S. BANACH, W. SIERPIŃSKI, W. STOŻEK

ARYTMETYKA I GEOMETRJA

DLA KLASY II SZKÓŁ ŚREDNICH

K S I Ą Ż N I C A - A T L A S
ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE
TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻ. — SP. AKC.
LWÓW — WARSZAWA
1 9 3 0

2271

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie.

Ułamek jako część jedności.

Podział odcinka i prostokąta.

Podział odcinka.

Poznamy sposoby dzielenia odcinków na równe części, zapomocą cyrkla, miarki lub kreślenia równoległych.

Podział odcinka zapomocą cyrkla.

Mamy podzielić odcinek AB (rys. 1) na kilka równych części, np. na 5. Obieramy najpierw taki odcinek AC, który wydaje się nam piątą częścią odcinka AB. Następnie odkładamy przy pomocy cyrkla 5 razy odcinek AC od punktu A w kierunku punktu B. Jeśli, tak postępując, otrzymamy odcinek, mniejszy od odcinka AB, (względnie większy od odcinka AB), to zwiększamy rozwartość cyrkla o piątą część reszty (względnie zmniejszamy o piątą część nadwyżki) i postępujemy znowu jak poprzednio. Po kilku próbach znajdujemy dość dokładnie piątą część odcinka AB.

Rys. 1.

Podział odcinka zapomocą miarki.

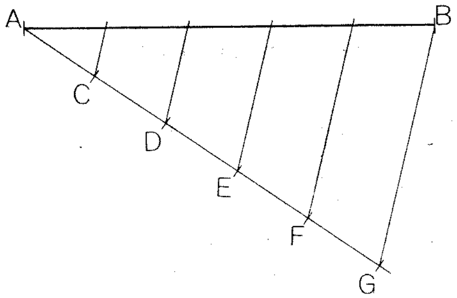
Mamy podzielić, jak poprzednio, odcinek AB (rys. 2) na 5 równych części. Przy pomocy miarki odczytujemy liczbę milimetrów, jaka mieści się w odcinku AB. Przypuśćmy, że odczytana liczba milimetrów wynosi 53 *mm*.

Rys. 2.

Ponieważ: $53\ mm : 5 = 10\ mm$ (reszta 3 *mm*), więc dodając do odcinka 10 *mm* jedną piątą odcinka 3 *mm*, otrzymamy piątą część odcinka AB. Piątą część reszty (3 *mm*) wyznaczamy na oko.

Podział odcinka przy pomocy kreślenia równoległych.

Przypuśćmy, że chcemy odcinek AB (rys. 3) podzielić na kilka równych części, np. na 5. W tym celu z punktu A kreślimy dowolny odcinek, (nie leżący na AB, ani na jego przedłużeniu) i na nim od punktu A odmierzamy cyrklem 5 dowolnych równych odcinków. Końce tych odcinków oznaczamy literami C, D, E, F, G. Łączymy teraz odcinkiem punkty B i G, a przez punkty: C, D, E i F prowadzimy równoległe do odcinka BG. Równoległe te podzielą nam odcinek AB na 5 równych części.

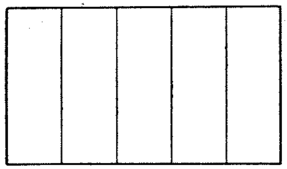


Rys. 3.

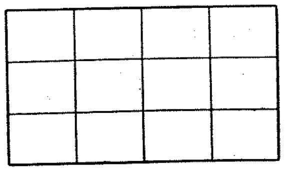
Powyższy sposób podziału ma tę wyższość nad poprzednio poznanemi, że pozwala bez prób podzielić odcinek na kilka równych części.

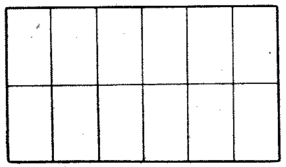
Podział prostokąta.

Aby podzielić prostokąt na kilka równych ćzęści, np. na 5, wystarczy podzielić na 5 równych części dwa przeciwległe jego boki i połączyć odcinkami odpowiednie punkty podziału (rys. 4).


Rys. 4.

Uwaga. Chcąc podzielić prostokąt na 12 równych części, moglibyśmy postąpić jeszcze inaczej, np. tak, jak wskazuje rys. 5 i 6.

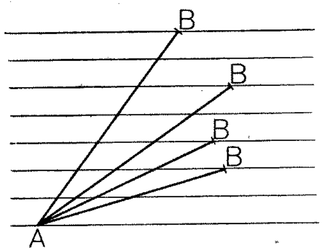

Rys. 5.


Rys. 6.

Zadania.

1. Narysuj odcinek i podziel go zapomocą cyrkla na *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 5, *e)* 6 równych części!

2. Narysuj odcinek i podziel go zapomocą cyrkla na 2 równe części; każdą z otrzymanych części podziel znowu na *a)* 2, *b)* 3 równe części! Jaka to będzie część danego odcinka?
3. Podziel dowolnie obrany odcinek na 2 równe części; każdą z tych części znowu na 2 równe części i t. d.! Na ile równych części dzielisz za każdym razem dany odcinek?
4. Narysuj odcinek i zapomocą miarki podziel go na *a)* 2, *b)* 3, *c)* 5 równych części!
5. Podziel dowolnie obrany odcinek na *a)* 4, *b)* 6, *c)* 8 równych części, raz zapomocą cyrkla, drugi raz zapomocą miarki i porównaj wyniki!
6. Podziel dowolnie obrany prostokąt na *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 5 równych części!
7. Przy pomocy kreślenia równoległych podziel odcinek na *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 8, *e)* 10 równych części!
8. Na przeźroczystej kalce narysuj kilka równoległych w równych odstępach (rys. 7). Jeśli teraz przyłożysz kalkę do danego odcinka AB tak, aby punkt A leżał na jednej, B zaś na innej równoległej, to wewnętrzne równoległe podzielą odcinek AB na 2, 3, 4 równe części. Zbuduj taki przyrząd do dzielenia odcinków na 2, 3 i 10 równych części!



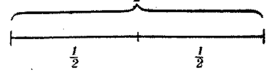
Rys. 7.

9. Iloma sposobami możesz podzielić dany prostokąt na *a)* 6, *b)* 12, *c)* 15, *d)* 18 równych prostokątów?
10. Wytnij z papieru 4 równe prostokąty. Ile różnych prostokątów złożysz z tych 4 prostokątów?

Określenie ułamka.

Połówka.

Obierzmy dowolny odcinek jednostkowy i podzielmy go na 2 równe części (rys. 8). Każda z tych części nazywa się połową odcinka jednostkowego, lub połową jedności.



Rys. 8.

Połowę jedności oznaczamy:

$\frac{1}{2}$ jedności.

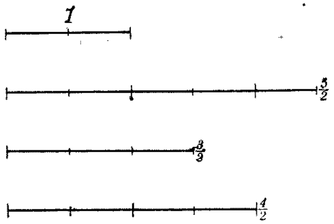
Odcinek, składający się z kilku połówek, np. z 5 połówek jedności (rys. 9), oznaczamy:

$\frac{5}{2}$ jedności,

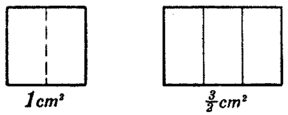
co czytamy: pięć drugich jedności.

Na rys. 9 mamy zaznaczone również: $\frac{3}{2}$ jedności, $\frac{4}{2}$ jedności, co czytamy: trzy drugie jedności, cztery drugie jedności.

Jeżeli np. *cm* jest odcinkiem jednostkowym, to $\frac{5}{2}$ *cm* oznacza odcinek, składający się z pięciu połówek centymetra. Podobnie $\frac{3}{2}$ cm^2 oznacza nam pole, składające się z trzech połówek cm^2 (rys. 10).



Rys. 9.



Rys. 10.

Uwaga. Z rys. 9 widzimy, że $\frac{3}{2}$ *cm* jest 1 *cm* i $\frac{1}{2}$ *cm*, dlatego $\frac{3}{2}$ *cm* oznaczamy również $1\frac{1}{2}$ *cm*, co czytamy: jeden i pół (lub półtora) centymetra. Podobnie $\frac{5}{2}$ *cm* (rys. 9) oznaczamy $2\frac{1}{2}$ *cm* (czytaj: 2 i pół *cm*!).

Zadania.

1. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i narysuj *a)* $\frac{1}{2}$, *b)* $\frac{3}{2}$, *c)* $\frac{4}{2}$, *d)* $\frac{7}{2}$ jedności!
2. Narysuj odcinek *a)* $\frac{2}{2}$ *cm*, *b)* $\frac{3}{2}$ *cm*, *c)* $\frac{5}{2}$ *cm*!
3. Ile *cm* zawiera: $\frac{2}{2}$ *cm*, $\frac{4}{2}$ *cm*, $\frac{6}{2}$ *cm*? Sporządź odpowiedni rysunek!
4. Ile całych metrów zawiera: $\frac{3}{2}$ *m*, $\frac{5}{2}$ *m*, $\frac{7}{2}$ *m*, $\frac{9}{2}$ *m*?
5. Obierz odcinek jednostkowy i przekonaj się, że: $\frac{7}{2}$ jedn. $=$ $= 3\frac{1}{2}$ jedn.!
6. Ile połówek kilograma zawiera: $2\frac{1}{2}$ *kg*, $3\frac{1}{2}$ *kg*, $4\frac{1}{2}$ *kg*?
7. Ile to jest *cm*: $\frac{5}{2}$ *m*, $3\frac{1}{2}$ *m*, $\frac{17}{2}$ *m*?
8. Ile minut, ile sekund zawiera: $\frac{1}{2}$ godz., $1\frac{1}{2}$ godz., $\frac{5}{2}$ godz.?
9. Ile sekund zawiera: $\frac{1}{2}$ kwadransa, $1\frac{1}{2}$ kwadransa?
10. Ile minut zawiera: $\frac{15}{2}^{\circ}$, $36\frac{1}{2}^{\circ}$?
11. Jaką długość ma odcinek, który jest sumą dwóch odcinków o długościach: *a)* $\frac{3}{2}$ *m* i $\frac{5}{2}$ *m*, *b)* 2 *m* i $\frac{7}{2}$ *m*, *c)* $2\frac{1}{2}$ *m* i $5\frac{1}{2}$ *m*?

12. Z worka, zawierającego $\frac{7}{2}$ *kg* cukru, wyjęto 2 *kg*. Ile cukru pozostało?

Ćwiartka.

Podzielmy jedność na 4 równe części (rys. 11). Każda z tych części nazywa się ćwiartką, albo czwartą częścią jedności.

Ćwiartkę jedności oznaczamy:

$\frac{1}{4}$ jedności.

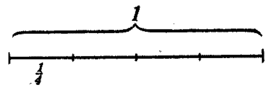
Odcinek, składający się z kilku ćwiartek, np. z 5 ćwiartek jedności (rys. 12), oznaczamy:

$\frac{5}{4}$ jedności,

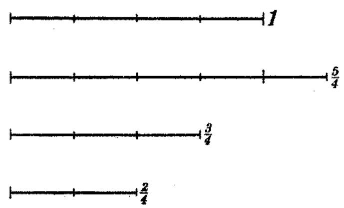
co czytamy: pięć czwartych jedności.

