mamy:

$$(18 - 6) : 3 = (18 : 3) - (6 : 3),$$
$$(65 - 20) : 5 = (65 : 5) - (20 : 5).$$

Zadania.

1. Przekonaj się o prawdziwości następujących równości:
   a) $(120 + 80) : 20 = (120 : 20) + (80 : 20)$;
   b) $(27 + 36 + 42) : 3 = (27 : 3) + (36 : 3) + (42 : 3)$;
   c) $(85 - 50) : 5 = (85 : 5) - (50 : 5)$;
   d) $(81 - 27 + 36 - 45) : 9 = (81 : 9) - (27 : 9) + (36 : 9) - (45 : 9)$.
2. Oblicz następujące zadania w prosty sposób:
   a) Podziel przez 15 następujące wyrażenie: $(21 . 15) + (32 . 15) + (27 . 15)$;
   b) Podziel przez 28 następujące wyrażenie: $(126 . 28) - (35 . 28) + (46 . 28)$;
   c) Ile to jest: $(7250 : 25) - (7000 : 25)$.
3. Rozwiąż dwoma sposobami następujące zagadnienia:
   a) Kupiec sprzedał jednego dnia towaru za 84 *zł*, drugiego dnia za 64 *zł*; ile *kg* sprzedał, jeśli za *kg* tego towaru żądał 4 *zł*?
   b) Robotnik zarabiał dziennie 8 *zł*. W jednym miesiącu zarobił 160 *zł*, w drugim 200 *zł*; ile dni pracował w obu miesiącach?
   c) Piechur przeszedł 55 *km* w dwóch dniach, idąc przeciętnie 5 *km* na godzinę. Pierwszego dnia przeszedł 30 *km*; ile godzin był w drodze w drugim dniu?
   d) Jedną rurą wpływa do basenu w przeciągu 12 minut 240 *l* wody, drugą w tym samym czasie 120 *l*; ile

zbierze się wody w ciągu minuty, jeśli obiema rurami jednocześnie wpływa woda do basenu?

e) Kupiec kupił 15 *kg* towaru za 90 *zł*, a sprzedał za 105 *zł*; jaki miał zysk na 1 *kg* towaru?

4. Suma dwóch liczb wynosi 36. Jedna z nich, podzielona przez 4, daje wynik 3; jaki jest iloraz drugiej z tych liczb przez 4?
5. W ciągu 10 godzin pociąg pośpieszny przejechał 520 *km*, a pociąg osobowy 360 *km*; o ile pociąg pośpieszny wyprzedzał osobowy średnio w ciągu 1 godz.?

Iloraz niedokładny.

Ile sztuk 4-metrowych możemy odciąć z 14-metrowego zwoju sukna?

Ponieważ na 3 sztuki 4-metrowe potrzeba 12 *m*, a na 4 sztuki 16 *m*, więc ze zwoju 14-metrowego możemy odciąć **3** sztuki **4**-metrowe i zostanie reszta **2** *m*.

Liczbę 3 nazywamy ilorazem niedokładnym, powstałym z podzielenia liczby 14 przez liczbę 4.

Jak poprzednio liczbę 14 nazywamy dzielną, liczbę zaś 4 dzielnikiem. Liczbę 2 nazywamy resztą. Iloraz niedokładny 3 wskazuje, ile razy dało się odjąć 4 *m* od 14 *m*, lub jak krócej mówimy, ile razy 4 *m* mieści się w 14 *m*. Reszta 2 wskazuje, ileby metrów sukna zostało, gdybyśmy od sztuki 14-metrowej odcinali 3 razy po 4 *m* sukna. Zatem:

Ilorazem niedokładnym dwóch liczb, z których pierwsza nazywa się dzielną, a druga dzielnikiem, jest liczba, wskazująca, ile razy dzielnik można odjąć od dzielnej (czyli ile razy dzielnik mieści się w dzielnej).

Reszta jest to wynik, jaki otrzymamy, odejmując od dzielnej tyle razy dzielnik, ile wskazuje iloraz niedokładny (t. j. tyle razy, ile się da).

Oczywiście, że reszta jest zawsze mniejsza od dzielnika.

Np. 1. Ponieważ 13 — 5 — 5 = 3, więc 5 w 13 mieści się 2 razy i zostaje reszta 3.

2. Ponieważ 17 — 3 — 3 — 3 — 3 — 3 = 2, więc 3 w 17 mieści się 5 razy i zostaje reszta 2.

Z podanego na początku przykładu widzimy, że dodając do reszty 2 *m* to, cośmy odcięli, t. j. $4\,m \times 3$, otrzymamy 14 *m*.

A więc dzielną otrzymujemy, dodając do reszty iloczyn dzielnika przez iloraz niedokładny.

Np. Ponieważ 5 w 13 mieści się 2 razy i zostaje reszta 3, więc:

$$13 = (2 \,.\, 5) + 3.$$

Podobnie 3 w 17 mieści się 5 razy i zostaje reszta 2, więc:

$$17 = (3 \,.\, 5) + 2.$$

UWAGA. Jeżeli reszta jest zerem, to znaleziony iloraz jest ilorazem dokładnym.

Zadania.

1. Znaleźć iloraz niedokładny i resztę dzielenia w następujących przykładach:

a) 12 : 5; *b*) 14 : 3; *c*) 19 : 2; *d*) 17 : 7; *e*) 30 : 8;
f) 35 : 9; *g*) 47 : 6; *h*) 55 : 8; *i*) 69 : 8; *j*) 71 : 9;
k) 79 : 9.

2. Jaka liczba, dzielona przez 3, daje:
   a) iloraz niedokładny 5, a resztę 1;
   b) „ „ 7, „ „ 2;
   c) „ „ 16, „ „ 1;
   d) iloraz 12, „ „ 0.
3. Przez jaką liczbę należy podzielić:
   a) 56, aby otrzymać na iloraz 9 a na resztę 2;
   b) 63, „ „ „ „ 10 „ „ „ 3;
   c) 45, „ „ „ „ 5 „ „ „ 5.
4. Jaka liczba mieści się w 47 dziesięć razy?
5. W jakich liczbach mieści się 7 sześć razy?
6. Pomarańcza kosztuje 30 *gr*; ile można kupić pomarańcz za 1 *zł*?
7. Piechur wychodzi z miasta i robi dziennie średnio 35 *km*; w którym dniu dojdzie do miasta odległego o 100 *km*?
8. W paczce jest 50 gwoździ; ile paczek należy kupić, jeżeli potrzeba 120 gwoździ?
9. Jaś oszczędza dziennie 20 *gr*; po ilu dniach zaoszczędzi 1 *zł* 30 *gr*?

10. Ktoś płaci sumę 66 *zł*; ile musi dać banknotów 20 złotowych i jaką otrzyma resztę?
11. Jeżeli pierwszy pewnego miesiąca wypada w niedzielę, to na jaki dzień wypadnie 18 tego miesiąca?
12. Koło u wozu ma 3 metry obwodu; ile razy się to koło obróciło, jeżeli wóz przejechał 100 *m*?
13. Ile niedziel może być co najmniej, a ile co najwyżej w 18 dniach?
14. Rozdzielono 100 *zł* pomiędzy kilka osób w ten sposób, że każdej osobie dano 16 *zł*; ile osób obdzielono, jeżeli zostało 4 *zł*?

Dzielenie w systemie dziesiętnym.

Przypadek I.

Najprościej wykonuje się dzielenie w systemie dziesiętnym w tym wypadku, gdy iloraz (lub iloraz niedokładny) jest liczbą jednocyfrową.

Aby przekonać się, czy iloraz jest liczbą jednocyfrową, należy dzielnik pomnożyć przez dziesięć (wystarczy w tym celu do dzielnika dopisać zero). Jeżeli ten iloczyn jest większy od dzielnej, to oczywiście iloraz musi być liczbą jednocyfrową.

W następujących przykładach dzielenia:

$$367 : 59, \qquad 123 : 14,$$

ilorazy są liczbami jednocyfrowemi, gdyż

$$590 > 367, \qquad 140 > 123.$$

Przypuśćmy teraz, że mamy wykonać dzielenie:

$$367 : 59.$$

W tym celu należałoby mnożyć dzielnik kolejno przez 1, 2, 3 i t. d. tak długo, aż otrzymalibyśmy liczbę większą od dzielnej. Przedostatnia liczba, przez którą musielibyśmy mnożyć dzielnik, byłaby szukanym ilorazem. Ponieważ iloraz jest liczbą jednocyfrową, więc tych prób wykonalibyśmy co najwyżej dziesięć.

Aby zmniejszyć ilość tych prób, postępujemy w praktyce w następujący sposób:

Jeżeli dzielna i dzielnik są liczbami równocyfrowemi, to dzielimy pierwszą cyfrę dzielnej przez pierwszą cyfrę dzielnika.

Jeżeli natomiast dzielna ma więcej cyfr niż dzielnik (jak w naszym wypadku), to liczbę utworzoną z dwóch pierwszych cyfr dzielnej, a więc 36, dzielimy przez pierwszą cyfrę dzielnika, t. j. 5; otrzymamy iloraz 7.

Mnożąc teraz dzielnik 59 przez 7, otrzymujemy 413, a więc więcej niż dzielna. Próbujemy więc przyjąć na iloraz 6. Ponieważ

$$6 . 59 = 354,$$

a 354 jest mniej niż dzielna, przeto 6 jest szukanym ilorazem niedokładnym. Chcąc otrzymać resztę, odejmujemy 354 od 367.

Rachunek ten zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{rl} & 367 : 59 = 6 \\ & \underline{354} \\ \text{reszta} & 13 \end{array}$$

Podobnie:

$$\begin{array}{rl} & 867 : 215 = 4 \\ & \underline{860} \\ \text{reszta} & 7 \end{array}$$

Zadania.

1. Który z niżej podanych ilorazów będzie liczbą jednocyfrową?

   a) 357 : 46, *b*) 4327 : 35, *c*) 12358 : 2602,
   d) 896 : 89, *e*) 5358 : 2000, *f*) 8756 : 935.

2. Oblicz następujące ilorazy i wyznacz resztę dzielenia:

   a) 256 : 34, *b*) 12000 : 9835, *c*) 3258 : 453,
   d) 7358 : 852, *e*) 8253 : 976, *f*) 15358 : 3250.

Przypadek II. (Ogólny).

Mamy 4 banknoty dziesięciozłotowe, 5 pojedynczych złotych, 8 dziesięciogroszówek i 3 grosze, a więc razem 4583 groszy i chcemy tę kwotę rozdzielić równo pomiędzy 67 ludzi. Ile groszy każdy otrzyma i jaka zostanie reszta?

Zadanie to możemy rozwiązać, wykonując dzielenie:

$$4583 : 67.$$

Aby wykonać to dzielenie, wyobrażamy sobie, że 4 banknoty dziesięciozłotowe zamieniliśmy na 40 sztuk jednozłotowych. Będziemy mieli zatem razem 45 sztuk jednozłotowych. Ponieważ sztuk jednozłotowych jest za mało nato, żeby każdy otrzymał po 1 *zł*, więc zmienimy 45 *zł* na 450 sztuk dziesięciogroszówek. Razem więc będzie 458 sztuk dziesięciogroszowych.

Chcąc teraz obliczyć, ile dziesięciogroszówek każda osoba otrzyma, wykonujemy dzielenie:

458 : 67.

Postępując jak w przypadku I, mamy:

458 : 67 = 6
402
56

Każdy otrzyma więc 6 dziesięciogroszówek i zostanie do podzielenia 56 dziesięciogroszówek i 3 grosze.

Zamieniając teraz 56 dziesięciogroszówek na pojedyncze grosze, będziemy mieli 560 groszy, a więc razem 563 groszy.

Wykonujemy zatem dzielenie:

563 : 67.

Postępując jak poprzednio, mamy:

563 : 67 = 8
536
reszta 27

Przy drugim podziale każda osoba otrzymała 8 groszy i zostało 27 groszy; każda więc osoba otrzymała 68 groszy (6 dziesięciogroszówek + 8 groszy).

Rachunek powyższy wykonujemy w następujący sposób:

4583 : 67 = 68
402
563
536
reszta 27

W praktyce przeprowadzamy więc dzielenie w następujący sposób:

Odcinamy z dzielnej (od lewej ręki ku prawej) tyle cyfr, ile jest w dzielniku. Jeśli utworzona z tych cyfr liczba jest mniejsza od dzielnika, to odcinamy jeszcze następną cyfrę.

Wykonujemy teraz pierwsze dzielenie liczby utworzonej z cyfr odciętych przez dzielnik.

Otrzymany iloraz będzie cyfrą, stojącą na najwyższem miejscu szukanego ilorazu.

Do otrzymanej reszty dopisujemy następującą cyfrę dzielnej i wykonujemy dzielenie jak poprzednio.

Nowo znaleziony iloraz będzie drugą cyfrą szukanego ilorazu.

Tak postępujemy dalej, aż wyczerpiemy wszystkie cyfry dzielnej. Ostatnia otrzymana reszta, będzie szukaną resztą.

Np.:

3235 : 258 = 12
258
655
516
reszta 139

UWAGA. Jeśli, dopisując do którejś z kolejnych reszt odpowiednią cyfrę dzielnej, otrzymujemy mniej niż dzielnik, to dopisujemy jeszcze następną cyfrę dzielnej, a na odpowiedniem miejscu szukanego ilorazu piszemy cyfrę zero; następnie wykonujemy dzielenie, jak poprzednio.

2848 : 27 = 105
27
148
135
reszta 13

Zadania.

1. Oblicz następujące ilorazy i wyznacz reszty dzielenia:

a) 406 : 8	*b)* 8352 : 9	*c)* 14008 : 5
875 : 25	1256 : 34	12384 : 18
964 : 41	7853 : 254	15396 : 254
765 : 126	9125 : 532	16028 : 7535
408 : 9	8000 : 306	20000 : 321
900 : 21	6005 : 403	10500 : 205.

2. Przez jaką liczbę należy:

a) 16104 podzielić, aby otrzymać na iloraz 22,
b) 19795 „ „ „ „ „ 37,
c) 8625 „ „ „ „ „ 345?

3. Przez jaką liczbę należy:

a) 36 pomnożyć, aby otrzymać 9144,
b) 786 „ „ „ 19650,
c) 236 „ „ „ 17700?

4. Mamy wykonać dzielenie:

3548 *zł* 35 *gr* : 27

Rozwiązanie:
wykonujemy naprzód dzielenie 3548 *zł* : 27

3548 : 27 = 131
27
84
81
38
27
reszta 11

Otrzymaliśmy więc iloraz 131 *zł* i resztę 11 *zł*. Resztę 11 *zł* zamieniamy na grosze i dodajemy do tego grosze dzielnej; otrzymujemy 1135 *gr*. Wykonujemy teraz dzielenie 1135 *gr* : 27.

1135 : 27 = 42
108
55
54
reszta 1

Otrzymaliśmy wynik 42 *gr* i resztę 1 *gr*. Ostateczny więc wynik naszego dzielenia jest 131 *zł* 42 *gr* i reszta 1 *gr*.

Wykonaj w ten sposób następujące dzielenia:

a) 345 *m* 2 *dm* : 17
8365 *m* 7 *dm* : 451
5345 *km* 736 *m* : 603
3528 *km* 518 *m* : 327
45 *km* 835 *m* 2 *dm* : 24
128 *km* 903 *m* 7 *dm* : 32

b) 78 *kg* 34 5*g* : 36
526 *kg* 28 *g* : 12
2495 *kg* 128 *g* : 236
8926 *kg* 5 *g* : 785
53 *kg* 36 *dkg* 8 *g* : 7
438 *kg* 5 *dkg* 3 *g* : 36

c) 36 *zł* 52 *gr* : 6
485 *zł* 76 *gr* : 29
2360 *zł* 80 *gr* : 354
635 *zł* : 12
7358 *zł* 25 *gr* : 45
12345 *zł* 35 *gr* : 733

d) 8 godz. 35 min. : 3
16 godz. 25 min. : 8
45 min. 17 sek. : 7
5 godz. 52 min. 18 sek : 3
48 godz. 12 min. 13 sek. : 15
15 dni 16 godz. 30 min. 18 sek. : 7.

5. Jeżeli mamy dzielić przez siebie dwie liczby wielorakie tego samego gatunku, wówczas sprowadzamy je najpierw do wspólnego miana, a następnie wykonujemy dzielenie. Np.: Książka kosztuje 3 *zł* 25 *gr*; ile kupić możemy książek za 175 *zł* 37 *gr*?

Aby zadanie rozwiązać, musimy obliczyć, ile razy 3 *zł* 25 *gr* mieści się w 175 *zł* 37 *gr*. W tym celu zamieniamy złote na grosze i wykonujemy dzielenie 17537 : 325.

17537 : 325 = 53
1625
1287
975
reszta 312

Otrzymaliśmy więc iloraz niedokładny 53 i resztę 312; możemy więc kupić 53 książek i zostanie nam reszta 312 *gr*, t. j. 3 *zł* 12 *gr*.

Wykonaj w podobny sposób następujące dzielenia:

a) 3 *km* 256 *m* : 18 *m*
12 *km* 459 *m* : 572 *m*
15 *km* 235 *m* : 2 *km* 325 *m*
328 *m* 7 *dm* : 5 *dm*
459 *m* 5 *dm* : 13 *m* 2 *dm*
27 *m* 3 *dm* 5 *cm* : 8 *dm* 7 *cm*

b) 5 *kg* 325 *g* : 36 *g*
17 *kg* 459 *g* : 518 *g*
9 *kg* 26 *g* : 1 *kg* 325 *g*
12 *kg* 564 *g* : 3 *kg* 48 *g*
17 *kg* 396 *g* : 5 *kg* 136 *g*
10 *kg* : 2 *kg* 5 *g*

c) 53 *zł* 35 *gr* : 18 *gr*
29 *zł* : 32 *gr*
8 *zł* 29 *gr* : 1 *zł* 12 *gr*
58 *zł* 42 *gr* : 12 *zł* 35 *gr*
138 *zł* 50 *gr* : 3 *zł* 27 *gr*
188 *zł* 27 *gr* : 15 *zł*

d) 8 godz. 17 min. : 15 min.
7 godz. : 25 min.

28 godz. 10 min. : 1 godz. 13 min.
12 dni 8 godz. : 4 godz.
3 dni 12 godz. 15 min. : 3 goaz. 30 min.
2 godz. 18 min. 35 sek. : 24 min. 12 sek.

6. Urzędnik zarabia rocznie 2946 *zł* 36 *gr*; ile zarabia miesięcznie?
7. Kupiono 364 *l* wina za 1638 *zł*; po ile płacono litr wina?
8. Ile kroków zrobisz na przestrzeni 100 *m*? (Jeden krok przeciętnie .75 *cm*).
9. Pociąg pośpieszny przejeżdża średnio 52 *km* na godzinę. Ile metrów przejeżdża średnio w minucie, a ile w sekundzie?
10. Człowiek przejdzie szybkim krokiem na godzinę 5 *km*; ile minut idzie 1 *km*? ile metrów przechodzi w jednej minucie?
11. Pociąg wyjeżdża z Moskwy w niedzielę o godz. 1-szej popołudniu i jedzie do Władywostoku 239 godzin. Kiedy pociąg ten przybywa do Władywostoku?
12. Arkusz papieru kosztuje 3 *gr*. Ile arkuszy mozna dostać za 12 *zł*?
13. Prędkość głosu wynosi 333 *m* na sekundę. Po jakim czasie usłyszy człowiek, odległy od armaty o 10 *km*, huk wystrzału z tej armaty?
14. Rozdzielono 11340 *zł* równo między 36 osób; ile każda osoba otrzymała?
15. Kupiec sprzedał 75 *kg* towaru i zarobił 12 *zł*; ile zarabiał na jednym *kg* tego towaru?
16. Człowiek idzie średnio 5 *km* na godzinę; ile dni szedłby z Warszawy do Krakowa, jeśliby dziennie szedł 6 godzin? (Odległość z Warszawy do Krakowa wynosi 365 *km*).

Rachunek pamięciowy i ułatwienia.

1. Podziel przez 2 następujące liczby:

   a) 12, 28, 36, 44, 56, 74, 82, 96, 204, 430,
   b) 15, 25, 37, 43, 53, 79, 85, 93, 235, 431

2. Podziel przez 4 następujące liczby:

   a) 12, 28, 36, 48, 56, 64, 84, 92, 400, 800,
   b) 15, 23, 38, 46, 50, 63, 84, 94, 105, 630.

UWAGA. Dziel przez 2, a otrzymany iloraz (bez zwracania uwagi na resztę) dziel znowu przez 2. Np.: 65 : 4; 65 dzielone przez 2 jest 32 (reszta 1); 32 dzielone przez 2 jest 16.

3. Podziel przez 3 następujące liczby:

   a) 15, 27, 33, 45, 54, 63, 72, 81, 102, 300,
   b) 17, 25, 32, 47, 53, 65, 76, 85, 106, 605.

4. Podziel przez 9 następujące liczby:

   a) 18, 45, 63, 108, 189, 279, 450,
   b) 15, 33, 56, 82, 185, 364, 541.

5. Podziel przez 6 następujące liczby:

   24, 42, 66, 84, 96, 132, 180.

6. Dziel przez 10 następujące liczby:

   20, 35, 78, 96, 254, 350, 736, 528.

UWAGA. 10 mieści się tyle razy w danej liczbie, ile dziesiątek ta liczba zawiera. Iloraz otrzymamy, odrzucając cyfrę jednostek; cyfra jednostek będzie resztą.

Np.: 5286 : 10 = 528, reszta 6.

7. Podziel przez 100 następujące liczby:

   235, 836, 4527, 5345, 9250, 15327.

UWAGA. Podobnie jak w zadaniu 6, iloraz otrzymujemy, odcinając dwie ostatnie cyfry; liczba utworzona z tych dwóch ostatnich cyfr, jest resztą dzielenia.

8. Podziel przez 5 następujące liczby:

   25, 57, 73, 92, 256, 520, 600, 880.

UWAGA. Mnóż przez 2, a wynik dziel przez 10. Np.:
76 : 5; 77 × 2 = 152; 152 dzielone przez 10 jest **15**.

9. Podziel przez 25 następujące liczby:

   43, 50, 65, 75, 90, 230, 460, 625.

UWAGA. Mnóż przez 4, a wynik dziel przez 100.

10. Jeżeli dzielnik kończy się kilkoma zerami, to dzielenie można ułatwić. Przypuśćmy, że chcemy 5926 jabłek spa-

kować do worków po 300 sztuk; ile worków napełnimy? Aby zadanie rozwiązać, należy wykonać dzielenie:

5926 : 300.

Aby te jabłka zapakować, moglibyśmy podzielić je na kupki po 100, a następnie po 3 takie kupki zesypywać do jednego worka.

Kupek po 100 mamy 59, przyczem 26 jabłek osobno. Wobec tego napełnimy worków:

59 : 3 = 19, reszta 2.

Napełnimy zatem 19 worków, przyczem zostanie nam jabłek: 2 kupki po 100 i 26 osobno, t. j. razem 226 jabłek.

Jeśli więc dzielnik kończy się kilkoma zerami, to zera te przekreślamy i taką samą ilość ostatnich cyfr dzielnej, a następnie wykonujemy dzielenie. Otrzymany iloraz jest szukanym ilorazem.

$32\cancel{94} : 4\cancel{00} = 8$, reszta 94.   5278 : 70 = 75, reszta 28

$$\begin{array}{r} 49 \\ \hline 37 \\ 35 \\ \hline 2 \end{array}$$

Wykonaj w ten sposób następujące dzielenia:

85 : 20, 456 : 20, 96 : 30, 853 : 40, 11256 : 500, 17325 : 600, 14325 : 300, 100 : 10, 1000 : 100, 10000 : 10, 10000 : 100, 1000 : 10, 2570 : 200, 8700 : 350, 9300 : 40, 2500 : 700, 7890 : 150, 15000 : 700, 19000 : 2000, 7600 : 200.

11. Jeżeli dzielnik jest liczbą jednocyfrową, to możemy otrzymać iloraz bez dopisywania częściowych iloczynów. Np.:

8325 : 7 = 1189, reszta 2.

Rachujemy w myśli w następujący sposób:

7 w 8 mieści się **1** raz, zostaje 1; dopisuje 3 i mam 13;
7 w 13 mieści się **1** raz, zostaje 6; dopisuję 2 i mam 62;
7 w 62 mieści się **8** razy; 8 × 7 = 56, 62 — 56 = 6, dopisuję 5 i mam 65;
7 w 65 mieści się **9** razv; 7 × 9 = 63, 65 — 63 = 2.
Iloraz jest 1189, reszta 2.

Wykonaj w ten sposób następujące dzielenia:

3256 : 2, 853 : 2, 736 : 3, 1254 : 3, 4527 : 5,
8326 : 6, 354 : 7, 4256 : 7, 4520 : 8, 8236 : 9.

12. Ile utworzysz bataljonów z 5325 żołnierzy, jeśli bataljon liczy 300 ludzi?
13. 172 uczniów ustawiło się w czwórki; ile czwórek utworzyli ci uczniowie?
14. Ile metrów na minutę przejeżdża pociąg osobowy, skoro w godzinie przejeżdża 36 *km*? (Oblicz, ile w 10 minutach, a następnie, ile w jednej minucie).
15. Bilet 3-ciej klasy z Warszawy do Krakowa kosztuje 16 *zł* 80 *gr*, bilet zaś drugiej klasy o połowę drożej. Ile kosztuje bilet 2-giej klasy z Warszawy do Krakowa?
16. Kilogram soli kosztuje 25 *gr*; ile soli można kupić za 12 *zł*?
17. Koło u wozu robi 200 obrotów na 1 *km*; jaki jest jego obwód?
18. Do 90 *l* wina wartości 360 *zł* dolano 10 *l* wody; ile wart jest 1 litr tej mieszaniny?
19. Pobory urzędnika za 5 miesięcy wynoszą 1250 *zł*; ile zarabia przez kwartał?
20. Za 3 *kg* towaru zapłacono 45 *zł* 36 *gr*; ile kosztuje *kg* tego towaru?
21. W klasie jest 72 uczniów po 4 w jednej ławce; ile jest ławek?
22. Ile trzeba banknotów 20 *zł*, aby mieć 7360 *zł*?
23. Księgarz sprzedał po jednakowej cenie 3 tuziny książek za 720 *zł*; po ile sprzedawał tuzin? po ile jedną książkę?
24. Dostawca doręczył 425 *kg* masła w paczkach 5-cio kilogramowych. Ile doręczył paczek?

Ćwiczenia.

1. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 7, a do iloczynu dodamy 4, otrzymamy 60; jaka to jest liczba?
2. Jaką najmniejszą liczbę należy od 127 odjąć, aby różnica była przez 15 podzielna?
3. Kupiec sprzedał jednemu z kupujących 7 *m* sukna, drugiemu 5 *m* sukna tego samego gatunku i otrzymał 204 *zł*. Ile zapłacił każdy z kupujących?

4. Tygodniowy (6 dni) zarobek robotnika wynosi 18 *zł*; ile należy mu się za 15 dni pracy?
5. Trzech chłopców udało się na wycieczkę. Do wspólnej kasy jeden dał 8 *zł*, drugi 9 *zł*, trzeci 10 *zł*. Po wycieczce zostało im jeszcze 6 *zł*; ile każdemu z nich należy się z tej sumy?
6. Ojciec oddał trzecią część swego majątku, wynoszącego 1800 *zł*, po równej części dwom córkom, resztę zaś podzielił między trzech synów tak, że dwaj starsi otrzymali po równej sumie, najmłodszy zaś tyle, ile ci obaj razem. Ile otrzymało każde z dzieci?
7. Jedną rurą wpływa do basenu w przeciągu 4 minut 200 litrów wody, drugą w przeciągu 5 minut 85 litrów. Ile litrów wody wpłynie do basenu obiema rurami w przeciągu 7 minut?
8. Jedną rurą wpływa do basenu w przeciągu 12 minut 300 *l* wody, drugą w przeciągu 15 minut 225 *l* wody. W jakim czasie zbierze się w basenie 600 *l* wody, gdy woda wpływa jednocześnie obiema rurami?
9. Stasio, wiosłując z prądem rzeki, przebył w 3 godzinach drogę długości 15 *km*. Prąd wody unosi belkę w 1 godzinie na odległość 1 *km*. Jaką drogę byłby przebył Stasio, gdyby był wiosłował na stojącej wodzie, a jaką, gdyby był wiosłował przeciw prądowi rzeki?
10. Rozdziel pomiędzy dwóch chłopców 20 jabłek tak, aby jeden z nich otrzymał o 2 jabłka więcej niż drugi; ile każdy z nich otrzymał?
    UWAGA. Daj naprzód jednemu z nich 2 jabłka, a resztę rozdziel równo między nich!
11. Dwie sztuki płótna mają razem 50 *m*; ile metrów ma każda z nich, jeżeli jedna z nich jest o 16 *m* dłuższa, niż druga?
12. Ojciec i syn mają razem 47 lat, ojciec jest o 25 lat starszy od syna; ile lat ma ojciec, a ile syn?
13. Suma dwóch liczb wynosi 78, różnica zaś tych liczb 42; jakie są te liczby?
14. Ojciec rozdzielił 10000 *zł* pomiędzy trzech synów w ten sposób, że średniemu dał o 1000 *zł* więcej, niż najstarszemu, zaś najmłodszemu o 2000 *zł* więcej, niż średniemu; ile każdy otrzymał?
15. Kupiec zmieszał 128 *l* wina (po 4 *zł* za litr) z 384 *l* wina (po 6 *zł* za litr); ile kosztuje litr mieszaniny?

16. Dwóch robotników zarobiło razem 234 *zł*; ile zarobił każdy z nich, jeśli zarabiali dziennie to samo, a pierwszy pracował 15 dni, drugi zaś 24 dni.
17. Kupiec zmieszał 20 *kg* herbaty po 40 *zł* za 1 *kg*, z 12 *kg* herbaty po 30 *zł* za 1 *kg*; ile zarabiał na 1 *kg*, jeśli sprzedawał 1 *kg* mieszaniny po 38 *zł*?
18. Jaś ma 2 razy więcej pieniędzy niż Piotruś, a razem mają 18 *zł*; ile pieniędzy ma każdy z nich?
19. Pewną liczbę pomnożyliśmy raz przez 3, drugi raz przez 5; jaka to jest liczba, jeśli suma tych iloczynów wynosi 56?
20. Ojciec rozdzielił 12000 *zł* między trzech synów, dając najmłodszemu 3 razy więcej niż najstarszemu, średniemu zaś 2 razy więcej, niż najstarszemu; ile każdy z nich otrzymał?
21. 15 robotników wykonało pewną pracę w 4 dniach; w ilu dniach wykona tę samą pracę 12 robotników?
22. Ktoś wydawał dziennie na utrzymanie 5 *zł*, a gdy był w podróży 8 *zł*. Ile dni w ciągu miesiąca (30 dni) był w podróży, jeśli na utrzymanie wydał 189 *zł*?
23. Z dwóch stacyj, odległych o 320 *km*, wyjechały równocześnie ku sobie dwa pociągi, jeden z szybkością 30 *km*, a drugi 50 *km* na godzinę. Po ilu godzinach spotkały się?
24. Z miasta wyjechał samochód o 12-tej godzinie, jadąc z szybkością 40 *km* na godzinę, a w trzy kwadranse później wyjechał drugi samochód, jadąc z szybkością 50 *km* na godzinę; o której godzinie i w jakiej odległości od miasta drugi samochód dopędzi pierwszy?
25. Zegar przyśpiesza 12 minut na dobę; jaką godzinę wskaże we środę o 9 rano, jeśli w niedzielę w południe wskazywał dokładną godzinę?
26. Jak obliczysz, ile kupiec płacił za 1 *kg* towaru, wiedząc, ile *kg* towaru sprowadził i ile za ten towar zapłacił? Podaj przykład liczbowy!
27. Jak obliczysz dzienny zarobek robotnika, wiedząc, ile dni pracował i ile zarobił? Podaj przykład liczbowy!

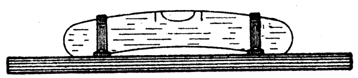
OPIS NIEKTÓRYCH BRYŁ.

Graniastosłup prosty.

Poziom i pion.

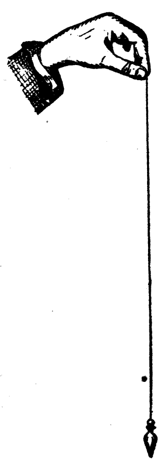
P o z i o m.

Powierzchnia wody w naczyniu ustawia się p o z i o m o. Podobnie poziomo ustawia się powierzchnia wody w stawie, gdy staw jest spokojny. Zwyczajnie podłoga, sufit, powierzchnia stołu bywa poziomą.



Rys. 9.

Do badania, czy powierzchnia jest ustawiona poziomo, służy przyrząd, zwamy libellą lub śródwagą (rys. 9).



Rys. 10.

P i o n.

Nitka, obciążona ciężarkiem, tak zwany pion, ustawia się p i o n o w o (rys. 10). Zazwyczaj pionowo ustawione są słupy telegraficzne, krawędzie pokoju (idące od podłogi do sufitu), niektóre rynny kamienicy i t. p.

Jeśli wzdłuż pionu ustawimy kartkę papieru, to mówimy, że kartka jest p i o n o w a, lub, że jest ustawiona pionowo. Mury kamienicy, ściany pokoju są ustawione pionowo.

Zadania.

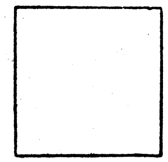
1. Ustaw pionowo przy pomocy pionu: *a*) kartkę papieru, *b*) książkę.

2. Zbadaj, czy ściany pokoju są pionowe.
3. Wbij, przy pomocy pionu, patyk pionowo do ziemi.
4. Przekonaj się, że kamyk wolno puszczony spada wzdłuż pionu.

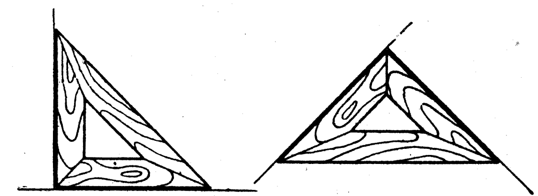
Kwadrat i prostokąt.

Kwadrat.

Na rys. 11 mamy kwadrat. Kwadrat ograniczony jest czterema równemi bokami. Dwa sąsiednie boki są do siebie prostopadłe.



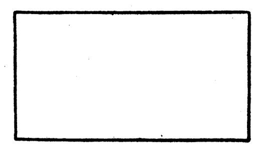
Rys. 11.



Rys. 12.

Przyrząd, służący do kreślenia odcinków prostopadłych, nazywa się ekierką (rys. 12). Rysunek ten wskazuje, jak przy pomocy ekierki kreśli się linje prostopadłe.

Prostokąt.



Rys. 13.

Na rys. 13 mamy prostokąt. Przeciwległe boki prostokąta są sobie równe. Sąsiednie boki prostokąta są do siebie prostopadłe. Drzwi, okna, kartka papieru i t. p. mają kształt prostokąta.

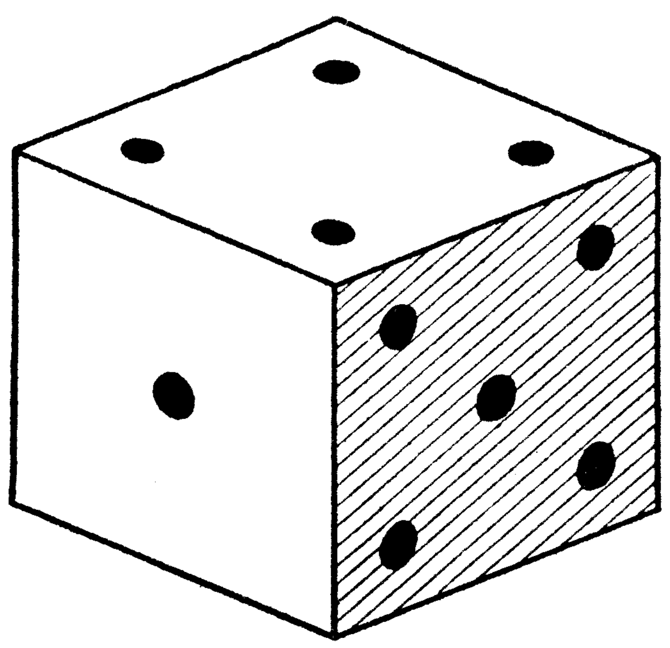
Zadania.

1. Narysuj, przy pomocy ekierki, kilka różnych: *a*) kwadratów, *b*) prostokątów!
2. Wytnij z papieru *a*) 4, *b*) 9 równych kwadratów i złóż z nich nowy kwadrat!
3. Narysuj kwadraty o bokach: *a*) 3 *cm*, *b*) 5 *cm*, *c*) 7 *cm*!
4. Narysuj kilka par odcinków prostopadłych!
5. Wytnij z papieru 6 równych prostokątów i złóż z nich kilkoma sposobami nowy prostokąt!

6. Narysuj prostokąty o bokach: *a*) 2 *cm* i 3 *cm*, *b*) 4 *cm* i 6 *cm*, *c*) 5 *cm* i 7 *cm*!
7. Wytnij z papieru 6 prostokątów o bokach 2 *cm* i 3 *cm* i zbuduj z nich kwadrat!
8. Ile co najmniej musisz mieć prostokątów o bokach 3 *cm*, 4 *cm*, żebyś z nich mógł utworzyć kwadrat?

Sześcian.

Na rys. 14 mamy kostkę do gry. Bryły, mające kształt kostki do gry, nazywamy **sześcianami**. Sześcian jest ograniczony sześcioma ścianami.