Na rys. 12 mamy zaznaczone również: $\frac{3}{4}$ jedności, $\frac{2}{4}$ jedności, co czytamy: trzy czwarte jedności, dwie czwarte jedności.

Odcinek $\frac{5}{4}$ *dm* składa się z pięciu ćwiartek decymetra. Podobnie $\frac{3}{4}$ *kg* cukru jest to trzy ćwierci kilograma cukru.



Rys. 11.



Rys. 12.

Uwaga: Z rys. 12 widzimy, że $\frac{5}{4}$ *dm* jest 1 *dm* i $\frac{1}{4}$ *dm*, dlatego $\frac{5}{4}$ *dm* oznaczamy również $1\frac{1}{4}$ *dm*, co czytamy: jeden i jedna czwarta *dm*. Podobnie $\frac{10}{4}$ *cm* jest 2 *cm* i $\frac{2}{4}$ *cm*, dlatego też $\frac{10}{4}$ *cm* oznaczamy $2\frac{2}{4}$ *cm*.

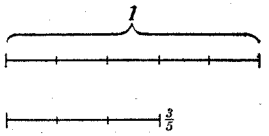
Zadania.

1. Narysuj odcinki, które zawierają: $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{4}$ dowolnie obranej jedności!
2. Narysuj odcinki $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$ obranej jedności!
3. Ile całych metrów zawiera: $\frac{15}{4}$ *m*, $\frac{17}{4}$ *m*, $\frac{57}{4}$ *m*?
4. Ile ćwierci *kg* zawiera: $3\frac{1}{4}$ *kg*, $15\frac{3}{4}$ *kg*, $4\frac{1}{2}$ *kg*, $\frac{7}{2}$ *kg*?
5. Ile połówek kg zawiera: $\frac{6}{4}$ *kg*, $\frac{10}{4}$ *kg*, $\frac{14}{4}$ *kg*, $\frac{54}{4}$ *kg*?
6. Ile to jest dekagramów: $\frac{1}{4}$ *kg*, $\frac{3}{4}$ *kg*, $\frac{7}{4}$ *kg*, $2\frac{3}{4}$ *kg*?
7. Ile minut, ile sekund zawiera: $\frac{1}{4}$ godziny, $3\frac{3}{4}$ godziny, $\frac{7}{4}$ godziny?

8. Ile sekund zawiera: $\frac{1}{4}$ kwadransa, $\frac{3}{4}$ kwadransa?
9. Jaką długość ma odcinek, który jest sumą dwu odcinków: *a)* $1\frac{1}{4}$ *m* i $\frac{3}{4}$ *m*, *b)* 2 *m* i $\frac{15}{4}$ *m*, *c)* $2\frac{3}{4}$ *m* i $3\frac{1}{4}$ *m*, *d)* $2\frac{1}{2}$ *m* i $3\frac{1}{4}$ *m*, *e)* $\frac{5}{2}$ *m* i $\frac{7}{4}$ *m*?
10. Z naczynia, zawierającego 8 litrów mleka, odlano $3\frac{1}{4}$ litra mleka. Ile pozostało?

Ułamek.

Obierzmy odcinek jednostkowy i podzielmy go na kilka równych części, np. na 5. Utwórzmy teraz odcinek, który składa się z trzech takich części (rys. 13).



Rys. 13.

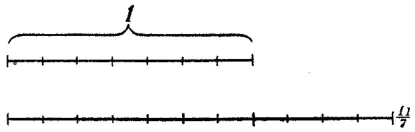
Otrzymany odcinek oznaczamy:

$\frac{3}{5}$ jedności,

co czytamy: trzy piąte jedności.

Podobnie, dzieląc jedność na 7 równych części i rysując odcinek, składadający się z 11 takich części (rys. 14), otrzymamy odcinek:

$\frac{11}{7}$ jedności.

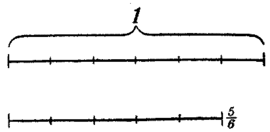


Rys. 14.

Wyrażenia: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{7}$ nazywamy u ł a m k a m i.

Liczbę, znajdującą się pod kreską poziomą, nazywamy m i a n o w n i k i e m, liczbę zaś, znajdującą się nad kreską, nazywamy l i c z n i k i e m.

Ułamki oznaczają nam liczby, zwane l i c z b a m i u ł a m k o w e m i. Jeśli mamy jakiś ułamek jedności, np. $\frac{5}{6}$ jedności (rys. 15), to mianownik wskazuje nam, na ile równych części podzieliliśmy jedność, licznik zaś, z ilu takich części utworzyliśmy odcinek.



Rys. 15.

Zadania.

1. Wskaż licznik i mianownik w następujących ułamkach: $\frac{5}{7}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{25}{36}$, $\frac{11}{7}$.
2. Napisz słowami następujące ułamki: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{47}{100}$, $\frac{57}{10}$, $\frac{13}{67}$.
3. Napisz następujące ułamki: dwie trzecie, pięć siódmych, cztery piąte, pięć dziesiątych, sześć dziesiątych, siedm piętnastych, jedenaście trzynastych, dziewiętnaście setnych, dziewięć dziesiątych, dziewiętnaście dwudziestych.

4. Narysuj odcinek i podziel go na 8 równych części; pod spodem narysuj odcinki, które mają kolejno: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{8}$ tego odcinka!
5. Narysuj następujące ułamki dowolnie obranego odcinka jednostkowego: $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{32}{10}$!
6. Ile to jest *cm*: $\frac{1}{2}$ *m*, $\frac{3}{4}$ *m*, $\frac{7}{25}$ *m*, $\frac{19}{20}$ *m*, $\frac{13}{50}$ *m*?
7. Ile to jest *m*: $\frac{1}{4}$ *km*, $\frac{1}{5}$ *km*, $\frac{1}{10}$ *km*, $\frac{7}{20}$ *km*, $\frac{36}{50}$ *km*, $\frac{20}{100}$ *km*?

Ułamek (ciąg dalszy).

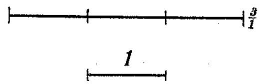
a) Odcinek, będący wielokrotnością jedności, np. 3 jedności (rys. 16), oznaczać będziemy również

$\frac{3}{1}$ jedności

(czytaj: trzy pierwsze jedności).

Podobnie 5 jedności oznaczamy:

$\frac{5}{1}$ jedności.



Rys. 16.

Widzimy zatem, że:

$$\frac{3}{1}=3,\quad \frac{5}{1}=5,\quad \frac{8}{1}=8 \text{ i t. d.}$$

Jedność oznaczamy również:

$\frac{1}{1}$ jedności.

Zatem:

$$\frac{1}{1}=1.$$

b) U ł a m e k, k t ó r e g o l i c z n i k j e s t z e r e m, r ó w n y j e s t z e r u.

Mając np. $\frac{0}{8}$ jedności, możemy sobie wyobrazić, żeśmy jedność podzielili na 8 równych części i nie wzięli żadnej takiej części, a więc mamy zero.

Zatem:

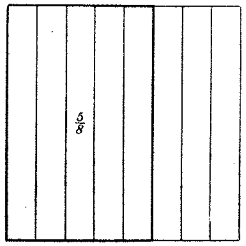
$$\frac{0}{8}=0,\quad \frac{0}{1}=0,\quad \frac{0}{11}=0 \text{ i t. d.}$$

Uwaga 1. Należy pamiętać, ż e w u ł a m k u m i a n o w n i k n i e m o ż e b y ć z e r e m.

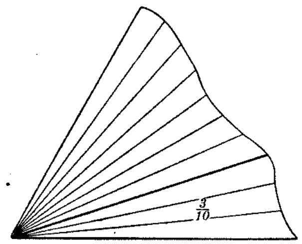
Zatem:

$\frac{8}{0}$, $\frac{3}{0}$ i t. d. nic nie oznacza.

Uwaga 2. Jeśli mamy odcinek np. $\frac{5}{4}$ jedności, to ułamek $\frac{5}{4}$ nazywamy m i a r ą danego odcinka przy obranej jedności.



Rys. 17.



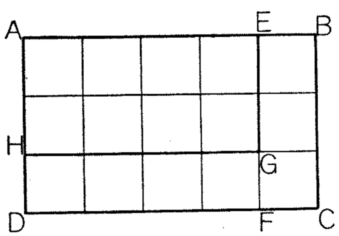
Rys. 18.

Uwaga 3. Możemy tworzyć również ułamki kwadratu jednostkowego, kąta jednostkowego, kilograma i t. p.

Na rys. 17 zaznaczone mamy $\frac{5}{8}$ kwadratu jednostkowego, a na rys. 18 mamy $\frac{3}{10}$ kąta jednostkowego.

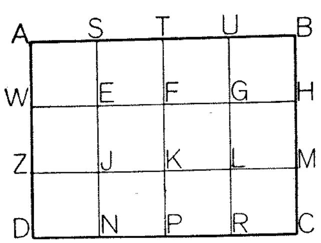
Zadania.

1. Narysuj następujące ułamki dowolnie obranego odcinka jednostkowego: $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$!
2. Napisz w postaci ułamka o mianowniku 1 następujące liczby: 1, 5, 11, 18!
3. Napisz liczbę 0 w postaci ułamka o mianowniku 3, 7, 10!



Rys. 19.

4. Narysuj następujące ułamki dowolnie obranego kwadratu jednostkowego: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{6}$!
5. Narysuj dowolny prostokąt, a następnie $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{10}$ tego prostokąta!
6. *a)* Wskaż $\frac{1}{5}$ prostokąta $ABCD$ (rys. 19)!
   b) Wskaż $\frac{4}{5}$ prostokąta $ABCD$!
   c) Wskaż $\frac{1}{3}$ prostokąta $AEFD$!
   d) Wskaż $\frac{2}{3}$ prostokąta $AEFD$!
   e) Wskaż $\frac{4}{5}$ prostokąta $ABCD$, a z tego, co otrzymasz, wskaż $\frac{2}{3}$!



Rys. 20.

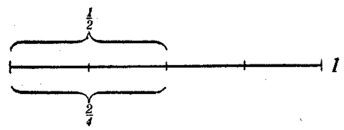
7. Jakim ułamkiem prostokąta $ABCD$ (rys. 19) jest prostokąt $AEGH$?
8. Wskaż na prostokącie $ABCD$ (rys. 20) prostokąty, które stanowią $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ części prostokąta $ABCD$!

9. Wskaż $\frac{1}{3}$ prostokąta $ABCD$ (rys. 20), a z tego, co otrzymasz, wskaż *a)* $\frac{3}{4}$, *b)* $\frac{1}{4}$, *c)* $\frac{1}{2}$!
10. Ile to jest:
    a) gramów: $\frac{3}{2}$ *kg*, $\frac{7}{8}$ *kg*, $\frac{11}{8}$ *kg*, $\frac{7}{10}$ *kg*?
    b) sekund: $\frac{1}{5}$ min., $\frac{2}{5}$ min., $\frac{12}{15}$ min., $\frac{15}{30}$ min.?
    c) groszy: $\frac{5}{2}$ *zł*, $\frac{11}{4}$ *zł*, $\frac{19}{20}$ *zł*, $\frac{27}{25}$ *zł*, $\frac{239}{50}$ *zł*?
    d) sztuk: $\frac{1}{2}$ tuzina, $\frac{2}{3}$ tuz., $\frac{5}{6}$ tuz., $\frac{3}{10}$ kopy, $\frac{7}{20}$ kopy, $\frac{5}{12}$ kopy?
11. Kupiec sprowadził 200 *l* wina i sprzedał z tego $\frac{4}{5}$; ile sprzedał?
12. Dłużnik zwrócił $\frac{3}{4}$ długu, wynoszącego 128 *zł*; ile zwrócił?
13. Skaut przebył $\frac{7}{15}$ drogi z Krakowa do Zakopanego; ile przebył, jeśli odległość tych miejscowości wynosi 135 *km*?
14. Koło robi 3 obroty na sekundę; jakiego ułamka sekundy potrzebuje na 1 obrót?
15. Kwotę 1.200 *zł* rozdzielono między trzy osoby w ten sposób, że jedna otrzymała $\frac{1}{3}$, druga $\frac{1}{4}$ tej kwoty, a trzecia resztę; ile otrzymała każda osoba?
16. Ktoś kupił auto za 12.000 *zł* i po pewnym czasie sprzedał je za $\frac{2}{3}$ tej kwoty. Nabywca wydał na naprawę $\frac{1}{8}$ tej kwoty, którą zapłacił; ile go auto kosztowało?
17. Rolnik miał 10 morgów ziemi; z czego $\frac{1}{5}$ było łąki, $\frac{3}{4}$ uprawnej ziemi, a reszta lasu; oblicz, ile miał morgów łąki, uprawnej ziemi i lasu?
18. Jakim ułamkiem:
    a) metra jest: 1 *cm*, 25 *cm*, 50 *cm*?
    b) godziny jest: 1 min., 10 min., 15 minut., 45 min.?
19. Jakim ułamkiem *dm*, a jakim ułamkiem *m* jest 25 *mm*?
20. Jakim ułamkiem kwoty 10 *zł* jest: 1 *zł*, 3 *zł*, 8 *zł*?
21. Robotnik wykonał pracę w 5 dniach; jaki ułamek tej pracy wykonał w ciągu: *a)* 1 dnia, *b)* 2 dni?
22. Pewną ilość mleka rozdzielono równo pomiędzy czworo dzieci; jaki ułamek tej ilości mleka przypadł na troje dzieci?
23. Sztuka płótna ma 24 *m* długości. Jakim ułamkiem tej sztuki płótna jest 1 *m*, 3 *m*, 4 *m*, 8 *m*, 12 *m*?
24. Odkręcając kurek, opróżnimy cały zbiornik wody w 12 godz.; jaki ułamek zbiornika opróżni się w ciągu 5 godz.?
25. Kupiec sprzedał $\frac{5}{6}$ sztuki sukna, mającej 36 *m*; ile otrzymał, jeśli metr sprzedawał po 40 *zł*?

26. Mniejsze naczynie zawiera 3 szklanki wody, większe zaś 5 takich samych szklanek wody. Jakim ułamkiem wyraża się objętość większego naczynia, jeśli za jednostkę pojemności obierzemy mniejsze naczynie?

Porównywanie ułamków.

Odcinki $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$ tej samej jedności są równe (rys. 21).



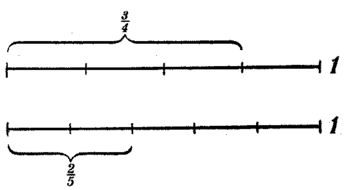
Rys. 21.

O ułamkach $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$ mówimy, że są równe, co piszemy:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

Odcinek $\frac{3}{4}$ jest większy od odcinka $\frac{2}{5}$ tej samej jedności (rys. 22). O ułamku $\frac{3}{4}$ mówimy, że jest większy od ułamka $\frac{2}{5}$, co piszemy:

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{5}.$$



Rys. 22.

Mówimy również, że ułamek $\frac{2}{5}$ jest mniejszy od ułamka $\frac{3}{4}$, co piszemy:

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{4}.$$

Zadania.

1. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i przekonaj się o następujących równościach: *a)* $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, *b)* $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$, *c)* $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, *d)* $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
2. Przekonaj się, że następujące pary ułamków, wzięte z metra, kilograma, lub dowolnie obranego odcinka, dają równe wyniki: *a)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$, *b)* $\frac{2}{5}$ i $\frac{4}{10}$, *c)* $\frac{1}{5}$ i $\frac{2}{10}$, *d)* $\frac{3}{4}$ i $\frac{6}{8}$, *e)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{4}{8}$, *f)* $\frac{1}{10}$ i $\frac{2}{20}$.
Odp. $\frac{1}{2}\ m = 5\ dm$, $\frac{2}{4}\ m = 50\ cm$, więc $\frac{1}{2}\ m = \frac{2}{4}\ m$.
3. Przekonaj się, że następujące pary ułamków, wzięte z godziny, stopnia, lub dowolnie obranego odcinka, dają równe wyniki: *a)* $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{6}$, *b)* $\frac{1}{12}$ i $\frac{4}{48}$, *c)* $\frac{5}{6}$ i $\frac{10}{12}$.
4. Wstaw zamiast liter odpowiednie liczby: $\frac{1}{3} = \frac{x}{6}$, $\frac{y}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{a}{4} = \frac{6}{8}$, $\frac{1}{4} = \frac{b}{12}$.
5. Oblicz, ile sztuk otrzymasz, biorąc następujące ułamki tuzina: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$.

Połącz znakami równości te z powyższych ułamków, które są równe! Np.: $\frac{9}{12}$ tuz. $= 9$ sztuk, $\frac{3}{4}$ tuz. $= 9$ sztuk. Zatem $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

6. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i przekonaj się o następujących nierównościach:
a) $\frac{7}{5} > \frac{3}{8}$, *b)* $\frac{3}{6} < \frac{2}{3}$, *c)* $\frac{4}{6} > \frac{5}{8}$, *d)* $\frac{5}{12} < \frac{4}{9}$, *e)* $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$, *f)* $\frac{5}{4} > \frac{4}{5}$.
7. Porównaj następujące pary ułamków, biorąc je z metra, kilograma: *a)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{4}$, *b)* $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{8}$, *c)* $\frac{3}{10}$ i $\frac{5}{20}$, *d)* $\frac{12}{25}$ i $\frac{9}{20}$, *e)* $\frac{7}{40}$ i $\frac{4}{25}$.
8. Porównaj następujące ułamki: *a)* $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$, *b)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$, *c)* $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$, *d)* $\frac{10}{12}$ i $\frac{3}{4}$.
Obliczaj, ile sztuk otrzymasz, biorąc te ułamki z tuzina!
9. Uporządkuj następujące ułamki według wielkości: $\frac{1}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{29}{30}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$.
Obliczaj, ile sztuk otrzymasz, biorąc te ułamki z kopy!

Zmiany ułamka.

1. Porównaj następujące ułamki o równych mianownikach:
a) $\frac{5}{8}$ i $\frac{3}{8}$, *b)* $\frac{2}{4}$ i $\frac{3}{4}$, *c)* $\frac{3}{5}$ i $\frac{7}{5}$, *d)* $\frac{4}{10}$ i $\frac{7}{10}$, *e)* $\frac{5}{11}$ i $\frac{2}{11}$, *f)* $\frac{17}{15}$ i $\frac{23}{15}$.
Rozumuj: $\frac{5}{8}$ jedn. zawiera więcej ósmych części niż $\frac{3}{8}$ jedn. Zatem: $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$.
2. Porównaj następujące ułamki: *a)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$, *b)* $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{8}$, *c)* $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{9}$, *d)* $\frac{1}{11}$ i $\frac{1}{12}$.
Sporządź rysunek!
3. Porównaj następujące ułamki o równych licznikach: *a)* $\frac{4}{3}$ i $\frac{4}{5}$, *b)* $\frac{4}{5}$ i $\frac{4}{8}$, *c)* $\frac{7}{4}$ i $\frac{7}{9}$, *d)* $\frac{9}{11}$ i $\frac{9}{12}$, *e)* $\frac{6}{10}$ i $\frac{6}{8}$, *f)* $\frac{4}{15}$ i $\frac{4}{9}$.
Rozumuj: trzecia część jedności jest większa, niż piąta część jedności. Zatem 4 trzecie jest większe, niż 4 piąte. A więc $\frac{4}{3} > \frac{4}{5}$.
4. Uporządkuj następujące ułamki według wielkości, poczynając od najmniejszego: *a)* $\frac{19}{30}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{29}{30}$, $\frac{23}{30}$, $\frac{17}{30}$; *b)* $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{22}$.
5. Napisz wszystkie ułamki o mianowniku 8, mniejsze od $\frac{5}{8}$, a następnie wszystkie ułamki o liczniku 5, większe od $\frac{5}{8}$!
6. Jak się zmieni ułamek (czy się zwiększy, czy też zmniejszy), jeśli:
a) zwiększymy licznik,

b) zmniejszymy licznik,
c) zwiększymy mianownik,
d) zmniejszymy mianownik,
e) zwiększymy licznik i równocześnie zmniejszymy mianownik,
f) zmniejszymy licznik i równocześnie zwiększymy mianownik?

Podaj przykłady liczbowe!

7. Który z dwóch ułamków jest większy: *a)* $\frac{7}{5}$ i $\frac{3}{8}$, *b)* $\frac{13}{15}$ i $\frac{25}{9}$, *c)* $\frac{12}{7}$ i $\frac{13}{6}$, *d)* $\frac{27}{15}$ i $\frac{30}{13}$, *e)* $\frac{11}{8}$ i $\frac{9}{10}$, *f)* $\frac{4}{5}$ i $\frac{5}{4}$?
Odp. $\frac{7}{5} > \frac{3}{5}$, $\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$, zatem $\frac{7}{5} > \frac{3}{8}$.

Ułamki właściwe i niewłaściwe.

Podzielmy jedność na kilka równych części, np. na 6 (rys. 23).

Biorąc takich części mniej niż 6, otrzymamy mniej niż jedność.

Rys. 23.

Zatem: $\frac{2}{6} < 1$, $\frac{3}{6} < 1$, $\frac{5}{6} < 1$.

Biorąc szóstych części 6, lub więcej niż 6, otrzymamy jedność, lub więcej niż jedność.

Zatem: $\frac{6}{6} = 1$, $\frac{7}{6} > 1$, $\frac{9}{6} > 1$ i t. d.

Ułamki mniejsze od jedności, jak: $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ i t. p., nazywamy u ł a m k a m i w ł a ś c i w e m i.

W ułamkach właściwych licznik jest mniejszy od mianownika.

Ułamki równe lub większe od jedności, jak: $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$ i t. p., nazywamy u ł a m k a m i n i e w ł a ś c i w e m i.

W ułamkach niewłaściwych licznik jest równy, lub większy od mianownika.

Zadania.

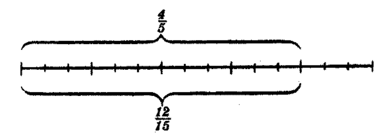
1. Wskaż, które z następujących ułamków są właściwe, a które niewłaściwe: $\frac{27}{11}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{11}{11}$, $\frac{49}{52}$, $\frac{101}{102}$, $\frac{75}{25}$, $\frac{45}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{55}{63}$, $\frac{49}{49}$, $\frac{128}{32}$, $\frac{112}{61}$.
2. Napisz wszystkie ułamki właściwe o mianowniku *a)* 2, *b)* 5, *c)* 9.
3. Napisz wszystkie ułamki niewłaściwe o mianowniku: *a)* 10, *b)* 13, *c)* 15, których liczniki są mniejsze od 20.