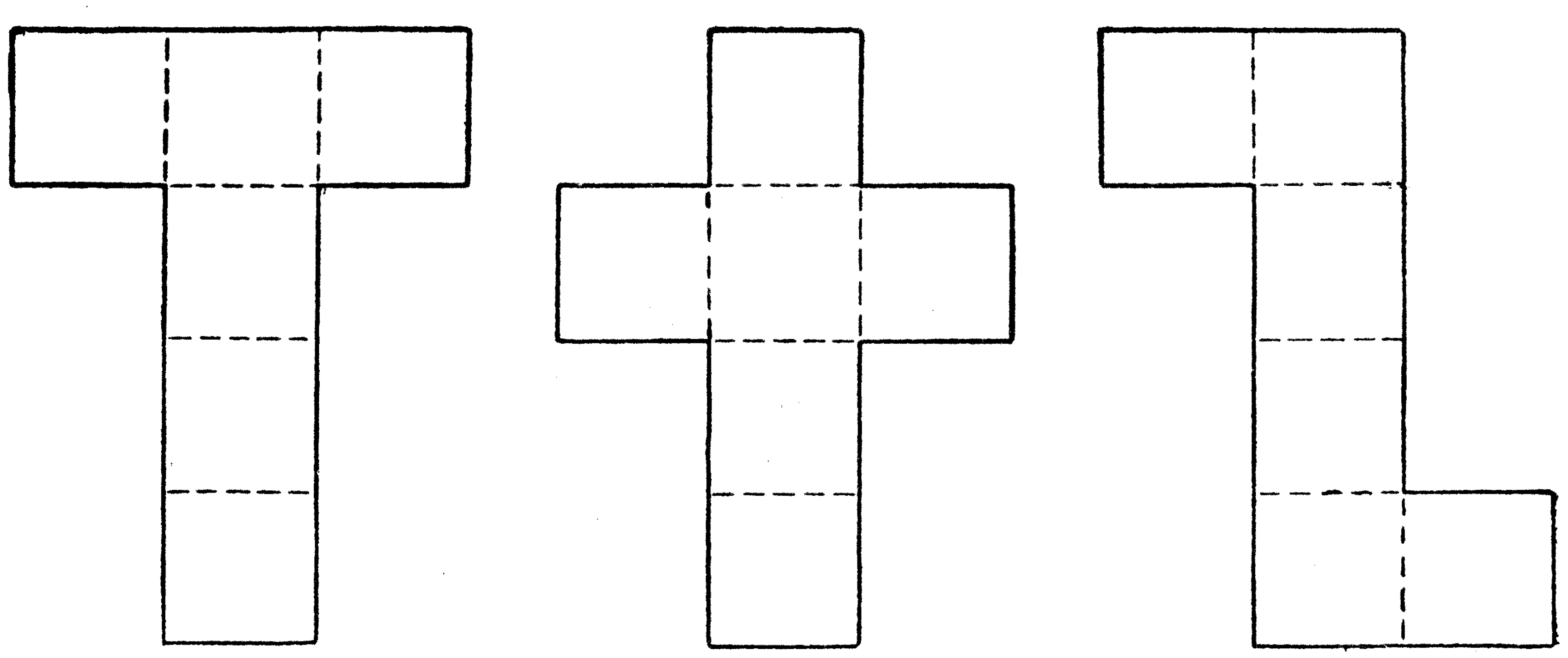
Rys. 14.

Dwie przyległe ściany sześcianu stykają się wzdłuż **krawędzi** sześcianu.

W **wierzchołkach** (rogach) sześcianu schodzą się trzy krawędzie. Postawmy sześcian na kartce papieru i oprowadźmy ołówek dokoła jego podstawy. Otrzymamy **kwadrat**. Wytnijmy teraz ten kwadrat i przyłóżmy go do innych ścian sześcianu. Przekonamy się, że kwadrat nasz będzie przystawał do każdej ze ścian sześcianu.

Przykładając wycięty kwadrat sześć razy do kartki papieru, wyrysujmy sześć kwadratów, tworzących figurę w kształcie litery T (rys. 15).

Figura ta nazywa się **siatką** sześcianu.

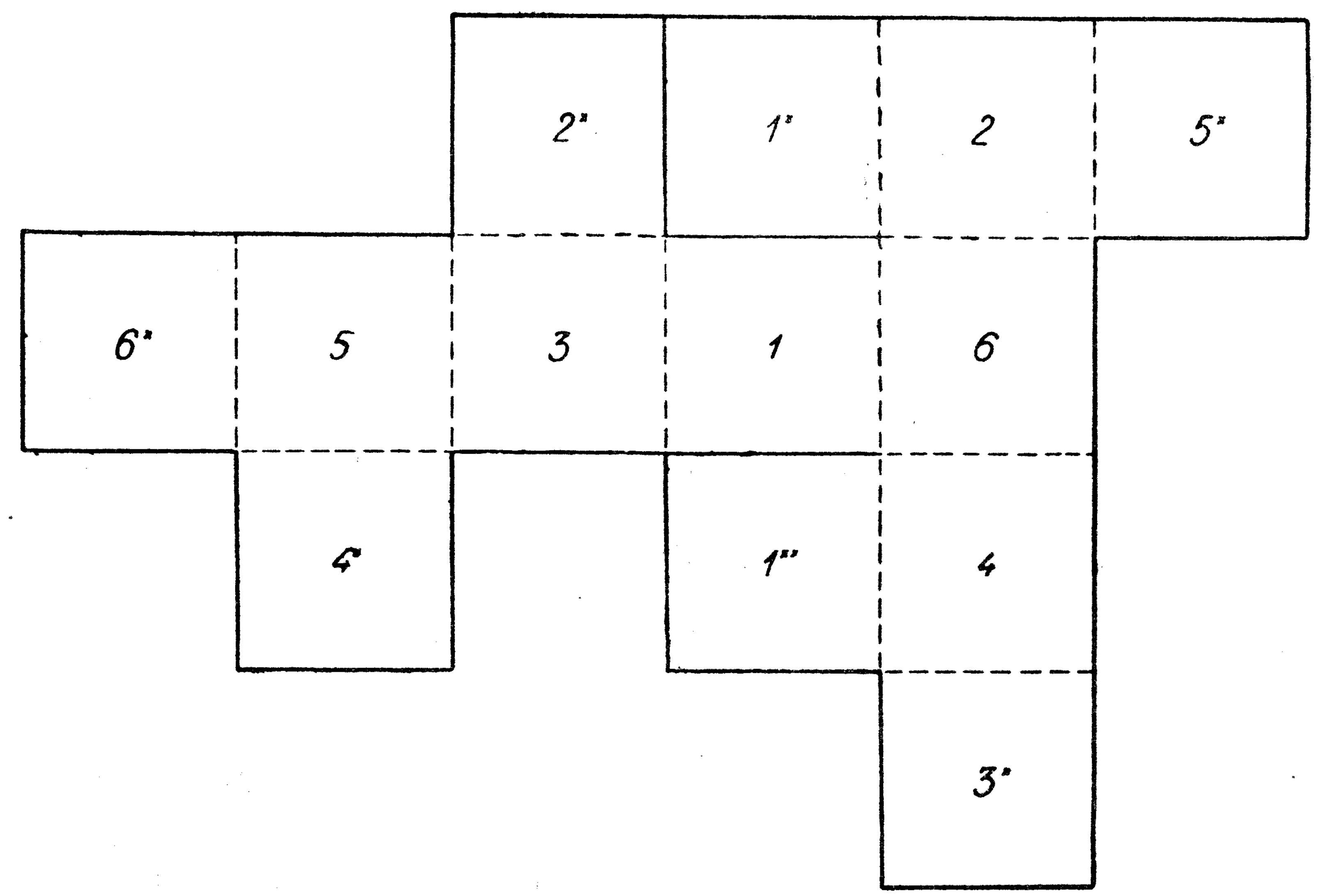


Rys. 15.

Wykrójmy tę figurę z papieru i przegnijmy ją według linij kropkowanych. Nałóżmy ją następnie na sześcian tak, aby jej kwadraty przylegały do odpowiednich ścian sześcianu. Zdejmijmy ją teraz z sześcianu i ustawmy znowu w ten sam sposób (obok sześcianu), w jaki była ułożona na sześcianie. Używając papieru gumowego do sklejenia przylegających ścian, utworzymy w ten sposób nowy sześcian.

Inną siatkę sześcianu możemy otrzymać, układając kwadraty np. tak, aby utworzyły figurę kształtu krzyża, albo też figurę kształtu literu Z (rys. 15).

Możemy otrzymać sześcian papierowy **bez klejenia**. W tym celu rysujemy 13 kwadratów, tworzących figurę na rys. 16.



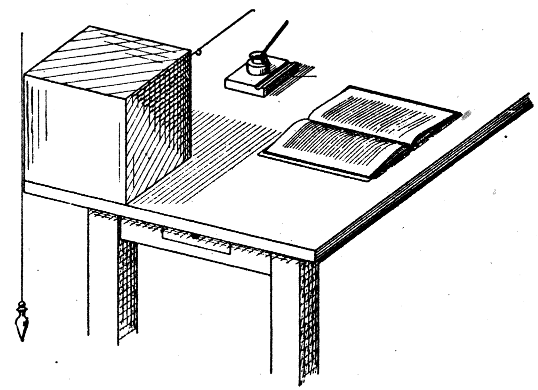
Rys. 16.

Figurę tę wycinamy wzdłuż linij zakreślonych grubo, zginamy zaś według linij kropkowanych. Następnie spód kwadratu 1* przykładamy do wierzchu kwadratu 1 tak, aby się nakryły, a dalej spód kwadratu 1** przykładamy do wierzchu kwadratu 1*. W dalszym ciągu spód kwadratu 2* przykładamy do wierzchu kwadratu 2, podobnież spód kwadratu 3* do wierzchu kwadratu 3, spód kwadratu 4* do wierzchu kwadratu 4, spód kwadratu 5* do wierzchu kwadratu 5 i wreszcie spód kwadratu 6* do wierzchu kwadratu 6. (Wierzchem kwadratu nazywamy tę

7*

stronę, na której napisana jest cyfra, spodem zaś stronę odwrotną). Sześcian nasz będzie się teraz trzymał bez klejenia.

Ustawmy jedną ścianę sześcianu poziomo (np. postawmy sześcian tą ścianą na stole (rys. 17). Przeciwległa ściana (górna) ustawi się również poziomo. Przy pomocy pionu przekonamy się, że krawędzie, łączące górną ścianę z dolną, biegną pionowo. Ściany boczne stoją więc pionowo.



Rys. 17.

Zadania.

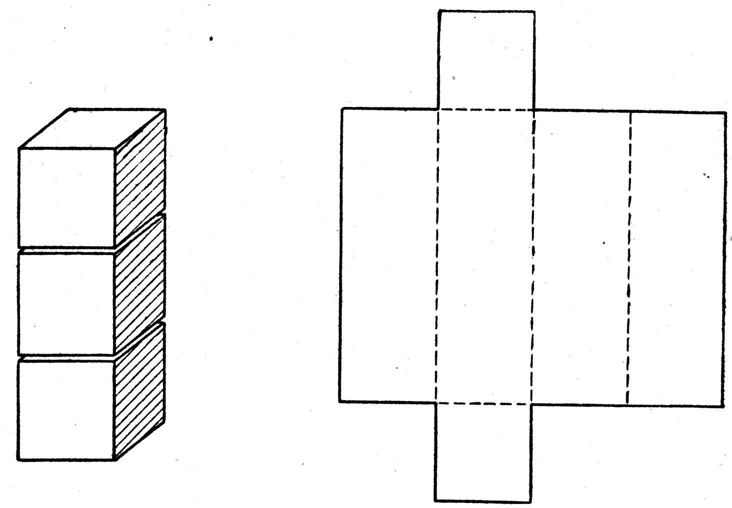
1. Ile ścian, krawędzi, wierzchołków ma sześcian?
2. Ile ścian zbiega się w jednym wierzchołku?
3. Ile krawędzi zbiega się w jednym wierzchołku?
4. Na ilu ścianach leży każda krawędź?
5. Z iloma ścianami każda ściana sześcianu sąsiaduje, a z iloma nie sąsiaduje?
6. Jak przekonasz się, że ściany sześcianu są równe?
7. Narysuj siatkę sześcianu i zaznacz na niej dwie przeciwległe ściany!
8. Zbuduj z 8 równych sześcianów nowy sześcian!

Graniastosłup prosty, kwadratowy.

Ustawmy kilka równych sześcianów na sobie, jak na rys. 18. Bryła taka nazywa się **graniastosłupem prostym, kwadratowym.**

Siatka takiej bryły przedstawiona jest obok. Jeśli siatkę wytniemy z papieru, następnie przegniemy wzdłuż kropkowanych krawędzi, a wreszcie skleimy, otrzymamy graniastosłup prosty, kwadratowy.

Kształt graniastosłupa prostego kwadratowego mają pokoje o podłodze kwadratowej, belki do budowy, pudełka o dnie kwadratowym i t. p.



Rys. 18.

Graniastosłup prosty, kwadratowy ograniczony jest sześcioma ścianami, z których dwie są równemi kwadratami, cztery zaś pozostałe równemi prostokątami.

Jeśli jedną ścianę ustawimy poziomo, to przeciwległa ściana ustawi się również poziomo; a pozostałe ściany ustawią się pionowo.

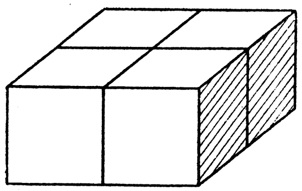
Graniastosłup prosty kwadratowy, otrzymamy, ustawiając kilka równych sześcianów obok siebie tak, aby podstawami wypełniły większy kwadrat (rys. 19, patrz str. 102).

Graniastosłup prosty kwadratowy otrzymamy również, ustawiając kilka takich warstw na sobie (rys. 20, patrz str. 102).

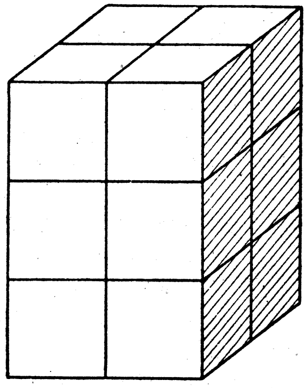
Zadania.

1. Ile ścian, krawędzi, wierzchołków ma graniastosłup prosty kwadratowy?
2. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego kwadratowego i zaznacz na niej dwie przeciwległe ściany!

3. Ile graniastosłupów prostych kwadratowych można zbudować *a*) z 2, *b*) z 8, *c*) z 9 równych sześcianów?
4. Czy sala szkolna jest graniastosłupem prostym kwadratowym?



Rys. 19.

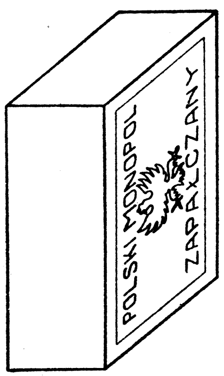


Rys. 20.

5. Zbuduj z trzech równych sześcianów graniastosłup prosty kwadratowy; ile co najmniej takich graniastosłupów potrzebujesz, abyś z nich mógł zbudować sześcian?
6. Wymień kilka przedmiotów w kształcie graniastosłupa prostego kwadratowego!

Prostopadłościan.

Na rys. 21 mamy pudełko zapałek. Bryły, mające kształt pudełka zapałek, nazywamy p r o s t o p a d ł o ś c i a n a m i.



Rys. 21.

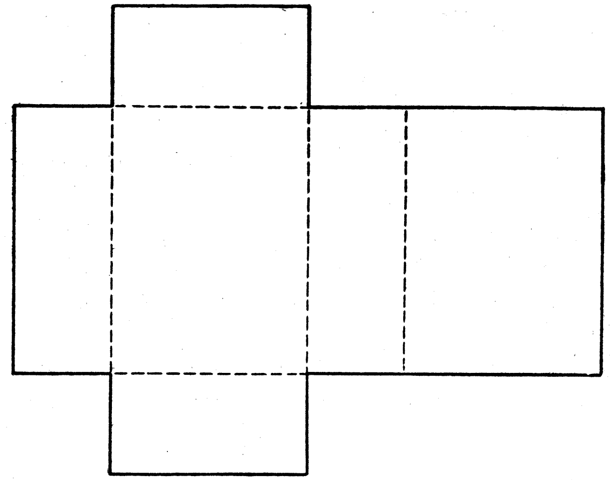
Pokoje, skrzynie, pudełka mają zazwyczaj kształt prostopadłościanów.

Postawmy pudełko zapałek na kartce papieru i oprowadźmy ołówek dokoła jego podstawy. Otrzymamy p r o s t o k ą t.

Wytnijmy teraz prostokąt i przyłóżmy go do przeciwległej ściany pudełka zapałek. Przekonamy się, że prostokąt nasz będzie do tej ściany przystawał.

Widzimy zatem, że prostopadłościan ograniczony jest sześcioma prostokątami,

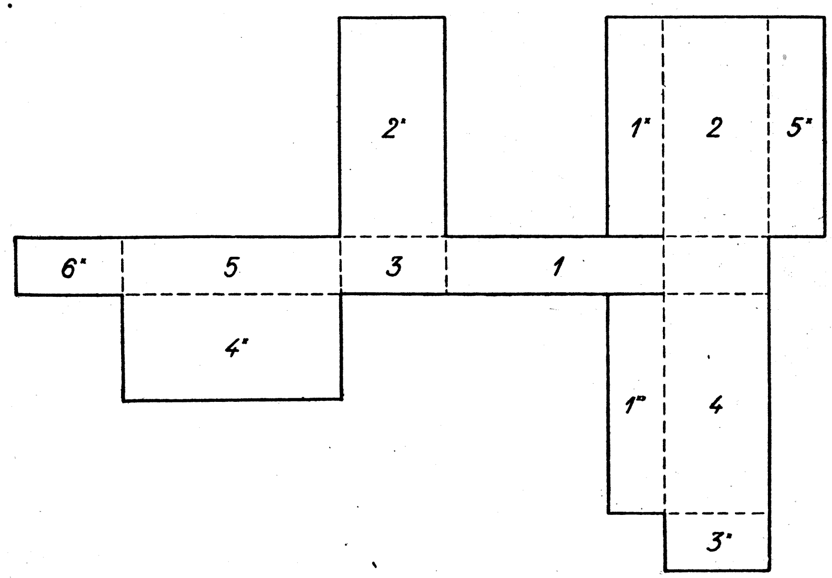
z których co dwa przeciwległe są sobie równe. Jeśli jedną ze ścian prostopadłościanu ustawimy poziomo (np. postawimy prostopadłościan na stole), to podobnie, jak przy sześcianie, przeciwległa ściana ustawi się poziomo, a krawędzie, łączące te ściany, ustawią się pionowo.



Ryc. 22.

Na rys. 22 mamy siatkę prostopadłościanu.

Wykrójmy ją z papieru i przegnijmy wzdłuż linij kropkowanych. Sklejając teraz odpowiednie krawędzie papierem gumowym, otrzymamy prostopadłościan. Chcąc otrzymać bryłę tę bez klejenia, posługujemy się figurą na rys. 23, postępując jak przy sześcianie.



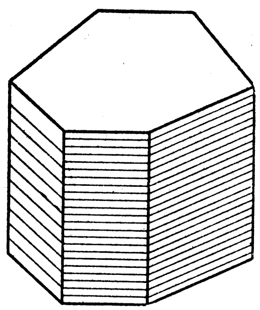
Rys. 23.

Zadania.

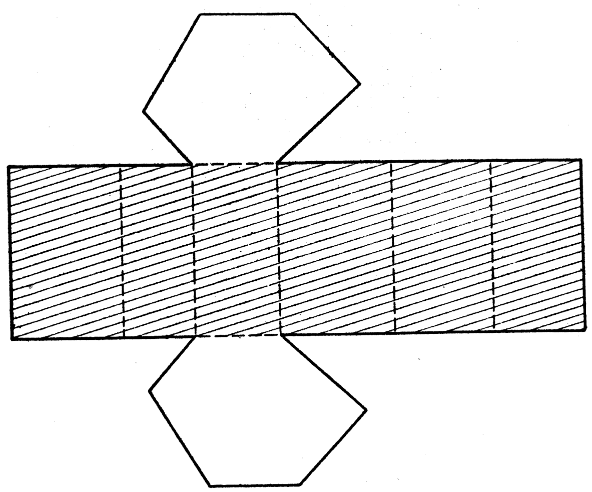
1. Ile ścian, krawędzi, wierzchołków ma prostopadłościan?
2. Jak przekonasz się, że przeciwległe ściany prostopadłościanu są równe?
3. Narysuj siatkę prostopadłościanu i zaznacz na niej dwie przeciwległe ściany!
4. Czy można zbudować prostopadłościan tak, aby w nim tylko jedna ściana była kwadratem?
5. Dwa prostopadłościany mają dwie ściany odpowiednio równe; zlep je wzdłuż tych ścian. Jaką bryłę otrzymasz?
6. Obierz jedną krawędź na prostopadłościanie i wskaż inne jej równe! Ile ich być musi?
7. Zbuduj prostopadłościan o krawędziach 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm*!
8. Podaj przykłady przedmiotów w kształcie prostopadłościanu!

Graniastosłupy proste.

Na rys. 24 mamy przedstawioną bryłę, zwaną *graniastosłupem prostym*, a na rys. 25 siatkę tej bryły. Siatka ta pozwala nam zbudować model graniastosłupa prostego.



Rys. 24.



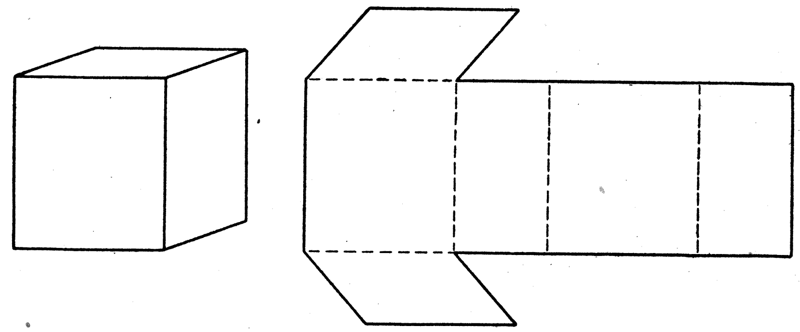
Rys. 25.

Dwie ściany graniastosłupa (niekreskowane) są wielobokami równemi; nazywamy je *podstawami*. Pozostałe zaś

ściany (kreskowane) są prostokątami i nazywamy je *ścianami bocznemi*.

Powierzchnię, utworzoną przez ściany boczne, nazywamy *pobocznicą graniastosłupa*.

Na rys. 25 zakreskowany prostokąt jest siatką pobocznicy.



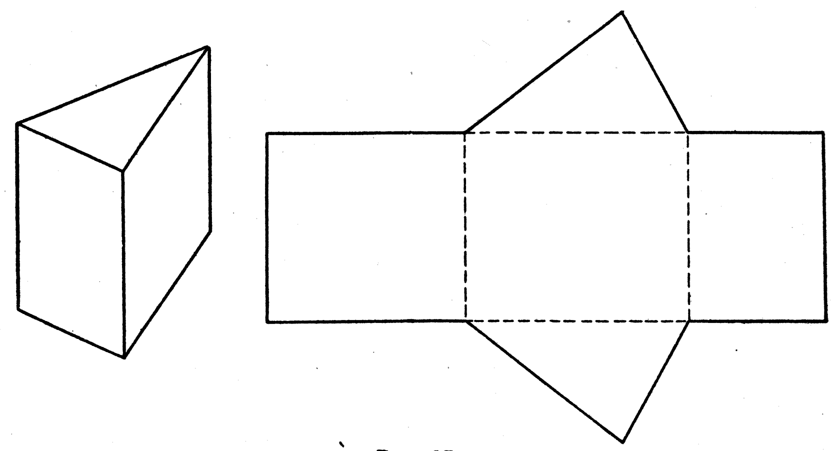
Rys. 26.

Zginając ten prostokąt wzdłuż zaznaczonych odcinków, możemy otrzymać pobocznicę graniastosłupa.

Jeśli ustawimy jedną z podstaw poziomo, to druga podstawa ustawi się również poziomo, a krawędzie, łączące obie podstawy, ustawią się pionowo.

Kształt graniastosłupów prostych mają ołówki graniaste.

Graniastosłupy proste nazywamy trójkątnemi, czworokątnemi itd. zależnie od tego, ile boków ma podstawa. Na rys. 26 i 27 mamy graniastosłupy trójkątne i czworokątne wraz z siatkami.



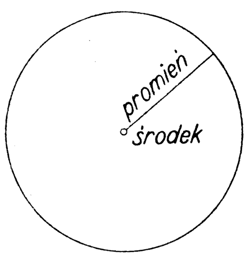
Rys. 27.

Zadania.

1. Ile ścian, krawędzi, wierzchołków ma graniastosłup prosty *a*) trójkątny, *b*) pięciokątny, *c*) sześciokątny?
2. Przekonaj się na kilku graniastosłupach prostych, że, dodając do liczby ścian liczbę wierzchołków i od tej sumy odejmując 2, otrzymasz liczbę krawędzi!
3. Opierając się na poprzedniem zadaniu i wiedząc, że w pewnym graniastosłupie prostym jest:
   a) 14 wierzchołków, 9 ścian; oblicz, ile jest krawędzi!
   b) 30 krawędzi, 12 ścian; oblicz, ile jest wierzchołków!
   c) 45 krawędzi, 30 wierzchołków; oblicz, ile jest ścian!
4. Która ściana graniastosłupa trójkątnego sąsiaduje z trzema ścianami, a która z czterema?
5. Czy można zbudować graniastosłup prosty, trójkątny, w którym wszystkie krawędzie byłyby równe?
6. Obierz na dwóch sąsiednich ścianach pobocznicy graniastosłupa prostego dwa dowolne punkty i połącz je najkrótszą linją, położoną na tym graniastosłupie! Odp. Linję tę otrzymasz, łącząc te punkty na siatce odcinkiem.
7. Wymień kilka przedmiotów w kształcie graniastosłupa prostego!

Koło.

Przytwierdźmy linijkę papierową w jednem miejscu szpilką, a w innem przekłujmy ołówkiem. Poprowadźmy następnie ołówek po kartce papieru tak, by linijka była stale napięta. Ołówek zakreśli okrąg koła (rys. 28).



Rys. 28.

Wycinając kartkę papieru wzdłuż okręgu koła, otrzymujemy koło.

Punkt, w którym była wbita szpilka, jest środkiem koła.

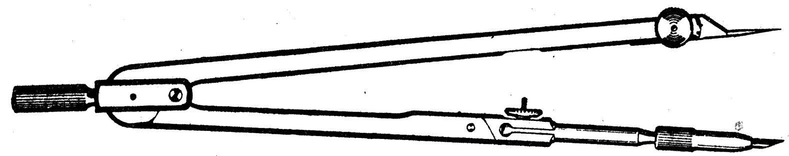
Narysujmy przy pomocy linijki odcinek od środka koła do dowolnego punktu na okręgu. Taki odcinek nazywamy promieniem koła.

Wszystkie promienie koła są sobie równe.

Do kreślenia kół na papierze lub tablicy, służy przyrząd, zwany cyrklem (rys. 29).

Zadania.

1. Narysuj koło o promieniu *a*) 5 *cm*, *b*) 4 *cm*, *c*) 7 *cm* przy pomocy linijki, następnie przy pomocy cyrkla!
2. Narysuj na ziemi przy pomocy sznura koło o promieniu *a*) 7 *dm*, *b*) 1 *m*, *c*) 2 *m*!

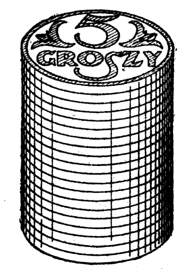


Rys. 29.

3. Narysuj *a*) kwadrat, *b*) prostokąt, a następnie koło, przechodzące przez wierzchołki tego kwadratu, względnie prostokąta!

Walec obrotowy.

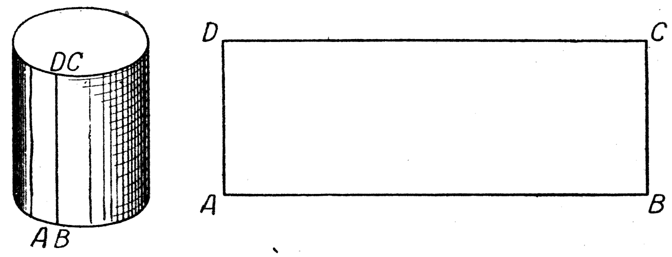
Weźmy kilka lub kilkanaście sztuk jednakowych monet, (np. pięciogroszówek) i ustawmy je równo jedna na drugiej tak, żeby żadna nie wystawała. Otrzymana w ten sposób bryła nazywa się walcem obrotowym (rys. 30).



Rys. 30.

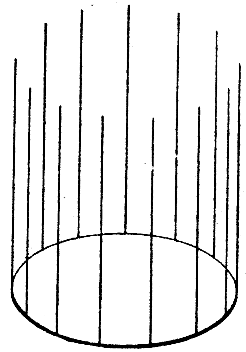
Jak widzimy, walec ograniczony jest dwoma kołami, zwanemi podstawami walca, oraz powierzchnią krzywą, zwaną pobocznicą walca. Powierzchnię taką możemy utworzyć, biorąc prostokąt z papieru i zlepiając dwa przeciwległe boki, jak wskazuje (rys. 31).

Kształt pobocznicy walca mają: rury wodociągowe, rynny. Kształt walca mają, ołówek okrągły, słup telegraficzny, niektóre puszki, świece i t. p.



Rys. 31.

Można otrzymać model pobocznicy, ustawiając poziomo koło i wbijając pionowo na jego okręgu (dość gęsto) równe druty (rys. 32).



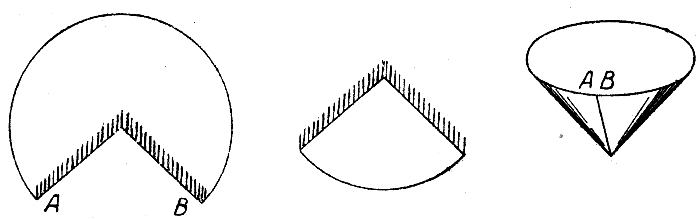
Rys. 32.

Zadania.

1. Zbuduj walec, którego podstawa ma promień *a*) 3 *cm*, *b*) 5 *cm*!
2. Wymień kilka przedmiotów kształtu walca!

Stożek obrotowy.

Wytnijmy koło z papieru, a następnie rozetnijmy je wzdłuż dwóch promieni. Koło rozpadnie się w ten sposób na dwie części (rys. 33). Biorąc którąkolwiek z tych części i zlepiając ze sobą brzegi, oznaczone na figurze kreskami, otrzymamy powierzchnię kształtu lejka.

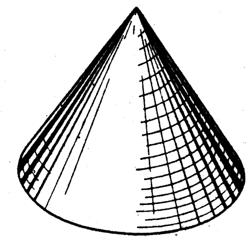


Rys. 33.

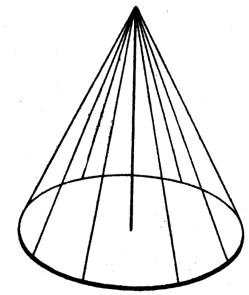
Postawmy otrzymaną powierzchnię na kartce papieru i obrysujmy jej brzeg; otrzymamy koło. Jeśli koło to wytniemy i dolepimy do powierzchni krzywej, otrzymamy bryłę zwaną stożkiem obrotowym (rys. 34).

Stożek obrotowy jest więc ograniczony kołem (zwanem podstawą) i powierzchnią krzywą (zwaną pobocznicą).

Model stożka obrotowego możemy zbudować w następujący sposób: wycinamy z kartonu koło i ustawiając je poziomo,



Rys. 34.



Rys. 35.

wbijamy w jego środku drut pionowo. Następnie łączymy dość gęsto nitkami wolny koniec drutu z punktami okręgu koła (rys. 35).

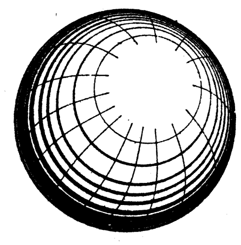
Zadania.

1. Zbuduj przy pomocy nitek model pobocznicy stożka, którego podstawa ma 5 *cm*!
2. Wymień kilka przedmiotów kształtu stożka!

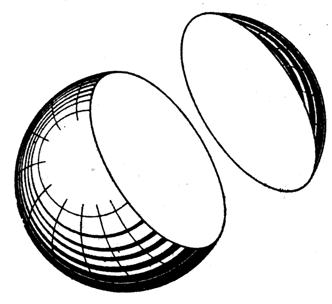
Kula.

Kształt kuli (rys. 36) mają piłki do gry, bańki mydlane, śrut i t. d.

Powierzchnie walca, stożka i powierzchnia kuli, są to powierzchnie krzywe.



Rys. 36.



Rys. 37.

Przetnijmy kulę na dwie części, jak na rys. 37, a przekonamy się, że przekroje są kołami.

Zadania.

1. Wymień kilka przedmiotów kształtu kuli!
2. Wskaż kilka powierzchni krzywych!
3. Czem ograniczona jest beczka?

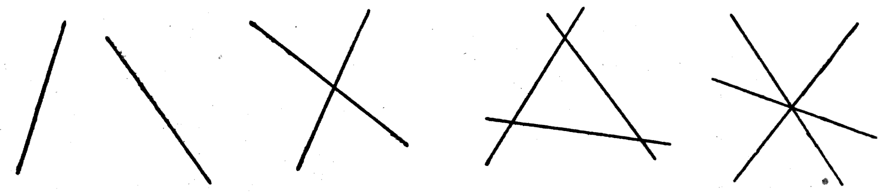
MIERZENIE DŁUGOŚCI PÓL I OBJĘTOŚCI.

Odcinek.

Określenia.

Weźmy linijkę, utworzoną np. przez złożenie kartki papieru i narysujmy przy jej pomocy kilka kresek: kreski te są o d c i n k a m i (rys. 38).

Nitka napięta, lub drut wyprostowany, przedstawiają nam

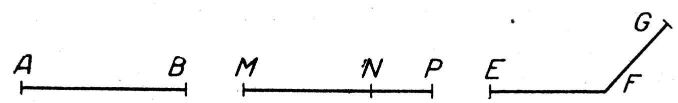


Rys. 38.

odcinki. Odcinkami są: krawędź sześcianu, bok prostokąta, bok jakiegokolwiek wieloboku.

P u n k t y. Punktami są wierzchołki trójkąta, prostokąta, wieloboku, sześcianu, prostopadłościanu, graniastosłupa, końce odcinka.

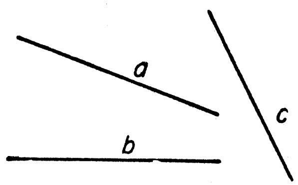
Punkty oznaczamy zwykle dużemi literami alfabetu. Odcinek oznaczamy dwoma literami, oznaczającemi jego końce, np. odcinki *AB*, *MN*, *EF*, *FG* (rys. 39).



Rys. 39.

Czasami oznaczamy odcinki jedną małą literą, np. a, b, c, jak na rys. 40.

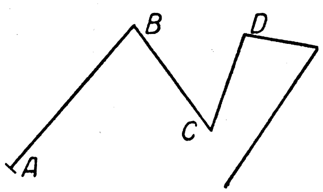
L i n j a ł a m a n a. Nakreślmy dowolny odcinek AB (rys. 41) z końca jego poprowadźmy dowolny odcinek BC, z końca C



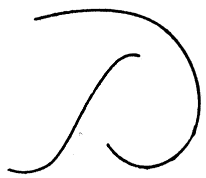
Rys. 40.

poprowadźmy znowu nowy odcinek CD i t. d. Postępując tak kilka razy, otrzymamy linję, zwaną ł a m a n ą.

Linję, która nie jest ani odcinkiem, ani linją łamaną, nazywamy l i n j ą k r z y w ą (rys. 42).



Rys. 41.



Rys. 42.

P r z e d ł u ż a n i e o d c i n k ó w. Mamy odcinek AB. Chcąc go przedłużyć poza punkt B, przykładamy do odcinka AB linijkę i przy jej pomocy kreślimy np. odcinek BC. Podobnież moglibyśmy przedłużyć odcinek AB poza punkt A w drugą stronę, np. do punktu D (rys. 43).

Rys. 43.

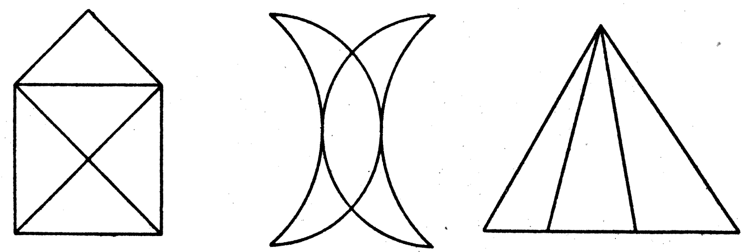
Zadania.

1. Narysuj kilka odcinków i oznacz je!
2. Narysuj linję łamaną, złożoną a) z dwóch, b) z trzech, c) z czterech odcinków; oznacz każdą z nich!
3. Obierz dwa punkty i oznacz je!

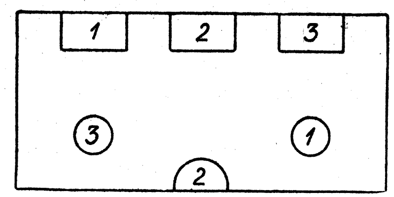
a) połącz te punkty odcinkiem; ile takich odcinków możesz narysować?

b) połącz te punkty linją krzywą; narysuj kilka takich linij!

4. Przedłuż dowolnie obrany odcinek *a*) w jedną stronę, *b*) w obie strony!
5. Narysuj cztery odcinki, tak, by co dwa przecinały się w innym punkcie!
6. Niżej podane figury narysuj, nie odrywając ołówka od kartki papieru, przyczem żadnej linji nie rysuj dwa razy!



7. Trzy domy mają wspólne podwórze, na którem znajdują się również trzy studnie (patrz podany rysunek). Połączyć ścieżką każdy dom ze studnią do niego należącą, tak, aby ścieżki biegły przez podwórze i nie przecinały się. Dom i studnia do niego należąca mają ten sam numer.



Porównywanie odcinków.

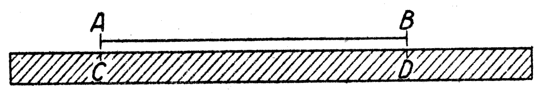
Mamy dwa druty proste. Połóżmy je na sobie tak, by jedne ich końce się schodziły. Jeżeli wówczas i drugie końce się zejdą, to mówimy, że oba druty są równe. Jeżeli zaś drugie końce drutów nie zejdą się, to ten drut, którego koniec wystaje, jest większy od drugiego (drugi zaś drut jest mniejszy od pierwszego).