4. Napisz ułamek równy jedności o mianowniku: *a)* 8, *b)* 11, *c)* 13.
5. Które z ułamków godziny będą większe od godziny, a które mniejsze: $\frac{2}{5}$ godz., $\frac{7}{3}$ godz., $\frac{12}{4}$ godz., $\frac{8}{15}$ godz., $\frac{120}{30}$ godz., $\frac{2}{3}$ godz?

Zmiana postaci ułamka.

R o z s z e r z a n i e u ł a m k a.

Odcinek $\frac{4}{5}$ jedności otrzymujemy, biorąc 4 piąte części jedności. Ten sam odcinek otrzymamy (rys. 24), biorąc np. 3 razy więcej części, lecz zato 3 razy mniejszych.



Rys. 24.

Ponieważ 3 razy mniejsza część od piątej części jedności jest:

$$\frac{1}{5 \cdot 3} \text{ t. j. } \frac{1}{15}, \qquad \text{zatem: } \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}.$$

Wynika stąd, że: W a r t o ś ć u ł a m k a n i e z m i e n i s i ę, j e ś l i l i c z n i k i m i a n o w n i k p o m n o ż y m y p r z e z t ę s a m ą l i c z b ę.

To postępowanie, pozwalające z pewnego ułamka otrzymać ułamki danemu równe, nazywamy r o z s z e r z a n i e m ułamka.

Zadania.

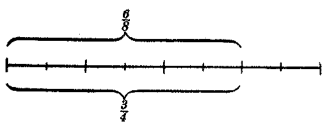
1. Utwórz z następujących ułamków ułamki odpowiednio im równe, mnożąc licznik i mianownik każdego z nich przez 2, 3, 4, 5: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$.
2. Utwórz kilka ułamków (o różnych mianownikach) równych ułamkowi $\frac{5}{12}$.
3. Uzupełnij liczniki tak, aby: $\frac{1}{3} = \frac{}{12}$, $\frac{1}{2} = \frac{}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{}{12}$, $\frac{5}{4} = \frac{}{8}$.
4. Uzupełnij mianowniki tak, aby: $\frac{2}{3} = \frac{4}{}$, $\frac{3}{2} = \frac{12}{}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{}$, $\frac{8}{5} = \frac{16}{}$.
5. Jakie to są ułamki równe ułamkowi $\frac{2}{3}$, mające mianowniki mniejsze od 20?
6. Zamień ułamki: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{3}{2}$ na ułamki odpowiednio im równe o mianowniku 12, i uporządkuj je wedle wielkości!
7. Zamień ułamki: $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{27}{25}$, $\frac{41}{50}$ na ułamki odpowiednio im równe o mianowniku 100!

8. Zamień każdą parę ułamków: $\frac{3}{2}$ i $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{7}$ i $\frac{11}{14}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{11}$ i $\frac{1}{33}$, na parę ułamków o wspólnym mianowniku.

U p r a s z c z a n i e u ł a m k a.

Odcinek $\frac{6}{8}$ jedn. otrzymujemy, biorąc 6 ósmych części jedności. Ten sam odcinek otrzymamy (rys. 25), biorąc 2 razy mniej, lecz dwa razy większe części jedności. Ponieważ 2 razy większa część od ósmej części jedności jest $\frac{1}{8:2}$, to jest $\frac{1}{4}$ jedności, więc:

$$\frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}.$$



Rys. 25.

Zatem: W a r t o ś ć u ł a m k a n i e z m i e n i s i ę, j e ż e l i l i c z n i k i m i a n o w n i k p o d z i e l i m y p r z e z t ę s a m ą l i c z b ę.

To postępowanie nazywamy s k r a c a n i e m lub u p r a s z c z a n i e m ułamka.

Uprościć ułamek przez 2, 3, 4, ... to znaczy podzielić licznik i mianownik odpowiednio przez 2, 3, 4, ...

Uwaga: Jeśli ułamek nie da się uprościć przez liczbę większą od jedności, wówczas powiadamy, że dany ułamek jest ułamkiem n i e p r z y w i e d l n y m.

Np. $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{12}{13}$ są ułamkami nieprzywiedlnemi.

Z a d a n i a.

1. Uprość ułamki: *a)* przez 2: $\frac{6}{8}$, $\frac{16}{12}$, $\frac{28}{18}$, $\frac{36}{24}$,
   b) przez 3: $\frac{6}{9}$, $\frac{27}{30}$, $\frac{63}{81}$, $\frac{126}{321}$.
2. Uprość ułamki: *a)* $\frac{2}{4}$, *b)* $\frac{3}{9}$, *c)* $\frac{5}{15}$, *d)* $\frac{6}{9}$, *e)* $\frac{9}{15}$, *f)* $\frac{21}{24}$, *g)* $\frac{36}{27}$.
3. Przedstaw w postaci nieprzywiedlnej ułamki: $\frac{90}{120}$, $\frac{96}{120}$, $\frac{30}{45}$, $\frac{45}{75}$.
4. Uzupełnij liczniki tak, aby: $\frac{8}{12}=\frac{\ }{3}$, $\frac{20}{15}=\frac{\ }{3}$, $\frac{5}{10}=\frac{\ }{2}$, $\frac{18}{48}=\frac{\ }{8}$.
5. Uzupełnij mianowniki tak, aby: $\frac{12}{8}=\frac{3}{\ }$, $\frac{16}{10}=\frac{8}{\ }$, $\frac{3}{6}=\frac{1}{\ }$, $\frac{9}{12}=\frac{3}{\ }$.
6. Obierz dowolny odcinek i narysuj $\frac{120}{180}$ tego odcinka! Czy będziesz dzielił obrany odcinek na 180 równych części?

7. Zamień ułamki: *a)* $\frac{2}{3}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{20}{48}$, $\frac{50}{120}$, $\frac{5}{6}$ na ułamki o mianowniku 12 i porównaj;
   b) $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{72}$, $\frac{27}{108}$, $\frac{7}{18}$ na ułamki o mianowniku 36 i porównaj.
8. Napisz ułamki, równe ułamkowi $\frac{24}{60}$, mające mianowniki mniejsze od 60.

Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika.

Jeżeli mamy dwa ułamki, np. $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$ i chcemy je porównać, to przedstawiamy te ułamki w postaci ułamków o tym samym mianowniku, czyli, jak mówimy, sprowadzamy je do wspólnego mianownika. Jako wspólny mianownik obieramy liczbę, w której oba mianowniki mieszczą się bez reszty. W naszym przypadku liczbą taką jest np. 12.

Ponieważ $4\times3=12$, więc $\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$.

Ponieważ $6\times2=12$, więc $\frac{5}{6}=\frac{5\times2}{6\times2}=\frac{10}{12}$.

Mamy: $\frac{9}{12}<\frac{10}{12}$, więc: $\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$.

Z a d a n i a.

1. Następujące pary ułamków sprowadź do wspólnego mianownika i porównaj: *a)* $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$, *b)* $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{5}$, *c)* $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{7}$, *d)* $\frac{7}{12}$ i $\frac{5}{8}$, *e)* $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{8}$, *f)* $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{9}$, *g)* $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{6}$, *h)* $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{8}$, *i)* $\frac{7}{15}$ i $\frac{3}{10}$, *j)* $\frac{7}{12}$ i $\frac{17}{30}$.
2. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika i porównaj, przyjmując jako wspólny mianownik iloczyn mianowników: *a)* $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{17}$, *b)* $\frac{4}{5}$, $\frac{11}{13}$, *c)* $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$, *d)* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, *e)* $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{5}$.
3. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika i porównaj: *a)* $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, *b)* $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, *c)* $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, *d)* $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{6}$, *f)* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.
4. Który z ułamków $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{9}{16}$ ma najmniejszą, a który największą wartość?

Liczby mieszane.

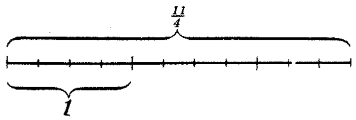
Z a m i a n a u ł a m k a n a l i c z b ę m i e s z a n ą.

Ułamek niewłaściwy zawiera jedną lub więcej jedności.

Zapytajmy się, ile jakiś ułamek niewłaściwy, np. $\frac{11}{4}$, zawiera jedności (rys. 26). Ponieważ cztery czwarte dają jedność, a $11:4=2$ (reszta 3), więc $\frac{11}{4}$ jedności to są 2 jedn. i $\frac{3}{4}$ jedności. Mamy zatem: $\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$.

Ułamek niewłaściwy $\frac{11}{4}$ oznaczamy również $2\frac{3}{4}$.

Tak napisany ułamek, nazywamy **liczbą mieszaną**. Liczba mieszana składa się z **części całkowitej** (2) i z **części ułamkowej** ($\frac{3}{4}$).



Rys. 26.

Podobnie $\frac{23}{7}=3\frac{2}{7}$, gdyż $23:7=3$ (reszta 2).

Uwaga. Jeżeli mianownik mieści się bez reszty w liczniku, to ułamek taki jest równy liczbie całkowitej.

Np.: $\frac{8}{4}=2$, gdyż $8:4=2$.

Podobnie: $\frac{20}{4}=5$, gdyż $20:4=5$.

Ułamki równe liczbom całkowitym nazywamy **ułamkami pozornemi**.

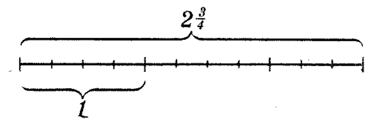
W ułamku pozornym licznik jest wielokrotnością mianownika.

Zadania.

1. Zamień następujące ułamki na liczby mieszane: $\frac{5}{4}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{36}{14}$, $\frac{256}{78}$, $\frac{1025}{78}$.
2. *a)* Ile to jest godzin i kwadransów: $\frac{9}{4}$ godziny, $\frac{7}{2}$ godz., $\frac{15}{4}$ godz?
   b) Ile to jest kóp i tuzinów: $\frac{12}{5}$ kopy, $\frac{36}{5}$ kopy, $\frac{72}{5}$ kopy?
   c) Ile to jest *kg* i *g*: $\frac{1270}{1000}$ *kg*, $\frac{5238}{1000}$ *kg*, $\frac{12358}{1000}$ *kg*?
3. Napisz możliwie największą liczbę całkowitą, mniejszą od ułamka *a)* $\frac{100}{7}$, *b)* $\frac{59}{12}$, *c)* $\frac{813}{25}$.
4. Zamień na liczby całkowite następujące ułamki pozorne: *a)* $\frac{21}{3}$, *b)* $\frac{125}{5}$. *c)* $\frac{546}{7}$, *d)* $\frac{2184}{24}$, *e)* $\frac{2214}{18}$.
5. Licznik ułamka wynosi 12; dobierz mianownik tak, by powstały ułamek był pozorny. Ile takich ułamków otrzymasz?
6. Mianownik ułamka wynosi 5; dobierz licznik tak, by powstały ułamek był pozorny. Czem są wtedy liczniki, w stosunku do mianownika?

Zamiana liczby mieszanej na ułamek.

Mamy zamienić liczbę mieszaną, np. $2\frac{3}{4}$, na ułamek. Jedność zawiera 4 ćwiartki, zatem 2 jedności zawierają $2 \,.\, 4$, t. j. 8 ćwiartek. Ponieważ mamy jeszcze 3 ćwiartki, więc razem jest 11 ćwiartek.



Rys. 27.

Zatem:

$$2\tfrac{3}{4}=\tfrac{11}{4}.$$

Podobnie:

$$5\tfrac{3}{4}=\frac{(5\,.\,4)+3}{4}=\tfrac{23}{4};\qquad 3\tfrac{2}{7}=\frac{(3\,.\,7)+2}{7}=\tfrac{23}{7}.$$

Zadania.

1. Zamień na ułamki następujące liczby mieszane: $1\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{4}$, $25\frac{3}{8}$, $49\frac{2}{9}$, $36\frac{45}{59}$.
2. *a)* Przedstaw w postaci ułamka godziny: 3 godz. 35 min.; 5 godz. 17 min.; 12 godz. 56 min.
   b) Przedstaw w postaci ułamka metra; 8 *m* 5 *dm*, 15 *m* 3 *dm*, 7 *m* 1 *cm*.
3. Która z dwóch liczb jest większa; *a)* $3\frac{2}{5}$ i $2\frac{3}{5}$, *b)* $5\frac{2}{7}$ i $5\frac{3}{7}$, *c)* $\frac{11}{5}$ i $2\frac{2}{5}$, *d)* $3\frac{4}{7}$ i $\frac{24}{8}$, *e)* $5\frac{3}{8}$ i $\frac{43}{7}$?
4. Podaj kilka ułamków:
   a) o mianowniku 6, większych od 4,
   b) o mianowniku 8, mniejszych od 3,
   c) o liczniku 11, większych od 2,
   d) o liczniku 25, mniejszych od 3!

Dodawanie ułamków.

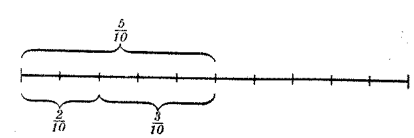
Określenia.

Przypuśćmy, że mamy dwa ułamki o tych samych mianownikach np. $\frac{2}{10}$ i $\frac{3}{10}$.

Utwórzmy odcinki $\frac{2}{10}$ i $\frac{3}{10}$ jedności (rys. 28). Suma tych odcinków ma długość $\frac{5}{10}$ jedności.

Ułamek $\frac{5}{10}$ nazywamy sumą ułamków $\frac{2}{10}$ i $\frac{3}{10}$, co piszemy:

$$\tfrac{2}{10}+\tfrac{3}{10}=\tfrac{5}{10}.$$



Rys. 28.

Wynika stąd:

Suma dwu ułamków o równych mianownikach jest ułamkiem, którego licznik jest sumą liczników, mianownik zaś ten sam.

Jeżeli mamy dwa ułamki o różnych mianownikach, np. $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$, to, aby te ułamki do siebie dodać, sprowadzamy je najpierw do wspólnego mianownika. Wspólnym mianownikiem jest 15, więc:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2.5}{3.5}+\frac{4.3}{5.3}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{22}{15}.$$

Zadania.

1. Oblicz: *a)* $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$, $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}+\frac{3}{9}$, $\frac{6}{5}+\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$, $\frac{5}{10}+\frac{4}{10}$;
b) $\frac{3}{10}+\frac{2}{10}+\frac{4}{10}$, $\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{5}{12}$, $\frac{4}{20}+\frac{3}{20}+\frac{7}{20}$, $\frac{3}{50}+\frac{12}{50}+\frac{10}{50}$.
2. Oblicz: *a)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$, $\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$;
b) $\frac{3}{2}+\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}+\frac{5}{12}$, $\frac{2}{15}+\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}+\frac{3}{8}$.
3. Oblicz: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}+\frac{1}{5}$, $\frac{5}{12}+\frac{7}{30}$.
4. Oblicz: *a)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{12}$, $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}$, $\frac{5}{7}+\frac{1}{2}+\frac{9}{14}$;
b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$.
5. Oblicz: *a)* $2\frac{1}{4}+3$, $2+3\frac{5}{6}$, $1+1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{5}+2$;
b) $2\frac{1}{7}+3\frac{2}{7}$, $3\frac{1}{8}+4\frac{3}{8}$, $6\frac{5}{12}+8\frac{1}{12}$, $3\frac{1}{9}+4\frac{5}{9}$;
c) $3\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}$, $1\frac{5}{7}+4\frac{3}{7}$, $2\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{6}+2\frac{5}{6}$.

Np.: $3\frac{4}{7}+2\frac{5}{7}$, $3+2=5$, $\frac{4}{7}+\frac{5}{7}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$. Zatem:

$$3\frac{4}{7}+2\frac{5}{7}=5+1\frac{2}{7}=6\frac{2}{7}.$$

6. Oblicz: $4\frac{1}{2}+5\frac{3}{8}$, $2\frac{1}{2}+3\frac{7}{10}$, $2\frac{1}{4}+1\frac{5}{6}$, $3\frac{1}{4}+4\frac{5}{12}$, $3\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}+2\frac{3}{4}$.

Licz, jak w zadaniu (5), sprowadzając części ułamkowe do wspólnego mianownika!

7. Zamień następujące liczby mieszane na ułamki, przedstawiając je w postaci sumy części całkowitej i ułamkowej: $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$, $4\frac{2}{5}$, $3\frac{1}{8}$.
Licz: $2\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{2}{1}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.
8. Oblicz: $2\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{5}+\frac{7}{12}$, $2\frac{3}{4}+1\frac{5}{6}$, $3\frac{1}{2}+4\frac{5}{9}$, $2\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+2\frac{1}{12}$, $1\frac{3}{4}+2\frac{5}{6}+3\frac{1}{8}$.

Uwaga. Obliczaj, zamieniając liczby mieszane na ułamki!

9. Jaś kupił zeszyt za $\frac{1}{4}$ *zł* i zostało mu $\frac{2}{5}$ *zł*; ile miał pieniędzy?

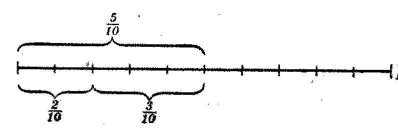
10. Towar waży $1\frac{1}{4}$ *kg*, opakowanie $\frac{1}{8}$ *kg*; ile waży towar z opakowaniem?
11. Kupiec sprzedał $\frac{1}{8}$ *kg* herbaty, potem $\frac{1}{4}$ *kg*, a wreszcie $\frac{1}{16}$ *kg*; ile herbaty sprzedał?
12. Ile *cm* ma odcinek, który jest sumą czterech odcinków: $2\frac{3}{4}$ *cm*, $\frac{1}{2}$ *cm*, $1\frac{3}{8}$ *cm* i $5\frac{5}{16}$ *cm*?
13. Wieśniak ma dwa stogi siana. W jednym jest $8\frac{3}{4}$ tonny, a w drugim $6\frac{1}{2}$ tonny; ile tonn siana posiada?

Odejmowanie ułamków.

Określenia.

a) Przypuśćmy, że mamy dwa ułamki o tych samych mianownikach, np. $\frac{5}{10}$ i $\frac{2}{10}$. Utwórzmy odcinki $\frac{5}{10}$ i $\frac{2}{10}$ jedności (rys. 29).

Różnica tych odcinków ma długość $\frac{3}{10}$ jedności. Ułamek $\frac{3}{10}$ nazywamy **różnicą**, powstałą z odjęcia ułamka $\frac{2}{10}$, zwanego **odjemnikiem**, od ułamka $\frac{5}{10}$, zwanego **odjemną**.



Rys. 29.

Różnicę powyższą zapisujemy:

$$\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{3}{10}.$$

Różnica dwóch ułamków jest ułamkiem, który dodany do drugiego daje na wynik pierwszy.

Z powyższego przykładu widzimy, że:

Różnica dwóch ułamków o równych mianownikach jest to ułamek o tym samym mianowniku, którego licznik jest różnicą liczników. Oczywiście, odejmowanie jest tylko wtedy możliwe, jeśli odjemna jest większa lub co najmniej równa odjemnikowi.

Jeśli mamy utworzyć różnicę ułamków o różnych mianownikach, to sprowadzamy je najpierw do wspólnego mianownika.

Np. $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$. Wspólnym mianownikiem jest 12, przeto:

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}.$$

Zadania.

1. Oblicz:
a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}$, $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$, $\frac{7}{10}-\frac{5}{10}$, $\frac{11}{12}-\frac{7}{12}$, $\frac{13}{9}-\frac{5}{9}$;
b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}-\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}$, $\frac{17}{15}-\frac{2}{3}$, $\frac{11}{8}-\frac{1}{2}$, $\frac{7}{12}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}-\frac{4}{25}$;

c) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$, $\frac{4}{3}-\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}-\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}-\frac{2}{5}$
$\frac{11}{30}-\frac{1}{12}$.

2. Oblicz:
$4-\frac{7}{3}$, $3-\frac{3}{4}$, $4-\frac{2}{5}$, $2-\frac{1}{6}$, $1-\frac{7}{12}$.
Licz: $4-\frac{7}{3}=\frac{4}{1}-\frac{7}{3}=\frac{12}{3}-\frac{7}{3}=\frac{5}{3}$.
3. Oblicz, zamieniając liczby mieszane na ułamki:
a) $6\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{6}-2\frac{5}{6}$, $8\frac{1}{9}-4\frac{7}{9}$, $7\frac{1}{12}-5\frac{11}{24}$;
b) $1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$, $1\frac{1}{2}-1\frac{1}{12}$, $1\frac{2}{5}-\frac{7}{15}$, $5\frac{1}{12}-2\frac{2}{3}$;
c) $2\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}-2\frac{1}{6}$, $2\frac{3}{4}-1\frac{1}{12}$, $4\frac{7}{30}-2\frac{1}{12}$, $2\frac{1}{3}-\frac{7}{10}$.
4. Oblicz następujące wyrażenia:
a) $\frac{3}{7}-\frac{1}{7}+\frac{5}{7}$, *b)* $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}-\frac{6}{9}-\frac{1}{9}$, *c)* $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$,
d) $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{7}{12}$, *e)* $3-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$, *f)* $2\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$,
g) $2\frac{3}{5}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}+4-3\frac{3}{4}$.

Liczby mieszane zamień na ułamki, a następnie sprowadź wszystkie ułamki do wspólnego mianownika!

5. Ile należy dodać do $2\frac{3}{4}$, aby otrzymać $5\frac{7}{12}$?
6. Towar z opakowaniem waży $3\frac{1}{4}$ *kg*, opakowanie zaś $\frac{1}{8}$ *kg*; ile waży sam towar?
7. Jaka to jest liczba, która jest o $2\frac{1}{12}$ mniejsza od liczby $7\frac{1}{60}$?
8. Jeden odcinek ma $5\frac{3}{4}$ *m*, drugi zaś $2\frac{1}{8}$ *m*; o ile pierwszy odcinek jest dłuższy od drugiego?
9. Obwód trójkąta wynosi $5\frac{3}{8}$ *dm*, dwa boki zaś mają $1\frac{1}{2}$ *dm* i $2\frac{1}{4}$ *dm*; ile wynosi trzeci bok?
10. Na jednej szalce leży $1\frac{1}{2}$ *kg*, a na drugiej $\frac{9}{10}$ *kg*; jaki ciężar należy dodać do drugiej szalki, aby obie zrównoważyły się?

Własności liczb całkowitych.

Podzielnik.