Przypuśćmy, że chcemy porównać dwa odcinki AB i CD, (rys. 44) narysowane na kartce papieru. Moglibyśmy w tym celu wyciąć skrawek papieru, na brzegu którego znajduje się np. odcinek CD i postąpić tak, jak poprzednio z drutami, to jest przyłożyć odcinek CD do odcinka AB.

Rys. 44.

Jeżeli odcinek AB równa się odcinkowi CD (rys. 45) to piszemy:

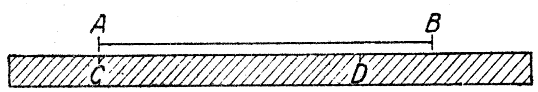
$$AB = CD$$



Rys. 45.

Jeżeli odcinek AB jest większy od odcinka CD (rys. 46) to piszemy:

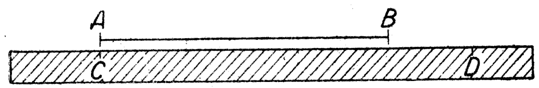
$$AB > CD$$



Rys. 46.

Jeżeli odcinek AB jest mniejszy od odcinka CD (rys. 47) to piszemy:

$$AB < CD$$



Rys. 47.

Odcinki porównujemy zazwyczaj zapomocą: *a*) n i t k i, *b*) l i n i j k i, *c*) c y r k l a.

a) Przykładamy nitkę napiętą do odcinka CD, zaznaczamy jego końce (trzymając je np. w palcach) i przenosimy następnie napiętą nitkę na odcinek AB.

b) Przykładamy linijkę do odcinka CD i zaznaczamy na niej jego końce, a następnie przykładamy do odcinka AB odcinek zaznaczony na linijce.

c) Stawiamy jedną nóżkę cyrkla np. w punkcie A, drugą zaś w punkcie B. (Mówimy wówczas, żeśmy odcinek AB w z i ę l i w o t w ó r c y r k l a). Nie zmieniając następnie rozchylenia cyrkla, przykładamy go do odcinka CD, w ten sposób, aby jedna z jego nóżek znalazła się w punkcie C, a druga na odcinku CD, względnie na jego przedłużeniu. Jeżeli wówczas druga nóżka padnie na punkt D, to $AB = CD$, jeżeli padnie między punktami C i D, to $AB < CD$, wreszcie, jeżeli padnie na przedłużenie odcinka CD poza punkt D, to $AB > CD$.

Zadania.

1. Narysuj dwa równe odcinki, oznacz je i zanotuj, że są równe!
2. Narysuj dwa nierówne odcinki, porównaj je i zanotuj wynik porównania!
3. Narysuj trzy odcinki, porównaj i zanotuj wynik!
4. Narysuj trzy odcinki a, b, c tak, aby było $a > b$ i $b > c$; co możesz powiedzieć o odcinkach a i c?
5. Narysuj *a*) cztery, *b*) pięć odcinków, porównaj między sobą i zanotuj wynik!
6. Narysuj odcinki a, b, c i d, tak, aby było: $c > d$, $a > c$, $c > b$, $b > d$.
7. Narysuj prostokąt, oznacz jego wierzchołki i zanotuj, które pary boków są sobie równe!

Działania na odcinkach.

D o d a w a n i e o d c i n k ó w.

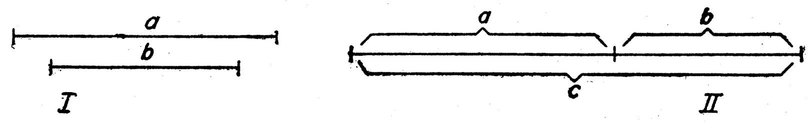
Jeżeli mamy odcinek AB i na jego przedłużeniu od punktu B odetniemy odcinek BC (rys. 48)

Rys. 48.

to odcinek AC nazywamy sumą odcinków AB i BC, co piszemy:

$$AC = AB + BC.$$

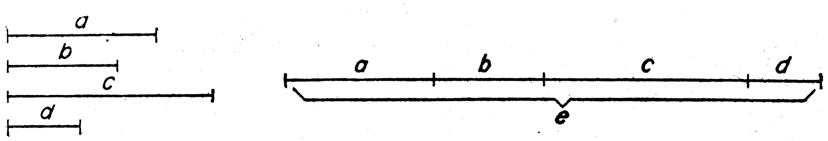
Aby zatem otrzymać sumę dwóch odcinków *a* i *b* (rys. 49 I) odkładamy na przedłużeniu jednego z nich, np. na przedłużeniu



Rys. 49.

odcinka *a* (rys. 49, II), odcinek równy odcinkowi *b*. Otrzymany w ten sposób odcinek *c* jest sumą odcinków *a* i *b*.

Aby otrzymać sumę kilku odcinków, np. *a*, *b*, *c*, *d* (rys. 50) tworzymy sumę odcinków *a* i *b*, do otrzymanego w ten sposób



Rys. 50.

odcinka dodajemy odcinek *c*, a następnie do nowo otrzymanego odcinka dodajemy odcinek *d*. Odcinek *e* nazywamy sumą odcinków podanych na początku, co piszemy:

$$e = a + b + c + d.$$

O d e j m o w a n i e o d c i n k ó w.

Jeżeli mamy odcinek *AC* (rys. 51*a*) i na nim od punktu *A* odetniemy odcinek *AB*, mniejszy od odcinka *AC*, to odcinek *BC*

Rys. 51*a*.

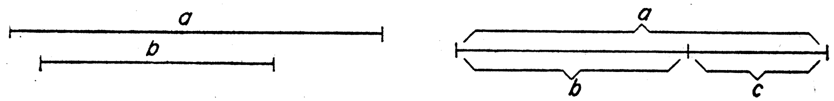
nazywamy różnicą odcinków *AC* i *BC*, co piszemy:

$$BC = AC - AB.$$

Odcinek *AC* nazywa się o d j e m n ą, odcinek *AB* o d j e m n i k i e m, odcinek zaś *BC* r ó ż n i c ą.

Aby otrzymać różnicę dwóch odcinków *a* i *b*, przyczem *a* jest większe od *b*, odcinamy na odcinku *a* od jednego z jego

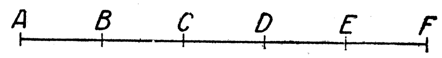
końców odcinek *b* (rys. 51*b*). Pozostały odcinek *c* jest różnicą odcinków *a* i *b*.



Rys. 51 *b*.

W i e l o k r o t n o ś ć o d c i n k ó w.

Z b u d o w a ć o d c i n e k 2, 3, 4, 5 i t. d. r a z y w i ę k s z y o d d a n e g o, t o z n a c z y z n a l e ź ć s u m ę 2, 3, 4, 5 i t. d. o d c i n k ó w, r ó w n y c h d a n e m u.



Rys. 52.

Na rys. 52 odcinek *AF* jest 5 razy większy od odcinka *AB*. O odcinku *AB* mówimy, że jest 5 razy mniejszy od odcinka *AF*, lub, że mieści się w odcinku *AF* 5 razy bez reszty. Odcinek *AF* nazywamy również wielokrotnością odcinka *AB*. Piszemy to:

$$AF = 5\ AB.$$

Zadania.

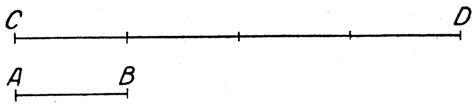
1. Narysuj dwa odcinki i dodaj do pierwszego drugi, a następnie do drugiego pierwszy. Porównaj wyniki i to, co zauważysz, zanotuj!
2. Narysuj *a*) 3, *b*) 4, *c*) 5 odcinków i w każdem zadaniu dodawaj je na kilka sposobów, a następnie zanotuj to, co zauważysz, porównując wyniki!
3. Narysuj 3 odcinki i dodaj je do siebie, a następnie dodaj do pierwszego sumę pozostałych. Porównaj wyniki i zanotuj, co zauważysz!
4. Narysuj linję łamaną i obok odcinek, który jest sumą wszystkich odcinków tej linji łamanej!
5. Narysuj odcinek i obok odcinek mniejszy, a następnie odejmij od większego mniejszy; otrzymany wynik zanotuj!
6. Narysuj dwa odcinki, z których jeden niech będzie odjemnikiem, a drugi resztą. Znajdź odjemną!
7. Narysuj dwa odcinki, z których większy niech będzie odjemną, a mniejszy resztą. Znajdź odjemnik!

8. Narysuj odcinek i obok odcinek *a*) 2, *b*) 3, *c*) 4, *d*) 5 razy dłuższy!
9. Narysuj kwadrat i obok odcinek, który jest sumą wszystkich jego boków! Ile razy w tym odcinku mieści się bok kwadratu?
10. Narysuj trzy odcinki a, b, c tak, aby było $a > b$, $b > c$; następnie narysuj odcinki:

$$(a + b) - c;\ 2a + 3b;\ (a + 4b) - 5c!$$

Mierzenie długości.

Obierzmy sobie dowolny odcinek AB i nazwijmy go odcinkiem j e d n o s t k o w y m. Przy pomocy tego odcinka będziemy mierzyli inne odcinki. Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć np. odcinek CD (rys. 53). Jeśli odcinek jednostkowy mieści się bez reszty, np. 4 razy w odcinku CD, to liczbę 4 nazywamy m i a r ą długości odcinka CD przy odcinku AB jako jednostce długości.

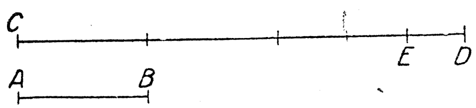


Rys. 53.

Mówimy też, że odcinek CD ma długość 4 obranych jednostek długości.

Naodwrót, gdyby był dany odcinek jednostkowy AB, a chcielibyśmy narysować odcinek, którego miara długości jest 4, to wystarczałoby w tym celu 4 razy powiększyć odcinek AB.

Przypuśćmy teraz, że odcinek jednostkowy AB dał się odłożyć np. 3 razy na odcinku CD i została nam reszta ED mniejsza niż AB (rys. 54). Mówimy wówczas, że odcinek AB mieści się w odcinku CD 3 razy z resztą ED. Liczbę 3 nazywamy miarą odcinka CD (przy odcinku jednostkowym AB) z błędem mniejszym od jedności.

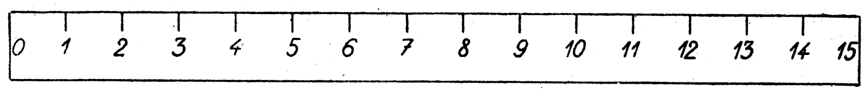


Rys. 54.

Zadania.

1. Narysuj kilka odcinków i odcinek jednostkowy i zmierz ich długości tym odcinkiem jednostkowym!

2. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i przy jego pomocy narysuj odcinki, których miary są: 2, 3, 5, 7!
3. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i narysuj kilka odcinków, których miara jest 5, z błędem mniejszym od jedności!



Rys. 55.

4. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i zbuduj miarkę, jak na rys. 55!
   Narysuj kilka odcinków i zmierz ich długości tą miarką!
5. Obierz jako jednostkę długości odcinek 2 *cm* i narysuj odcinki, mające miarę *a*) 3, *b*) 4, *c*) 5!
6. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i narysuj prostokąt o bokach *a*) 3, 4, *b*) 6, 8 i zmierz przekątne obranym odcinkiem jednostkowym!
7. Miara pewnego odcinka przy obranym odcinku jednostkowym wynosiła 6. Jaka będzie miara tego odcinka, jeśli nową jednostkę obierzemy *a*) dwa razy większą od poprzedniej, *b*) dwa razy mniejszą od poprzedniej? (Rysunek!)
8. Dane są trzy odcinki a, b, c, których miary przy obranej jednostce są odpowiednio 5, 4, 3. Jakie są długości odcinków:
   $$a + b;\quad a - b;\quad a + b + c;$$
   $$3\,a;\quad 5\,b;\quad 2\,a + 3\,b;\quad 4\,a + 3\,b - 2\,c?$$
   Sporządź rysunki!
9. Obierz swój krok za jednostkę długości i zmierz długość sali szkolnej, pokoju, podwórza i t. d.!

Pola.

Powierzchnie płaskie i krzywe.

Takie powierzchnie, jak kartka papieru, ściana prostopadłościanu, powierzchnia stołu, powierzchnia wody spokojnej w stawie i t. p., nazywamy powierzchniami p ł a s k i e m i.

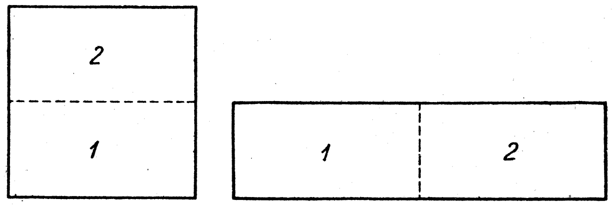
Powierzchnię płaską możemy przedłużać na wszystkie strony. Kładąc np. na kartce papieru drugą kartkę tak, by częściowo nakrywały się, przedłużamy w ten sposób powierzchnię płaską, przedstawioną przez pierwszą kartkę.

Powierzchnia płaska ma tę własność, że każdy odcinek, mający z nią dwa punkty wspólne, leży całkowicie na niej lub na jej przedłużeniu. Takie powierzchnie, jak pobocznica walca, pobocznica stożka, powierzchnia kuli i t. p. nazywamy p o w i e r z c h n i a m i k r z y w e m i.

Porównywanie powierzchni figur.

Na rys. 56 kwadrat składa się z dwóch części, z tychże części składa się prostokąt.

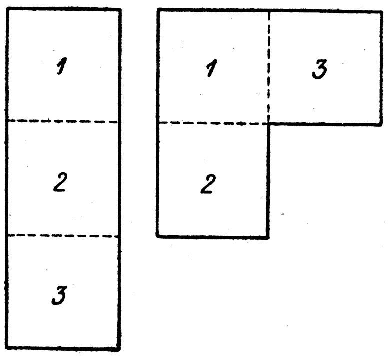
O figurach takich mówimy, że mają równą powierzchnię.



Rys. 56.

Jeśli sporządzimy z papieru figurę I (rys. 57) i rozetniemy wzdłuż poprzerywanych linij, to z otrzymanych części zbudujemy figurę, narysowaną obok. Obie te figury mają zatem równą powierzchnię.

I

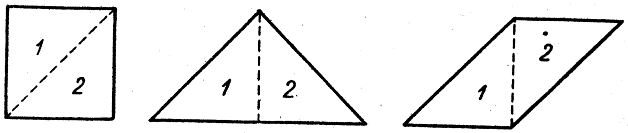


Rys. 57.

Podobnie postępując, przekonamy się, że figury na rys. 58, 59, 60 *a*, 60 *b*, mają równą powierzchnię.

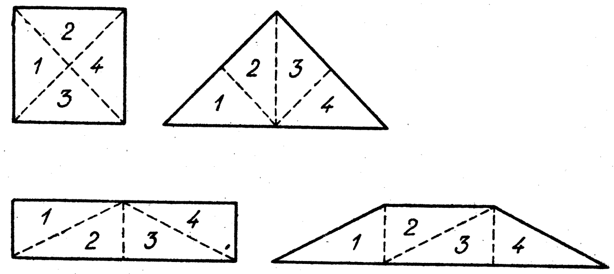
Aby więc przekonać się, czy dwie figury mają równą powierzchnię, staramy się jedną z nich rozbić na takie części, z których da się złożyć druga figura.

I

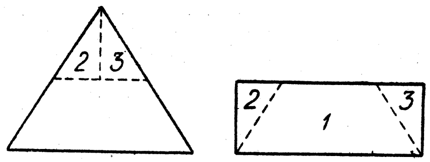


Rys. 58.

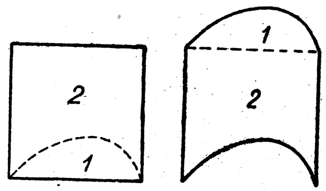
I



Rys. 59.

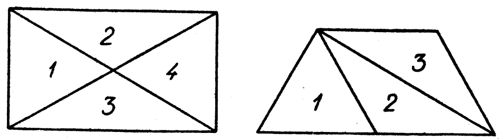


Rys. 60 *a*.



Rys. 60 *b*.

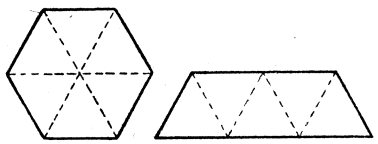
Na rys. 61 widzimy dwie figury. Pierwsza z nich składa się z czterech części, druga zaś tylko z trzech z pośród tych części. Mówimy, że figura pierwsza ma powierzchnię większą od powierzchni figury drugiej.



Rys. 61.

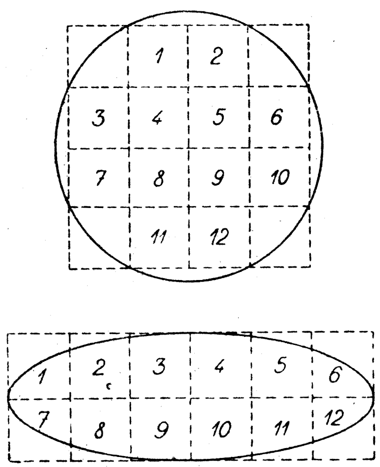
Podobnież na rys. 62 pierwsza figura ma powierzchnię większą od drugiej, ponieważ składa się z sześciu części, z których pięć wystarcza do zbudowania drugiej.

Aby więc przekonać się, czy jedna figura ma większą powierzchnię, niż druga, staramy się pierwszą rozbić na takie części, z których po odrzuceniu jednej lub więcej, da się złożyć druga figura.



Rys. 62.

Możemy również przekonać się w inny sposób, że jedna figura ma większą powierzchnię, niż druga. Wycinamy w tym celu z papieru pewną ilość jednakowych małych kwadratów i układamy je obok siebie wewnątrz pierwszej figury, jak na rys. 63. Jeżeli ta sama ilość kwadracików wystarczy do zupełnego pokrycia drugiej figury, to figura pierwsza ma powierzchnię większą od drugiej.

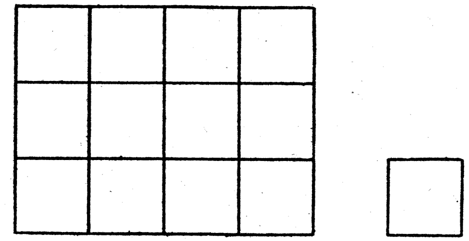


Rys. 63.

Mierzenie pól.

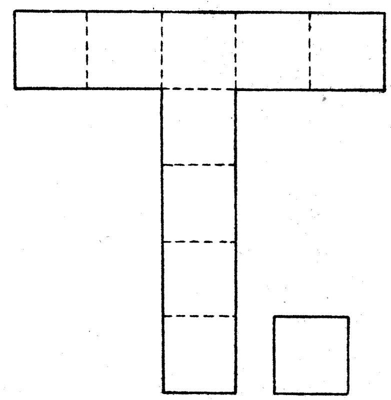
Obierzmy sobie dowolny kwadrat (rys. 64) i nazwijmy go kwadratem jednostkowym. Przy pomocy tego kwadratu będziemy

mierzyli pola figur. Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć pole prostokąta (rys. 64). Prostokąt nasz da się zbudować z 12 kwadratów jednostkowych. Liczbę 12 nazywamy miarą pola naszego prostokąta, przy obranym kwadracie jednostkowym. Mówimy również, że pole prostokąta wynosi 12 kwadratów jednostkowych.



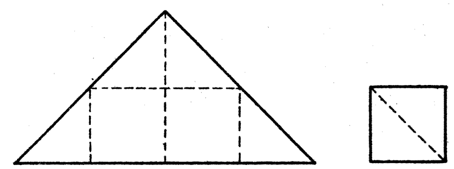
Rys. 64.

Jeżeli zatem jakaś figura da się zbudować z pewnej liczby kwadratów, równych obranemu kwadratowi jednostkowemu, to liczbę tę nazywamy miarą pola tej figury, przy obranym kwadracie jednostkowym.



Rys. 65.

Na rys. 65 mamy figurę i obok kwadrat jednostkowy. Ponieważ nasza figura da się zbudować z 9 kwadratów jednostkowych, więc miarą pola tej figury jest 9. Aby zbudować daną figurę z kwadratów jednostkowych, należy nieraz kwadraty te odpowiednio porozcinać. Np. pole figury (rys. 66) wynosi 4 kwadraty jednostkowe.



Rys. 66.

Zadania.

1. Narysuj o różnych polach: *a*) kwadrat i prostokąt, *b*) dwa różne prostokąty, *c*) dwie dowolne figury!
2. Narysuj kwadrat o boku 4 *cm* i prostokąt o bokach 2 *cm* i 8 *cm*! Przekonaj się, że dany kwadrat i prostokąt mają równą powierzchnię!

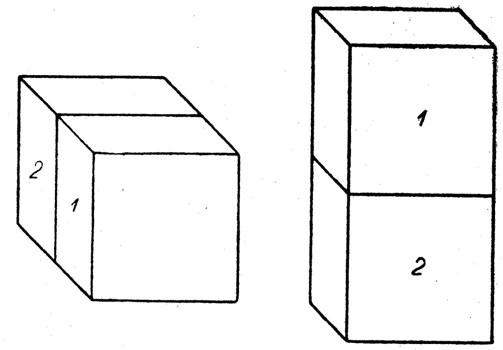
3. Narysuj dwie różne figury, takie, aby jedną można było rozbić na części, z których dałaby się zbudować druga. Co powiesz o powierzchniach tych figur? Zbuduj podobnie dwie figury o różnych powierzchniach!
4. Na kratkowanym papierze narysuj dwie figury tak, aby w jednej z nich mieściło się 18 kratek i aby równocześnie ta ilość kratek pokrywała zupełnie drugą figurę! Co powiesz o powierzchniach tych figur?
5. Obierz dowolny kwadrat jednostkowy i narysuj kwadrat, którego bok jest *a*) 2, *b*) 3, *c*) 4, *d*) 5 razy większy od boku kwadratu jednostkowego. Oblicz pole każdego kwadratu!
6. Obierz dowolny kwadrat jednostkowy i narysuj prostokąt, którego boki są odpowiednio *a*) 2 i 3, *b*) 3 i 4, *c*) 2 i 5 razy większe od boku kwadratu jednostkowego. Oblicz pole każdego prostokąta!
7. Narysuj kwadrat jednostkowy i zbuduj prostokąt, którego miara byłaby *a*) 6, *b*) 15, *c*) 7, *d*) 10 przy obranym kwadracie jednostkowym!
8. Narysuj kwadrat jednostkowy i zbuduj kwadrat, którego pole wynosi *a*) 9, *b*) 16, *c*) 25, *d*) 36 kwadratów jednostkowych!
9. Narysuj kwadrat jednostkowy i zbuduj 3 różne prostokąty tak, aby pole każdego z nich wynosiło 12 kwadratów jednostkowych!
10. Narysuj figurę (nie prostokąt), której pole przy obranej jednostce ma miarę: *a*) 5, *b*) 9, *c*) 12!
11. Obierz kwadrat jednostkowy i narysuj prostokąt o bokach odpowiednio 2 i 4 razy większych od boku kwadratu jednostkowego! Jaka jest miara pola tego prostokąta? Jaka będzie miara pola tego prostokąta, jeśli obierzemy inny kwadrat jednostkowy o boku 2 razy *a*) mniejszym, *b*) większym, od boku poprzedniego kwadratu jednostkowego?
12. Figura dała się rozbić na trzy części, których pola odpowiednio wynoszą 3, 5, 7 kwadratów jednostkowych; jakie jest pole danej figury?

Objętość.

Porównywanie objętości brył.

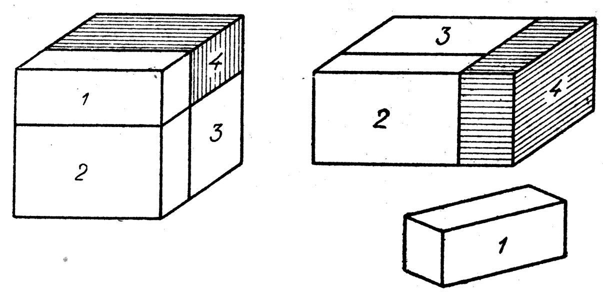
Jeżeli mamy dwie bryły i jedna z nich da się rozbić na części, z których można złożyć drugą, to te bryły mają równą

objętość. Np. sześcian przedstawiony na rys. 67 ma tę samą objętość, co stojący obok prostopadłościan, gdyż sześcian ten daje się rozbić na części 1 i 2, z których można złożyć prostopadłościan.



Rys. 67.

Jeżeli jedna bryła da się rozbić na części, z których, po odrzuceniu jednej lub więcej, da się złożyć druga bryła, to ta pierwsza ma objętość większą od drugiej (rys. 68).



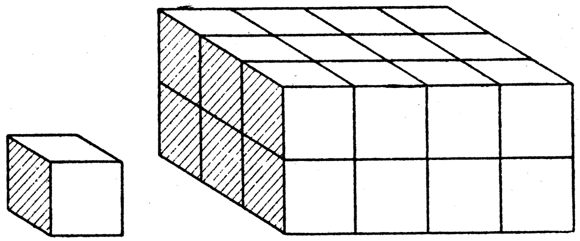
Rys. 68.

Jeżeli dwie bryły zrobione są z tego samego jednolitego materjału (np. sześcian żelazny i kula żelazna), to ważeniem możemy porównać ich objętości. Jeżeli mają równy ciężar, to mają równe objętości, w przeciwnym razie ta bryła ma objętość większą, która jest cięższą.

UWAGA: Naczynia porównujemy zazwyczaj wedle ich pojemności, np. wedle ilości wody, którą mogą pomieścić. Łatwo więc możemy przekonać się, które naczynie ma większą pojemność przez przelewanie wody z jednego naczynia w drugie.

Mierzenie objętości.

Obierzmy dowolny sześcian i nazwijmy go sześcianem jednostkowym. Jeżeli teraz mamy prostopadłościan (rys. 69), dający się rozbić np. na 24 sześcianów, z których każdy jest równy

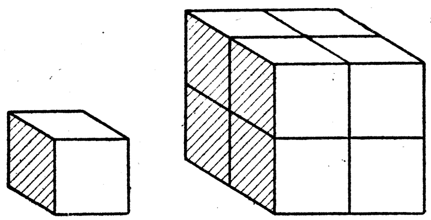


Rys. 69.

sześcianowi jednostkowemu, to liczbę 24 nazywamy **miarą** objętości danego prostopadłościanu przy danym sześcianie jako jednostce objętości.

Mówimy również, że objętość prostopadłościanu wynosi 24 sześcianów jednostkowych.

Podobnież miarą większego sześcianu, podanego na rys. 70 będzie 8, przy mniejszym sześcianie podanym na tymże rysunku, jako jednostce objętości.



Rys. 70.

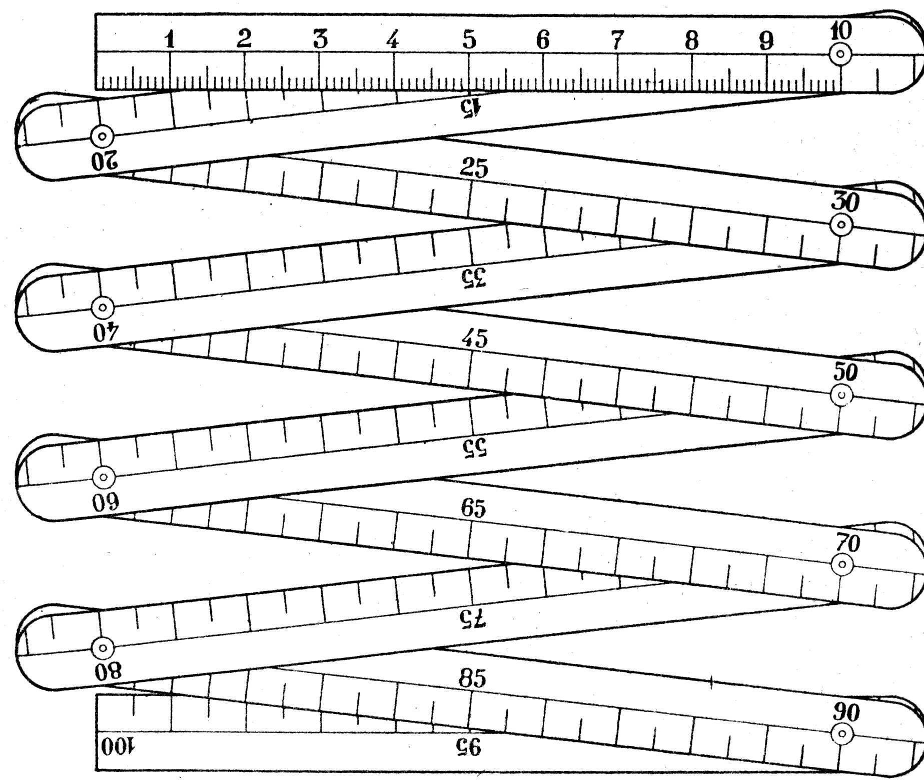
Zadania.

1. Weź dwie szklanki i porównaj ich pojemności!
2. Zbuduj sześcian jednostkowy i prostopadłościan, którego objętość wynosi *a*) 6, *b*) 8, *c*) 12 sześcianów jednostkowych!
3. Zbuduj sześcian jednostkowy i drugi sześcian, którego objętość wynosi *a*) 8, *b*) 27 sześcianów jednostkowych!
4. Zbuduj sześcian jednostkowy i cztery różne prostopadłościany tak, aby objętość każdego z nich wynosiła 12 sześcianów jednostkowych!

5. Weź szklankę i kieliszek i zbadaj, jaka będzie miara pojemności szklanki, jeśli kieliszek przyjmiesz za jednostkę pojemności!
6. Z beczki spuszczono wino do flaszek i napełniono 300 flaszek. W każdej flaszce mieści się 3 szklanki wina; jaka jest pojemność beczki, jeśli szklankę przyjmiemy za jednostkę pojemności?
7. Naczynie możemy napełnić, wlewając albo 5 dzbanków wody, albo też 60 szklanek wody; jaka jest pojemność dzbanka przy szklance jako jednostce pojemności?

Metryczne jednostki linjowe.

Zazwyczaj jako jednostki długości używa się odcinka, zwanego metrem (rys. 71).



Rys. 71. Metr składany, wielkość naturalna.

Wzorzec metra, w kształcie sztaby, przechowywany jest w Sèvres[1] pod Paryżem.

Uczeni wprowadzili metr, jako czterdziestomiljonową część południka ziemskiego.

Metr zaznaczamy w skróceniu literą *m* (bez kropki).

Dla celów praktycznych używa się jednostek bądź większych, bądź też mniejszych.

Jednostki większe od metra są:

1 dekametr (1 *dkm*) = 10 *m*
1 hektometr (1 *hm*) = 100 *m*
1 kilometr (1 *km*) = 1000 *m*

Jednostki mniejsze od metra są:

1 decymetr (1 *dm*); 10 *dm* = 1 *m*
1 centymetr (1 *cm*); 100 *cm* = 1 *m*
1 milimetr (1 *mm*); 1000 *mm* = 1 *m*

Wszystkie powyższe jednostki nazywają się **metrycznemi** linjowemi.

Zadania.

1. Ile to jest metrów:
   a) 2 *km*, *b*) 15 *km*, *c*) 2 *km* 7 *hm*, *d*) 3 *km* 5 *hm* 7 *dkm*, *e*) 3 *km* 9 *hm* 5 *dkm*, *f*) 17 *km* 3 *hm* 4 *dkm*?
2. Ile to jest kilometrów i metrów:
   a) 15200 *m*, *b*) 375 *hm*, *c*) 2536 *dkm*, *d*) 347 *hm* 234 *dkm*, *e*) 15340 *dm*?
3. Ile to jest hektometrów:
   a) 15 *km*, *b*) 246 *km*, *c*) 68 *km* 5 *hm*, *d*) 456 *km* 8 *hm*, *e*) 340 *dkm*, *f*) 2300 *m*, *g*) 15000 *dm*?
4. Ile to jest centymetrów:
   a) 3 *m*, *b*) 4 *dm*, *c*) 13 *m* 5 *dm*, *d*) 327 *dm*, *e*) 8360 *mm*, *f*) 2 *m* 3 *dm* 7 *cm*?
5. Ile to jest milimetrów:
   a) 2 *dkm*, *b*) 15 *dm*, *c*) 15 *m*, *d*) 1 *dkm* 7 *m*, *e*) 1 *dkm* 3*m* 7 *dm* 4 *cm* 2 *mm*, *f*) 36 *dm*?
6. Oblicz:
   a) 25 *km* 365 *m* + 15 *km* 24 *m*, *b*) 17 *km* 3 *hm* 21 *dkm* + + 5 *km* 234 *m*, *c*) 15 *km* 2 *m* — 7 *km* 3 *hm*, *d*) 2 *dkm* 7 *m* — 9 *m* 4 *dm*!

[1] Czytaj: Sewr.

7. Oblicz:
   a) 36 *km* 5 *hm* 27 *m* × 2, *b*) 136 *km* 324 *m* × 15, *c*) 215 *m* 5 *dm* 4 *cm* 7 *mm* × 25, *d*) 26 *m* 3 *dm* : 5, *e*) 215 *km* 124 *m* : 17, *f*) 15 *km* 124 *m* 2 *dm* : 36.
8. Oblicz:
   a) 127 *km* : 7 *km*, *b*) 12 *km* 345 *m* : 124 *m*, *c*) 5 *m* 3 *dm* 7 *cm* : 2 *dm* 3 *cm*, *d*) 5 *km* 3 *hm* 2 *dkm* : 23 *m*.
9. Na drodze długości 8 *km* 364 *m* zasadzono drzewka w odległości 1 *hm* jedno od drugiego; ile drzewek zasadzono?
10. Ogród w kształcie prostokąta ma 41 *hm* 3 *m* długości, a 39 *m* szerokości; ile wynosi obwód ogrodu?
11. Dwa miasta odległe o 3 *km* 800 *m* połączone są sześcioma przewodami telegraficznemi; ile metrów drutu zużyto?
12. Ulicę o długości 1 *km* 530 *m* brukują robotnicy, średnio 75 *m* dziennie; ile zostało do wybrukowania po 14 dniach pracy?
13. Pociąg osobowy przebiega średnio 30 *km* 360 *m* na godzinę; ile przebiega średnio na minutę, ile na sekundę?
14. Do pomiaru długości pola użyto taśmy 10-ciometrowej i przyłożono 27 razy. Jaka jest długość pola, jeśli taśma okazała się o 5 *cm* za krótka?
15. Posłaniec, który postanowił na godzinę robić 7 *km* 420 *m*, ma przejść 24 *km* 625 *m*; o której godzinie ma wyjść, aby być u celu o godzinie 2 minut 30 po południu?
16. Jeżeli 35 *cm* materji kosztuje 5 *zł* 95 *gr*, to ile kosztuje 3 *m* 1 *dm* 5 *cm* tej materji?
17. Koło u wozu, mające 2 *m* 3 *dm* 5 *cm* obwodu, obróciło się 2343 razy; jaką drogę wóz przejechał? Ile razy koło obróci się na przestrzeni 10 *km*?
18. Koła lokomotywy mają 6 *m* 3 *dm* obwodu; ile obrotów wykonają na minutę, jeśli lokomotywa przebiega 45 *km* na godzinę?
19. Ktoś przechodząc przestrzeń 100 *m* zrobił 133 kroków; jak długi jest jego krok? Ile kroków zrobi na przestrzeni 500 *m*? Jaką przestrzeń przeszedł, jeśli zrobił 850 kroków?
20. Policz, ile kroków zrobisz na przestrzeni 100 *m*! Jak długi jest twój krok?

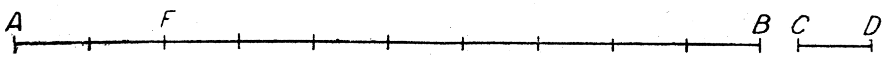
Zmierz przy pomocy kroków *a*) długość i szerokość sali szkolnej, *b*) długość i szerokość podwórza, *c*) odległość domu od szkoły!

21. Ktoś na przebycie 1000 *m* potrzebuje 12 minut czasu; jaką drogę przebędzie *a*) w minucie, *b*) w godzinie, *c*) w 45 minutach?
22. Przekonaj się, ile potrzebujesz czasu na przebycie 1 *km*; oblicz, jaką drogę przebywasz w minucie! Oblicz odległość domu od szkoły, wiedząc, ile czasu zużywasz na przejście tej drogi! Porównaj wyniki z zadaniem 20 *c*)!

Plan i skala.

Plan i skala odcinka.

Jeżeli zamiast odcinka *AB* narysujemy odcinek *CD* dziesięć razy mniejszy (rys. 72), to mówimy, że odcinek *CD* przedstawia odcinek *AB* w skali jeden do dziesięć, co oznaczamy 1 : 10.



Rys. 72.

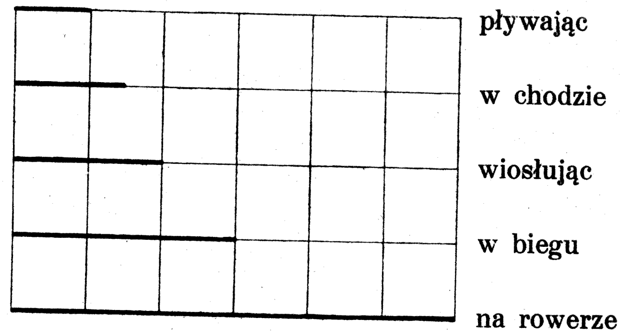
O odcinku zaś *AB* dziesięć razy większym od odcinka *CD* mówimy, że przedstawia odcinek *CD* w skali dziesięć do jeden (10 : 1).

Odcinek *CD* nazywamy planem odcinka *AB* w skali 1 : 10.