Liczba, która mieści się w danej liczbie bez reszty, nazywa się jej p o d z i e l n i k i e m.

Np. podzielnikami liczby 6 są:

1, 2, 3, 6.

Podzielnikami liczby 9 są:

1, 3, 9.

Oczywiście, liczba jest wielokrotnością każdego swojego podzielnika.

Np. 2 jest podzielnikiem 12; 12 jest wielokrotnością 2.

W s p ó l n y m p o d z i e l n i k i e m kilku liczb nazywamy liczbę, która w tych liczbach mieści się bez reszty.

Np. 3 jest wspólnym podzielnikiem liczb 9, 12, 24.

Uwaga. Dwie liczby, nie mające oprócz jedynki innego wspólnego podzielnika, nazywamy w z g l ę d e m s i e b i e p i e r w s z e m i.

Np. 8, 9; 12, 7.

Jeżeli licznik i mianownik ułamka są liczbami względem siebie pierwszemi, to ułamek jest ułamkiem nieprzywiedlnym.

Np. $\frac{8}{9}$, $\frac{12}{7}$.

Z a d a n i a.

1. Podaj z pomiędzy liczb od 1 do 50 te, które posiadają: *a)* podzielnik 2, *b)* podzielnik 3, *c)* podzielnik 5, *d)* podzielnik 2 oraz podzielnik 3, *e)* podzielnik 6.
2. Podaj z pomiędzy liczb od 20 do 70 te, które posiadają: *a)* podzielnik 7, *b)* podzielnik 9.
3. Podaj kolejno wielokrotności: *a)* liczby 2, nie przewyższające 30, *b)* liczby 5, nie przewyższające 100.
4. Podaj podzielniki liczb: 12, 32, 60, 96, 125.

5. Podaj kilka wielokrotności liczb: 25, 40, 15, 60.
6. Przekonaj się, że suma liczb: *a)* od 1 do 4 jest wielokrotnością 5, *b)* od 1 do 6 jest wielokrotnością 7, *c)* od 1 do 10 jest wielokrotnością 11, *d)* od 1 do 12 jest wielokrotnością 13, *e)* od 1 do 16 jest wielokrotnością 17.
7. W poniższej tabliczce masz wypisane w nagłówkach kolejne liczby naturalne, a pod niemi w odpowiednich kolumnach ich kolejne podzielniki:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2
			4		3		4	9	5
					6		8		10

Przedłuż tę tabliczkę aż do liczby 30.
8. Napisz dowolną liczbę trzycyfrową, następnie liczbę, otrzymaną z pierwszej przez wypisanie cyfr w odwrotnym porządku; odejm od większej z nich mniejszą i przekonaj się, że różnica ma podzielniki 9 i 11.
9. Napisz dowolną liczbę czterocyfrową, następnie liczbę otrzymaną z pierwszej, przez wypisanie cyfr w odwrotnym porządku; dodaj te liczby do siebie i przekonaj się, że suma ma podzielnik 11.
10. Wypisz wszystkie podzielniki liczby: *a)* 6, *b)* 28; następnie podzielniki te dodaj, opuszczając samą liczbę; co zauważysz?
11. Jakaś liczba jest podzielna przez: *a)* 25, *b)* 12, *c)* 18, *d)* 60. Podaj kilka innych podzielników tej liczby!
12. Czy liczba, która nie jest przez 12 podzielna, może być podzielna przez 24?
13. Podaj wspólne podzielniki liczb: *a)* 4 i 6, *b)* 9 i 12, *c)* 16 i 18, *d)* 12 i 24, *e)* 36 i 54, *f)* 64 i 72, *g)* 80 i 60. Wypisz wszystkie podzielniki każdej liczby danej pary i porównaj!
14. Podaj wspólne podzielniki następujących liczb: *a)* 2, 4 i 6; *b)* 6, 9 i 15; *c)* 12, 18 i 24; *d)* 15, 30, 45 i 60.
15. Uprość następujące ułamki: $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{30}{45}$, $\frac{12}{60}$.
16. Podaj wszystkie podzielniki liczby 24 oraz wszystkie podzielniki liczby 30. Które z pośród nich są wspólnemi podzielnikami obu liczb? Który z tych wspólnych podzielników jest największy?

To samo zadanie dla następujących par liczb: *a)* 18 i 27, *b)* 14 i 21, *c)* 14 i 35, *d)* 18 i 33, *e)* 7 i 25.

17. *a)* Ojciec rozdzielił równo pomiędzy synów najpierw 15 zeszytów, a następnie 20 piór; ilu miał synów?
    b) Ojciec rozdzielił równo pomiędzy dzieci najpierw 15 ołówków czarnych, następnie 12 niebieskich, a wkońcu 6 czerwonych; ile miał dzieci?

Cechy podzielności.

Poznamy sposoby łatwego wyznaczania reszty przy dzieleniu danej liczby przez 2, 3, 4, 5, 9 i 10. Wskutek tego będziemy mogli szybko przekonać się, czy dana liczba jest przez którąś z wypisanych liczb podzielna, czy też nie.

Cecha podzielności przez 10.

Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś liczby, np. 957 przez 10. W tym celu zauważmy, że liczba 957 zawiera 95 dziesiątek i 7 jednostek. Wynika stąd, że 10 w 957 mieści się 95 razy i zostaje reszta 7. Zatem cyfra jednostek danej liczby przedstawia nam resztę z dzielenia przez 10. Liczba jest więc przez 10 podzielna lub nie, zależnie od tego, czy cyfra jednostek jest 0, czy nie.

Np. 690 jest przez 10 podzielne. Podobnie liczba, utworzona z dwóch, trzech i t. d. ostatnich cyfr, przedstawia nam odpowiednio resztę dzielenia danej liczby przez 100, 1000 i t. d.

Np. 1857 podzielone przez 100 daje resztę 57;
38246, podzielone przez 1000, daje resztę 246.

Zatem liczba jest podzielna przez 100, 1000 i t. d., zależnie od tego, czy odpowiednie dwie, trzy i t. d. ostatnie cyfry są zerami, czy nie.

Np. 1500 jest podzielne przez 100;
3000, 25000 są podzielne przez 1000.

Zadania.

1. Które z liczb: 310, 15200, 22300, 18000, 1240000, 657140 są podzielne przez: *a)* 10, *b)* 100, *c)* 1000?
2. Nie obliczając ilorazu, podaj reszty dzielenia przez: *a)* 10, *b)* 100, *c)* 1000 następujących liczb: 2583, 64219, 576290, 1263856.

Cecha podzielności przez 2.

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś liczby, np. 689 przez 2. Gdybyśmy chcieli 689 groszy rozdzielić równo pomiędzy 2 osoby, to podział ten moglibyśmy uskutecznić, rozdzielając równo najpierw każdą setkę, następnie każdą dziesiątkę. Zostałaby nam wkońcu do rozdzielenia liczba groszy, wyrażona ostatnią cyfrą, t. j. 9 groszy.

Resztę więc dzielenia przez 2 otrzymamy, dzieląc cyfrę jednostek przez 2. W naszym przypadku reszta dzielenia przez 2 jest 1.

Zatem: liczba jest podzielna przez 2 lub nie, zależnie od tego, czy cyfra jednostek jest przez 2 podzielna, czy nie.

Np. liczby 628, 540 są podzielne przez 2.

Zadania.

1. Które z liczb: 108, 615, 8649, 15964, 145892 są podzielne przez 2?
2. Ile wynosi reszta dzielenia liczby nieparzystej przez 2?
3. Przekonaj się, że suma dwóch liczb nieparzystych jest przez 2 podzielna!

Cecha podzielności przez 5.

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś liczby, np. 748 przez 5. Możemy 748 groszy rozdzielić równo pomiędzy 5 osób w następujący sposób: rozdzielamy najpierw równo każdą setkę, a następnie każdą dziesiątkę.

Zostanie nam wkońcu do rozdzielenia liczba groszy, wyrażona ostatnią cyfrą, t. j. 8 groszy. Resztę więc dzielenia przez 5 otrzymamy, dzieląc cyfrę jednostek przez 5. W naszym wypadku reszta dzielenia jest 3.

Zatem: liczba jest podzielna przez 5 lub nie, zależnie od tego, czy cyfra jednostek jest przez 5 podzielna, czy nie (t. j. czy cyfra jednostek jest 0 lub 5, czy nie).

Np. liczby 785, 350 są podzielne przez 5.

Zadania.

1. Które z liczb: 6215, 8610, 23481, 64565, 124500 są przez 5 podzielne?
2. Ile wynosi reszta dzielenia przez 5, następujących liczb: 421, 720, 893?
3. Jaka musi być ostatnia cyfra liczby podzielnej przez 2 i przez 5?

Cecha podzielności przez 4.

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś liczby, np. 2618 przez 4. Podobnie jak poprzednio, rozdzielmy 2618 groszy równo pomiędzy 4 osoby, rozdzielając najpierw każdy tysiąc, a następnie każdą setkę. Pozostanie nam wkońcu liczba groszy, wyrażona przez ostatnie dwie cyfry, t. j. 18 groszy. Resztę więc dzielenia przez 4 otrzymamy, dzieląc przez 4 liczbę, utworzoną przez dwie ostatnie cyfry. W naszym wypadku reszta dzielenia jest 2. Zatem: liczba jest podzielna przez 4 lub nie, zależnie od tego, czy dwie ostatnie jej cyfry tworzą liczbę, podzielną przez 4, czy nie.

Np. liczby: 8116, 728 są podzielne przez 4.

Zadania.

1. Które z liczb: 68, 100, 216, 322, 584, 764, 974, 1236 są podzielne przez 4?
2. Podaj reszty dzielenia przez 4, następujących liczb: 154, 225, 531, 1203, 2642!
3. Jakie są dwie ostatnie cyfry liczby, która jest przez 4 i 5 podzielna?

Cecha podzielności przez 3 i 9.

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś liczby, np. 854 przez 3. W tym celu rozdzielamy 854 *gr* równo pomiędzy 3 osoby. Podział rozpoczynamy od setek. Ponieważ 100 $gr = 99\ gr + 1\ gr$, to, rozdzielając równo setkę pomiędzy 3 osoby, otrzymamy resztę 1 *gr*. Rozdzielając w ten sposób 800 *gr*, otrzymamy resztę 8 *gr*. Podobnie rozdzielamy dziesiątki. Ponieważ $10\ gr = 9\ gr + 1\ gr$, więc, rozdzielając równo 50 *gr*, otrzymamy resztę 5 *gr*.

Uwzględniając jeszcze 4 *gr*, wyrażone ostatnią cyfrą danej liczby, mamy wkońcu do podziału:

$$8\ gr + 5\ gr + 4\ gr.$$

Widzimy stąd, że, aby wyznaczyć resztę dzielenia przez 3, należy sumę cyfr danej liczby podzielić przez 3; reszta, otrzymana przy tem dzieleniu, jest szukaną resztą. W naszym wypadku reszta wynosi 2.

Zatem: liczba jest podzielna przez 3 lub nie, zależnie od tego, czy suma jej cyfr jest przez 3 podzielna, czy nie.

Np. liczby 750, 1245 są podzielne przez 3.

Postępując podobnie jak wyżej, przekonamy się, że resztę dzielenia przez 9 otrzymamy, dzieląc sumę cyfr przez 9.

Np. reszta dzielenia liczby 862 przez 9 jest 7, ponieważ $(8+6+2):9=1$, reszta 7.

Zatem: liczba jest podzielna przez 9 lub nie, zależnie od tego, czy suma jej cyfr jest przez 9 podzielna, czy nie.

Np. liczby 342 i 1845 są podzielne przez 9.

Zadania.

1. Które z liczb: 135, 234, 525, 486, 672, 1236, 4527, 52572 są podzielne *a)* przez 3, *b)* przez 9?
2. Zastąp w następujących liczbach gwiazdkę cyfrą tak, by otrzymać liczbę podzielną przez 9:
   a) 1 * 1; *b)* 1 * 5; *c)* 21 *; *d)* * 43; *e)* 53 *; *f)* 45 *; *g)* 2 * 7; *h)* * 36.
   Na ile sposobów można rozwiązać zadania *f)* i *g)*?
3. Jakie liczby jednocyfrowe należy odpowiednio dodać do liczb 682, 583, 1252, 2684, aby otrzymać liczby podzielne przez 9?
4. Każda liczba, otrzymana z liczby podzielnej przez 3 (9), przez dowolne przestawienie cyfr, jest też przez 3 (9) podzielna; dlaczego?
5. Dlaczego każda liczba trzycyfrowa, której wszystkie cyfry są te same, jest podzielna przez 3? Wypisz te z pośród nich, które są podzielne przez 9!

Cechy podzielności przez inne liczby.

Jeżeli liczba jest podzielna przez dwie liczby względem siebie pierwsze, to jest także podzielna przez iloczyn tych liczb.

Np. 18 jest podzielne przez 2 i przez 3, a więc jest podzielne przez 2 . 3, t. j. 6, ponieważ liczby 2 i 3 są względem siebie pierwsze.

Podobnie liczba podzielna przez 3 i 5 jest podzielna przez 15; liczba podzielna przez 3 i 4, jest podzielna przez 12.

Np. 256782 jest podzielna przez 2, bo ostatnia cyfra jest parzysta; jest podzielna przez 3, bo suma cyfr wynosi 30. Liczba ta jest zatem podzielna przez 6.

31725 jest podzielna przez 3 i przez 5, a więc przez 15.

141624 jest podzielna przez 3 i przez 4, a więc przez 12.

Uwaga. Liczby 4 i 6 nie są względem siebie pierwsze; zatem liczba, która jest przez 4 i przez 6 podzielna, nie musi być podzielna przez 4 . 6, t. j. 24.

Np. 36 jest podzielne przez 4 i 6, a nie jest podzielne przez 24.

Zadania.

1. Wskaż bez wykonywania dzielenia, które z pośród liczb: 20, 24, 36, 60, 212, 245, 345, 450, 480, 519, 567, 702, 900, 916, 972, 27324, 92448 są podzielne *a)* przez 2, *b)* przez 3, *c)* przez 4, *d)* przez 5, *e)* przez 9, *f)* przez 10. Które z powyższych liczb są podzielne jednocześnie przez 2 i przez 3, a więc przez 6? Które są podzielne jednocześnie przez 3 i przez 5, a więc przez 15?
2. Podaj przykłady liczb sześciocyfrowych podzielnych przez: *a)* 6, t. j. przez 2 i 3, *b)* 15, t. j. przez 3 i 5, *c)* 18, t. j. przez 2 i 9, *d)* 45, t. j. przez 5 i 9.

Liczby pierwsze.

Określenia.

Liczbą pierwszą (lub prostą) nazywamy liczbę większą od jedności, która oprócz jedności i samej siebie nie posiada innych podzielników.

Np. liczby 2, 3, 5, 7, 11, 13, są to liczby pierwsze.

Natomiast liczba 6 nie jest liczbą pierwszą, bo oprócz podzielników 1 i 6 posiada podzielnik 3.

Liczby, które nie są pierwsze (z wyjątkiem 1), nazywamy liczbami złożonemi.

Liczby pierwsze, mniejsze od 100, są następujące:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Zadania.

1. Wypisz liczby pierwsze, zawarte między 100 a 110!
2. Dlaczego jedyną liczbą prostą parzystą jest 2?

3. Przedstaw (przynajmniej w jeden sposób) każdą liczbę parzystą od 4 do 30, jako sumę dwóch liczb pierwszych!
4. Przedstaw 24 jako sumę dwóch liczb pierwszych; na ile sposobów możesz to uczynić, jeśli nie zwracasz uwagi na porządek dodajników?
5. Przedstaw 2 jako różnicę dwóch liczb pierwszych, przyczem odjemna ma być mniejsza od 40; na ile sposobów możesz to uczynić?
6. Przedstaw 4 jako różnicę dwóch liczb pierwszych, przyczem odjemna ma być mniejsza od 40; na ile sposobów możesz to uczynić?
7. Czy wśród liczb pierwszych, mniejszych od 100, są takie, których różnica wynosi *a)* 6, *b)* 8, *c)* 10, *d)* 12?
8. Ile liczb pierwszych jest między 15 a 40; ile między 75 a 100?
9. Nauczyciel rozdzielił równo 17 piór pomiędzy uczniów w klasie; ilu było uczniów?

Rozkład liczby na czynniki pierwsze.

Jeśli mamy jakiś ułamek, którego licznik i mianownik jest iloczynem kilku liczb, to nieraz łatwo możemy go uprościć.

Np. mamy uprościć ułamek:

$$\frac{2.9.13}{4.3.11}.$$

Upraszczamy ten ułamek przez 2, dzieląc 2 i 4 przez 2, a następnie upraszczamy przez 3, dzieląc 9 i 3 przez 3. Otrzymamy zatem

$$\frac{2.9.13}{4.3.11}=\frac{1.3.13}{2.1.11}=\frac{39}{22}$$

Widzimy stąd, że przy upraszczaniu ułamków wygodną jest rzeczą przedstawić licznik i mianownik ułamka jako iloczyny czynników. Najprościej będzie przedstawić je jako iloczyny czynników pierwszych.

Przypuśćmy, że chcemy jakąś liczbę, np. 60, przedstawić w postaci iloczynu samych liczb pierwszych. W tym celu dzielimy daną liczbę pokolei przez liczby pierwsze 2, 3, 5... tak długo, aż znajdziemy liczbę pierwszą, która jest dzielnikiem danej liczby. W naszym wypadku tą liczbą pierwszą jest 2.

Mamy zatem: $60 = 2 \times 30$.

Szukamy teraz liczby pierwszej, któraby była podzielnikiem liczby 30.

Mamy więc: $30 = 2 \times 15$.

Z liczbą 15 postępujemy znowu jak poprzednio z liczbami 60 i 30 i przekonujemy się, że 3 jest podzielnikiem liczby 15.

A więc: $15 = 3 \times 5$.

5 jest już liczbą pierwszą. Mamy zatem:

$$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5.$$

Przedstawiliśmy więc liczbę 60 w postaci iloczynu samych liczb pierwszych.

Rachunek powyższy zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Po prawej stronie kreski pionowej piszemy liczby pierwsze, a po lewej stronie ilorazy, otrzymane z dzielenia przez odpowiednie liczby pierwsze.

Przedstawienie danej liczby w postaci iloczynu samych liczb pierwszych nazywamy r o z k ł a d e m danej liczby na czynniki pierwsze!

Przykład: Rozłożyć liczbę 3960 na czynniki pierwsze!

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11.$$

Uwaga. Aby otrzymać podzielniki jakiejś liczby, np. 60, rozkładamy ją na czynniki pierwsze. Mamy: $60 = 2.2.3.5$.

Iloczyn którychkolwiek czynników powyższego rozkładu jest podzielnikiem liczby 60. Tworząc wszystkie takie iloczyny, otrzymamy wszystkie podzielniki liczby 60 (z wyjątkiem jedynki):

2, 3, 5, 2 . 2, 2 . 3, 2 . 5, 3 . 5, 2 . 2 . 3, 2 . 2 . 5, 2 . 3 . 5, 2 . 2 . 3 . 5.

Zadania.

1. Rozłóż następujące liczby na czynniki pierwsze:
a) 18; *b)* 32; *c)* 60; *d)* 100; *e)* 75; *f)* 144; *g)* 150; *h)* 320; *j)* 500; *k)* 840; *l)* 5142; *m)* 9180; *n)* 27852; *o)* 54648.
2. Iloma sposobami można przedstawić liczbę 28 jako iloczyn dwóch liczb całkowitych?
3. Posługując się rozkładem na czynniki pierwsze, wypisz wszystkie podzielniki liczb: *a)* 12; *b)* 18; *c)* 24; *d)* 36; *e)* 120.
4. Sprowadź do postaci nieprzywiedlnej następujące ułamki:
a) $\frac{99}{702}$; *b)* $\frac{165}{221}$; *c)* $\frac{495}{1089}$; *d)* $\frac{84}{357}$; *e)* $\frac{270}{702}$; *f)* $\frac{2088}{2952}$; *g)* $\frac{4774}{8162}$;
h) $\frac{63 \times 78}{42 \times 36}$; *i)* $\frac{56 \times 63}{35 \times 48}$; *j)* $\frac{88 \times 128}{77 \times 64}$; *k)* $\frac{9 \times 4 \times 12 \times 5}{10 \times 18 \times 7 \times 4}$;
l) $\frac{95 \times 105 \times 150}{19 \times 35 \times 50}$; *m)* $\frac{44 \times 49 \times 56}{33 \times 42 \times 48}$;
n) $\frac{8 \times 48 \times 56 \times 81 \times 52}{78 \times 112 \times 27 \times 32}$.
Uwaga. Rozłóż licznik i mianownik na czynniki pierwsze, a następnie upraszczaj przez wspólne czynniki!
5. Ile jest różnych prostopadłościanów o objętości 70 cm^3, w których krawędzie wyrażają się całkowitemi liczbami centymetrów?
6. Na zakupno podręcznika dla każdego ucznia w klasie złożono 294 *zł*. Ilu było uczniów i ile kosztowała jedna książka, jeśli cena książki wyraża się całkowitą liczbą *zł*, a uczniów było więcej niż 30, a mniej niż 45?

Największy wspólny podzielnik.

Określenie.

Mamy liczby 30 i 36. Podzielnikami liczby 30 są: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Podzielnikami liczby 36 są: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Wspólnemi podzielnikami tych liczb są więc liczby: 1, 2, 3, 6.

Największym wspólnym podzielnikiem liczb 30 i 36 jest więc liczba 6.

Największy wspólny podzielnik kilku liczb, np. 30 i 36, oznaczamy:

$$\text{NWP}\ (30,\ 36).$$

Zatem:

$$\text{NWP}\ (30,\ 36) = 6.$$

Wyznaczanie NWP zapomocą rozkładu na czynniki pierwsze.

Mamy znaleźć:

$$\text{NWP}\ (36,\ 270).$$

Rozkładamy te liczby na czynniki pierwsze:

$$36 = 2 . 2 . 3 . 3$$
$$270 = 2 . 3 . 3 . 3 . 5.$$

Liczby pierwsze 2 i 3, występujące równocześnie w obu rozkładach, są wspólnemi podzielnikami danych liczb. Każdy inny wspólny podzielnik jest iloczynem dwójek i trójek. W tym iloczynie 2 może występować jako czynnik najwyżej jeden raz, gdyż inaczej 270 nie byłoby podzielne przez ten iloczyn; 3 zaś jako czynnik może występować najwyżej dwa razy, gdyż w przeciwnym wypadku 36 nie byłoby przez ten iloczyn podzielne. Wynika stąd, że:

$$\text{NWP}\ (36,\ 270) = 2 . 3 . 3 = 18.$$

Podobnie, chcąc znaleźć NWP (3960, 3740, 260), rozkładamy te liczby na czynniki pierwsze.
Otrzymamy:

$$3960 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 11$$
$$3740 = 2 . 2 . 5 . 11 . 17$$
$$260 = 2 . 2 . 5 . 13.$$

Zatem:

$$\text{NWP}\ (3960,\ 3740,\ 260) = 2 . 2 . 5 = 20.$$

Zadania.