Przykłady:

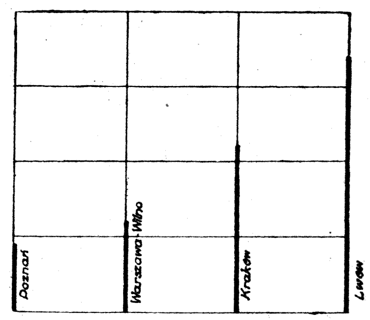
a) Odcinek o długości 1 *dm* przedstawia nam odcinek o długości 1 *m* w skali 1 : 10.
b) Odcinek o długości 2 *mm* przedstawia nam odcinek o długości 1 *cm* w skali 1 : 5.
c) Odcinek o długości 1 *cm* przedstawia nam odcinek o długości 1 *mm* w skali 10 : 1.
d) Odcinek *AF* przedstawia nam odcinek *FB* w skali 1 : 4 (rys. 72).
e) Człowiek w ciągu jednej sekundy przebywa średnio: chodem 15 *dm*, biegiem 30 *dm*, pływając 10 *dm*, wiosłując 20 *dm*, na rowerze 60 *dm*.

Na rys. 73 mamy przedstawione powyższe drogi, jakie człowiek przebywa w 1 sekundzie w skali 1 : 100.



Rys. 73.

f) Wysokości ponad poziom morza najważniejszych miast Polski są następujące (zaokrąglone): Kraków 220 *m*, Lwów 340 *m*, Poznań 90 *m*, Warszawa i Wilno 120 *m*. Na rys. 74 mamy podane powyższe wzniesienia ponad poziom morza w skali 1 : 10000.



Rys. 74.

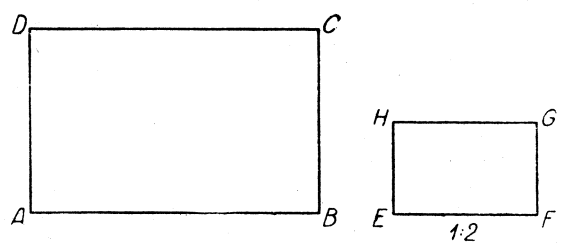
Zadania.

1. Przedstaw:
   a) odcinki 4 *dm*, 6 *dm*, 7 *dm* w skali 1 : 10,
   b) odcinki 5 *m*, 9 *m*, 3 *m* w skali 1 : 100,
   c) odcinki 2 *mm*, 5 *mm*, 4 *mm* w skali 10 : 1,
   d) odcinki 1 *km*, 2 *km*, 4 *km* w skali 1 : 20000!
2. Podaj odcinek, którego plan:
   a) w skali 1 : 10000 jest odcinkiem 2 *cm*, 4 *cm*, 15 *cm*?
   b) w skali 1 : 5000 jest odcinkiem 3 *cm*, 6 *cm*, 9 *cm*?
   c) w skali 10 : 1 jest odcinkiem 2 *cm*, 5 *cm*, 7 *cm*?

3. Jakiej skali użyjesz, chcąc narysować w zeszycie plan odcinka:
a) 2 *km*, *b*) 17 *m*, *c*) 3 *dkm*, *d*) 9 *hm*, *e*) 8 *dm*, *f*) 2 *mm*?
4. Przedstaw odcinkami w skali 1 : 20000 wysokości następujących szczytów tatrzańskich: Garłucha 2663 *m*, Świnicy 2306 *m* i Giewontu 1900 *m*!
5. Czterech chłopców ścigało się. W tym samym czasie jeden przebiegł 250 *m*, drugi 230 *m*, trzeci 260 *m*, a czwarty 190 *m*; zaznacz ich drogi odcinkami w skali 1 : 10000!

Plan i skala prostokąta.

Jeżeli zamiast prostokąta *ABCD* narysujemy inny prostokąt *EFGH*, którego boki są dwa razy mniejsze (rys. 75), to mówimy, że prostokąt *EFGH* jest planem prostokąta *ABCD*



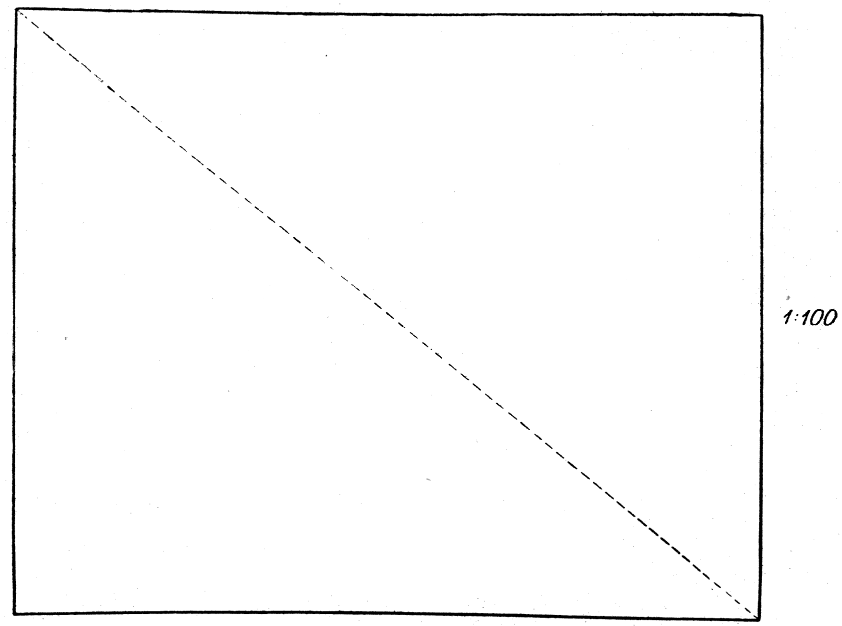
Rys. 75.

w skali jeden do dwa (1 : 2). O prostokącie zaś *ABCD*, którego boki są dwa razy większe od boków prostokąta *EFGH*, mówimy, że jest planem prostokąta *EFGH* w skali dwa do jeden (2 : 1).

Przykłady:

a) Kwadrat o boku 1 *dm* jest planem kwadratu o boku 1 *m* w skali 1 : 10.
b) Prostokąt o bokach 3 *cm* i 5 *cm* jest planem prostokąta o bokach 12 *cm* i 20 *cm* w skali 1 : 4.
c) Sala szkolna jest w kształcie prostokąta o bokach 10 *m* i 8 *m*.
Na rys. 76 mamy plan tej sali w skali 1 : 100.
Mając plan, możemy odczytywać długości takich odcinków, których zmierzenie wprost byłoby czasami niewygodne.

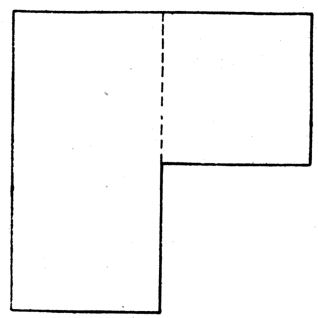
Chcąc np. zmierzyć odległość przeciwległych rogów sali, podanej w przykładzie poprzednim, mierzymy odległość tych rogów w planie (t. j. długość odcinka kreskowanego). Długość



Rys. 76.

tego odcinka (zmierzona miarką) wynosi około 12 *cm* 8 *mm*. Ponieważ odcinki na planie są 100 razy krótsze, niż w rzeczywistości, więc szukana odległość rogów wynosi 12 *m* 8 *dm*.

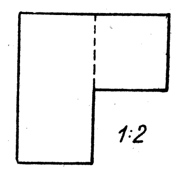
Jeżeli jakaś figura da się złożyć z samych prostokątów, to plan tej figury w skali (1 : 2) otrzymamy, rysując poszczególne prostokąty w skali (1 : 2) w takiem wzajemnem rozmieszczeniu, jak na danej figurze. Np. rys. 78 przedstawia nam plan figury podanej na rys. 77 w skali (1 : 2).



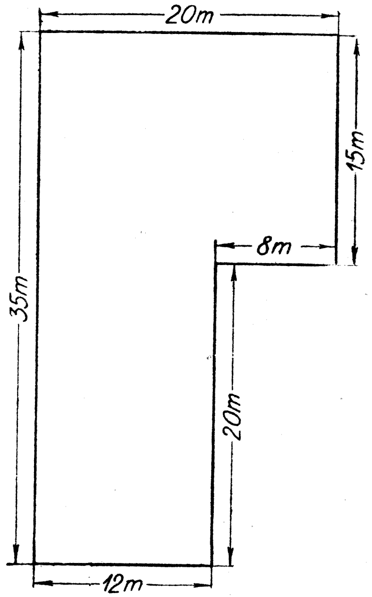
Rys. 77.

Uwaga 1.

Czasami w planie nie podajemy skali, tylko rzeczywiste wymiary.



Rys. 78.

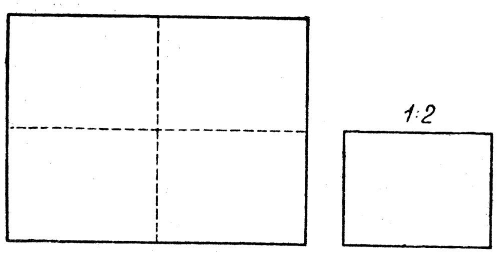


Rys. 79.

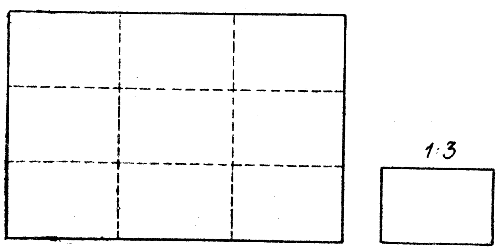
Np. rys. 79 podaje nam plan parceli i rzeczywiste jej wymiary.

U w a g a 2.

Bardzo często (szczególnie na mapach) podaje się obok skali jakąś jednostkę metryczną linjową w tej skali. Robi się to w tym celu, aby można było zapomocą cyrkla oceniać rozmaite odległości.



Rys. 80



Rys. 81.

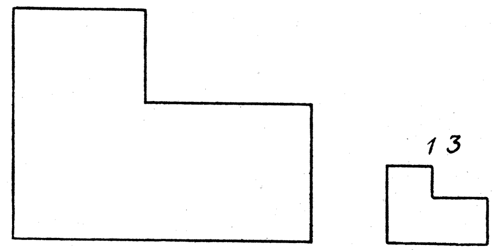
U w a g a 3.

Jeżeli jakiś prostokąt jest planem innego prostokąta w skali 1 : 2, to błędnem byłoby sądzić, że powierzchnia prostokąta na planie jest 2 razy mniejsza. Wyjaśnia nam to rys. 80 i 81.

Na rys. 80 powierzchnia w planie jest cztery razy mniejsza, a na rys. 81 dziewięć razy mniejsza.

Obwód.

Jeżeli jakaś figura przedstawia nam drugą figurę w skali np. 1 : 3, to obwód figury na planie jest 3 razy mniejszy. (rys. 82).



Rys. 82.

Zadania.

1. Narysuj dowolny prostokąt, a obok plan jego w skali *a*) 1 : 3, *b*) 1 : 4, *c*) 2 : 1. Porównaj powierzchnię każdego z nich z powierzchnią obranego prostokąta!
2. Podaj kwadrat, którego plan:
   a) w skali 1 : 10 jest kwadratem o boku 1 *cm*?
   b) w skali 1 : 100 jest kwadratem o boku 1 *dm*?
   c) w skali 2 : 1 jest kwadratem o boku 2 *cm*?
3. Jakiej skali użyjesz, chcąc narysować w zeszycie plan: *a*) podłogi pokoju, *b*) arkusza papieru, *c*) kartki z książki? Podaj liczbowe przykłady!
4. Oblicz odległość niesąsiednich rogów (wierzchołków) kwadratu o boku *a*) 5 *m*, *b*) 7 *dm*, *c*) 1 *hm*, *d*) 2 *dkm*, mierząc długość odpowiedniego odcinka planu w skali *a*) 1 : 100, *b*) 1 : 10, *c*) 1 : 500, *d*) 1 : 200!
5. Narysuj plan swego mieszkania w skali 1 : 100 i zaznacz na rysunku rzeczywiste wymiary!
6. Uważając pokój jako prostopadłościan, narysuj plan jego siatki w skali 1 : 100 (zaznacz okna, drzwi); podaj na rysunku rzeczywiste wymiary!
7. Odczytaj z planu miasta odległości rozmaitych punktów, długości ulic i t. p.!

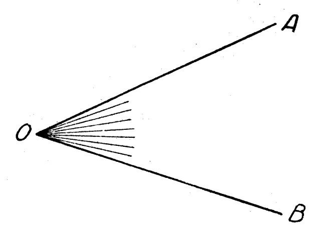
8. Narysuj prostokąt o bokach 5 *cm* i 8 *cm*, a obok plan jego w skali 1 : 2! Oblicz obwody obu prostokątów! Co zauważysz?
9. Ile *m* ma ogrodzenie ogrodu w kształcie prostokąta, którego plan w skali 1 : 1000 jest prostokątem o bokach 3 *cm* i 5 *cm*?
10. Dom o długości 14 *m* 5 *dm*, a szerokości 8 *m* 2 *dm* otoczono parkanem; jaki jest obwód parkanu, jeśli go budowano w odległości 8 *m* od dłuższego boku domu, w odległości zaś 5 *m* 5 *dm* od krótszego boku? (Wykonaj plan w skali 1 : 100!).

KĄTY.

Określenia.

Określenia kąta.

Połóżmy złożony cyrkiel na kartce papieru. Nie zmieniając położenia jednego ramienia, odchylmy ramię drugie. Zaznaczmy teraz na kartce papieru położenia obu ramion odcinkami *OA* i *OB*, poprowadzonemi z punktu *O*, gdzie leży główka cyrkla. Zacieniujmy jeszcze całkowicie lub częściowo tę część kartki, po której poruszało się ramię ruchome.



Rys. 83.

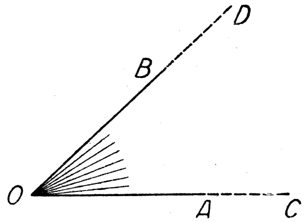
Odejmijmy teraz cyrkiel, a na kartce otrzymamy rys. 83. Rysunek powyższy pozwala nam wyobrazić sobie, jaki obrót wykonało ruchome ramię cyrkla. Gdybyśmy komuś dali taki rysunek, to on mógłby ruchomem ramieniem cyrkla wykonać taki sam obrót, jakiśmy poprzednio wykonali.

Mówimy, że ruchome ramię cyrkla przy tym obrocie opisało kąt, którego obrazem jest rys. 83.

O odcinkach *OA* i *OB* mówimy, że tworzą ten kąt, lub, że są pod tym kątem nachylone.

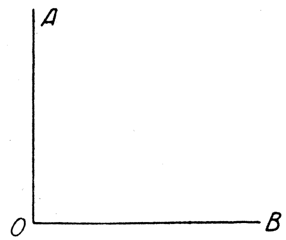
Odcinki *OA* i *OB* nazywamy r a m i o n a m i tego kąta, punkt zaś *O* jego w i e r z c h o ł k i e m.

Przedłużając odcinki OA i OB poza punkty A i B (rys. 84), otrzymujemy również obraz tego samego kąta, jaki ruchome ramię cyrkla przy obrocie opisało. Widzimy zatem, że kąt nie zmieni się, jeżeli jego ramiona przedłużymy albo skrócimy.

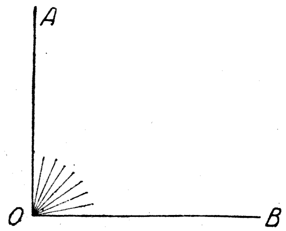


Rys. 84.

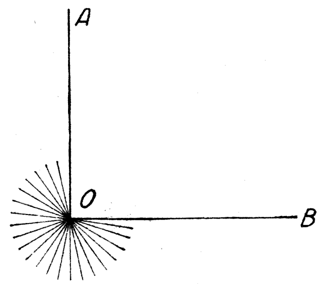
Gdybyśmy na kartce papieru zaznaczyli tylko położenia ramion cyrkla po rozchyleniu (rys. 85) (nie cieniując tej części kartki papieru, po której ramię ruchome poruszało się), to ktoś drugi nie mógłby z rysunku odczytać, jaki obrót ramię cyrkla wykonało. Rys. 86 i 87 wskazują nam bowiem dwa obroty, przy których ruchome ramię zajmuje to samo



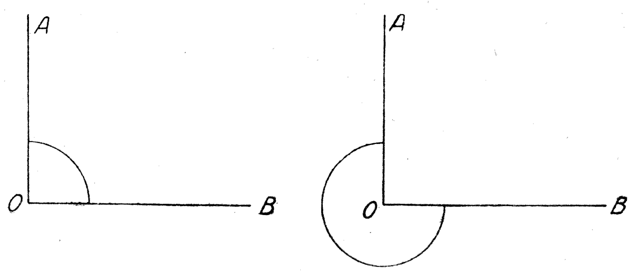
Rys. 85.



Rys. 86.



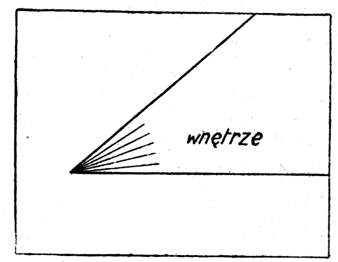
Rys. 87.



Rys. 88.

końcowe położenie. Zatem dwa odcinki wychodzące z jednego punktu (rys. 85) tworzą dwa kąty. Dla zaznaczenia, o który kąt chodzi, cieniujemy jak na rys. 86, 87 lub też zakreślamy łuk, jak na rys. 88.

Narysujmy na kartce papieru dowolny kąt tak, żeby jego wierzchołek leżał wewnątrz kartki (rys. 89). Przedłużmy jego ramiona do brzegu kartki. Ramiona te podzielą nam kartkę na dwie części. Ta z tych części, która jest zacieniowana, nazywa się w n ę t r z e m lub p o l e m kąta.



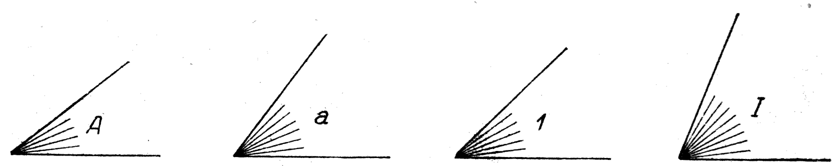
Rys. 89.

Oznaczanie kątów.

Kąt zaznaczamy jedną literą lub liczbą, pisząc przed tą literą lub liczbą znak: $\sphericalangle$

A więc na rys. 90 mamy kąty:

$$\sphericalangle A, \quad \sphericalangle a, \quad \sphericalangle 1, \quad \sphericalangle I.$$

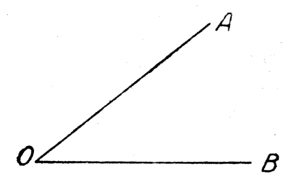


Rys. 90.

Kąt utworzony przez odcinki OA i OB (rys. 91) oznaczamy, pisząc litery AOB pokolei tak, by litera O oznaczająca wierzchołek, była w środku.

A więc piszemy:

$$\sphericalangle AOB \text{ lub } \sphericalangle BOA.$$



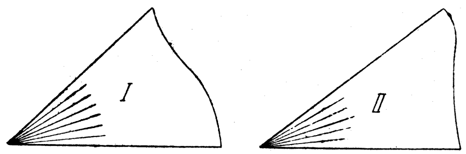
Rys. 91.

Znakowanie to ma tę niedogodność, że na oba kąty, utworzone przez odcinki OA i OB mamy ten sam znak.

Używamy tego znakowania tylko wówczas, gdy skądinąd wiemy, o który z tych dwóch kątów nam chodzi.

Porównywanie kątów.

Przypuśćmy, że mamy dwa kąty, wycięte z papieru (rys. 92). Nałóżmy jeden na drugi tak, aby wierzchołek i jedno ramię jednego kąta padło na wierzchołek i jedno ramię drugiego kąta i aby wnętrze jednego padło na wnętrze drugiego.

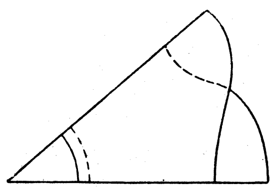


Rys. 92.

Zdarzyć się mogą dwa przypadki:

1. Albo jak na rys. 93 drugie ramiona też padną na siebie. W tym przypadku mówimy, że kąty *I* i *II* są równe, co piszemy:

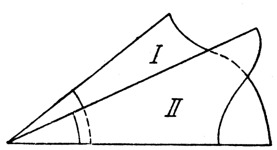
$$\sphericalangle I = \sphericalangle II.$$



Rys. 93.

2. Albo też drugie ramiona jak na rys. 94 na siebie nie padną. Wówczas mówimy, że kąt, na którego wnętrze padło ramię drugiego kąta, jest większy od drugiego. O drugim zaś mówimy, że jest mniejszy od pierwszego. Zaznaczamy to pisząc:

$$\sphericalangle I > \sphericalangle II \text{ lub}$$
$$\sphericalangle II < \sphericalangle I.$$



Rys. 94.

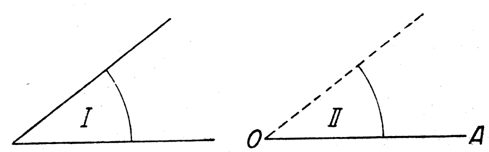
Zadania.

1. Odchyl jedno ramię cyrkla od ramienia drugiego i narysuj kąt, który ruchome ramię opisało!
2. Narysuj kąt, jaki tworzą sąsiednie krawędzie sześcianu i prostopadłościanu!
3. Narysuj kąt, jaki opisuje duża wskazówka zegara w *a*) 15 minutach, *b*) 20 minutach, *c*) 40 minutach, *d*) 45 minutach!
4. Narysuj kilka kątów, oznacz ich wierzchołki i ramiona!
5. Narysuj kilka kątów, oznacz je i wypisz obok oznaczenia tych kątów!
6. Wytnij z papieru *a*) dwa kąty, *b*) kilka kątów i porównaj je, a następnie zanotuj wynik porównania!
7. Czy wskazówka duża w zegarku kieszonkowym i wskazówka duża na zegarze ratuszowym zakreślają w kwadransie równe kąty, czy nie?
8. Przekonaj się, że kąty, jakie tworzą sąsiednie boki prostokąta, są równe!

Działania na kątach.

Przenoszenie kątów.

Niech będzie dany kąt *I* i odcinek *OA* (rys. 95). Chcemy narysować kąt *II*, równy kątowi *I* tak, by wierzchołek padł na *O*, jedno zaś ramię na *OA*. W tym celu wycinamy kąt *I*



Rys. 95.

i kładziemy go na kartce papieru tak, by jego wierzchołek padł w punkcie *O*, a jedno ramię na odcinek *OA*. Rysując z punktu *O* odcinek wzdłuż drugiego ramienia, otrzymujemy żądany kąt.

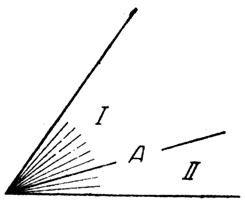
Można również kąt przenosić przy pomocy kalki przezroczystej.

Zadania.

1. Narysuj dowolny kąt i przerysuj go przy pomocy kalki!
2. Narysuj dowolny kąt i przerysuj go obok tak, by wierzchołek znalazł się na jednem z ramion danego kąta!
3. Narysuj kąt, jaki tworzą dwie sąsiednie krawędzie sześcianu, i przerysuj go następnie tak, by wierzchołek był wspólny i jedno ramię wspólne!

Suma kątów.

Mamy dany kąt A, wycięty z papieru. Przetnijmy go wzdłuż dowolnego odcinka, poprowadzonego z wierzchołka. Kąt rozpadnie się na dwa kąty I i II (rys. 96).



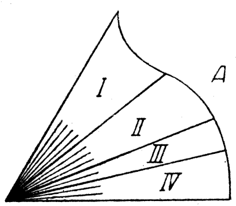
Rys. 96.

Kąt A nazywamy sumą kątów I i II i piszemy:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle I + \sphericalangle II.$$

Jeżeliby ktoś dał nam te kąty I i II, to kładąc je obok siebie tak, aby wierzchołki i jedne ramiona padły na siebie, otrzymalibyśmy kąt, który jest ich sumą.

Rozetnijmy teraz dany kąt A wzdłuż kilku odcinków, wychodzących z wierzchołka. Kąt ten rozpadnie się na kilka kątów, oznaczonych na rys. 97 znakami: I, II, III, IV. O kącie A mówimy, że jest sumą kątów I, II, III, IV. Piszemy to:

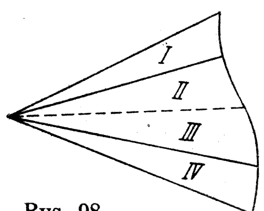


Rys. 97.

$$\sphericalangle A = \sphericalangle I + \sphericalangle II + \sphericalangle III + \sphericalangle IV.$$

Kąt A otrzymamy, dodając do kąta I kąt II, do ich sumy kąt III, a wreszcie do otrzymanej sumy kąt IV. Dodając te kąty w innym porządku, otrzymalibyśmy również kąt A.

Zatem: Suma kątów nie zależy od porządku dodajników (p r a w o p r z e m i e n n o ś c i). Jeżeli mamy dodać kilka kątów do siebie (rys. 98), to możemy zawsze dwa z nich zastąpić ich sumą (p r a w o ł ą c z n o ś c i).

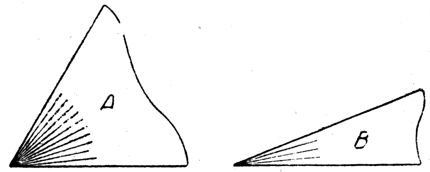


Rys. 98.

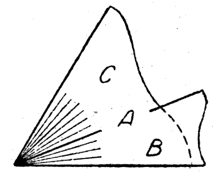
Różnica kątów.

Dane są dwa kąty A i B, przyczem kąt A jest większy od kąta B (rys. 99).

Różnicą tych kątów nazywamy kąt, który dodany do mniejszego z nich, daje na wynik większy z nich.



Rys. 99.



Rys. 100.

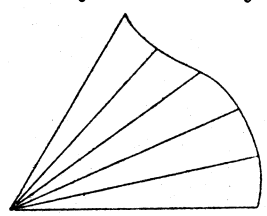
Kładąc kąt B na kącie A tak, jak na rys. 100, widzimy, że kąt C jest różnicą kątów A i B, co piszemy:

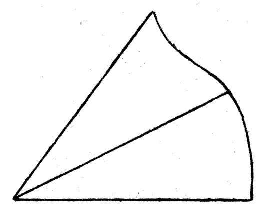
$$\sphericalangle C = \sphericalangle A - \sphericalangle B.$$

Podział kąta na równe części.

Jeżeli z wierzchołka kąta poprowadzimy wewnątrz kilka odcinków, tak, że rozcinając kąt wzdłuż tych odcinków, otrzymamy same kąty równe, to powiadamy, żeśmy podzielili kąt na równe części.

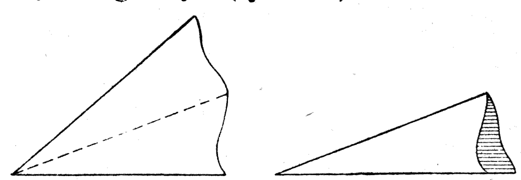
Na rys. 101 mamy kąt podzielony na 5 równych części.


Rys. 101.


Rys. 102.

Jeżeli kąt podzielimy na dwie równe części, to każdą z nich nazywamy połową danego kąta (rys. 102).

Połowę kąta, wyciętego z papieru, otrzymamy, zginając papier na dwoje, tak, by ramiona padły na siebie (rys. 103).


Rys. 103.

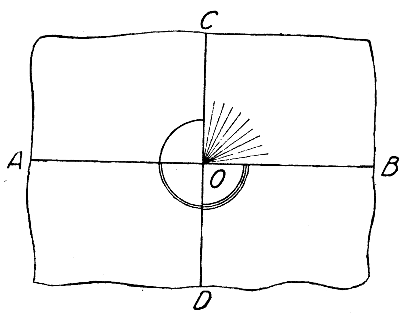
Zadania.

1. Wytnij dowolny kąt z papieru i przetnij go wzdłuż dwóch odcinków, przechodzących przez wierzchołek, a następnie utwórz sumę w ten sposób powstałych kątów! Przekonaj się, że suma tych kątów nie zależy od porządku, w jakim je dodajesz! Oznacz te kąty i zanotuj ich sumę!
2. Narysuj trzy kąty, każdy mniejszy od kąta, jaki tworzą sąsiednie boki kwadratu i utwórz ich sumę! Dodaj do pierwszego sumę pozostałych! Porównaj wyniki i zanotuj! Powtórz to zadanie dla czterech kątów!
3. Narysuj dwa różne kąty i odejmij mniejszy od większego! Oznacz kąty i zanotuj różnicę!
4. Narysuj trzy coraz mniejsze kąty i dodaj do pierwszego różnicę drugiego i trzeciego! Zanotuj to!
5. Wytnij kąt z papieru i utwórz: *a*) połowę, *b*) połowę połowy czyli czwartą część danego kąta i t. d.!
6. Wyrysuj: *a*) połowę, *b*) ćwierć, *c*) ósmą część kąta, jaki tworzą dwa sąsiednie boki kwadratu!

Rodzaje kątów i mierzenie kątów.

Rodzaje kątów.

K ą t p r o s t y. Mamy dwa odcinki AB i CD, przecinające się w punkcie O (rys. 104). Jeżeli, rozcinając kartkę wzdłuż tych odcinków, otrzymamy cztery równe kąty, zaznaczone na rys. 104, wówczas każdy z nich nazywamy k ą t e m p r o s t y m. O odcinkach AB i CD mówimy, że są do siebie p r o s t o p a d ł e.



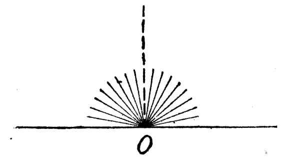
Rys. 104.

Kąt prosty można otrzymać, zginając kartkę papieru we dwoje wzdłuż odcinka AB, a następnie zginając ją jeszcze raz tak, aby OA nakryło OB. Wszystkie kąty proste są sobie równe.

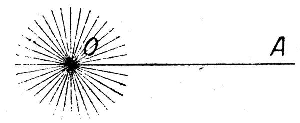
Dwa sąsiednie boki prostokąta tworzą kąt prosty. Dwie sąsiednie krawędzie sześcianu są do siebie prostopadłe.

K ą t p ó ł p e ł n y. Kątem półpełnym nazywamy sumę dwóch kątów prostych (rys. 105).

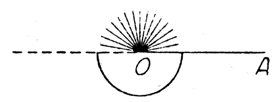
Ramiona kąta półpełnego tworzą odcinek (jedno ramię jest przedłużeniem drugiego).



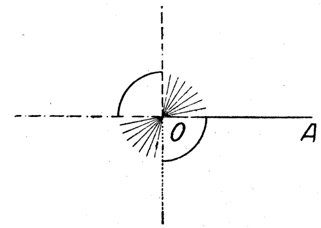
Rys. 105.



Rys. 106.

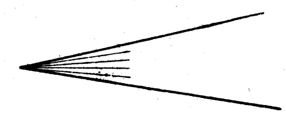


Rys. 107.



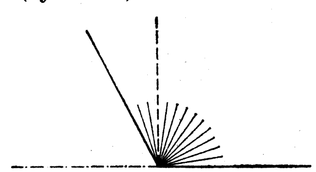
Rys. 108.

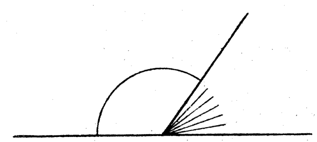
K ą t p e ł n y Jeżeli odcinek OA obracając się około punktu O wykona całkowity obrót, a więc po obrocie zajmie swoje początkowe położenie, to mówimy, że odcinek OA opisał k ą t p e ł n y (rys. 106). Widzimy stąd, że ramiona kąta pełnego leżą na sobie. Kąt pełny jest sumą dwóch kątów półpełnych (rys. 107), lub czterech kątów prostych (rys. 108).


Rys. 109.

K ą t o s t r y. Kątem ostrym nazywamy kąt mniejszy od prostego (rys. 109).

K ą t r o z w a r t y. Kątem rozwartym nazywamy kąt większy od prostego, a mniejszy od półpełnego (rys. 110).

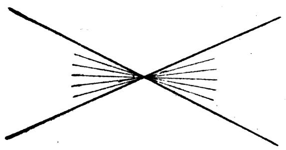

Rys. 110.


Rys. 111.

K ą t y p r z y l e g ł e. Poprowadźmy z wierzchołka kąta półpełnego (rys. 111) dowolny odcinek. Odcinek ten podzieli kąt półpełny na dwa kąty. Kąty te mają wierzchołek i jedno ramię wspólne, pozostałe ramiona tworzą odcinek, pola zaś tych kątów nie zachodzą na siebie. Kąty takie nazywamy parą kątów przyległych.

Z rys. 111 widać, że suma kątów przyległych jest kątem półpełnym.

Kąty wierzchołkowe. Na rys. 112 mamy dwa odcinki przecinające się. Weźmy pod uwagę parę kątów zaznaczonych.



Rys. 112.

Kąty te mają wspólny wierzchołek, ich pola nie zachodzą na siebie, a ramiona jednego z nich są przedłużeniem poza wierzchołek ramion drugiego. Kąty takie nazywamy wierzchołkiem przeciwległe lub wierzchołkowe.

Wycinając te kąty i nakładając na siebię, przekonujemy sie, że kąty te są sobie równe. Zatem:

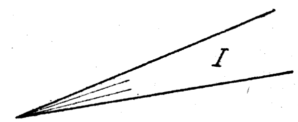
Dwa kąty wierzchołkiem przeciwległe są sobie równe.

Zadania.

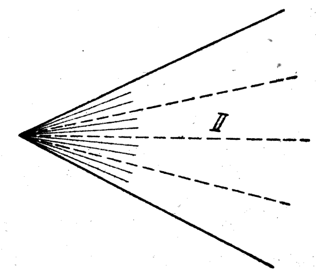
1. Narysuj kilka kątów prostych i podaj przykłady takich kątów!
2. Narysuj prostopadłe do danego odcinka w kilku jego punktach!
3. Narysuj prostopadłe do ramion kąta prostego wewnątrz tego kąta, w punktach odległych o 2 *cm* od wierzchołka! Jaką figurę w ten sposób możesz otrzymać? Powtórz to zadanie, kreśląc prostopadłą do jednego ramienia w odległości 3 *cm* od wierzchołka i prostopadłą do drugiego ramienia w odległości 5 *cm*!
4. Utwórz sumę dwóch kątów prostych! Jaki kąt otrzymasz?
5. Utwórz sumę czterech kątów prostych! Jaki kąt otrzymasz? Ile wynosi suma wszystkich kątów kwadratu lub prostokąta?
6. Narysuj kilka kątów ostrych i rozwartych!
7. Przekłuj linijkę papierową w dowolnym punkcie i obróć jedno jej ramię o jakiś kąt; przekonaj się, że drugie ramię zakreśliło również taki sam kąt!
8. Narysuj kilka par kątów wierzchołkowych i porównaj kąty każdej pary: *a*) przy pomocy kalki przezroczystej, *b*) wycinając je z papieru!
9. W jakim czasie duża wskazówka zegara, a w jakim czasie mała wskazówka zakreśla kąt: *a*) prosty, *b*) półpełny, *c*) pełny, *d*) ostry, *e*) rozwarty?

Mierzenie kątów.

Obierzmy dowolny kąt *I* (rys. 113) i nazwijmy go kątem jednostkowym. Przy pomocy tego kąta będziemy mierzyli inne kąty. Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć kąt *II* (rys. 114). Widzimy, że kąt *II* jest sumą czterech kątów jednostkowych. Liczbę 4 nazywamy miarą kąta *II* przy kącie *I* jako jednostkowym. Jeżeli zatem jakiś kąt jest sumą pewnej liczby kątów jednostkowych, to liczbę tę nazywamy miarą danego kąta przy obranym kącie jednostkowym.



Rys. 113.



Rys. 114.

Kąty jednostkowe.

Podzielmy kąt prosty na 90 równych części. Każdą z tych części nazywamy stopniem. Kąt prosty ma więc 90 stopni. Kąt półpełny ma 180, kąt zaś pełny ma 360 stopni.

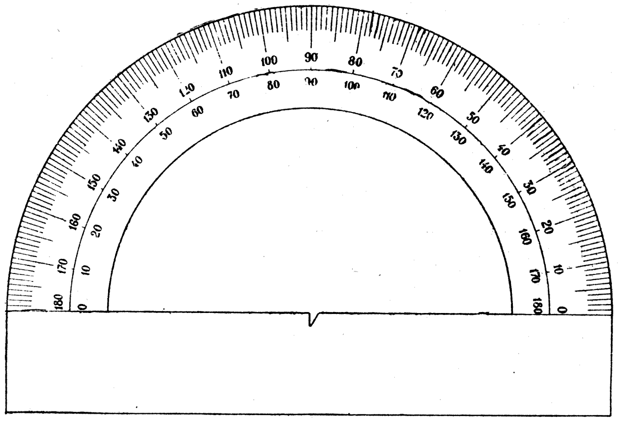
Jeden stopień oznaczamy: 1^0. Jeżeli kąt 1^0 podzielimy na 60 równych części, to każdą z nich nazywamy jedną minutą i oznaczamy: $1'$. Kąt $1'$ podzielony na 60 równych części daje nam kąt zwany jedną sekundą, który oznaczamy: $1''$.

Więc np. $52^0 13' 5''$ oznacza nam kąt wynoszący 52 stopni 13 minut i 5 sekund.

Do mierzenia kątów służy przyrząd, zwany kątomierzem (rys. 115).

UWAGA: Jeżeli mamy dwa kąty, np. 72^0 i 30^0, to dla obliczenia ile stopni zawiera kąt, będący sumą tych dwóch kątów, względnie różnicą pierwszego i drugiego kąta, nie mamy potrzeby budowania tych kątów oraz kąta będącego ich sumą, względnie różnicą; wystarczy do siebie dodać, względnie odjąć liczby wyrażające w stopniach dane kąty. Więc w naszym przypadku suma kątów wynosi 102^0, zaś różnica 42^0.

UWAGA: Nieraz przez sumę dwóch kątów rozumiemy sumę ich miar. W tym wypadku suma dwóch kątów, z których jeden ma 300^0, a drugi 200^0, równa się 500^0.



Rys. 115.

Kąty spełniające i dopełniające.

Dwa kąty, których suma równa się kątowi półpełnemu, nazywają się s p e ł n i a j ą c e.

Np. kąty 120^0 i 60^0 są spełniające.

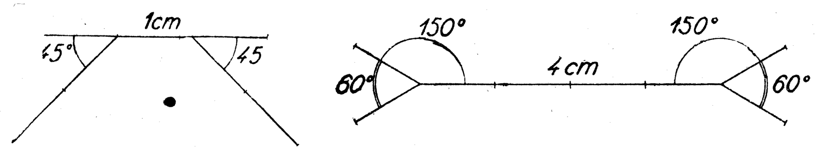
Dwa kąty, których suma równa się kątowi prostemu, nazywają się d o p e ł n i a j ą c e.

Np. kąty 40^0 i 50^0 są dopełniające.

Zadania.

1. Narysuj kilka kątów i zmierz je przy pomocy kątomierza!
2. Narysuj, posługując się kątomierzem, kąty: *a*) 45^0, *b*) 60^0, *c*) 135^0, *d*) 180^0, *e*) 225^0, *f*) 270^0, *g*) 315^0!
3. Jeżeli jeden kąt ma: *a*) 30^0, *b*) 65^0, *c*) 130^0, *d*) 145^0, to ile wynosi kąt przyległy? Rysunek!
4. Jeśli jeden kąt ma: *a*) 15^0, *b*) 20^0, *c*) 35^0, *d*) 60^0, *e*) 72^0, to ile wynosi kąt dopełniający? Rysunek!
5. Narysuj kilka par kątów wierzchołkowych i porównaj kąty każdej pary, posługując się kątomierzem!
6. Narysuj kąt, równy sumie kątów: 35^0, 18^0, 45^0, 120^0 i 65^0, nie rysując poszczególnych kątów!
7. Przyjmij za jednostkę kąta: *a*) połowę, *b*) czwartą część, *c*) setną część kąta prostego; jakie będą miary kąta pełnego, półpełnego, prostego w tych nowych jednostkach?

8. Odrysuj następujące figury:



Rys. 116.

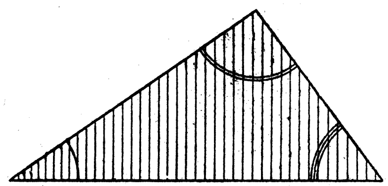
9. Ile to jest minut:
   a) 2^0, *b*) 12^0, *c*) 36^0, *d*) $5^0\,13'$, *e*) $24^0\,36'$?
10. Ile to jest sekund:
    a) 1^0, *b*) 5^0, *c*) $2^0 55'$, *d*) $4^0 25' 36''$?
11. Ile to jest stopni i minut:
    a) $85'$, *b*) $270'$, *c*) $1345'$?
12. Ile to jest minut i sekund:
    a) $436''$, *b*) $386''$, *c*) $1364''$?
13. Ile to jest stopni, minut i sekund:
    a) $5241''$, *b*) $7126''$, *c*) $15278''$?
14. Oblicz: *a*) $25^0 13' + 37^0 59'$, *b*) $36^0 25' + 49^0 38'$
    c) $30^0\,26' 15'' + 57^0 51' 59''$, *d*) $128^0 34' 52'' + 37^0 50' 26''$.
15. Oblicz: *a*) $15^0 8' - 7^0 15'$, *b*) $90^0 - 35^0 12'$,
    c) $45^0\,12' 36'' - 9^0 18' 58''$, *d*) $180^0 - 52^0 36' 42''$.
16. Oblicz: *a*) $12^0 15' \times 3$, *b*) $36' \times 18$, *c*) $7^0 18' 12'' \times 9$,
    d) $35^0 18'' \times 12$.
17. Oblicz: *a*) $90^0 : 16$, *b*) $40^0 32' : 7$, *c*) $32^0 15' 14'' : 9$,
    d) $51^0 12' 36'' : 12$.
18. Oblicz: *a*) $90^0 : 25^0$, *b*) $32^0 15' : 2^0 30'$ *c*) $18' : 36''$
    d) $3^0 17' 30'' : 50' 45''$.
19. Wyznacz kąt spełniający do kąta:
    a) $36^0 25' 18''$, *b*) $146^0 57' 6''$!
20. Wyznacz kąt dopełniający do kąta:
    a) $18^0 15' 16''$, *b*) $45^0 36''$!

WIELOKĄTY.

Trójkąt.

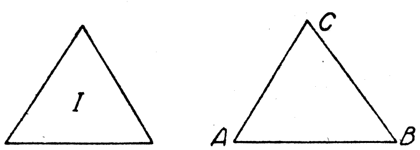
Określenia.

Na rys. 117 mamy trójkąt. Trójkąt ograniczony jest trzema odcinkami. Odcinki te nazywamy **b o k a m i** trojkąta. Punkty, w których się schodzą dwa boki, nazywamy **w i e r z c h o ł k a m i** trójkąta. W każdym trójkącie mamy trzy wierzchołki i trzy kąty zaznaczone na rys. 117. Trójkąty oznaczamy bądź jedną literą, lub liczbą, bądź też piszemy pokolei litery oznaczające jego wierzchołki. Dla podkreślenia, że chodzi nam o trójkąt, używamy znaku: $\triangle$



Rys. 117.

A więc na rys. 118 mamy: $\triangle$ I i $\triangle$ ABC.

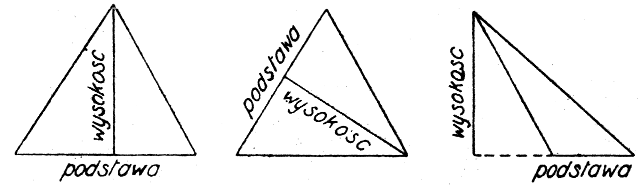


Rys. 118.

W y s o k o ś ć.

Narysujmy z wierzchołka trójkąta odcinek prostopadły do przeciwległego boku, względnie jego przedłużenia. Odcinek ten

nazywamy **w y s o k o ś c i ą**, bok zaś **p o d s t a w ą**, przynależną do tej wysokości (rys. 119).



Rys. 119.

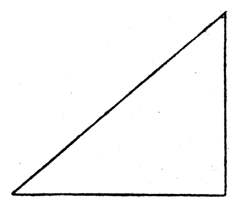
W każdym trójkącie mamy trzy wysokości i trzy podstawy (odpowiednio do nich należące).

Zadania.

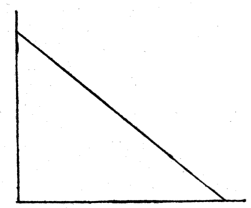
1. Narysuj kilka różnych trójkątów i oznacz je! Podaj także podstawę i wierzchołek każdego z nich!
2. Narysuj trójkąt i wszystkie jego wysokości! Powtórz to zadanie w przypadku, gdy jeden z kątów trójkąta jest rozwarty!
3. Narysuj kilka różnych trójkątów o wspólnej podstawie i o równych wysokościach!
4. Narysuj trójkąt, którego podstawa ma 5 *cm*, wysokość 4 *cm*, przyczem wysokość ta pada w odległości 2 *cm* od jednego z końców podstawy!
5. Narysuj dowolny trójkąt i porównaj sumę dwóch boków z trzecim bokiem! Porównaj różnicę dwóch boków z trzecim bokiem!

Trójkąt prostokątny.

Trójkąt, którego jeden z kątów jest prosty, nazywamy trójkątem **p r o s t o k ą t n y m** (rys. 120).



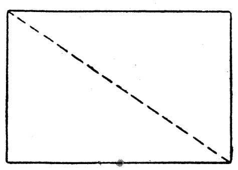
Rys. 120.



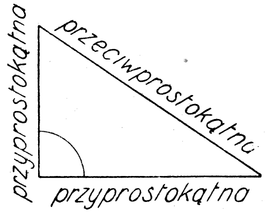
Rys. 121.

Boki ekierki tworzą trójkąt prostokątny. Trójkąt prostokątny otrzymamy, kreśląc kąt prosty i łącząc odcinkiem punkt jednego ramienia z punktem drugiego ramienia (rys. 121).

Trójkąt prostokątny otrzymamy, przecinając prostokąt wzdłuż odcinka, łączącego dwa niesąsiednie wierzchołki (rys. 122). Prostokąt rozpadnie się wówczas na dwa trójkąty prostokątne.



Rys. 122.



Rys. 123.

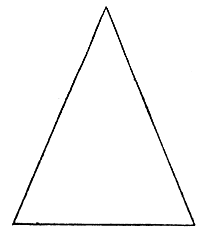
Ramiona kąta prostego w trójkącie prostokątnym nazywamy p r z y p r o s t o k ą t n e m i, trzeci zaś bok (leżący naprzeciw kąta prostego) nazywamy p r z e c i w p r o s t o k ą t n ą (rys. 123).

Zadania.

1. Narysuj trójkąt prostokątny i oznacz jego przyprostokątne i przeciwprostokątną!
2. Narysuj trójkąt prostokątny znając jego przyprostokątne: *a*) 3 *cm*, 4 *cm*; *b*) 2 *cm*, 5 *cm*; *c*) 2 *cm* 5 *mm*, 4 *cm* 5 *mm*!
3. Narysuj trójkąt prostokątny, wiedząc, że jedna przyprostokątna wynosi: *a*) 3 *cm*; *b*) 5 *cm*; *c*) 9 *cm*; kąt zaś przyległy do tej przyprostokątnej *a*) 60°; *b*) 45°; *c*) 30°!
4. Narysuj trójkąt i podziel go na dwa trójkąty prostokątne!
5. Jedna przyprostokątna ma 6 *cm*, druga 8 *cm*; ile ma przeciwprostokątna? Odczytaj z rysunku!
6. Jedna przyprostokątna ma 7 *cm*, a kąt przyległy do tej przyprostokątnej 45°; ile ma druga przyprostokątna, a ile przeciwprostokątna?
7. Z 4 trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych 3 *cm* i 5 *cm* złóż trójkąt prostokątny!
8. Podziel prostokąt o bokach 9 *cm* i 6 *cm* na 6 równych trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych 6 *cm* i 3 *cm*!
9. Wytnij z papieru dwa trójkąty prostokątne o przyprosto kątnych 4 *cm*, dwa trójkąty prostokątne o przyprostokątnych 3 *cm* i cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych 3 *cm* i 4 *cm* i złóż z wszystkich tych trójkątów kwadrat o boku 7 *cm*!

Trójkąt równoramienny.

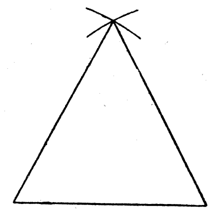
Trójkąt, ktory ma dwa boki równe, nazywamy r ó w n o r a m i e n n y m (rys. 124). Nakreślmy tym samym otworem cyrkla, z końców dowolnego odcinka dwa łuki przecinające się. Łącząc punkt przecięcia się tych łuków z końcami odcinka, otrzymujemy trójkąt r ó w n o r a m i e n n y (rys. 125).



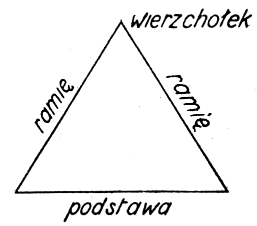
Rys. 124.

Boki równe trójkąta równoramiennego nazywamy r a m i o n a m i. Trzeci bok nazywamy zazwyczaj p o d s t a w ą. Mówiąc „wierzchołek trójkąta równoramiennego“, mamy na myśli ten z trzech wierzchołków, który leży naprzeciw podstawy (rys. 126).

Wytnijmy z papieru trójkąt równoramienny (rys. 127). Nakreślmy wysokość i zegnijmy trójkąt na dwoje wzdłuż wysokości. Przekonamy się, że trójkąty prostokątne (na które wysokość podzieliła trójkąt równoramienny) nakryją się.



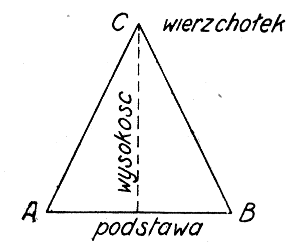
Rys. 125.



Rys. 126.

Kąt A nakryje więc kąt B, a zatem:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle B.$$



Rys. 127.

W i d z i m y z a t e m, ż e w t r ó j k ą c i e n a p r z e c i w r ó w n y c h b o k ó w l e ż ą r ó w n e k ą t y.

Naodwrót: jeśli przekonamy się, że dwa kąty trójkąta są sobie równe, to przeciwległe boki są też równe.

Zadania.

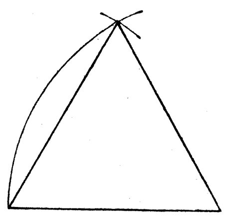
1. Narysuj trójkąt równoramienny i oznacz jego ramiona i podstawę!

2. Wytnij z papieru dwa równe trójkąty prostokątne i złóż z nich raz trójkąt równoramienny, drugi raz prostokąt!
3. Wytnij trójkąt równoramienny z papieru i zegnij we dwoje wzdłuż wysokości. Przekonaj się, że kąty przypodstawne są sobie równe i że wysokość połowi podstawę. Sprawdź to jeszcze kątomierzem i cyrklem!
4. Narysuj trójkąt równoramienny, znając podstawę: *a*) 4 *cm*; *b*) 5 *cm*; *c*) 7 *cm* i wysokość *a*) 3 *cm*; *b*) 4 *cm* 5 *mm*; *c*) 6 *cm* 5 *mm*!
5. Narysuj trójkąt równoramienny, znając podstawę *a*) 3 *cm*; *b*) 4 *cm* 5 *mm*; *c*) 6 *cm* 5 *mm* i kąt przy podstawie: *a*) 40°; *b*) 60°; *c*) 45°!
6. Narysuj trójkąt równoramienny a zarazem prostokątny! Zmierz kąty przypodstawne i u wierzchołka!
7. Podziel prostokąt na cztery trójkąty równoramienne!

Trójkąt równoboczny.

Trójkąt, którego wszystkie boki są równe, nazywamy trójkątem równobocznym.

Weźmy w otwór cyrkla dowolny odcinek i z jego końców nakreślmy tym otworem dwa łuki przecinające się. Łącząc punkt przecięcia się tych łuków z końcami odcinka, otrzymujemy trójkąt równoboczny (rys. 128).



Rys. 128.

UWAGA: Ponieważ w trójkącie naprzeciw równych boków leżą równe kąty, więc w trójkącie równobocznym wszystkie kąty są sobie równe. Naodwrót, jeśli w jakimś trójkącie wszystkie kąty są sobie równe, to trójkąt jest trójkątem równobocznym.

Zadania.

1. Narysuj trójkąt równoboczny o boku: *a*) 3 *cm*; *b*) 4 *cm*; *c*) 3 *cm* 5 *mm*; *d*) 4 *cm* 5 *mm*! Zmierz kąty każdego z nich!
2. Narysuj trójkąt o boku 3 *cm*, w którym przylegające do tego boku kąty wynoszą po 60°! Zmierz trzeci kąt i porównaj boki! Co zauważysz?
3. Narysuj trójkąt równoboczny o obwodzie 13 *cm* 5 *mm* i zmierz jego wysokość!
4. *a*) Z 4 równych trójkątów równobocznych złóż nowy

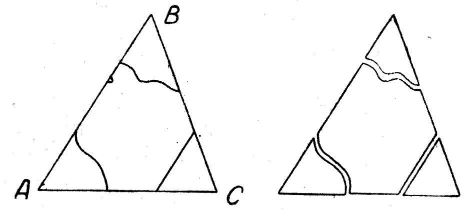
trójkąt równoboczny! Ile razy bok dużego tójkąta będzie większy od boku małego trójkąta?

b) Powtórz powyższe zadanie, biorąc 9 równych trójkątów rownobocznych!

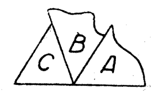
5. Narysuj 3 odcinki o długości 37 *mm*, wychodzące z jednego punktu tak, aby co dwa sąsiednie zawierały kąt 120° i połącz wolne końce odcinkami! Jaki trójkąt otrzymasz?

Suma kątow trójkąta.

Obliczmy sumę kątów trójkąta. Odetnijmy (lub urwijmy) trzy kąty trójkata (rys. 129) i utwórzmy ich sumę, jak na rys. 130.



Rys. 129.



Rys. 130.

Przekonamy się, że ich suma wynosi 180°. Ten sam wynik otrzymalibyśmy, odczytując trzy kąty trójkąta zapomocą kątomierza i obliczając ich sumę. A więc:

Suma kątów w każdym trójkącie wynosi 180°.

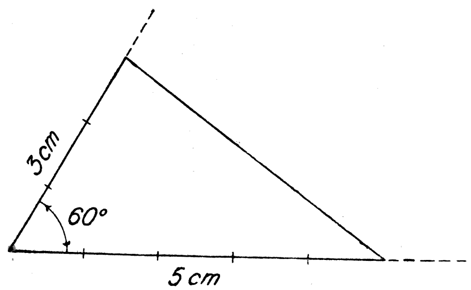
Zadania.

1. Narysuj dowolny trójkąt, zmierz wszystkie jego kąty i dodaj!
2. W trójkącie suma dwóch kątów wynosi: *a*) 110°; *b*) 135°; *c*) 98°; *d*) 80°; oblicz trzeci kąt!
3. W trójkącie równoramiennym kąt u podstawy wynosi: *a*) 42°; *b*) 39°; *c*) 60°; oblicz wszystkie kąty każdego z trójkątów!
4. W trójkącie równoramiennym kąt u wierzchołka wynosi: *a*) 30°; *b*) 60°; *c*) 90°; *d*) 108°; oblicz pozostałe kąty trójkąta!
5. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów wynosi: *a*) 30°; *b*) 60°; *c*) 45°; *d*) 47°; oblicz pozostałe kąty!
6. Ile wynosi suma kątów ostrych w trójkącie prostokątnym?
7. Ile wynosi kąt w trójkącie równobocznym?

Budowa trójkątów.

1. Dane dwa boki i kąt między niemi zawarty.

Chcemy zbudować trójkąt, w którym jeden bok ma np. 3 *cm*, drugi 5 *cm*, kąt zaś między niemi zawarty 60°.



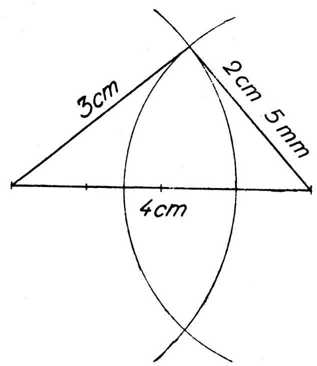
Rys. 131.

Kreślimy w tym celu zapomocą kątomierza kąt 60° (rys. 131). Na jednem ramieniu tego kąta odcinamy następnie od wierzchołka odcinek 3 *cm*, na drugiem zaś 5 *cm*. Łącząc wreszcie drugie końce tych odcinków, otrzymujemy żądany trójkąt.

2. Dane trzy boki.

Chcemy zbudować trójkąt, w którym jeden bok ma np. 3 *cm*, drugi 4 *cm*, trzeci 2 *cm* 5 *mm*.

Kreślimy w tym celu odcinek o długości 4 *cm*. Z jednego

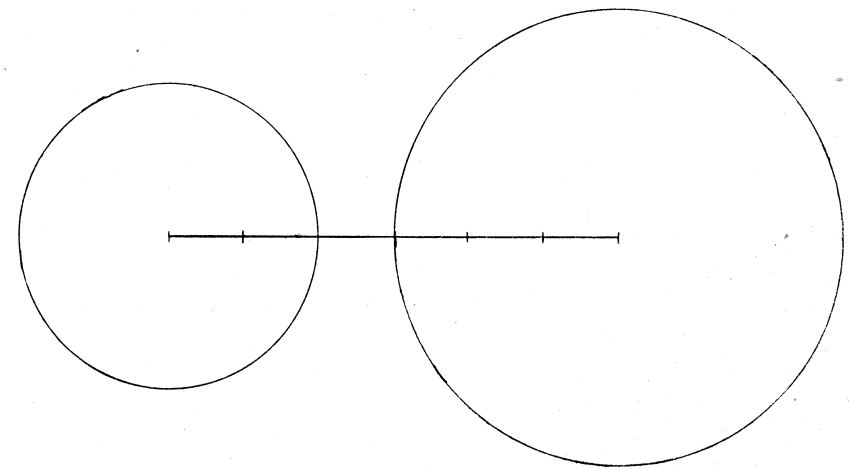


Rys. 132.

końca tego odcinka jako środka kreślimy koło o promieniu 3 *cm*, a następnie z drugiego końca koło o promieniu 2 *cm* 5 *mm* (rys. 132).

Łącząc jeden z dwóch punktów przecięcia się tych kół z końcami naszego odcinka, otrzymujemy szukany trójkąt.

UWAGA. Gdyby koła nie przecięły się w dwóch punktach, to znaczyłoby, że żądany trójkąt nie da się zbudować. Nie można np. zbudować trójkąta o bokach 2 *cm*, 3 *cm*, 6 *cm* (rys. 133).



Rys. 133.

Zadania.

1. Narysuj trójkąt, znając dwa boki: *a*) 3 *cm* i 5 *cm*; *b*) 4 *cm* i 6 *cm* 5 *mm*; *c*) 2 *cm* 5 *mm* i 4 *cm* 5 *mm*; *d*) 5 *cm* i 5 *cm*; *e*) 4 *cm* i 4 *cm*, a nadto kąt między niemi zawarty: *a*) 48°; *b*) 55°; *c*) 112°; *d*) 60°; *e*) 90°. Zmierz miarką trzeci bok!
2. Narysuj trójkąt znając jego trzy boki: *a*) 3 *cm*, 4 *cm* i 5 *cm*; *b*) 3 *cm*, 3 *cm* i 4 *cm*; *c*) 4 *cm*, 4 *cm* i 4 *cm*; *d*) 2 *cm* 5 *mm*, 4 *cm* 5 *mm*, 3 *cm*; zmierz kąty każdego z nich!
3) Narysuj trójkąt, a obok niego trójkąt mu równy! Przeprowadź konstrukcję na dwa sposoby, t. j. raz przy użyciu kątomierza, drugi raz tylko przy użyciu cyrkla i linijki!
4. Narysuj trójkąt *ABC* i odcinek *A'B'* = *AB*; narysuj teraz trójkąt o podstawie *A'B'*, równy trójkątowi *ABC*! Przeprowadź konstrukcję na dwa sposoby!
5. Narysuj kąt i oznacz jego wierzchołek literą *O*; obierz następnie na jednem ramieniu dowolny punkt A na drugiem zaś punkt *B*! Narysuj teraz trójkąt równy trójką-

towi AOB i zaznacz w nim kąt równy danemu! Przeprowadź konstrukcję przy użyciu tylko cyrkla i linijki!

6. Narysuj kąt, a obok niego kilka kątów jemu równych! Postąp jak w zadaniu 5!
7. Narysuj kąt I, a obok niego odcinek $O'M$; narysuj teraz kąt II równy kątowi danemu tak, aby wierzchołek padł na O', jedno zaś ramię na odcinek $O'M$! Konstrukcję przeprowadź tylko przy pomocy cyrkla i linijki!

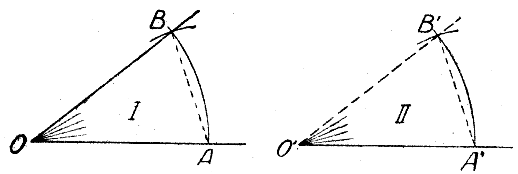
Przenoszenie kątów.

W poprzednich zadaniach (5, 6, 7) nauczyliśmy się przenosić kąty, to znaczy rysować kąty równe danemu, przy użyciu tylko cyrkla i linijki.

W tym celu obieraliśmy na ramionach kąta dwa dowolne punkty A i B i przenosiliśmy następnie trójkąt AOB. Konstrukcja będzie szczególnie prostą, jeśli punkty A i B obierzemy w równej odległości od wierzchołka.

Przypuśćmy, że mamy rozwiązać zadanie 7. W tym celu z wierzchołka kąta I kreślimy koło o dowolnym promieniu. Otrzymujemy punkty A i B.

Z punktu O' kreślimy następnie koło o tym samym promieniu. Otrzymujemy w ten sposób odcinek $O'A' = OA$.



Rys. 134.

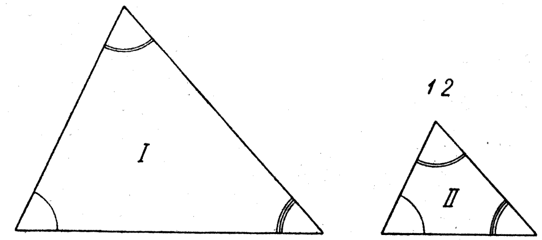
Biorąc następnie w otwór cyrkla odcinek AB, kreślimy koło z punktu A'. Niech punkt B' będzie punktem przecięcia się tego koła z kołem o środku O'; rysując odcinek $O'B'$ otrzymamy drugie ramię kąta II.

Zadania.

1. Przenieś kąt: *a*) ostry; *b*) rozwarty; *c*) prosty!
2. Obierz kąt: *a*) ostry; *b*) rozwarty i narysuj kąt dwa razy większy od niego!
3. Narysuj dwa kąty; narysuj obok przy pomocy cyrkla i linijki ich: *a*) sumę; *b*) różnicę!

Kreślenie trójkątów w skali.

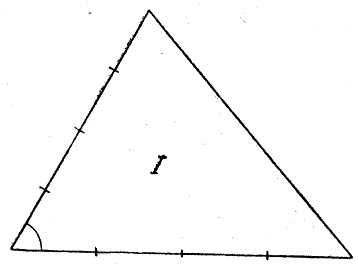
Mówimy, że trójkąt II przedstawia nam trójkąt I w skali 1 : 2 (rys. 135), jeżeli trójkąt II ma 2 razy mniejsze boki od boków trójkąta I, a kąty te same.



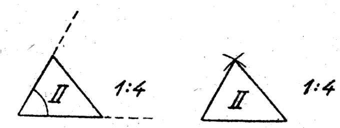
Rys. 135.

Chcąc narysować dany trójkąt (rys. 136) w skali 1 : 4 rysujemy którykolwiek kąt trójkąta I, a na jego ramionach odcinamy od wierzchołka odcinki cztery razy mniejsze niż boki, przyległe temu kątowi w trójkącie I. Łącząc końce tych odcinków, otrzymujemy żądany trójkąt II (rys. 137).

Trójkąt II możnaby też otrzymać, budując trójkąt z trzech odcinków odpowiednio cztery razy mniejszych od boków trójkąta I (rys. 137).



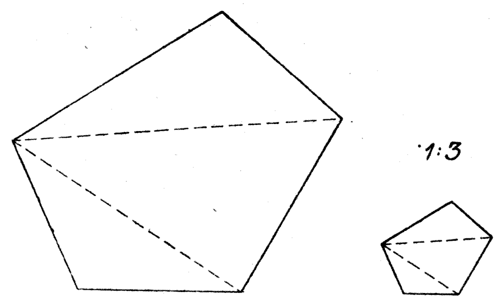
Rys. 136.



Rys. 137.

UWAGA 1.

Jeżeli jakąś figurę możemy złożyć z kilku trójkątów, to plan tej figury w skali np. 1 : 3 otrzymamy, rysując poszczególne trójkaty w skali 1 : 3 w takiem wzajemnem rozmieszczeniu, jak na danej figurze. Np. rysunek 138 przedstawia figurę i jej plan w skali 1 : 3.



Rys. 138.

UWAGA 2.

Jeżeli więc mamy plan jakiejś figury w skali np. 1 : 10, to należy pamiętać, że w planie wszystkie odcinki są 10 razy pomniejszone, kąty zaś są niezmienione. Kąty zatem możemy wprost odczytywać z planu (mapy) zapomocą kątomierza.

Zadania.

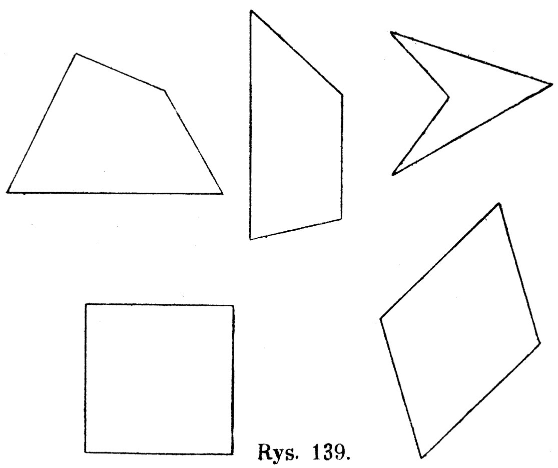
1. Dwa boki trójkąta wynoszą 7 *m* i 9 *m*, kąt zaś między niemi zawarty 60^0. Narysuj plan tego trójkąta w skali 1 : 100!
2. Trzy boki trójkąta wynoszą 8 *dkm*, 11 *dkm*, 5 *dkm*; narysuj ten trójkąt w skali 1 : 1000!
3. Narysuj dowolny trójkąt, a obok plan jego: *a*) w skali 1 : 2; *b*) w skali 1 : 3! Porównaj kąty we wszystkich trójkątach! Porównaj obwody!
4. Narysuj dowolną figurę, którą można rozbić na kilka trójkątów i obok narysuj plan tej figury w skali 1 : 4! Porównaj obwody i kąty obu figur!
5. Zdejm plan podwórza szkoły w odpowiedniej skali i oblicz obwód!
6. Jaka jest wysokość trójkąta, którego boki są 36 *m*, 25 *m*, 40 *m*? Z planu 1 : 1000 odczytaj wysokość!
7. Jaki jest trzeci bok trójkąta, którego dwa boki wynoszą 30 *m* i 25 *m* a kąt między niemi zawarty 45^0? (Odczytaj ten bok z planu w skali 1 : 1000).

Czworokąt.

Określenia.

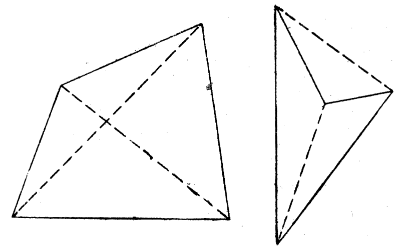
Na rys. 139 mamy kilka czworokątów. Czworokąt ograniczony jest czterema odcinkami (bokami).

Odcinek, łączący dwa niesąsiednie wierzchołki czworokąta, nazywamy przekątną (rysunek 140).



Rys. 139.

Przynajmniej jedna z przekątnych dzieli czworokąt na dwa trójkąty.



Rys. 140.

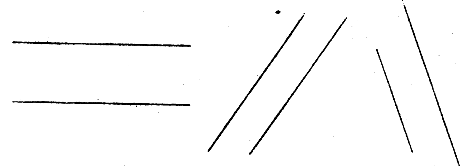
Zadania.

1. Narysuj czworokąt i oznacz jego boki i kąty!
2. Narysuj kilka różnych czworokątów i ich przekątne!
3. Narysuj kilka czworokątów i oblicz sumę kątów każdego czworokąta, posługując się *a*) kątomierzem, *b*) tylko cyrklem i linijką!
4. Narysuj czworokąt, a obok plan jego w skali 1 : 2!

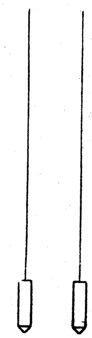
Odcinki równoległe.

Dwa odcinki nazywają się równoległe jeśli nie przetną się, jakkolwiek daleko przedłużylibyśmy je, w jedną lub drugą stronę (rys. 141).

Przeciwległe boki prostokąta lub kwadratu są równoległe. Krawędzie boczne graniastosłupa są równoległe. Piony są równoległe (rys. 142). Szyny kolejowe, jak długo biegną prosto, są odcinkami równoległemi.



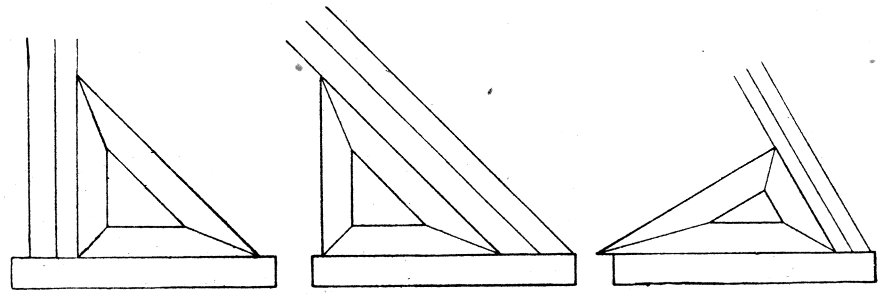
Rys. 141.



Rys. 142.

Kreślenie odcinków równoległych.

Mając daną linijkę i ekierkę, możemy kreślić równoległe w ten sposób, że przystawiamy do linijki, trzymanej nieruchomo, ekierkę którymkolwiek bokiem i kreślimy wzdłuż innego jej



Rys. 143.

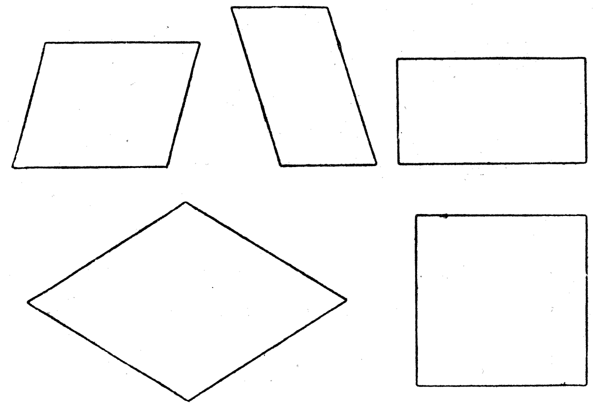
boku odcinek. Przesuwając ekierkę wzdłuż linijki w inne położenie i kreśląc odcinek wzdłuż tego samego co i przedtem boku ekierki, otrzymujemy odcinki równoległe (rys. 143).

Zadania.

1. Narysuj kilka par równoległych odbinków: *a*) na oko; *b*) zapomocą ekierki!
2. Nakreśl dwa odcinki równoległe i odcinek prostopadły do jednego z nich; przekonaj się przy pomocy kątomierza, że odcinek ten jest również prostopadły do drugiego odcinka!
3. Przez punkt obok odcinka nakreśl odcinek równoległy do niego!
4. Przez środek jednego boku trójkąta poprowadź odcinek, równoległy do drugiego boku; przekonaj się zapomocą cyrkla, że trzeci bok został przepołowiony!
5. Narysuj trójkąt i przez wierzchołki poprowadź równoległe do przeciwległych boków, a następnie porównaj boki i kąty w ten sposób powstałego trójkąta z danym trójkątem!

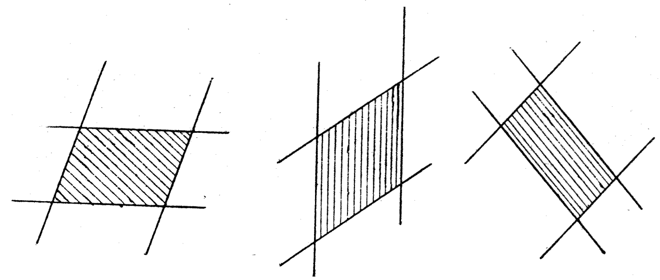
Równoległobok (określenie).

Czworokąt, którego przeciwległe boki są równoległe, nazywa się **r ó w n o l e g ł o b o k i e m**. Przykłady równoległoboków widzimy na rys. 144.



Rys. 144.

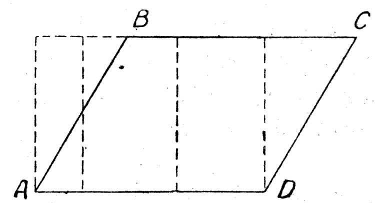
Możemy otrzymać równoległobok, kreśląc dwie pary odcinków równoległych tak, aby odcinki równoległe pierwszej pary przecinały odcinki równoległe drugiej pary (rys. 145).



Rys. 145.

W y s o k o ś ć.

Niech będzie dany równoległobok $ABCD$ jak na rys. 146. Poprowadźmy z dowolnego punktu boku AD prostopadłą do



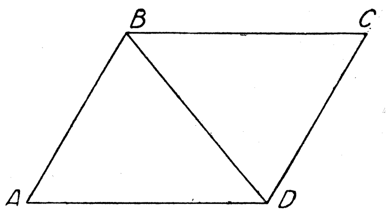
Rys. 146.

tegoż boku, aż do przecięcia się z bokiem BC lub jego przedłużeniem. Prowadząc kilka takich odcinków, przekonujemy się, że wszystkie są sobie równe. Którykolwiek z nich nazywamy wysokością równoległoboku, odpowiadającą podstawie *AD*.

W szczególności, jeśli w prostokącie jeden bok obierzemy za podstawę, to sąsiednie boki będą wysokościami.

Własność równoległoboku.

Wytnijmy z kartonu równoległobok *ABCD* i przetnijmy go wzdłuż przekątnej na dwa trójkąty *ABD* i *CDB* (rys. 147).



Rys. 147.

Nakładając następnie na siebie te trójkąty, przekonamy się, że są równe.

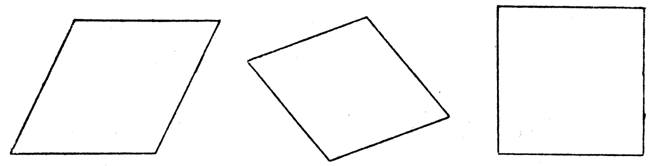
Widzimy stąd, że w równoległoboku przeciwległe boki i kąty są sobie równe.

Zadania.

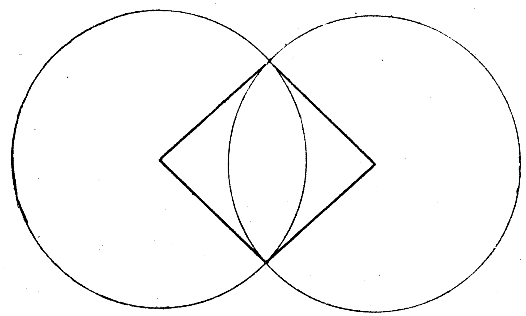
1. Narysuj równoległobok i porównaj przy pomocy cyrkla przeciwległe boki, a przy pomocy kątomierza przeciwległe kąty!
2. Narysuj równoległobok, którego dwa sąsiednie boki mają *a*) 5 *cm* i 6 *cm*; *b*) 4 *cm* i 7 *cm*; *c*) 2 *cm* i 4 *cm*, kąt zaś między niemi zawarty wynosi *a*) 30°; *b*) 60°; *c*) 45°!
3. Jaka jest wysokość równoległoboku, którego sąsiednie boki wynoszą 36 *m* i 45 *m*, kąt zaś między niemi 45°? (Odczytaj wysokość z planu równoległoboku w skali 1 : 1000!)
4. Narysuj równoległobok, którego podstawa wynosi 5 *cm*, wysokość 4 *cm*, a jeden z kątów przypodstawnych 45°!
5. Połącz w dowolnym czworokącie środki przyległych boków odcinkami i przekonaj się, że otrzymany czworokąt jest równoległobokiem!

Romb.

Równoległobok, w którym wszystkie cztery boki są równe, nazywa się rombem (rys. 148).

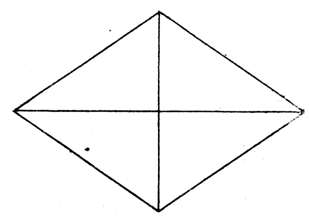


Rys. 148.



Rys. 149.

Romb możemy otrzymać, kreśląc tym samym otworem cyrkla dwa koła przecinające się w dwóch punktach, a następnie łącząc te punkty ze środkami kół (rys. 149).



Rys. 150.

Wycinając z papieru romb i zginając go we czworo wzdłuż przekątnych, otrzymamy cztery równe trójkąty prostokątne (rys. 150). Widzimy stąd, że: w rombie przekątne są do siebie prostopadłe i połowią się wzajemnie.

Zadania.

1. Narysuj romb, którego jeden bok wynosi 5 *cm*, a jeden z kątów 120^0!
2. Narysuj romb o przekątnych 8 *cm* i 10 *cm*!
3. Połącz w rombie środki przyległych boków odcinkami, a w otrzymanym czworokącie zmierz boki i kąty! Co to za czworokąt?
4. Nakreśl romb, a obok narysuj go w skali 1 : 3!

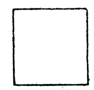
OBLICZANIE PÓL I OBJĘTOŚCI.

Obliczanie pól.

Miary metryczne kwadratowe.

Jednostkami metrycznemi pola czyli kwadratowemi są kwadraty o bokach 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm*, 1 *mm* lub 1 *km*.

Nazywamy je odpowiednio: metrem kwadratowym (1 m^2), decymetrem kwadratowym (1 dm^2), centymetrem kwadratowym



Rys. 151.

(1 cm^2), milimetrem kwadratowym (1 mm^2), kilometrem kwadratowym (1 km^2).

Na rys. 151 mamy 1 cm^2.

Oprócz tego używa się jeszcze następujących jednostek metrycznych kwadratowych:

Ar, t. j. kwadrat o boku 1 dekametr, który oznaczamy 1 *a*.

Hektar, t. j. kwadrat o boku 1 hektometr, który oznaczamy 1 *ha*.

Na rys. 152 mamy 1 dm^2, podzielony na 100 kwadracików, o bokach równych 1 *cm*.

Zatem:

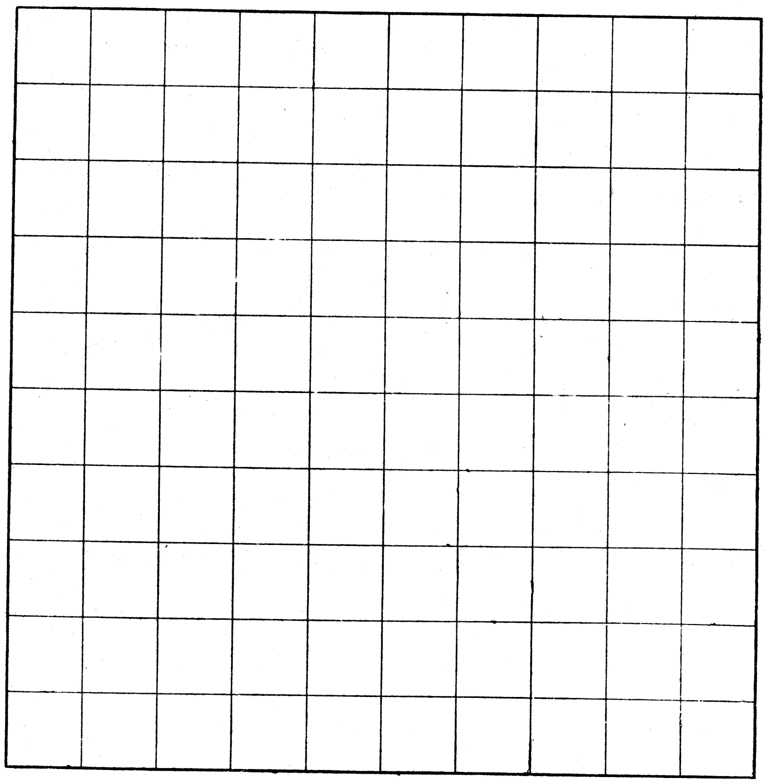
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2.$$

Podobnie postępując przekonamy się, że:

$1\ m^2 = 100\ dm^2$; $1\ dm^2 = 100\ cm^2$; $1\ cm^2 = 100\ mm^2$;
$1\ km^2 = 100\ ha$; $1\ ha = 100\ a$; $1\ a = 100\ m^2$.

Zadania.

1. Narysuj decymetr kwadratowy, obok centymetr kwadratowy, a wreszcie milimetr kwadratowy; ile mm^2 ma cm^2, a ile dm^2?
2. Ile *a*) m^2, *b*) dm^2, zawiera $1\,a$?
3. Ile *a*) ha, *b*) a zawiera $1\,km^2$?
4. W jakiej skali *a*) $1\,cm^2$, *b*) $1\,mm^2$ jest planem 1-go dm^2?



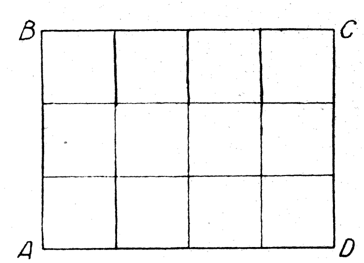
Rys. 152.

5. Przedstaw $1\,ha$ i $1\,a$ w skali 1:1000, podobnie $1\,km^2$ i ha w skali 1:10000!
6. Ile to jest metrów kwadratowych:
   a) $2\,ha$, *b*) $1\,ha\;\;15\,a$, *c*) $1\,ha\;\;83\,a\;\;15\,m^2$, *d*) $1\,ha\;\;76\,a\;\;93\,m^2$?
7. Ile to jest arów:
   a) $1200\,m^2$, *b*) $15\,ha\;\;3\,a$, *c*) $87\,ha\;\;49\,a$?

8. Ile to jest hektarów, arów i metrów kwadratowych:
   a) $1273\,m^2$, *b*) $12976\,m^2$, *c*) $125\,a\;\;18\,m^2$, *d*) $1753\,a\;\;27\,m^2$?
9. Ile to jest decymetrów kwadratowych:
   a) $2\,m^2$, *b*) $10500\,cm^2$, *c*) $151\,m^2\;\;4\,dm^2$, *d*) $18500\,cm^2$?
10. Ile to jest milimetrów kwadratowych:
    a) $1\,dm^2\;5\,cm^2$, *b*) $67\,cm^2\;34\,mm^2$, *c*) $1\,dm^2\;49\,cm^2\;78\,mm^2$?
11. Oblicz:
    a) $45\,ha\;\;7\,a + 41\,ha\;\;19\,a$, *b*) $1\,km^2\;\;49\,ha\;\;93\,a + 3\,km^2\;\;93\,ha\;\;14\,a$, *c*) $183\,ha\;\;18\,a - 141\,ha\;\;23\,a$, *d*) $157\,km^2\;\;27\,ha\;\;17\,a - 98\,km^2\;\;23\,ha\;\;49\,a$!
12. Oblicz:
    a) $15\,km^2\;\;8\,ha\;\;3\,a\,.\,4$, *b*) $17\,ha\;\;19\,a\,.\,24$, *c*) $3\,km^2\;\;26\,ha\;\;3\,a\;\;4\,dm^2\,.\,87$, *d*) $28\,ha\;\;71\,a:3$, *e*) $1\,km^2\;\;91\,ha\;\;52\,a:14$!
13. Ile potrzeba kostek, aby pokryć podłogę o polu $17\,m^2\;\;84\,dm^2$, jeśli jedna kostka pokrywa $4\,dm^2$?
14. Mieszkanie składa się z trzech ubikacyj; podłoga kuchni ma $17\,m^2$, jeden pokój ma podłogę o $15\,m^2\;\;75\,dm^2$ większą od podłogi kuchni, drugi zaś o $2\,m^2\;\;90\,dm^2$ mniejszą niż podłoga pierwszego pokoju. Jaką powierzchnię zajmuje mieszkanie?
15. Ktoś za $1\,ha\;\;35\,a$ ziemi zapłacił $6750\,zł$, a sprzedał za $8100\,zł$; ile zarobił na $1\,m^2$?
16. W ogrodzie o powierzchni $1\,ha\;\;25\,a\;\;60\,m^2$ przypada przeciętnie na $80\,m^2$ jedno drzewo owocowe; ile drzew owocowych rośnie w tym ogrodzie?
17. Podzielono $1\,ha\;\;8\,a\;\;49\,m^2$ ziemi pomiędzy dwóch spadkobierców w ten sposób, że jeden dostał o $25\,a\;\;19\,m^2$ więcej niż drugi; ile każdy z nich otrzymał?

Pole prostokąta.

Niech w prostokącie $ABCD$ bok AB ma długość $3\,cm$, zaś bok AD ma $4\,cm$ (rys. 153). Podzielmy bok AB na 3 równe części, zaś AD na 4 równe części. Każda z tych części ma długość $1\,cm$. Z punktów podziału boku AD poprowadźmy równoległe do boku AB. Prostokąt rozpadł się na 4 równe paski. Z punktów podziału boku AB poprowadzimy teraz równoległe do



Rys. 153.

boku AD. Prostokąt rozpadł się na równe kwadraty o boku 1 *cm*. Ponieważ pasków pionowych jest cztery, a każdy z nich składa się z trzech kwadratów, zatem nasz prostokąt zawiera:

$$3 \cdot 4 = 12$$

takich kwadratów.

Jeżeli więc taki kwadrat (który nazwaliśmy centymetrem kwadratowym) przyjmiemy za jednostkę powierzchni, to możemy powiedzieć, że powierzchnia naszego prostokąta wynosi 12 cm^2. Liczba 12 jest więc miarą pola naszego prostokąta, przy cm^2 jako jednostce pola.

Podobnież prostokąt, którego jeden z boków ma np. 5 *cm*, a drugi 6 *cm*, ma powierzchnię $5 \cdot 6$ czyli 30 cm^2. Widzimy zatem, że miara powierzchni prostokąta przy cm^2 jako jednostce równa się iloczynowi liczb, wyrażających w *cm* długości dwóch sąsiednich boków.

Gdybyśmy pomnożyli przez siebie liczby wyrażające w *m* (*km*, lub *dm*, lub *mm*) długości dwóch sąsiednich boków, to otrzymalibyśmy miarę powierzchni prostokąta przy m^2 (km^2, lub dm^2, lub mm^2) jako jednostce.

UWAGA. Jeżeli długości boków wyrażone są w różnych jednostkach, to należy wyrazić je przy pomocy tej samej jednostki, a następnie otrzymane liczby przez siebie pomnożyć.

Np. Prostokąt, którego jeden bok ma 2 *m*, a drugi 6 *dm*, ma pole $20 \cdot 6$ czyli 120 dm^2.

Pole kwadratu.

Aby obliczyć, ile centymetrów kwadratowych zawiera pole kwadratu, którego długość boku jest podana w centymetrach, należy liczbę, wyrażającą tę długość pomnożyć samą przez siebie, czyli podnieść do kwadratu. Więc np. kwadrat, którego bok ma 7 *cm* zawiera 7 cm^2 czyli 49 cm^2.

Zadania.

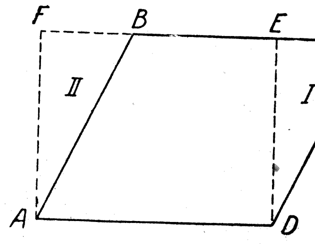
1. Oblicz pole prostokąta o bokach *a*) 4 *cm* i 6 *cm*, *b*) 5 *m* i 8 *m*, *c*) 4 *dm* 5 *cm* i 6 *dm* 8 *cm*, *d*) 12 *m* i 26 *m*. (w *a* i m^2), *e*) 125 *m* i 146 *m* (w *ha*, *a* i m^2), *f*) 130 *m* i 140 *m* (w *a*), *g*) 140 *km* i 144 *km* (w km^2)!
2. Oblicz pole kwadratu o boku *a*) 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm*, 7 *cm*, 8 *cm*, 9 *cm*, *b*) 2 *dm* 5 *cm*, *c*) 3 *m* 5 *dm*, *d*) 1 *dm* 4 *mm*!

3. Pole kwadratu wynosi: *a*) 4 cm^2, *b*) 9 m^2, *c*) 16 mm^2, *d*) 25 dm^2, *e*) 36 km^2; oblicz obwód!
4. Pole prostokąta wynosi: *a*) 48 cm^2, *b*) 108 dm^2, *c*) 207 m^2, *d*) 8 *a*, *e*) 12 *a*, jeden zaś z boków *a*) 6 *cm*, *b*) 9 *dm*, *c*) 15 *m*, *d*) 20 *m*, *e*) 30 *m*; oblicz obwód tego prostokąta!
5. Obwód kwadratu wynosi: *a*) 36 *m*, *b*) 6 *m* 8 *dm*; ile wynosi jego powierzchnia?
6. Obwód prostokąta wynosi: *a*) 30 *cm*, *b*) 17 *cm*, a jeden z boków *a*) 7 *cm*, *b*) 4 *cm* 5 *mm*; ile wynosi jego powierzchnia?
7. Narysuj plan jednego ara, a w nim (w rogu) plan prostokąta o bokach 2 *m* i 5 *m* w skali 1 : 100. Porównaj powierzchnię tego prostokąta z powierzchnią 1 *a*!
8. Niemetrycznemi jednostkami pola są: morga i włóka. Morga ma około 56 arów, włóka zaś 30 morgów. Ile arów, ile m^2 ma włóka? Przekonaj się, że pole prostokąta o bokach 70 *m* i 80 *m* wynosi 1 morgę. Narysuj ten prostokąt w skali: 1 : 10000!
9. Przekonaj się, że pole prostokąta o bokach 40 *dkm* i 42 *dkm* wynosi 1 włókę! Narysuj ten prostokąt w skali 1 : 10000!
10. Oblicz pole prostokąta o bokach 140 *m* i 80 *m* w morgach!
11. Wieśniak kupił 3 morgi gruntu za 8400 *zł*. Po ile płacił 1 m^2?
12. Willa ma 10 *m* długości, a 6 *m* szerokości i otoczona jest ogrodzeniem w kształcie prostokąta; boki tego prostokąta odległe są od ścian willi o 9 *m*. Oblicz długość ogrodzenia i powierzchnię niezabudowaną! Wykonaj plan w odpowiedniej skali!
13. Z 12 kwadratów o boku 8 *mm* ułóż prostokąt *a*) o najdłuższym obwodzie, *b*) o najkrótszym obwodzie!
14. Ogród ma kształt prostokąta o bokach 30 *m* i 50 *m*. Środkiem, równolegle do dłuższego boku, biegnie ścieżka o szerokości 1 *m* 5 *dm*. Przy końcu ścieżki jest altana 2 *m* 5 *dm* szeroka i tyleż głęboka. Narysuj plan tego ogrodu w skali 1 : 500 i oblicz uprawną powierzchnię ogrodu!

Pole równoległoboku.

Niech będzie dany równoległobok $ABCD$, jak na rys. 154. Poprowadźmy z punktu D wysokość, należącą do podstawy AD.

Przetnijmy teraz wzdłuż tej wysokości nasz równoległobok i przesuńmy trójkąt *I* w położenie *II*. Otrzymamy w ten sposób prostokąt *ADEF*, który ma równą powierzchnię z naszym równoległobokiem. Prostokąt ten i równoległobok mają równą podstawę i wysokość.



Rys. 154.

Zatem:

Powierzchnia równoległoboku równa jest powierzchni prostokąta, mającego tę samą podstawę i tę samą wysokość, co dany równoległobok.

Aby więc obliczyć, ile np. centymetrów kwadratowych zawiera pole równoległoboku, należy pomnożyć przez siebie liczby, wyrażające w *cm* długości podstawy i wysokości.

Należy uważać przy tworzeniu iloczynu, dającego miarę pola równoległoboku, aby liczby wyrażały długości podstawy i wysokości w tych samych jednostkach.

Zadania.

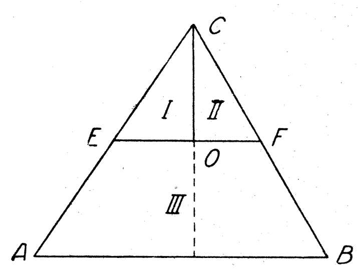
1. Wytnij równoległobok z papieru i podziel go tak na części, aby z nich dał się złożyć prostokąt o tej samej podstawie i wysokości!
2. Narysuj równoległobok, którego podstawa wynosi 3 *cm*, wysokość 2 *cm*, a jeden z kątów przypodstawnych 30°! Zamień go na prostokąt o tej samej powierzchni!
3. Wytnij z papieru 4 równe trójkąty prostokątne (nierównoramienne) i złóż z nich prostokąt i równoległobok! Co powiesz o powierzchniach tych czworokątów?
4. Oblicz powierzchnię równoległoboku, którego podstawa wynosi *a*) 5 *cm*, *b*) 8 *dm*, *c*) 120 *m*, *d*) 47 *m*, wysokość zaś *a*) 3 *cm*, *b*) 4 *cm*, *c*) 45 *m*, *d*) 125 *m*!
5. Oblicz powierzchnię równoległoboku, którego podstawa wynosi 5 *cm*, drugi bok 2 *cm*, a jeden z kątów przypodstawnych 60° (Wysokość zmierz miarką!)
6. Wytnij z papieru romb, którego przekątne wynoszą 4 *cm* i 6 *cm*, przetnij wzdłuż tych przekątnych i złóż z otrzymanych trójkątów prostokąt! Oblicz powierzchnię tego rombu!

7. Obwód rombu wynosi 20 *m*, wysokość zaś 4 *m* 8 *dm*; oblicz powierzchnię!
8. Narysuj *a*) kilka równoległoboków, *b*) kilka rombów i oblicz powierzchnię każdej z tych figur w mm^2! (Podstawy i wysokości zmierz miarką!)
9. Jaka jest powierzchnia równoległoboku, którego boki wynoszą 58 *m* i 96 *m*, kąt zaś między niemi 60°? (Wysokość odczytaj z planu tego równoległoboku w skali 1 : 1000!)

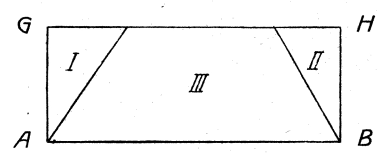
Pole trójkąta.

Niech będzie dany trójkąt *ABC*, jak na rys. 155. Z wierzchołka *C* poprowadźmy wysokość, należącą do podstawy *AB*.

Przez środek *O* tej wysokości nakreślmy równoległą do podstawy. Rozetnijmy teraz trójkąt na trzy części wzdłuż odcinka *EF* i *OC*. Otrzymamy w ten sposób dwa trójkąty *I* i *II* oraz czworobok *III*. Przełóżmy teraz trójkąty *I* i *II* jak wskazuje rys. 156. Otrzymamy prostokąt *ABHG*. Ponieważ trójkąt *ABC* składa się z trzech części, z których złożyliśmy ten prostokąt, zatem pole prostokąta równa się polu trójkąta. Prostokąt *ABHG* ma tę samą podstawę, co nasz trójkąt, a wysokość o połowę mniejszą.

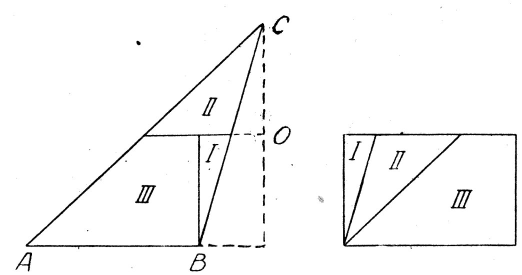


Rys. 155.



Rys. 156.

Na rys. 157 mamy zamieniony trójkąt na prostokąt o tej samej podstawie i o połowę mniejszej wysokości w wypadku, gdy wysokość trójkąta nie trafia podstawy.



Rys. 157.

Zatem:

Powierzchnia trójkąta równa się powierzchni prostokąta, mającego tę samą podstawę i o połowę mniejszą wysokość.

Aby więc obliczyć, ile np. centymetrów kwadratowych zawiera pole trójkąta, którego długość podstawy i wysokości podaną jest w centymetrach, należy wziąć połowę iloczynu dwóch liczb, wyrażających te długości.

W trójkącie prostokątnym możemy wziąć jako podstawę jedną, a jako wysokość drugą przyprostokątną.

UWAGA. Podobnie jak poprzednio, należy przy obliczaniu powierzchni trójkąta wyrazić długości jego podstawy i wysokości w tych samych jednostkach.

Zadania.

1. Wytnij z papieru trójkąt i przetnij na trzy części takie, by można z nich złożyć prostokąt o wspólnej podstawie!
2. Narysuj trójkąt o podstawie $4\,cm$ i bokach $7\,cm$ i $5\,cm$, a następnie prostokąt o tej samej podstawie i powierzchni!
3. Przetnij trójkąt równoramienny tak na dwie części, aby z nich dał się złożyć prostokąt!
4. Oblicz powierzchnię trójkąta, którego podstawa wynosi: *a*) $6\,cm$; *b*) $5\,m$; *c*) $3\,km$; *d*) $7\,km$ $8\,hm$; wysokość zaś: *a*) $4\,cm$; *b*) $4\,m$ $8\,cm$; *c*) $2\,hm$ $5\,dkm$; *d*) $10\,km$ $3\,hm$!
5. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne wynoszą: *a*) $5\,cm$ i $4\,cm$; *b*) $1\,m$ $2\,dm$ i $4\,m$ $6\,dm$; *c*) $3\,dkm$ $3\,m$ i $4\,dkm$ $8\,m$; *d*) $3\,km$ $7\,hm$ i $4\,km$ $5\,hm$. Oblicz powierzchnię!
6. Powierzchnia trójkąta wynosi: *a*) $32\,m^2$; *b*) $1\,a$; *c*) $1\,ha$; *d*) 1 morgę, podstawa zaś: *a*) $8\,m$; *b*) $20\,m$; *c*) $80\,m$; *d*) $140\,m$. Oblicz wysokość!
7. Powierzchnia trójkąta wynosi: *a*) $45\,m^2$; *b*) $1\,a$; *c*) $1\,ha$; *d*) 1 morgę, wysokość zaś: *a*) $10\,m$; *b*) $25\,m$; *c*) $100\,m$; *d*) $70\,m$. Oblicz podstawę!
8. Oblicz powierzchnię chorągiewki, którą otrzymasz, wycinając z prostokąta o bokach $4\,cm$ i $6\,cm$ trójkąt równoramienny, którego podstawa ma $4\,cm$, wysokość zaś $2\,cm$!
9. Narysuj kwadrat o boku $2\,cm$ i przy każdym boku trójkąt równoramienny o wysokości $3\,cm$; oblicz powierzchnię tej figury (gwiazdy)!

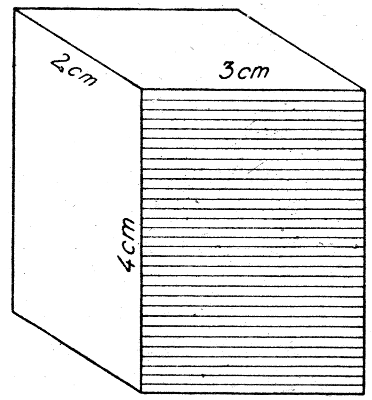
10. Narysuj kilka trójkątów, zmierz podstawy i wysokości w *mm* i oblicz powierzchnię każdego z nich!
11. Narysuj czworokąt i oblicz jego powierzchnię! (Przedziel przekątną na 2 trójkąty!)
12. Jaka jest powierzchnia trójkąta, którego boki wynoszą $57\,m$, $79\,m$ i $93\,m$? (Z planu tego trójkąta w skali $1:1000$ zmierz wysokość!).
13. Narysuj dowolną figurę, którą można rozbić na kilka trójkątów i oblicz jej powierzchnię!

Powierzchnia graniastosłupa.

Całkowitą powierzchnię graniastosłupa otrzymujemy, dodając do siebie pola poszczególnych ścian.

Całkowita powierzchnia graniastosłupa równa się zatem polu siatki graniastosłupa.

Aby obliczyć całkowitą powierzchnię prostopadłościanu, wystarczy znać długości trzech jego krawędzi, schodzących się w jednym wierzchołku. Długości te nazywamy **wymiarami** prostopadłościanu, lub odpowiednio szerokością, wysokością i długością prostopadłościanu. Na rys. 158 mamy prostopadłościan o wymiarach $2\,cm$, $3\,cm$, $4\,cm$.



Rys. 158.

Zadania.

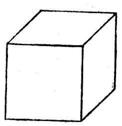
1. Zbuduj prostopadłościan o wymiarach $3\,cm$, $4\,cm$, $5\,cm$ i jego siatkę, a następnie oblicz całkowitą powierzchnię tego prostopadłościanu!
2. Oblicz powierzchnię prostopadłościanu o wymiarach: *a*) $2\,m$, $3\,m$, $4\,m$ $5\,dm$; *b*) $1\,dm$ $5\,cm$, $2\,dm$, $3\,dm$ $5\,cm$; *c*) $3\,dm$, $2\,dm$, $1\,dm$ $2\,cm$ $5\,mm$!
3. Oblicz powierzchnię sześcianu o krawędzi: *a*) $2\,cm$; *b*) $7\,dm$; *c*) $5\,dm$ $2\,cm$; *d*) $3\,m$ $7\,dm$!
4. Oblicz krawędź sześcianu, którego powierzchnia równa się: *a*) $54\,cm^2$; *b*) $6\,a$; *c*) $7\,a$ $26\,m^2$?

5. Oblicz powierzchnię bryły, jaką otrzymasz, kładąc na sześcianie o krawędzi 5 *cm*, sześcian o krawędzi 2 *cm*!
6. Pomalowano pokój o wymiarach 6 *m*, 5 *m*, 4 *m*, płacąc 6 *zł* za pomalowanie 1 m^2. Ile kosztowało pomalowanie pokoju (bez podłogi)?
7. Porównaj powierzchnie dwóch prostopadłościanów, z których jeden ma wymiary dwa razy większe niż drugi! Przykład liczbowy!
8. Podstawa graniastosłupa prostego jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych 3 *cm* i 4 *cm*, a wysokość graniastosłupa równa się 7 *cm*. Narysuj siatkę i oblicz powierzchnię tego graniastosłupa!
9. Podstawa graniastosłupa prostego jest rombem, którego bok równa się 4 *cm*, wysokość graniastosłupa wynosi 6 *cm*. Przyjmując, że kąt między bokami rombu wynosi: *a*) 45°, *b*) 60°, *c*) 125°, oblicz powierzchnię graniastosłupa, odczytując z rysunku wysokość podstawy!
10. Oblicz powierzchnię graniastosłupa prostego, którego wysokość równa się 8 *cm*, a którego podstawa jest równoległobokiem! Podstawa tego równoległoboku wynosi 5 *cm*, wysokość 3 *cm*, kąt zaś przy podstawie 45°!
11. Pomierz krawędzie pudełka zapałek i oblicz jego powierzchnię! Oblicz w ten sposób powierzchnię rozmaitych pudełek, kształtu prostopadłościanu!
12. Oblicz całkowitą powierzchnię sali szkolnej, pokoju (i t. p.)!

Obliczanie objętości.

Miary metryczne sześcienne.

Jednostkami metrycznemi objętości czyli sześciennemi są sześciany o bokach 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm* lub 1 *mm*.

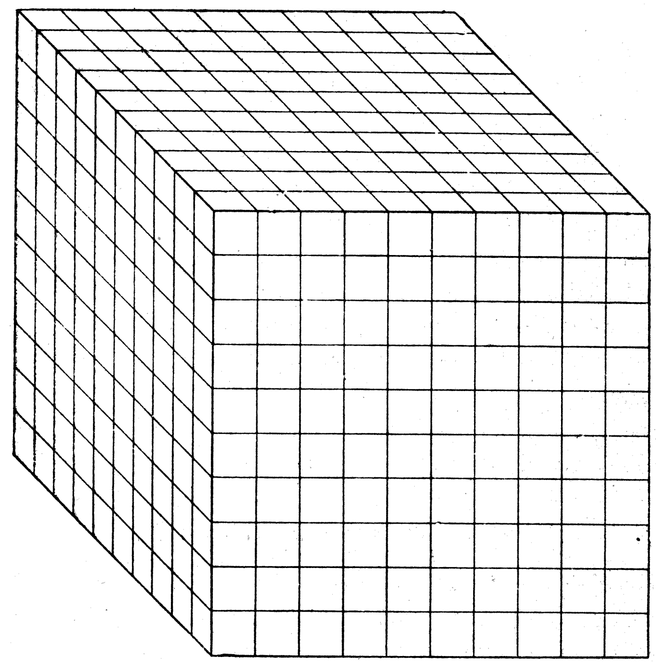


Rys. 159.

Nazywamy je odpowiednio: metrem sześciennym (1 m^3), decymetrem sześciennym (1 dm^3), centymetrem sześciennym (1 cm^3), milimetrem sześciennym (1 mm^3).

Rys. 159 przedstawia nam 1 cm^3.

Ustawiając na decymetrze kwadratowym (rys. 160) 100 sześcianików, z których każdy jest centymetrem sześciennym, otrzymamy warstwę w formie deseczki kwadratowej o grubości 1 *cm*. Ustawiając 10 takich warstw na sobie, otrzymamy sześcian o boku 1 *dm*.



Rys. 160.

Ponieważ sześcian nasz (1 dm^3) składa się z 10 warstw, a każda warstwa zawiera 100 cm^3, zatem:

$$1\, dm^3 = 1000\, cm^3.$$

Podobnie można przekonać się, że:

$$1\, m^3 = 1000\, dm^3;\ 1\, dm^3 = 1000\, cm^3;\ 1\, cm^3 = 1000\, mm^3.$$

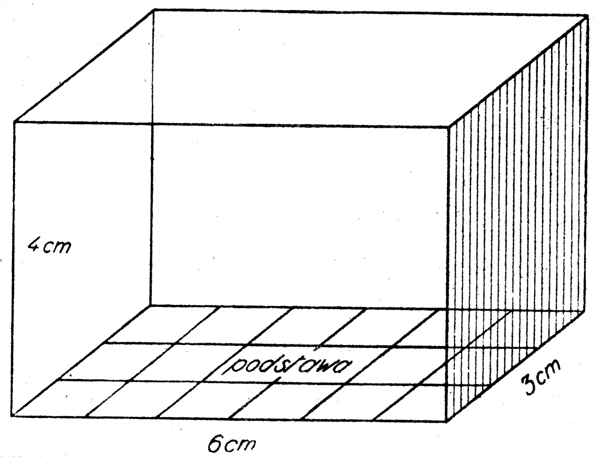
Zadania.

1. Ile mm^3 zawartych jest w dm^3; ile cm^3 w dm^3; ile dm^3 w m^3?
2. Ile to jest centymetrów sześciennych: *a*) 1 dm^3 27 cm^3, *b*) 17 dm^3 5 cm^3, *c*) 9 dm^3 231 cm^3?
3. Ile to jest milimetrów sześciennych: *a*) 3 cm^3 17 mm^3, *b*) 5 cm^3 136 mm^3, *c*) 13 cm^3 23 mm^3?
4. Jak się nazywa jednostka tysiąc razy mniejsza od: *a*) m^3, *b*) dm^3, *c*) cm^3?
5. Ile to jest m^3 i dm^3: *a*) 1236 dm^3, *b*) 15346 dm^3, *c*) 10036 dm^3?

6. Oblicz:
   a) $2\,m^3\ 36\,dm^3\ 735\,cm^3 + 1\,hm^3\ 9\,m^3\ 752\,dm^3\ 342\,cm^3$;
   b) $15\,m^3\ 236\,dm^3 — 7\,m^3\ 342\,dm^3$;
   c) $3\,m^3\ 264\,m^3 \times 25$;
   d) $15\,m^3\ 345\,dm^3 : 18$;
   e) $19\,m^3\ 416\,dm^3 : 3\,m^3\ 236\,dm^3$;
   f) $2\,m^3\ 394\,dm^3 : 125\,dm^3$!
7. Zbiornik zawiera $2\,m^3$ wody; ile zostanie wody po 30 dniach, jeśli dziennie zużywa się $60\,dm^3$ wody?
8. Podwórze w kształcie prostokąta o bokach $32\,m$ i $46\,m$ posypano piaskiem; ile piasku wypada na $1\,m^2$, jeśli rozsypano $22\,m^3\ 80\,dm^3$ piasku?
9. Lód, powstały z $1\,dm^3$ wody ma $1\,dm^3\ 95\,cm^3$ objętości; jaką objętość ma lód, powstały z $1\,m^3$ wody?

Objętość prostopadłościanu.

Niech będzie dany prostopadłościan np. o wymiarach $3\,cm$, $4\,cm$ i $6\,cm$, jak na rys. 161. Podstawą tego prostopadłościanu jest prostokąt o wymiarach $6\,cm$ i $3\,cm$, a więc o polu 6×3



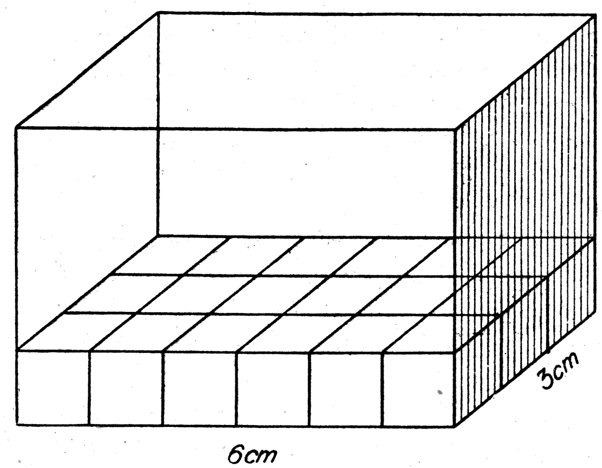
Rys. 161.

t. j. $18\,cm^2$. Podstawę tę możemy zatem podzielić na 18 kwadratów, z których każdy jest jednym centymetrem kwadratowym.

Na każdym z tych kwadratów ustawiamy jeden centymetr sześcienny, co da nam razem 18 centymetrów sześciennych,

tworzących dolną w a r s t w ę (rys. 162). Aby otrzymać cały prostopadłościan, musimy takich warstw ułożyć na sobie cztery, gdyż wysokość jednej warstwy jest $1\,cm$, całego zaś graniastosłupa $4\,cm$.

Widzimy stąd, że prostopadłościan nasz składa się z 18×4 t. j. 72 sześcianów, z których każdy jest równy centymetrowi



Rys. 162.

sześciennemu. Zatem objętość naszego prostopadłościanu wynosi: $6 \times 3 \times 4 = 18 \times 4$ t. j. $72\,cm^3$. Aby więc obliczyć, ile cm^3 ma objętość prostopadłościanu, należy:

albo utworzyć iloczyn trzech liczb, wyrażających w *cm* jego wymiary,

albo pomnożyć liczbę, wyrażającą w cm^2 pole podstawy, przez liczbę, wyrażającą w *cm* wysokość.

Objętość sześcianu.

W sześcianie wszystkie trzy wymiary są sobie równe. Więc objętość sześcianu o krawędzi np. $2\,cm$ wynosi $2 . 2 . 2$ t. j. $2^3\ cm^3 = 8\,cm^3$.

Widzimy stąd, że objętość sześcianu otrzymujemy, podnosząc do trzeciej potęgi liczbę, wyrażającą długość krawędzi.

Zadania.

1. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach: *a)* 3 *cm*, 5 *cm* i 6 *cm*, *b)* 4 *dm*, 5 *dm* i 8 *dm*, *c)* 5 *m*, 7 *m* i 9 *m*, *d)* 1 *dm* 4 *cm*, 2 *dm* i 3 *dm*!
2. Oblicz objętość sześcianu o boku: *a)* 2 *cm*, *b)* 3 *dm*, *c)* 4 *m*, *d)* 5 *mm*, *e)* 6 *cm*, *f)* 7 *dm*, *g)* 8 *m*, *h)* 11 *dm* *i)* 1 *dm* 1 *cm*!
3. Ile wynosi bok sześcianu, który ma objętość: *a)* 8 cm^3, *b)* 27 mm^3, *c)* 64 dm^3, *d)* 125 m^3, *e)* 216 cm^3, *f)* 343 dm^3, *g)* 512 mm^3, *h)* 729 mm^3?
4. Klasa, w której znajduje się 31 uczniów i profesor, ma wymiary 12 *m*, 8 *m* i 4 *m*; ile m^3 powietrza wypada przeciętnie na 1 osobę?
5. Podstawa pudełka jest prostokątem o bokach 8 *cm* i 6 *cm*, wysokość zaś pudełka wynosi 9 *cm*. Jeśli w tem pudełku ułożysz warstwami 240 kostek o boku 1 *cm*, to jak wysoko one będą sięgać? Ile kostek jeszcze potrzeba, aby napełnić pudełko?
6. Zbuduj prostopadłościan, którego objętość wynosi 6 cm^3?
7. Podaj wymiary trzech różnych prostopadłościanów, z których każdy ma objętość 12 cm^3!
8. Wykopano dół 5 *m* szeroki, 6 *m* długi i 2 *m* głęboki; ile należało zapłacić, jeśli wykopanie 1 m^3 ziemi kosztuje 2 *zł*?
9. Korytarz o szerokości 4 *m*, a wysokości 5 *m* przedzielono murem grubości 3 *dm*. W murze tym wybito drzwi o szerokości 1 *m*, a wysokości 2 *m*; jaka jest objętość tego muru?
10. Zmierz wymiary pudełka zapałek i oblicz jego objętość w mm^3! Policz następnie zapałki w pełnem pudełku i oblicz z tego przeciętną objętość zapałki!
11. Naczynie ma kształt prostopadłościanu, którego podstawa jest kwadratem o boku 5 *cm*. Do naczynia wlano wody, a następnie rzucono kamień, przyczem powierzchnia wody podniosła się o 2 *cm*; oblicz objętość kamienia!
12. Kasa żelazna w kształcie prostopadłościanu ma wymiary zewnętrzne 1 *m*, 6 *dm*, 1 *m* 4 *dm*, grubość zaś ścian wynosi 1 *dm*; jaka jest pojemność kasy?
13. Jaka jest różnica objętości pomiędzy sześcianem o krawędzi 1 *m*, a sześcianem o krawędzi 9 *dm*?

Jednostki pojemności i ciężaru.

Miary metryczne pojemności.

Do mierzenia objętości ciał płynnych i sypkich używa się następujących jednostek:

1 litr (1 *l*) jest to jeden dm^3.
1 hektolitr (1 *hl*) jest to 100 *l*.
1 decylitr (1 *dl*) jest to dziesiąta część litra.
1 centylitr (1 *cl*) jest to dziesiąta część decylitra.

A więc:

1 *hl* = 100 *l*; 1 *l* = 10 *dl*; 1 *dl* = 10 *cl*.

Mówimy zazwyczaj: 1 *l* wody, mąki, a nie: 1 dm^3 wody, mąki.

Mówimy, że naczynie ma pojemność jednego litra, decylitra i t. d., jeśli napełnimy go całkowicie, wlewając do niego 1 *l*, 1 *dl* i t. d. wody.

Zadania.

1. Ile to jest litrów: *a)* 1 m^3, *b)* 5 m^3, *c)* 17 m^3 136 dm^3, *d)* 2 m^3 35 dm^3?
2. Ile to jest *hl*: *a)* 2 m^3, *b)* 3 m^3 200 dm^3, *c)* 52 m^3?
3. Ile to jest m^3: *a)* 10 *hl*, *b)* 360 *hl*, *c)* 15000 *l*, *d)* 10000 *l*?
4. Ile centymetrów sześciennych zawiera 1 *dl*, a ile 1 *cl*?
5. Jeżeli 1 *l* wina kosztuje 4 *zł*, to ile kosztuje *a)* 1 *hl* 35 *l*, *b)* 3 *hl* 50 *l*?
6. Ile flaszek o pojemności 7 *dl* napełniono z beczki o pojemności 1 *hl* 54 *l*?
7. Krowa dostarcza dziennie 8 *l* mleka; ile wieśniak otrzymuje miesięcznie za mleko, jeśli posiada 5 krów, a 1 *l* mleka sprzedaje po 40 groszy?
8. Ile szklanek o pojemności 25 *cl* można napełnić z beczki, zawierającej 2 *hl* 35 *l* wina?
9. Basen ma kształt prostopadłościanu, którego podstawa ma wymiary 5 *m* i 4 *m*. Jak wysoko sięga woda w tym basenie, jeśli wlano 160 *hl* wody?
10. Z basenu w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 2 *m*, 1 *m* 5 *dm*, 3 *m* wypływa w ciągu jednej minuty 3 *l* wody; w jakim czasie basen opróżni się?

Miary metryczne ciężaru.

Jednostką ciężaru jest 1 gram (1 *g*), t. j. ciężar 1 cm^3 wody

Większemi jednostkami są:

1 dekagram (1 *dkg*) = 10 *g*
1 kilogram (1 *kg*) = 1000 *g*
1 centnar metryczny, albo kwintal (1 *q*) = 100 *kg*
1 tonna (1 *t*) = 1000 *kg*.

Mniejszemi jednostkami od grama są:

1 decygram (1 *dg*), t. j. dziesiąta część grama.
1 centygram (1 *cg*), t. j. setna część grama.
1 miligram (1 *mg*), t. j. tysięczna część grama.
Do ważenia służy przyrząd, zwany wagą.

Zadania.

1. *a*) Ile 1 *g* zawiera *dg*, *cg*, *mg*?
   b) Ile 1 *dg* zawiera *cg*, *mg*?
   c) Ile 1 *cg* zawiera *mg*?
2. Ile to jest *g*: 2 *kg*, 3 *kg* 53 *dkg*, 12 *kg* 48 *dkg* 16 *g*, 50 *dkg*?
3. Ile to jest *g*, *dg*, *cg* i *mg*: 15368 *mg*, 18423 *mg*?
4. Ile to jest *q*: 1 *t*, 5 *t*, 16 *t*?
5. Ile to jest *dkg*: 1 *kg*, 15 *kg*, 1 *q*, 1 *q* 56 *kg* 35 *dkg*?
6. Jeden kilogram kawy kosztuje 36 *zł*; ile kosztuje 250 *g*?
7. Zbiornik zawiera 50 *hl* wody; jaki jest ciężar tej wody w tonnach?
8. Próżna flaszka waży 16 *dkg*, napełniona zaś wodą 66 *dkg*· jaka jest pojemność flaszki?
9. Próżne naczynie o pojemności 4 dm^3 waży 2 *kg*; ile waży napełnione wodą?
10. Litr oliwy waży 915 *g*; ile waży flaszka oliwy, jeśli flaszka waży 250 *g*, a ma pojemność 75 *cl*?
11. Ile waży płytka żelazna o grubości 1 *cm*, długości 1 *dm* 5 *cm*, a szerokości 1 *dm* 1 *cm*, jeśli 1 cm^3 żelaza waży 7 *g* 8 *dg*?
12. Jeden cm^3 złota waży 19 *g*. Ile kosztuje sztaba o wymiarach 1 *dm*, 2 *cm*, 3 *cm*, jeśli 1 *g* złota kosztuje 6 *zł*?
13. 15 *dl* rtęci waży 20 *kg* 40 *dkg*; ile waży 1 *cl*? Jaka musi być pojemność naczynia, aby pomieściło 61 *kg* 20 *dkg*?

14. Flaszka napełniona alkoholem waży 3 *kg* 200 *g*, próżna zaś 1 *kg* 200 *g*. Jaka jest pojemność flaszki, jeśli 1 cm^3 alkoholu waży 8 *dg*?
15. Kupiec zmieszał 8 *kg* herbaty po 40 *zł* za 1 *kg*, z 12 *kg* herbaty po 30 *zł* za 1 *kg*; ile kosztuje 1 *dkg* tej mieszaniny?
16. Beczułka pełna wody waży 42 *kg*. Jeśli do niej nalejemy tylko 10 *l* wody, to waży 22 *kg*; jaki jest ciężar i jaka pojemność beczułki?

CZTERY DZIAŁANIA W ZAKRESIE POZA 10000.

Rozszerzenie zakresu liczb poza 10000.

Jednostki wyższych rzędów.

Przekonaliśmy się, że do nazywania i pisania liczb w zakresie poniżej 10000 wystarczyły jednostki czterech pierwszych rzędów. Aby rozszerzyć zakres liczb, określimy nowe jednostki wyższych rzędów ponad cztery.

Jak już wiemy:

10 jedn. = 1 dziesiątka
10 dzies. = 1 setka
10 setek = 1 tysiąc,

a więc 10 jednostek rzędu pierwszego równa się jednostce rzędu drugiego; 10 jednostek rzędu drugiego równa się jednostce rzędu trzeciego i t. d. Opierając się na tej zasadzie, określamy jednostki rzędów wyższych w następujący sposób:

Jednostka rzędu piątego (dziesiątka tysięcy) = 10 tysięcy
„ „ szóstego (setka tysięcy) = 10 dziesiątek tysięcy
„ „ siódmego (miljon) = 10 setek tysięcy
„ „ ósmego (dziesiątka miljonów) = 10 miljonów
i t. d.

Na następującej tablicy zaznaczone mamy jednostki aż do rzędu trzynastego.

13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Rząd
biljon	setki tysięcy miljonów	dziesiątki tysięcy miljonów	tysiące miljonów (miljardy)	setki miljonów	dziesiątki miljonów	miljony	setki tysięcy	dziesiątki tysięcy	tysiące	setki	dziesiątki	jednostki	

UWAGA: Zamiast mówić „tysiąc miljonów“ mówimy nieraz „miljard“, a zamiast „biljon“ mówimy także „tysiąc miljardów“.

Pisanie i czytanie liczb w systemie dziesiętnym.

Chcąc jakiś zbiór przedmiotów policzyć, postępujemy jak poprzednio, a zatem: łączymy pojedyncze przedmioty w dziesiątki, te dziesiątki w setki, otrzymane setki w tysiące, te tysiące w dziesiątki tysięcy i t. d. W ten sposób rozłożymy zbiór na szereg jednostek rozmaitych rzędów, przyczem jednostek tego samego rzędu będzie co najwyżej dziewięć. Przypuśćmy, że, postępując tak z jakimś zbiorem przedmiotów, otrzymaliśmy trzy miljardy, pięć setek miljonów, dwie dziesiątki miljonów, sześć miljonów, cztery setki tysięcy, trzy tysiące, jedną dziesiątkę i siedm jednostek.

Liczbę tę zapisujemy w następujący sposób:

3526403017.

Każda z cyfr oznacza ilość jednostek tego rzędu, na którem miejscu stoi. A zatem, cyfra stojąca na pierwszem miejscu (od prawej ręki ku lewej), oznacza ilość jednostek, cyfra na drugiem miejscu, ilość dziesiątek, na szóstem ilość setek tysięcy i t. d. Cyfra zero, stojąca na pewnem miejscu, oznacza brak jednostek odpowiedniego rzędu.

Liczbę powyższą czytamy: trzy miljardy, pięćset dwadzieścia sześć miljonów, czterysta trzy tysiące, siedmnaście.

Liczby odczytujemy w następujący sposób: Dzielimy przecinkami liczbę (od prawej ręki ku lewej) na klasy po trzy cyfry, lub na klasy po sześć cyfr. Następnie odczytujemy każdą klasę zosobna, wymieniając przytem jednostkę najmniejszego rzędu danej klasy.

Np. *a)* $\underbrace{5\,3}_{\text{biljonów}},\underbrace{4\,5\,6}_{\text{miljardów}},\underbrace{7\,1\,4}_{\text{miljonów}},\underbrace{7\,1\,2}_{\text{tysięcy}},3\,4\,2$

Czytamy: 53 biljonów, 456 miljardów, 714 miljonów, 712 tysięcy, 342.

b) $\underbrace{5\,3}_{\text{biljonów}}\;\underbrace{4\,5\,6\,7\,1\,4}_{\text{miljonów}},7\,1\,2\,3\,4\,2$

Czytamy: 53 biljonów, 456714 miljonów, 712342.

Jednostki wyższych rzędów zawarte w liczbie.

Mamy jakąś liczbę, np. 3542615, i chcemy dowiedzieć się, ile ta liczba zawiera jednostek pewnego rzędu, np. piątego, t. j. dziesiątek tysięcy.

Liczba nasza składa się z 3 jednostek rzędu siódmego, z 5 jednostek rzędu szóstego, z 4 jednostek rzędu piątego i z innych jeszcze jednostek rzędów niższych.

3 jedn. rzędu VII = 30 jedn. rzędu VI = 300 jedn. rzędu V.
5 „ „ VI = 50 „ „ V.
4 „ „ V = 4 „ „ V.

Widzimy zatem, że liczba nasza zawiera 354 jednostek rzędu piątego, t. j. dziesiątek tysięcy.

Liczbę 354 otrzymamy, odrzucając w danej liczbie cyfry jednostek rzędów niższych niż piąty.

Zatem liczbę jednostek pewnego rzędu zawartych w danej liczbie otrzymujemy, wykreślając cyfry jednostek rzędów niższych.

Np. liczba 752146389 zawiera:
75214638 dziesiątek
7521463 setek
752146 tysięcy
i t. d.

Zadania.

1. Przeczytaj: 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, 100000000, 1000000000, 10000000000!
2. Napisz: sto, dziesięć tysięcy, dziesięć miljonów, sto tysięcy, miljard, miljon, biljon!
3. Na którem miejscu w liczbie stoi cyfra oznaczająca: setki, setki tysięcy, miljony, setki miljonów, biljony, miljardy, setki miljardów?
4. Przeczytaj liczby:
   a) 58624, *b*) 90023, *c*) 125819, *d*) 503018, *e*) 2684293, *f*) 3000107, *g*) 15001394, *h*) 103519008, *i*) 900000047, *k*) 3183514689, *l*) 417583291743.
5. Napisz przy pomocy cyfr następujące liczby:
   a) sto ośm tysięcy, pięćset trzy,
   b) pięćset ośmnaście tysięcy, trzysta dwadzieścia dziewięć,

   c) trzy miljony, sześćset dwa tysięcy, sto osiemnaście,
   d) pięć miljonów, trzy tysiące, czterdzieści siedem,
   e) dziewięćset miljonów, sześćset tysięcy, cztery,
   f) dwa biljony, trzydzieści cztery miljony, siedmset tysięcy, dziewięćdziesiąt pięć,
   g) czterdzieści jeden miljardów, dwieście trzynaście tysięcy, sześćset czterdzieści dziewięć,
   h) dwadzieścia biljonów, trzysta miljonów, tysiąc dwa,
   i) tysiąc dwieście pięćdziesiąt trzy biljonów!
6. Jakie cyfry na miejscu setek, dziesiątek tysięcy, miljonów, miljardów znajdują się w liczbach: 10367542798, 57305417519, 84172300000?
7. *a*) Ile tysięcy zawiera miljon?
   b) „ dziesiątek tysięcy zawiera sto miljonów?
   c) „ setek tysięcy „ miljard?
   d) „ miljonów „ miljard?
   e) „ miljonów „ biljon?
   f) „ miljardów „ biljon?
8. Ile dziesiątek, setek, dziesiątek tysięcy, setek tysięcy, miljonów, dziesiątek miljonów jest zawartych w liczbie: *a*) 52738512, *b*) 103001083, *c*) 200001695, *d*) 671456831, *e*) 5700800502?
9. Ile *a*) m, *b*) dm, *c*) cm, *d*) mm zawiera 1 km?
10. Ile *a*) m^2, *b*) dm^2, *c*) cm^2, *d*) mm^2 zawiera 1 km^2?
11. *a*) Ile 1 km^3 zawiera m^3? *b*) Ile 1 m^3 zawiera dm^3, cm^3, mm^3?
12. *a*) Ile to jest groszy: 100 *zł*, 1000 *zł*, 100000 *zł*?
    b) Ile to jest złotych: miljon groszy, miljard groszy, biljon groszy?
13. Umieść pomiędzy następującemi parami liczb odpowiednie znaki nierówności:
    125743 i 125443; 8612004 i 8612014, 12135468 i 9899989, 100001 i 99999!

Dodawanie.

Dodawanie w systemie dziesiętnym.

1. Oblicz sumę liczb 27536 i 12057!
2. Jaka liczba jest większa o 30579 od liczby 9808?
3. Oblicz sumę i sprawdź:
   a) 73526 + 58498,

b) 90351 + 26853,
c) 52643 + 25658,
d) 81052 + 37205,
e) 5384 + 7027 + 4056 + 9150,
f) 4606 + 477 + 4214 + 575 + 2345 + 57266,
g) 34723 + 40013 + 72051 + 9208 + 90057 + 834,

4. Oblicz sumę wszystkich liczb:

23894	38053	2546
13099	47315	85205
54472	3071	60583

a) dodając kolumnami; *b*) dodając wierszami.

5. Sprawdź, że niżej podany kwadrat jest kwadratem magicznym, t. j. że sumy liczb każdego wiersza, każdej kolumny i każdej przekątnej są sobie równe.

16704	3709	2705	13716
5715	10706	11710	8703
9714	6707	7711	12702
4701	15712	14708	1713

6. Dodaj do siebie liczbę 378565; otrzymaną sumę znowu dodaj do siebie i t. d., aż otrzymasz liczbę większą od 1000000!
7. Oblicz i sprawdź:
a) 512 *km* 483 *m* 26 *cm* + 95 *km* 846 *m* 75 *cm*,
b) 215 *km* 72 *m* 58 *cm* + 409 *km* 35 *m* 46 *cm* + + 53 *km* 284 *m* 4 *cm*,
c) 52^0 46' 15" + 36^0 8' 54",
d) 46^0 38' 24" + 15^0 23' 35" + 6^0 42' 9",
e) 583 *kg* 615 *g* + 482 *kg* 87 *g*,
f) 2 godz. 15 min. 35 sek + 7 godz. 28 min. 42 sek. + + 5 godz. 35 min. 8 sek.!
8. Ile to jest:
a) 35 *km* + 234 *km* + 12536 *dkm* + 52365 *m*,
b) 13 km^2 + 327 *ha* + 4721 *a* + 15465 m^2,
c) 15 *t* + 78 *q* + 26321 *kg*?

9. Obszar i zaludnienie Polski w r. 1921 województwami wynosiły:

Nazwa województwa	Obszar w km^2	Ludność
1. Warszawa	121	931000
2. Warszawskie	29310	2112000
3. Łódzkie	19034	2251000
4. Kieleckie	25736	2534000
5. Lubelskie	31160	2086000
6. Białostockie	32518	1302000
7. Nowogródzkie	37195	1300000
8. Poleskie	41463	877000
9. Wołyńskie	29943	1433000
10. Poznańskie	26603	1974000
11. Pomorskie	16386	939000
12. Krakowskie	17448	1990000
13. Lwowskie	27024	2719000
14. Stanisławowskie	18368	1348000
15. Tarnopolskie	16240	1430000
16. Śląsk Cieszyński	1009	145000
17. Ziemia Wileńska	13490	489000
18. Śląsk Górny	3225	980000

Oblicz obszar i zaludnienie Polski w r. 1921!

10. Europa ma 9887000 km^2, Azja 44219000 km^2, Afryka 29825000 km^2, Ameryka 39595000 km^2, Australja 8963000 km^2, lądy podbiegunowe 18210000 km^2; oblicz powierzchnię całkowitą lądu!
11. Obieg biletów państwowych, zdawkowych, monet i bilonów w dniu 31 sierpnia 1927 r. wynosił: bilety państwowe 723132180 *zł*, bilety zdawkowe 198277690 *zł*, monety srebrne 89703194 *zł*, bilon 48515322 *zł* 66 *gr*. Ile wynosiła razem cała emisja?

Własności sumy.

1. Objaśnij na sumie: 725836 + 459321 prawo przemienności!
2. Objaśnij na sumie: 352209 + 453287 + 785321 prawo łączności!
3. Oblicz:
a) 75283 + (234120 + 306),
b) (16835 + 23789) + (1256 + 17803).

4. *a*) W Polsce w roku 1919 wydobyto węgla 24976000 *t* a w roku 1920 o 6071000 *t* więcej; ile węgla wydobyto w obu latach?
   Odp. 24976000 + (24976000 + 6071000).
   b) Fabryka w pierwszem półroczu przyniosła 56789 *zł* 47 *gr* dochodu, w drugiem zaś o 13895 *zł* 19 *gr* więcej; jaki dochód przyniosła w całym roku?
   c) Piotr kupił dom za 32500 *zł*, zaś Jan kupił dom o 12500 *zł* droższy. Ile kosztowały oba domy razem?
5. O ile zmieni się suma, jeśli jeden jej składnik powiększymy o 1000?
6. O ile zmieni się suma, jeśli jeden składnik powiększymy o 12536, drugi zaś o 17849?
7. Nie obliczając sumy, wskaż, która ze sum jest większa i o ile:
   a) 16325 + 8489 + 21671; 16325 + 9489 + 21671;
   b) (3527 + 17326) + 45322; 3527 + (17326 + 45422)!

Rachunek pamięciowy.

1. Dodaj w pamięci:

a) 30000 + 50000;	*b*) 700000 + 200000;
20000 + 60000;	500000 + 600000;
50000 + 40000;	800000 + 700000;
60000 + 70000;	900000 + 200000;

   c) 7000000 + 8000000;
   4000000 + 9000000;
   5000000 + 5000000;
   6000000 + 9000000;
   3000000 + 8000000!

2. Dodaj w pamięci:

a) 52600 + 700;	*b*) 756000 + 20000;
34200 + 3000;	1800000 + 300000;
29000 + 5000;	7300000 + 700000;
112000 + 30000;	3025000 + 2000000!

3. Dodaj w pamięci:

a) 25000 + 37000;	*b*) 235000 + 27000;
340000 + 180000;	548000 + 38000;
270000 + 110000;	655000 + 19000;
3600000 + 5200000;	1230000 + 450000!

4. W Polsce wytworzono papieru (w przybliżeniu) w roku 1919 — 15000 *t*, w roku 1920 — 20000 *t*, w roku 1921 — 52600 *t*; ile tonn papieru wytworzono w tych trzech latach?
5. Jaka liczba jest o 25000 większa od 758000?
6. Powierzchnia Niemiec wynosi 404000 km^2, Francji zaś jest o 147000 km^2 większa; ile km^2 ma powierzchnia Francji?

Ćwiczenia.

1. Znajdź liczbę o 7218 większą od sumy liczb 5437 i 2400!
2. Ojciec miał 36 lat 5 miesięcy i 18 dni, gdy syn mu się urodził. Syn ukończył studja po upływie 22 lat 7 miesięcy i 14 dni. Jaki wiek miał wówczas ojciec? Jaka była data ostatniego egzaminu, jeśli ojciec urodził się 25 lipca 1850 roku?
3. Jaka liczba jest tysiączna zkolei po liczbie 52036?
4. Odległość księżyca od ziemi wynosi 384395 *km*, zaś promień słońca jest o 311105 *km* większy. Ile *km* wynosi promień słońca?
5. Sprzedając majątek ziemski za 23850 *zł* stracono 8960 *zł*. Ile kosztował majątek?
6. Kupiono towaru za 29050 *zł*, a sprzedano go z zyskiem 8235 *zł*. Za ile sprzedano towar?
7. Przedsiębiorstwo dało w pierwszym roku 12837 *zł* dochodu, w drugim o 8294 *zł* więcej, zaś w trzecim o 908 *zł* więcej niż w pierwszym i drugim. Jaki dochód dało przedsiębiorstwo w ciągu trzech lat?
8. Za druk książki zapłacono 11580 *zł*, za papier 2348 *zł*, za broszurowanie 375 *zł*, zaś honorarjum autorskie wynosiło 2500 *zł*. Ile kosztowało wydanie książki?
9. Cenę kupna domu wpłacono w 5-ciu ratach: pierwsza wynosiła 14500 *zł*, a każda następna była o 3225 *zł* większa od poprzedniej. Za ile kupiono dom?
10. Zegar wskazuje 4-tą godzinę 57 minut i 32 sekund, a spóźnia się 2 minuty 45 sekund. Jaka jest prawdziwa godzina?
11. Pociąg wyjechał w sobotę o godzinie 17 min. 40 sek. 35 i jechał 55 godz. 45 min. 40 sek. Którego dnia i o której godzinie przybył pociąg na miejsce przeznaczenia?
12. Z dwóch miast wyjechały naprzeciw siebie dwa samochody. Jeden przejechał 37805 *m*, drugi 44996 *m*, poczem

odległość dzieląca te samochody wynosiła 11038 *m*. Jaką była odległość między miastami?

13. Oś ziemska wynosi 12712160 *m*, zaś średnica równika jest od niej o 42630 *m* dłuższa. Ile wynosi średnica równika?

Odejmowanie.

Odejmowanie w systemie dziesiętnym.

1. Ile to jest 18 — 6? Dlaczego?
   Wymień odjemną, odjemnik i resztę!
2. Jak obliczysz odjemną, znając odjemnik i resztę?
3. Jak sprawdzisz, że:
   18756 — 8868 = 9888?
4. Oblicz różnicę i sprawdź:
   a) 28305 — 19326; 36270 — 15006; 51000 — 17308;
   b) 90513 — 21525; 86128 — 45296; 154320 — 96381;
   c) 534289 — 35427; 786213 — 82196; 512000 — 318000;
   d) 3141592 — 2718281; 51289321 — 12345517;
   8000000 — 3214918;
   e) 4073257 — 2507839; 19321819 — 18526785:
   200000000 — 195531628!
5. Jaka liczba jest o 32007 mniejsza od liczby 75940?
6. Jaką liczbę należy odjąć od 12472, aby otrzymać 9538?
7. Jaką liczbę należy dodać do liczby 28426, aby otrzymać liczbę 37905?
8. Które z podanych wyrażeń jest większe i o ile:
   a) 28405 — 17538; 15493 — 4586;
   b) 70846 — 29059; 53684 — 13825?
9. Oblicz, a następnie sprawdź:

a)
18326 *zł* 52 *gr*
— 19521 „ 75 „

365215 *zł* 18 *gr*
— 46512 „ 47 „

535825 *zł* 15 *gr*
— 236453 „ 27 „

b)
217 *kg* 387 *g*
— 124 „ 509 „

12386 *kg*
— 9459 „ 183 *g*

13 *t* 538 *kg* 921 *g*
— 5 „ 718 „ 361 „

c)
238 *km* 521 *m*
— 156 „ 718 „

1536 *km* — *m*
— 49 „ 529 „

20000 *km* — *m*
— 5429 „ 365 „

d)
$86^0\ 29'$
— $39^0\ 52'$

$39'\ 52''$
— $18'\ 46''$

$128^0\ 52'\ 35''$
— $96^0\ 53'\ 42''$

e)
7 godz. 18 min. 3 sek.
— 4 „ 25 „ 15 „

5 dni 18 godz. 36 min.
— 4 „ 21 „ 42 „

15 dni
— 12 dni 4 godz. 18 min.

f)
25 *ha* 36 *a* 53 m^2
— 17 „ 19 „ 60 „

36 km^2 48 *ha* 52 *a*
— 25 „ 59 „ 82 „

27 km^2 27 *ha* 13 *a* — m^2
— 8 „ 41 „ 18 „ 23 „

g)
321 m^3 358 dm^3
— 289 „ 521 „

758 m^3 405 dm^3 712 cm^3
— 621 „ 500 „ 936 „

81 dm^3 312 cm^3 81 mm^3
— 19 „ 518 „ 136 „

10. Przychód i rozchód przedsiębiorstwa wynosił:

miesiąc	przychód		rozchód	
	złote	gr	złote	gr
styczeń	10384	25	18091	40
luty	12047	35	11204	75
marzec	11941	60	14350	45
kwiecień	20405	15	17194	5
maj	14400	55	19048	80
czerwiec	9853	—	10733	95
lipiec	13726	25	12207	50
sierpień	12208	5	13411	15
wrzesień	21415	75	14596	70
październik	19942	80	17802	25
listopad	20094	35	21774	90
grudzień	18306	70	18909	65

Oblicz: *a*) całoroczny przychód oraz całoroczny rozchód przedsiębiorstwa; *b*) stratę, względnie zysk w ciągu roku; *c*) zysk, czy też stratę w poszczególnych miesiącach!

11. W województwie warszawskiem było w roku 1911 mieszkańców 3399000, w roku zaś 1921 było 3043000. Oblicz ubytek!
12. W roku 1921 Warszawa miała 931200 mieszkańców, Łódź 451800, Lwów 219200; o ile ludność Warszawy przewyższa ludność Łodzi i Lwowa?

Własności różnicy.

1. *a*) Jak obliczysz odjemną, znając odjemnik i resztę?
   b) Jak obliczysz resztę, znając odjemną i odjemnik?
   c) Jak obliczysz odjemnik, znając odjemną i resztę?
   d) Jak obliczysz jeden składnik sumy, znając sumę i drugi składnik?
   Objaśnij odpowiedzi na przykładach!
2. Jaką liczbę należy odjąć od liczby 327804, aby otrzymać liczbę 194087?
3. Do pewnej liczby dodano 20983 i otrzymano liczbę 70031; co to była za liczba?
4. Ile wynosi odjemnik, jeśli odjemna wynosi 38506, zaś różnica 29048?
5. Wstaw zamiast pytajnika odpowiednią liczbę:
   a) 75836 + ? = 90451; *b*) ? + 82057 = 100000;
   c) 20574 — ? = 1806; *d*) ? — 13509 = 20000!
6. Wstaw zamiast pytajnika odpowiednią liczbę:
   a) (236584 — ?) + 75807 = 115230
   b) (? — 38533) + 17449 = 28057
   c) (? — 511483) + 293822 = 389451
   d) (729729 — 325678) + ? = 652857
   e) (58793 + ?) — 73047 = 13256
   f) (302415 + 124987) — ? = 400000!
7. I. Jak należy zmienić odjemną, aby reszta *a*) powiększyła się o 8; *b*) zmniejszyła się o 8?
   II. Jak należy zmienić odjemnik, aby reszta *a*) powiększyła się o 8; *b*) zmniejszyła się o 8?

   III. Jak zmieni się reszta, jeżeli:
   a) odjemną powiększymy o 5
   b) odjemną pomniejszymy o 5
   c) odjemnik powiększymy o 5
   d) odjemnik pomniejszymy o 5?
   Objaśnij odpowiedzi na przykładach!
8. Jak zmieni się różnica, jeżeli:
   a) odjemną i odjemnik zwiększymy o 32815?
   b) odjemną i odjemnik zmniejszymy o 25604?
   c) odjemną zwiększymy o 25473, zaś odjemnik zwiększymy o 22095?
   d) odjemną zwiększymy o 45207, zaś odjemnik zwiększymy o 51390?
   e) odjemną zwiększymy o 15384, zaś odjemnik zmniejszymy o 12753?
   f) odjemną zmniejszymy o 27458, zaś odjemnik zmniejszymy o 15946?
   g) odjemną zmniejszymy o 36054, zaś odjemnik zmniejszymy o 48327?
   h) odjemną zmniejszymy o 72384, zaś odjemnik zwiększymy o 17427?
   Objaśnij odpowiedzi na przykładach!
9. Jak zmieni się suma dwóch liczb, jeżeli:
   a) jeden składnik zwiększymy o 23584, a drugi zmniejszymy o 18079?
   b) jeden składnik zwiekszymy o 34907, a drugi zmniejszymy o 52100?
   c) jeden składnik zmniejszymy o 15904, drugi zmniejszymy o 40517?
   Objaśnij odpowiedni na przykładach!
10. Oblicz następujące wyrażenia, wykonując tylko raz działanie odejmowania:
    a) 12356 — 4827 + 7612 — 384;
    b) 115637 — 12856 — 14612!
11. *a*) Towar z opakowaniem waży 356 *kg*, opakowanie zaś 28 *kg*; ile waży sam towar?
    b) Towar z opakowaniem waży 658 *kg*, sam zaś towar 572 *kg*; ile waży opakowanie?
12. *a*) Dłużnik pożyczył 5680 *zł*, oddał zaś 3725 *zł*; ile jeszcze winien?

b) Dłużnik pożyczył 6540 *zł*, spłacił pewną kwotę i winien jest jeszcze 2873 *zł*; ile spłacił?

13. Dochód kupca w jednym roku wynosił 12365 *zł*, rozchód zaś 8536 *zł*. W następnym roku:
    a) dochód wzrósł o 1200 *zł*, rozchód zmalał o 630 *zł*
    b) „ „ „ 700 „ , „ wzrósł „ 820 „
    c) „ zmalał „ 520 „ , „ „ „ 952 „
    d) „ „ „ 681 „ , „ zmalał „ 589 „
    Czy więcej zaoszczędził w drugim roku, czy też mniej i o ile? Ile zaoszczędził w drugim roku?

Rachunek pamięciowy.

1. Wykonaj w pamięci:

a) 27800 — 300	*b)* 853000 — 400000
135000 — 700	3260000 — 900000
48600 — 900	5800000 — 2000000
215000 — 20000	24000000 — 7000000!

2. Wykonaj w pamięci:

a) 358000 — 14000	*b)* 570000 — 250000
236000 — 57000	7500000 — 420000
837000 — 250000	8300000 — 2400000
1100000 — 850000	6000000 — 1400000!

3. Wykonaj w prosty sposób odejmowania:
   a) 100000 — 37854 *b)* 1000000 — 673048
   c) 723584 — 90999 *d)* 254781 — 99994
   e) 85388 — 10003!
4. *a)* Uzupełnij do 100000 (t. j. odejmij od 100000) następujące liczby:
   32948, 25846, 74810, 59411!
   b) Uzupełnij do 1000000:
   249837, 127516, 845931, 512586!
5. Odejmuj od 136000 po 15000, po 35000!
6. Kupiono towar za 19000 *zł*, a sprzedano go za 26500 *zł*. Z jakim zyskiem sprzedano towar?
7. Sprzedając folwark za 138000 zł, zarobiono 19000 *zł*; za ile należało sprzedać folwark, aby zarobić 25000 *zł*?
8. Zegar wskazuje 11-tą godz. 2 min. 6 sek., a śpieszy się o 3 min. 32 sek. Jaka jest prawdziwa godzina?

9. Oblicz różnicę pomiędzy najmniejszą liczbą siedmiocyfrową, a największą czterocyfrową!
10. Gdyby dłużnik miał o 86000 *zł* więcej niż posiada, to zapłaciłby dług 275000 *zł* i zostałoby mu 15000 *zł*; jaką kwotę dłużnik posiada?

Ćwiczenia.

1. W jednym worku było 25 *kg* 75 *g* cukru, a w drugim o 7 *kg* 385 *g* mniej. Ile *kg* cukru było w obu workach?
2. Za dom, plac i ogród zapłacono razem 237845 *zł*, przyczem za plac zapłacono 42794 *zł*, za ogród zaś 19340 *zł*. Ile zapłacono za dom?
3. Dług 32560 *zł* spłacił dłużnik w trzech ratach. Pierwsza wynosiła 11725 *zł*, druga 12467 *zł*. Ile wyniosła trzecia rata?
4. Od sumy liczb 47583 i 28409 odejm ich różnicę, a od otrzymanej reszty odejm mniejszą z danych liczb! Zrób to samo na innych liczbach!
5. Kupiec zarobił w pierwszym roku 15304 *zł* 50 *gr*, w drugim 17095 *zł* 50 *gr*, w trzecim zaś stracił 32400 *zł*. Czy po trzech latach kupiec miał zysk, czy stratę i jaką?
6. *a)* Sumę 23846 *zł* rozdzielić między cztery osoby tak, aby pierwsza dostała 11907 *zł*, druga o 5369 *zł* mniej niż pierwsza, trzecia o 15492 *zł* mniej niż pierwsze dwie razem, a czwarta resztę. Ile otrzyma czwarta osoba?
   b) Rozdzielono pewną kwotę pieniędzy między 3 osoby. Pierwsza otrzymała 15864 *zł*, druga o 1257 *zł* więcej, a trzecia tyle, ile dwie pierwsze razem i pozostało jeszcze 8283 *zł*; ile było wszystkich pieniędzy?
7. Basen zawierał 615 *l* wody, wypuszczono następnie 117 *l*; dolano znowu 213 *l* i wypuszczono wreszcie 98 *l*; ile *l* wody pozostało w basenie?
8. Właściciel, sprzedając ziemię za 14615 *zł*, zyskał 2519 *zł*; za ile powinienby sprzedać, jeśli chciał zarobić 3500 *zł*?
9. Dwa odcinki częściowo nakrywają się. Jeden wystaje na prawo o 3 *dm* 5 *cm* 2 *mm*, drugi zaś na lewo o 6 *dm* 7 *cm* 5 *mm*; który z nich jest dłuższy i o ile?
10. Jeden kupiec kupił towaru za 18546 *zł* i stracił na nim 3567 *zł*, drugi zaś za taki sam towar zapłacił 17857 *zł* i zy-

skał na sprzedaży 2118 *zł*; który z kupców ma większą gotówkę i o ile?

11. Jeden wagon zawierał 12837 *kg* węgla, drugi o 3285 *kg* mniej, zaś trzeci o 11503 *kg* mniej niż pierwsze dwa razem. Ile *kg* węgla zawierały razem wszystkie trzy wagony?
12. Z dwóch miast odległych od siebie o 47935 *m* wyszli naprzeciw siebie dwaj podróżni. Jeden przeszedł 19256 *m*, drugi zaś 21949 *m*. Jaka odległość dzieli ich jeszcze od siebie?
13. Samochód wyjechał z Warszawy w pewnym kierunku i przejechał 28357 *m*, następnie w kierunku przeciwnym 17205 *m*, poczem znowu w pierwotnym kierunku 30953 *m*. Jaka odległość dzieliła go wówczas od Warszawy?
14. Do pewnej liczby dodano 19305, a od otrzymanej sumy odjęto 7093, poczem otrzymano liczbę 14230. Jaką była pierwotna liczba?
15. Od pewnej liczby odjęto 30257, a do otrzymanej różnicy dodano następnie liczbę 23508, poczem otrzymano liczbę 27093. Co to była za liczba?
16. Od pewnej liczby odjęto 43803, a do otrzymanej różnicy dodano 35097, poczem otrzymano liczbę 38741. Co to była za liczba?
17. Pociąg wyjechał w poniedziałek o godzinie 21-szej, min. 45, sek. 25 i przybył na miejsce przeznaczenia we środę o godz. 5-tej, min. 30, sek. 15. Jak długo jechał pociąg?
18. W trzech wagonach jest 39057 *kg* węgla, przyczem w pierwszym i drugim jest 22878 *kg*, w drugim i trzecim 29305 *kg*. Ile *kg* węgla jest w każdym wagonie?
19. Ile jest liczb *a)* dwucyfrowych, *b)* trójcyfrowych, *c)* czterocyfrowych, *d)* pięciocyfrowych?
20. Oblicz, ile dni (dokładnie) trwała wielka wojna, która zaczęła się 1-go sierpnia 1914 r., a skończyła się 10-go listopada 1918 r.!

Mnożenie.

Mnożenie w systemie dziesiętnym.

1. Oblicz iloczyn: 236 . 435!
2. Jaka liczba jest 25 razy większa od 316?
3. Wykonaj następujące mnożenia i sprawdź:

a) 53027 × 2; 20384 × 3; 8546 × 17; 234 × 506;
b) 7308 × 251; 836 × 427; 5321 × 196; 12352 × 48;
c) 53215 × 36; 37891 × 123; 60035 × 225; 99859 × 452;
d) 352587 × 12; 751452 × 24; 860306 × 312; 710006 × 451;
e) 3050628 × 14; 2300506 × 72; 10512003 × 21; 100718531 × 212;
f) 8003 × 201; 1800 × 300; 10001 × 5004; 20000 × 183;
g) 10000 × 100000; 2800 × 50; 3050 × 110; 810 × 200;
h) 23 × 25 × 46; 12 × 12 × 12; 108 × 100 × 5; 70 × 85 × 36!

4. Wykonaj mnożenie:

a) 728 *km* 854 *m* × 2; 5384 *km* 345 *m* × 3; 325 *m* 8 *dm* 7 *cm* × 36;
b) 425 *kg* 328 *g* × 7; 632 *kg* 17 *g* × 53; 15 *kg* 23 *dkg* 8 *g* × 203;
c) 379 *zł* 43 *gr* × 9; 23053 *zł* 17 *gr* × 75; 50000 *zł* 15 *gr* × 27;
d) 7 m^2 35 dm^2 × 752; 108 m^2 3dm^2 × 115; 15 m^2 36 dm^2 70 cm^2 × 105;
e) 12 m^3 105 dm^3 × 310; 101 m^3 200 dm^3 × 325; 70 m^3 212 dm^3 315 cm^3 × 510!

5. Ile godzin, minut, sekund ma rok?
6. W Polsce na 1000 km^2 powierzchni przypada przeciętnie 41 *km* 100 *m* kolei; ile *km* kolei jest w całej Polsce (powierzchnia Polski 386000 km^2)?
7. Na 1000 mieszkańców w Polsce wypada 126 koni, 311 sztuk bydła rogatego, 86 sztuk owiec i kóz, 204 sztuk nierogacizny; ile sztuk zwierząt z każdego wyżej wymienionego gatunku znajduje się w Polsce (ludność Polski 27161000)?
8. Wiedząc, że w Polsce przeciętnie przypada na 1 km^2 70 mieszkańców, w Niemczech zaś 145, oblicz o ile ludność Niemiec jest większa od ludności Polski (powierzchnia Niemiec 404000 km^2, Polski 386000 km^2)?
9. Oblicz:

a) 17^2, 235^2, 2346^2, *b)* 24^3, 81^3, 112^3!

10. Oblicz następujące wyrażenia:

   a) (20 . 14) . (8 . 6), *b)* 35 . (12 . 11) . 5,
   c) 83 . (236 + 315), *d)* (679 + 315) . (548 — 467)!

11. Przekonaj się, że mnożąc 12345679 przez którąkolwiek z liczb 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, otrzymasz liczbę, w której wszystkie cyfry są równe!

Własności iloczynu.

1. Napisz w postaci iloczynu sumę złożoną z 234 dodajników, równych liczbie 803!
2. Objaśnij na przykładach prawo przemienności iloczynów!
3. Objaśnij na przykładach prawo łączności iloczynów!
4. Sprawdź, że:

   a) 36 . 25 = 25 . 36, *b)* 17 . (14 . 5) = (17 . 14) . 5,
   c) 8 . 7 . 4 . 3 = 7 . 3 . 8 . 4!

5. Nie wykonując mnożenia, podaj, które z niżej napisanych iloczynów są sobie równe:
   (35 . 47) . (29 . 51); (14 . 89) . (102 . 15);
   (102 . 89) . (14 . 15); (47 . 29) . (51 . 35)!
6. Co się stanie z iloczynem dwóch liczb, jeżeli:

   a) mnożną zwiększymy 25 razy,
   b) mnożną zwiększymy 3 razy, zaś mnożnik zwiększymy 4 razy,
   c) mnożną i mnożnik zwiększymy 5 razy,
   d) mnożną zmniejszymy 2 razy,
   e) mnożną i mnożnik zmniejszymy 3 razy,
   f) mnożną zwiększymy 6 razy, zaś mnożnik zmniejszymy 2 razy,
   g) mnożną zmniejszymy 10 razy, zaś mnożnik zwiększymy 5 razy?

7. Szachownica ma 864 pól. Druga szachownica ma:

   a) 2 razy więcej kolumn, 3 razy więcej wierszy,
   b) 8 razy więcej kolumn, 4 razy mniej wierszy.
   Ile pól ma druga szachownica?

8. Jeden robotnik zarobił w pewnym czasie 516 *zł*; ile zarobił drugi, jeśli:

   a) zarabiał dziennie 2 razy więcej, pracował 3 razy dłużej,
   b) zarabiał dziennie 2 razy więcej, pracował 2 razy krócej?

9. Objaśnij na przykładach prawo rozdzielności iloczynu względem sumy i różnicy!
10. Sprawdź, że:

   a) (2594 + 8376) × 17 = (2594 × 17) + (8376 × 17),
   b) 56 × (3029 — 2247) = (56 × 3029) — (56 × 2247)!

11. Objaśnij na przykładach prawo łączności iloczynu względem dodawania i odejmowania!
12. Oblicz w prosty sposób:

   a) (735 × 36) + (735 × 64), *b)* (913 × 57) — (913 × 47)!

13. Rozwiąż następujące zadania dwoma sposobami:

   a) Jedna fabryka zatrudnia 373 robotników, pobierających po 213 *zł* miesięcznie, zaś druga 536 robotników, pobierających to samo. Ile wypłacają robotnikom miesięcznie obie fabryki?
   b) Kupiec sprowadził 450 *kg* towaru, potem 235 *kg*, a wreszcie 350 *kg*; ile zapłacił za cały towar, płacąc 65 *zł* za 1 *kg*?
   c) Pociąg pośpieszny przebiega średnio 63 *km*, zaś pociąg towarowy 28 *km* na godzinę; o ile pociąg pośpieszny wyprzedza towarowy w ciągu 5 godzin?

14. Kupiec sprzedał 528 *kg* towaru za 12872 *zł*; ileby otrzymał za towar, gdyby 1 *kg* sprzedawał:

   a) o 2 *zł* drożej,
   b) o 3 *zł* taniej?

15. O ile wzrośnie powierzchnia prostokąta, o wysokości 15 *m* 3 *dm*, jeśli podstawę zwiększymy o 7 *dm* 3 *cm*?
16. Netto pewnego towaru waży 15 razy tyle, co tara; ile razy brutto jest cięższe od tary? Objaśnij odpowiedź na przykładzie!
17. Jak zmieni się iloczyn 235 . 367, jeśli *a)* mnożną zwiększymy o 1, *b)* mnożnik zwiększymy o 1, *c)* mnożnik zmniejszymy o 1?
18. Oblicz iloczyn dwóch liczb, jeżeli wiadomo, że zwiększając mnożną o 1, zwiększymy iloczyn o 2384, zaś zwiększając mnożnik o 1, zwiększymy iloczyn o 5000!
19. Jak zmieni się iloczyn, jeśli jeden z czynników zwiększymy, a jak zmieni się, jeśli jeden z czynników zmniejszymy? Objaśnij odpowiedź na przykładach!

20. Który z niżej podanych iloczynów jest większy (nie obliczaj iloczynów!):

a) 235 . 486; 486 . 283; *b)* 417 . 38 . 21; 417 . 35 . 21?

Mnożenie pamięciowe i ułatwienia.

1. Oblicz w pamięci następujące iloczyny:

a)	364 . 2;	5235 . 2;	273 . 20;	715 . 200;
b)	97 . 3;	254 . 30;	29 . 300;	45 . 3000;
c)	674 . 5;	1273 . 50;	4364 . 5;	736 . 500;
d)	83 . 25;	236 . 25;	72 . 250;	15 . 2500!

2. Pomnóż w prosty sposób:

a)	486 . 9;	911 . 19;	735 . 39;
b)	634 . 11;	1857 . 21;	423 . 51;
c)	99 . 236;	199 . 428;	1001 . 321!

3. Ile sekund ma kąt prosty?
4. Średnica monety 5-cio groszowej ma 2 *cm*; jak długi pasek ułożysz, kładąc obok siebie 6358 sztuk?
5. Na ubranie potrzeba 3 *m* 2 *dm* sukna. Ile sukna potrzeba na umundurowanie 1 pułku żołnierzy (pułk liczy 900 ludzi)?
6. Oblicz, ile dni (dokładnie) miał wiek XIX, skoro wiadomo, że co czwarty rok był przestępny, z wyjątkiem ostatniego roku wieku, który był zwyczajnym!
7. Światło przebiega 300000 *km* w sekundzie; jaka jest odległość ziemi od słońca, jeśli światło przebiega tę przestrzeń w 500 sekundach?

Ćwiczenia.

1. Odejmij od liczby 67853 liczbę 1269 dwadzieścia sześć razy!
2. W iloczynie 8615 . 326 zwiększono mnożnę o 254; o ile zwiększył się iloczyn?
3. Podczas burzy zebrało się w basenie deszczówki na wysokość 9 *cm*; ile wody spadło na 1 dm^2, 1 m^2, 1 *ha*?
4. *a)* Jeden dm^3 dębu waży 950 *g*. Oblicz ciężar drzewa, otrzymanego z lasu, zawierającego 5000 sztuk, jeśli przyjmiemy, że przeciętnie jedno drzewo ma 8 m^3 objętości?

   b) Ktoś sprowadził 10000 *kg* ziemniaków, płacąc 12 *gr* za 1 *kg*. Ile zarobił, jeśli sprzedawał 1 *kg* po 16 *gr*, a zepsuło mu się 350 *kg*?

   c) Metr sześcienny ziemi waży 1700 *kg*. Ile waży ziemia, którą wydobyto pod fundamenta, głębokie na 3 *m*, długie na 24 *m*, a szerokie na 12 *m*?

5. Podwórze o wymiarach 30 *m* i 40 *m* posypano piaskiem; ile piasku użyto, jeśli warstwa piasku miała 3 *cm* grubości?
6. Ile zapłacono za 15 dolarów i 3 funty angielskie, skoro 1 dolar kosztuje 8 *zł* 92 *gr*, zaś jeden funt angielski 43 *zł* 48 *gr*?
7. Kupiec zmieszał 360 *l* piwa po 1 *zł* 90 *gr* za litr i 350 *l* po 2 *zł* 50 *gr* za litr; ile zarobił, jeśli litr mieszaniny sprzedawał po 2 *zł* 35 *gr*?
8. Rodzina wydaje przeciętnie 16 *zł* dziennie, a zaoszczędza 85 *zł* miesięcznie; jakie są roczne dochody tej rodziny?
9. Dwa samoloty wyruszyły równocześnie w dwóch przeciwległych kierunkach; jeden przelatuje w 1 sekundzie 42 *m*, drugi zaś 39 *m*. Jaka będzie między niemi odległość po upływie 2 godz. 18 min. 15 sek?
10. Oblicz, ile sekund przeżył sześćdziesięcioletni człowiek (licząc, że rok ma 365 dni)!
11. Koło u wozu, mające 2 *m* 78 *cm* w obwodzie, wykonało podczas jazdy 2307 obrotów. Jaką drogę przebył ten wóz?
12. Promień ziemi ma 6370 *km*, zaś promień słońca jest 109 razy większy. Ile *km* ma promień słońca?
13. Planeta Jowisz jest 1295 razy większa (na objętość) od ziemi; słońce zaś jest 1005 razy większe od Jowisza. Obliczyć, ile razy słońce jest większe od ziemi!
14. Książka zawiera 437 stron; każda strona zawiera 39 wierszy, a w każdym wierszu jest średnio 56 liter. Ile liter jest w tej książce?
15. Prostopadłościan, którego podstawa jest kwadratem o boku 1 *cm* 4 *mm*, zanurzono pionowo w wodzie do wysokości 8 *dm* 5 *cm* 6 *mm*; oblicz powierzchnię zwilżonej części prostopadłościanu!
16. Handlarz drzewa zakupił 246 m^3 sosny po 32 *zł* 40 *gr* za 1 m^3, 709 m^3 olchy po 31 *zł* 35 *gr* za 1 m^3, 343 m^3 brzozy po 30 *zł* 75 *gr* za 1 m^3. Ile zapłacił za zakupione drzewo?
17. Na polakierowanie 1 m^2 ściany potrzeba 200 *g* farby. Ile farby potrzeba na polakierowanie ścian 3 pokoi, które są

4 *m* wysokie, a z których pierwszy jest 6 *m* długi 5 *m* szeroki, drugi 4 *m* 5 *dm* długi 3 *m* 7 *dm* szeroki, a trzeci 5 *m* 2 *dm* długi 4 *m* 8 *dm* szeroki?

18. Otoczono murem teren kształtu prostokąta, którego boki mają długość odpowiednio 7 *hm* 2 *dkm* 3 *m* i 236 *m*; ile kosztowało postawienie tego muru, jeśli metr kosztował 25 *zł*?
19. Wiedząc że morga daje 10 *hl* zboża, a 1 *hl* zboża waży 75 *kg*, oblicz ciężar zboża, zebranego z pola prostokątnego o wymiarach 1505 *m* i 992 *m*! (Morga równa się 56 *a*.)
20. *a*) Ogród miał 40 *m* długości, 25 *m* szerokości. Poprowadzono w nim jedną ścieżkę o szerokości 1 *m* 5 *dm*, równoległą do dłuższego boku i drugą ścieżkę o szerokości 1 *m* 2 *dm*, równoległą do krótszego boku. Jaką powierzchnię ma używalna część ogrodu?
    b) W ogrodzie w kształcie prostokąta o bokach 85 *m* i 68 *m* przeprowadzono 3 ścieżki szerokości 2 *m*, z których dwie są równoległe do boku dłuższego, a trzecia do boku krótszego; jaki dochód przynosi ten ogród, jeśli przeciętnie 1 m^2 uprawnej części przynosi 75 *gr* dochodu?
21. Oblicz odległość od ziemi księżyca i słońca, jeżeli wiadomo, że odległość księżyca od ziemi jest 60 razy większa od promienia ziemi, odległość zaś słońca od ziemi jest 391 razy większa od odległości księżyca od ziemi, a promień ziemi ma 6370 *km*!
22. Metr sześcienny powietrza waży 1 *kg* 293 *g*; ile waży powietrze w sali o wymiarach 8 *m*, 6 *m*, 4 *m*?

Dzielenie.

Dzielenie w systemie dziesiętnym.

1. Ile to jest 18 : 6? Dlaczego?
   Wymień dzielną, dzielnik, iloraz?
2. Jak obliczysz dzielną, znając dzielnik i iloraz?
3. Jaki iloraz niedokładny i jaką resztę otrzymasz z dzielenia 18 : 7?
4. Jak otrzymasz dzielną, znając dzielnik, iloraz niedokładny i resztę?

5. Jak sprawdzisz, że:
   a) 240 : 12 = 20
   b) 365 dzielone przez 7 daje na iloraz 52 a na resztę 1?
6. Oblicz iloraz (względnie iloraz niedokładny i resztę) i sprawdź:

a) 88305 : 37
24553 : 26
75896 : 65
2326459 : 18
5706500 : 31
12349500 : 56
53000 : 40
182900 : 70

b) 24335 : 307
41050 : 649
67300 : 905
349521 : 125
492000 : 430
1582136 : 500
785900 : 600
2300000 : 200

c) 49611 : 1228
54502 : 1947
85325 : 2025
236053 : 3001
500209 : 4500
1830000 : 5000
4005000 : 6300
7000000 : 9000

d) 702030 : 52367
8325091 : 23005
13025036 : 405003
93526 : 23418
3500428 : 1236000
780000 : 30000
4000500 : 350000
90000000 : 7000!

7. Oblicz iloraz (względnie iloraz niedokładny i resztę) i sprawdź:

a) 487 *km* 236 *m* : 4
3250 *km* 180 *m* : 32
17000 *km* 200 *m* : 82
14325 *km* 115 *m* 2 *dm* : 8

b) 925 m^2 85 dm^2 : 35
5821 m^2 31 dm^2 : 18
235 km^2 23520 m^2 : 9
987 *ha* 80 *a* 36 m^2 : 25

c) 3500 m^3 230 dm^3 : 16
27320 m^3 720 dm^3 : 24
593 m^3 820 dm^3 340 cm^3 : 6
8 km^3 300000 m^3 : 3

d) 326 *q* 35 *kg* : 7
325 *t* 6 *q* : 15
27 *t* 8 *q* 15 *kg* : 12
305 *t* 25 *kg* : 9!

8. Oblicz iloraz (względnie iloraz niedokładny i resztę) i sprawdź:

a) 52 *m* 4 *dm* : 3 *dm*
153 *km* 321 *m* : 25 *m*
27 *m* 4 *dm* 5 *cm* : 1 *dm* 3 *cm*
58 *m* 3 *dm* 2 *cm* 8 *mm* : 3 *m* 2 *cm*

b) 25 m^2 36 dm^2 : 12 dm^2
22 *ha* 83 *a* 28 m^2 : 5 *ha* 68 *a*
325 m^3 385 dm^3 : 2 m^3 500 dm^3
5 m^3 200 dm^3 : 8 *dm*

c) 358 *hl* 25 *l* : 5 *l*
796 *hl* 50 *l* : 3 *hl* 12 *l*
25 *hl* 36 *l* 5 *dl* : 3 *cl*
35 *hl* 72 *l* 7 *dl* 5 *cl* : 1 *dl* 2 *cl*

d) 734 *t* 6 *q* : 2 *q*
1256 *t* 58 *kg* : 3 *q*
520 *t* 7 *q* 18 *kg* : 5 *q* 30 *kg*
2 *kg* 500 *g* 7 *dg* 3 *cg* 8 *mg* : 2 *cg* 5 *g*!

9. *a*) Ile to jest minut: 580 sek., 732 sek., 1596 sek.?
b) Ile to jest godz. min. i sek.: 27365 sek., 380 min. 52 sek.?
c) Ile to jest dni, godz. min. sek.: 100000 sek.; 52 godz. 36 min.; 85000 min.?
d) 24 min. 32 sek. × 5; 3 godz. 15 min. × 7; 2 dni 12 godz. 18 min. × 6
e) 15 godz. 25 min. : 4; 6 godz. 35 min. : 5; 52 dni 3 godz. : 8
f) 857 dni 15 godz. 45 min. : 38; 3 lata 236 dni 18 godz. : 25 (1 rok = 365 dni)?

10. *a*) Ile to jest minut: 385″; 1536″; 25340″
b) Ile to jest stopni, min. i sek.: 5320″; 730′ 25″; 9300′ 15″
c) 18′ 36″ × 12; 5° 12′ 36″ × 9; 12° 17″ × 15
d) 36° 25′ : 7; 120° : 13; 57° 25′ 3″ : 8; 345° 57′ 28″ : 35
e) 25′ 16″ : 8″; 13° 15′ : 2° 32′; 180° : 36″; 52° 35′ : 4′ 15″?

11. Ile wynosi dzielna, jeżeli dzielnik wynosi:
a) 238, a iloraz 8326;
b) 4256 „ „ 256?

12. Ile wynosi dzielnik, jeżeli dzielna wynosi:
a) 228 *b*) 483750, a iloraz *a*) 12 *b*) 5625?

13. Ile wynosi mnożnik, jeśli iloczyn wynosi 308625, a mnożna 823?

14. Zaludnienie Polski wynosi 27161000 mieszkańców, a powierzchnia 386273 km^2. Jaka jest gęstość zaludnienia w Polsce, t. j. ile mieszkańców wypada średnio na 1 km^2?

15. Odległość księżyca od ziemi wynosi 384395 *km*; ile to jest promieni ziemi? (Promień ziemi 6370 *km*.)

16. W roku 1921/1922 było w Polsce 721 szkół średnich, do których uczęszczało 204804 uczniów; ilu uczniów przeciętnie przypadało na jedną szkołę średnią?

Własności ilorazu.

1. *a*) Jak obliczysz dzielną, znając dzielnik i iloraz?
b) Jak obliczysz iloraz, znając dzielną i dzielnik?
c) Jak obliczysz jeden czynnik iloczynu, znając iloczyn i drugi czynnik iloczynu?
Objaśnij odpowiedzi na przykładach!

2. W następujących zadaniach zastąp literę x odpowiednią liczbą:
a) $50 : 5 = x$; $234 : 18 = x$; $5405 : 235 = x$;
b) $80 : x = 20$; $1500 : x = 125$; $20826 : x = 534$;
c) $36 \,.\, x = 252$; $x \,.\, 232 = 7192$; $365 \,.\, x = 9125$!

3. Nie wykonując rachunków, oblicz następujące wyrażenia:
(70 : 35) . 35; 80 : (80 : 20); 7324 : (7324 . 29); (325 . 576) : 576; (2354 . 5231) : 5231!

4. I. Jak należy zmienić dzielną, aby iloraz
a) powiększył się 5 razy *b*) pomniejszył się 5 razy?
II. Jak należy zmienić dzielnik, aby iloraz
a) powiększył się 5 razy *b*) pomniejszył się 5 razy?
III. Jak zmieni się iloraz, jeśli
a) dzielną powiększymy 3 razy
b) dzielną pomniejszymy 3 razy;
c) dzielnik powiększymy 3 razy;
d) dzielnik pomniejszymy 3 razy?
Objaśnij odpowiedzi na przykładach!

5. I. Jak zmieni się iloraz, jeśli
a) dzielną i dzielnik powiększymy 2 razy;
b) dzielną i dzielnik pomniejszymy 2 razy;
c) powiększymy dzielną 4 razy, dzielnik 2 razy;
d) powiększymy dzielną 2 razy, dzielnik 4 razy;
e) pomniejszymy dzielną 3 razy, dzielnik 6 razy;
f) pomniejszymy dzielną 6 razy, dzielnik 3 razy?
II. Jak zmieni się iloraz, jeśli
a) dzielną powiększymy 2 razy, dzielnik pomniejszymy 3 razy;
b) dzielną pomniejszymy 2 razy, dzielnik powiększymy 3 razy?
Objaśnij odpowiedzi na przykładach!

6. Które z podanych wyrażeń jest większe i ile razy:
a) 200 : 20, 100 : 20; *b*) 612 : 18, 612 : 9;

c) 256 : 16, 256 : (16 × 2), *d*) 1512 : 36, (1512 : 6) : (36 : 2);
e) 50 . 20, 25 . 20; *f*) 2635 . 16, 2635 . 4;
g) 36 . 28, (36 : 4) . (28 : 7); *h*) 235 . 270, (235 : 5) . 2700?

7. Płaca dzienna robotnika = Zarobek całkowity : Liczbę dni roboczych.
Który z robotników miał większą płacę dzienną i ile razy, jeśli
a) jeden robotnik zarobił 4 razy więcej niż drugi w tym samym czasie;
b) jeden robotnik zarobił 6 razy więcej i pracował 3 razy dłużej niż drugi;
c) jeden robotnik zarobił 3 razy więcej i pracował 3 razy krócej. Objaśnij odpowiedzi na przykładach!

8. Cena 1 *kg* towaru = Cena kupna : Liczbę *kg* towaru.
Który towar jest droższy i ile razy, jeżeli
a) za dwa razy więcej *kg* jednego towaru niż drugiego zapłaciłem tę samą sumę;
b) 12 *kg* jednego towaru kosztuje 3 razy mniej niż 6 *kg* drugiego towaru;
c) 18 *kg* jednego towaru kosztuje 3 razy więcej niż 3 *kg* drugiego towaru?
Odpowiedzi objaśnij na przykładach!

9. Jak dzielimy iloczyn przez liczbę?

10. Oblicz następujące ilorazy:
a) (36 × 257) : 18; (39 × 750) : 25;
b) (24 × 42 × 35) : (21 × 12);
(36 × 490 × 294) : (28 × 45)!

11. Jak się dzieli sumę, a jak różnicę przez liczbę?

12. Przekonaj się o prawdziwości następujących równości:
a) (30 + 6) : 2 = (30 : 2) + (6 : 2);
b) (81 + 126 + 252) : 9 = (81 : 9) + (126 : 9) + (252 : 9);
c) (80 — 24) : 4 = (80 : 4) — (24 : 4);
d) (35 — 20 + 50 — 15) : 5 = (35 : 5) — (20 : 5) + + (50 : 5) — (15 : 5)!

13. Następujące zadania rozwiąż w prosty sposób:
a) podziel przez 18 sumę (36 + 18) + (14 + 18);
b) „ „ 12 „ (27 × 24) + (50 × 48);
c) „ „ 5 wyrażenie (15 × 9) — (18 × 5) + + (25 × 42);

d) ile to jest: (540 : 36) — (432 : 36);
e) „ „ „ (3645 : 45) — (225 : 45) + (7155 : 45)?

14. Rozwiąż dwoma sposobami następujące zadania:
a) Rozdzielono równo pomiędzy 5 chłopców za pierwszym razem 20 jabłek, za drugim 10, za trzecim 35; ile każdy chłopiec otrzymał?
b) Kupiec kupił 14 *kg* towaru za 98 *zł*, a sprzedając towar, zarobił 28 *zł*; po ile sprzedawał 1 *kg* tego towaru?
c) Kupiec kupił 15 *kg* towaru za 90 *zł*, a sprzedał za 120 *zł*; jaki miał zysk na 1 *kg* towaru?

15. Rozwiąż i objaśnij na przykładach niżej podane zadanie:
a) Jaś i Staś mają razem 5 razy więcej pieniędzy od Piotrusia; Jaś ma 3 razy więcej pieniędzy od Piotrusia; ile razy więcej pieniędzy ma Staś od Piotrusia?
b) Jeden posłaniec przechodzi na godzinę o 2 *km* więcej niż drugi; ile godzin byli w drodze, jeśli pierwszy wyprzedził drugiego o 20 *km*?

Rachunek pamięciowy i ułatwienia.

1. Podziel w pamięci:

a)	przez	2	liczby	26, 42, 54, 66, 74, 128;
b)	„	4	„	16, 43, 64, 76, 96, 125;
c)	„	3	„	15, 25, 31, 66, 82, 93;
d)	„	9	„	18, 26, 36, 47, 63, 99, 108;
e)	„	6	„	24, 35, 42, 67, 76, 84, 96;
f)	„	10	„	25, 31, 40, 256, 370, 4891;
g)	„	100	„	300, 900, 1231, 4560, 12570;
h)	„	5	„	15, 36, 73, 82, 96, 254;
i)	„	25	„	36, 75, 500, 625, 915, 10000!

2. Wykonaj następujące dzielenia, bez wypisywania kolejnych reszt:

2536 : 3, 45832 : 2, 18325 : 5, 72856 : 7,
918250 : 8, 25736 : 9, 18020 : 6, 902506 : 3!

3. Korzystając z rozmaitych ułatwień, wykonaj następujące dzielenia:

53255 : 5, 8273625 : 25, 15240 : 60,
788000 : 40, 8350000 : 250, 7650000 : 50000!

4. Jaką liczbę należy pomnożyć przez 6, aby otrzymać 72?
5. 10 *l* mleka waży 10 *kg* 280 *g*; ile waży 1 litr mleka?
6. Jeżeli pewną liczbę pomnożę przez 5, a do wyniku dodam 6, otrzymam 51; co to za liczba?
7. Na ile równych części należy podzielić kąt prosty, aby otrzymać kąt 15^0?
8. Ktoś zarabia 3600 *zł* rocznie; ile zarabia miesięcznie?
9. Jeden robotnik pracował 3 dni, drugi 5 dni i otrzymali razem 88 *zł*; ile każdemu z nich się należy?
10. 3 pomarańcze kosztują 1 *zł*; ile kosztuje 72 pomarańcz?
11. Ile to jest godzin 7200 minut?
12. 25 *kg* towaru kosztuje 350 *zł*; ile kosztuje 5 *kg* tego towaru?
13. Zmieszano 10 *l* wina po 5 *zł*, 15 *l* wina po 6 *zł*; ile kosztuje 1 litr tej mieszaniny?
14. Jeden kupiec sprzedaje 3 *kg* pewnego towaru za 96 *zł*; drugi zaś 5 *kg* tego samego towaru za 170 *zł*; który sprzedaje drożej?
15. Słońce jest 1301200 razy większe od ziemi. Jeśli ziemię wyobrazimy jako ziarnko zboża, to ile *l* zboża potrzeba, aby wyobrazić sobie wielkość słońca, jeśli 1 *l* zawiera 10000 ziarnek?

Ćwiczenia.

1. *a*) Kupiec za 1275 *kg* kawy zapłacił 60562 *zł* 50 *gr*; ile zapłacił za 1 *kg*?
   b) Ile *kg* cukru można kupić za 348 *zł* 75 *gr*, płacąc 1 *zł* 50 *gr* za 1 *kg*?
2. *a*) Kupiec kupił 136 *kg* towaru za 340 *zł*; po ile sprzedawał *kg* towaru, jeśli na towarze zarobił 68 *zł*?
   b) Kupiec kupił 226 *kg* towaru za 8418 *zł* 50 *gr*, a sprzedał za 8927 *zł*; po ile sprzedawał 1 *kg*? Ile zarabiał na 1 *kg*?
3. Jeśli pewną liczbę pomnożysz przez 5, to otrzymasz liczbę 8 razy większą niż 15; co to za liczba?
4. 150 sztuk materji, z których każda ma 18 *m*, kosztuje 94500 *zł*; jaka jest cena jednej sztuki, jaka 1 *m*?
5. Pociąg pośpieszny przejeżdża średnio 52 *km* na godzinę.
   a) Jaką drogę przebywa w minucie? w sekundzie?
   b) W ilu sekundach przebywa 1 *km*?
   c) Ile godzin i minut jedzie z Warszawy do Krakowa (odległość tych miast wynosi 365 *km*)?

6. Odległość ziemi od słońca wynosi 149501000 *km*.
   a) Ile lat jechalibyśmy na słońce, jadąc z szybkością samolotu, t. j. 200 *km* na godzinę?
   b) Ile sekund biegnie światło ze słońca na ziemię (w 1 sek. przebiega 300000 *km*)?
   c) Odległość najbliższej gwiazdy od ziemi jest 226665 razy większa niż słońca od ziemi; ile czasu potrzebuje światło, aby z tej gwiazdy przyjść na ziemię?
7. Średnica pięciogroszówki wynosi 2 *cm*; *a*) jaką kwotę przedstawiałyby pięciogroszówki, ustawione obok siebie na przestrzeni 1 *km*; *b*) Ile *km* zajęłyby ustawione obok siebie, gdyby ich było za 1 miljon *zł*?
8. Blok kamienny o objętości 4 m^3 200 dm^3 kosztował 240 *zł*; ile należało zapłacić za blok o wymiarach 8 *dm*, 7 *dm*, 2 *m* 5 *dm*?
9. Wieśniak zapłacił 2581 *zł* za pole w kształcie prostokąta o podstawie 145 *m*, płacąc 20 *gr* za 1 m^2; jaka jest powierzchnia i wysokość tego prostokąta?
10. Kupiec porcelany kupił 2000 sztuk podstawek po 30 *zł* za setkę. Rozbiły się 32 sztuki. Po ile sprzedawał tuzin pozostałych podstawek, jeśli zarobił 220 *zł*?
11. Księgarz, zakupując tuzin egzemplarzy tej samej broszury, otrzymywał trzynasty egzemplarz za darmo. Przesłano mu 650 egzemplarzy po 5 *zł* 40 *gr* za tuzin. Ile tuzinów zamówił? Ile ma zapłacić? Ile zarobi, sprzedając egzemplarz po 60 *gr*?
12. Do równego podziału pomiędzy dwóch braci było: gotówka 36250 *zł* i ziemia, której 1 *ha* oszacowano na 2850 *zł*. Ile *ha* było ziemi, jeśli ten, który otrzymał ziemię musiał dopłacić 3250 *zł* temu, który dostał gotówkę?
13. Płyta marmurowa o wymiarach 1 *m* 5 *dm*, 8 *dm*, 3 *cm* waży 108 *kg*. Ile waży 1 cm^3 tej płyty?
14. Posłaniec odbył drogę 22 *km* 750 *m*, przechodząc w godzinie 6 *km* 500 *m*; o której godzinie wyruszył, jeśli na miejscu był o godzinie 16 minut 15?
15. Od jednej pełni księżyca do następnej upływa 29 dni, 12 godz., 44 min., 3 sek. Ile razy w ciągu *a*) roku, *b*) 10 lat mamy pełnię?
16. Zegar spóźnia się. O godzinie 12 pokazuje 11 godz., 50 min., a o godzinie 18 pokazuje 17 godz., 35 min.; która jest naprawdę godzina, gdy zegar pokazuje 20 godz.?

17. Do sporządzenia konfitur użyto 35 *kg* porzeczek po 85 *gr* za 1 *kg*, 18 *kg* poziomek po 1 *zł* 15 *gr* za 1 *kg* i 27 *kg* cukru po 1 *zł* 50 *gr* za 1 *kg*; ile kosztuje 1 *kg* konfitury, jeśli z 10 *kg* mieszaniny otrzymujemy 6 *kg* konfitury?
18. Ile *m* płótna po 3 *zł* 50 *gr* za metr kupi wieśniak, jeśli sprzedał 15 tuzinów jaj po 17 *gr* sztuka i 5 kur po 2 *zł* 75 *gr*?
19. Jeden robotnik zarabiał o 2 *zł* więcej niż drugi, trzeci zaś robotnik zarabiał o 3 *zł* mniej niż drugi; wszyscy dziennie zarabiali 23 *zł*; ile każdy z nich dziennie otrzymywał?
20. Zbudowano mur (podtrzymujący nasyp) z betonu; mur ten miał 9 *m* 5 *dm* długości, 3 *m* 5 *dm* wysokości. Jaka jest grubość muru, jeśli zapłacono zań 744 *zł* 80 *gr* po 53 *zł* za 1 m^3?
21. Za odnowienie fasady domu właściciel otrzymał rachunek na 2062 *zł*. Dał à conto 500 *zł*. Sprawdzając rachunek, nie zgodził się na sumę lakierowania rynien po 2 *zł* 50 *gr* za 1 *m*, lecz przyznał tylko 1 *zł* 25 *gr* za 1 *m* i wyrównał zmniejszony rachunek, płacąc 1490 *zł*. Ile metrów rynien było?
22. Dwór wraz z podwórzem zajmuje powierzchnię 1500 m^2, podwórze z parkiem 13000 m^2, dwór zaś z parkiem 12500 m^2; jaką powierzchnię zajmuje podwórze, park, dwór?
23. Ile kosztuje szklanka kawy, jeśli na 5 szklanek użyto 60 *g* kawy po 24 *zł* za 1 *kg* i 10 kawałków cukru, ważących po 5 *g*, przyczem za 1 *kg* cukru płacono 1 *zł* 50 *gr*?
24. Rozdziel kwotę 24525 *zł* pomiędzy troje dzieci, 2 kobiety i 1 mężczyznę tak, aby każda kobieta otrzymała 3 razy więcej niż dziecko, mężczyzna zaś 2 razy więcej niż kobieta?
25. Pomiędzy 8 osób rozdzielono równo 2000 *zł*. Ponieważ kilka z nich zrzekło się, wobec tego na każdego z pozostałych wypadło po 150 *zł* więcej; ile osób zrzekło się?
26. Jeden robotnik wystawiłby mur w 3 dniach, drugi wystawiłby ten sam mur w 6 dniach. W ilu dniach wystawią ten mur, pracując razem?
27. Suma dwóch kolejnych liczb parzystych wynosi 138; jakie to są liczby?
28. Ojciec pracował przez 12 dni, syn przez 11 dni i otrzymali razem 173 *zł*; potem ojciec pracował przez 10 dni,

syn przez 11 dni i otrzymali razem 157 *zł*; ile zarabiał dziennie ojciec, a ile syn?
29. Kantor wymiany kupił 125 dolarów po 8 *zł* 85 *gr*. Z nich sprzedał 48 po 8 *zł* 90 *gr*, potem 27 po 8 *zł* 92 *gr*, a gdy wkońcu sprzedał resztę, zysk z całej transakcji wyniósł 6 *zł* 29 *gr*. Ile płacono mu za dolara, gdy sprzedawał resztę?
30. Lokomotywa ciągnąca pociąg towarowy ze Lwowa do Krakowa (342 *km*) spaliła węgla za 81 *zł* 74 *gr*, przyczem zarząd kolei płacił węgiel po 18 *zł* za tonnę. Przez pierwszych 200 *km* zużywała 12 *kg* węgla na 1 *km*. Potem doczepiono kilka wagonów i zużycie węgla na 1 *km* wzrosło. O ile?

SPIS RZECZY.

CZYTANIE I PISANIE LICZB W ZAKRESIE DO 10.000.

System dziesiętny.

DODAWANIE.

Określenia i własności.

Obliczanie sumy w systemie dziesiętnym.

ODEJMOWANIE.

Określenia i własności.

Odejmowanie w systemie dziesiętnym.

MNOŻENIE.

Określenia i własności mnożenia.

Mnożenie liczb w systemie dziesiętnym.

DZIELENIE.

Określenie i własności.

Własności ilorazu.

Dzielenie w systemie dziesiętnym.

OPIS NIEKTÓRYCH BRYŁ.

MIERZENIE DŁUGOŚCI, PÓL I OBJĘTOŚCI.

Odcinek.

Pola.

Objętość.

Metryczne jednostki linjowe.

Plan i skala.

KĄTY.

Określenia.

Działania na kątach.

Rodzaje kątów i mierzenie kątów.

WIELOKĄTY.

Trójkąt.

Czworokąt.

OBLICZANIE PÓL I OBJĘTOŚCI.

Obliczanie pól.

Obliczanie objętości.

Jednostki pojemności i ciężaru.

CZTERY DZIAŁANIA W ZAKRESIE POZA 10000.

Rozszerzenie zakresu liczb poza 10000.

Dodawanie.

Odejmowanie.

Mnożenie.

Dzielenie.