1. Wyszukaj NWP liczb:
a) 18 i 12; *b)* 30 i 12; *c)* 16 i 24; *d)* 32 i 48; *e)* 55 i 99; *f)* 75 i 175; *g)* 42 i 63; *h)* 65 i 143; *i)* 15, 25 i 35;

j) 24, 36, 48 i 60; *k)* 224 i 392; *l)* 828 i 10692; *m)* 9216, 6912 i 12672; *n)* 2178, 5324 i 6468; *o)* 1848, 2904 i 3432; *p)* 7128, 4320 i 1008.

2. Uprość następujące ułamki przez NWP licznika i mianownika:

$$\frac{180}{252};\ \frac{336}{462};\ \frac{560}{420};\ \frac{1080}{810};\ \frac{1512}{1008};\ \frac{2145}{1386};\ \frac{700}{5880};\ \frac{126}{2940}.$$

3. Mamy odmierzyć 80 *l*, 76 *l* i 68 *l* wina.
   Wskaż największą pojemność naczynia, którem odmierzysz te ilości wina, bez użycia innych naczyń!
4. Wyszukaj największą liczbę, przez którą podzielone 85 daje na resztę 1, 110 zaś na resztę 2!
5. Proch strzelniczy można utworzyć z 150 części saletry, 25 części siarki i 25 części węgla; w jaki sposób ten przepis najprościej zapiszesz?
6. Dane są trzy kwadraty, o bokach 108 *cm*, 132 *cm*, i 204 *cm*; podziel je na równe kwadraty, możliwie wielkie.
7. Prostokąt ma wymiary 12 *cm* i 18 *cm*; podziel go na możliwie największe równe kwadraty!

Najmniejsza wspólna wielokrotność.

Określenie.

Wspólną wielokrotnością kilku liczb nazywamy każdą liczbę, w której dane liczby mieszczą się bez reszty.

Wspólną wielokrotnością liczb: 8, 12, 15, jest np. liczba 240.

Mamy np. liczby: 6, 10, 15. Wypiszmy wielokrotności każdej z nich.

Wielokrotności:

liczby 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66,.....
liczby 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70,.....
liczby 15: 15, 30, 45, 60, 75,....

Widzimy stąd, że najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 6, 10 i 15 jest 30.

Najmniejszą wspólną wielokrotnoć oznaczamy NWW więc:

NWW (6, 10, 15) = 30.

Wyznaczanie NWW zapomocą rozkładu na czynniki pierwsze.

Mamy znaleźć:

NWW (12, 30, 50).

Rozkładamy te liczby na czynniki pierwsze:

12 = 2 . 2 . 3
30 = 2 . 3 . 5
50 = 2 . 5 . 5.

W tych rozkładach występują liczby pierwsze: 2, 3, 5. Każdą wspólną wielokrotność danych liczb możemy sobie wyobrazić jako iloczyn liczb pierwszych. W tym iloczynie, 2 musi występować co najmniej dwa razy, gdyż inaczej 12 nie mieściłoby się w tym iloczynie; 3 musi występować co najmniej jeden raz, gdyż inaczej ani 12, ani 30 nie mieściłoby się w tym iloczynie; 5 musi występować co najmniej dwa razy, gdyż inaczej 50 nie mieściłoby się w tym iloczynie.

Wynika stąd, że:

NWW (12, 30, 50) = 2 . 2 . 3 . 5 . 5 = 300.

Podobnie, chcąc znaleźć NWW (60, 350, 245), rozkładamy te liczby na czynniki pierwsze.

Otrzymamy:

60 = 2 . 2 . 3 . 5
350 = 2 . 5 . 5 . 7
245 = 5 . 7 . 7.

Zatem:

NWW (60, 350, 245) = 2 . 2 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7 = 14700.

Uwaga. Jeżeli dwie liczby są względem siebie pierwsze, to NWW jest ich iloczynem. Np.:

NWW (5, 11) = 5 . 11 = 55.

Jeżeli szukamy NWW kilku liczb, to możemy opuścić te liczby, które mieszczą się w innych bez reszty.

Np. NWW (8, 15, 16, 30, 24) = NWW (16, 30, 24).

Drugi sposób wyznaczania NWW.

Podamy jeszcze inny sposób obliczania NWW kilku liczb.

Aby np. znaleźć NWW (6, 10, 15, 35, 40, 162, 175), sporządzamy tabelkę następującą:

~~6~~	~~10~~	15	~~35~~	40	162	175	2
		15		20	81	175	3
		~~5~~		20	27	175	5
				4	27	35	

NWW (6, 10, 15, 35, 40, 162, 175) $= 4 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 113400$.

W pierwszym wierszu, na lewo od kreski pionowej, przekreślamy każdą liczbę, która jest podzielnikiem drugiej, a więc np. 6, ponieważ jest podzielnikiem 162. Po prawej stronie kreski pionowej piszemy jakąkolwiek liczbę pierwszą, która jest podzielnikiem przynajmniej dwóch liczb nieprzekreślonych, w naszym przykładzie 2. W drugim wierszu przepisujemy te liczby, które nie są podzielne przez 2, a następnie ilorazy pozostałych liczb przez 2.

Z drugim wierszem postępujemy tak, jak z pierwszym i otrzymujemy wiersz trzeci.

Postępując w ten sposób dalej, dochodzimy do wiersza, w którym każde dwie liczby są względem siebie pierwsze.

Iloczyn liczb ostatniego wiersza i kolumny po prawej stronie kreski pionowej jest NWW danych liczb.

Zadania.

1. Oblicz NWW liczb:
a) 5 i 7; *b)* 8 i 12; *c)* 40 i 60; *d)* 45 i 60; *e)* 75 i 225; *f)* 2, 3, 4, 5 i 6; *g)* 12, 18 i 15; *h)* 8, 10, 12, 16 i 20; *i)* 72 i 108; *j)* 54 i 144; *k)* 144 i 160; *l)* 210 i 756; *m)* 165 i 385; *n)* 256 i 1024; *o)* 624 i 936; *p)* 25, 40 i 75; *r)* 50, 90 i 110; *s)* 288, 516 i 800; *t)* 45, 60, 210 i 315; *u)* 125, 75 i 55; *w)* 10, 12, 15, 20 i 30; *x)* 54, 32, 48, 64 i 72; *y)* 8, 11, 72, 88, 36, 99 i 198.
2. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika, obierając jako wspólny mianownik NWW mianowników, a następnie porównaj: *a)* $\frac{5}{9}, \frac{7}{18}$; *b)* $\frac{4}{21}, \frac{8}{84}$; *c)* $\frac{6}{14}, \frac{9}{21}$; *d)* $\frac{5}{12}, \frac{7}{18}, \frac{8}{27}$; *e)* $\frac{7}{18}, \frac{11}{30}, \frac{5}{24}$; *f)* $\frac{5}{156}, \frac{7}{182}$; *g)* $\frac{8}{369}, \frac{5}{246}$; *h)* $\frac{11}{342}, \frac{13}{456}$; *i)* $\frac{5}{8}, \frac{21}{24}, \frac{7}{10}, \frac{3}{6}, \frac{11}{14}, \frac{37}{40}$; *j)* $\frac{7}{5}, \frac{21}{18}, \frac{3}{4}, \frac{12}{10}, \frac{17}{15}$; *k)* $\frac{7}{3}, \frac{9}{13}, \frac{21}{16}, \frac{5}{9}, \frac{17}{12}, \frac{31}{26}$.
3. Sprowadź następujące ułamki do najmniejszego wspólnego mianownika: *a)* $\frac{6}{10}, \frac{21}{33}$; *b)* $\frac{6}{18}, \frac{7}{15}$; *c)* $\frac{8}{32}, \frac{7}{21}$; *d)* $\frac{9}{51}, \frac{40}{46}$; *e)* $\frac{5}{18}, \frac{7}{32}, \frac{21}{72}$.

Aby ułamki sprowadzić do najmniejszego wspólnego mianownika, przedstawiamy je w postaci nieprzywiedlnej i jako wspólny mianownik obieramy NWW nowych mianowników.

4. Porównaj następujące ułamki, sprowadzając je do najmniejszego wspólnego mianownika: *a)* $\frac{21}{36}, \frac{36}{216}, \frac{90}{396}$; *b)* $\frac{4}{114}, \frac{130}{156}, \frac{220}{264}, \frac{170}{204}$.
5. Znaleźć możliwie mały kwadrat, któryby dał się podzielić na równe kwadraty o boku 4 *cm*, i dał się także podzielić na równe kwadraty o boku 6 *cm*.
6. Dwaj cykliści wyruszyli z tego samego miejsca areny i w tym samym kierunku. Jeden okrąża arenę w 18 minutach, a drugi w 24. Kiedy po raz pierwszy obaj znajdą się równocześnie w początkowem miejscu?
7. Większe koło u wozu ma 36 *dm*, mniejsze zaś 30 *dm* obwodu; jaka jest najkrótsza droga, na której oba koła wykonają całkowitą liczbę obrotów?

Ułamek jako iloraz dokładny.

Określenie i własności ułamka.

Iloraz dokładny.

Jeżeli odcinek 14 *cm* podzielimy na kilka równych części, np. na 5, to każdą taką część nazywać będziemy **ilorazem dokładnym**, otrzymanym z podzielenia 14 *cm* na 5 równych części, lub krótko ilorazem dokładnym 14 *cm* przez 5. Iloraz dokładny oznaczamy podobnie jak zwyczajny:

$$14\ cm : 5.$$

Zadania.

1. Ile *dm* wynosi dokładny iloraz: *a)* 8 *m* : 5; *b)* 3 *m* : 2; *c)* 15 *m* : 25?
2. Ile złotych i groszy wynosi dokładny iloraz: *a)* 7 *zł* : 2; *b)* 15 *zł* : 12; *c)* 9 *zł* : 6?
3. Ile godzin, minut i sekund wynosi dokładny iloraz: *a)* 5 godz. : 3; *b)* 2 godz. : 25; *c)* 35 min. : 21?
4. Ile sztuk wynosi dokładny iloraz: *a)* 5 tuzinów : 6; *b)* 3 kopy : 15; *c)* 12 kóp 4 tuziny : 24?
5. *a)* Pomiędzy 8 chłopców rozdzielono 4 *kg* owoców; ile każdy otrzymał?
   b) Pomiędzy 18 uczniów rozdzielono 3 tuziny piór; ile każdy otrzymał?
   c) Na 24 jednakowych ubrań potrzeba 84 *m* sukna; ile sukna potrzeba na jedno ubranie?
   d) Koło u wozu po 35 obrotach zrobiło drogę 217 *m*; jaka droga przypada na 1 obrót?

Ułamek jako iloraz dokładny.

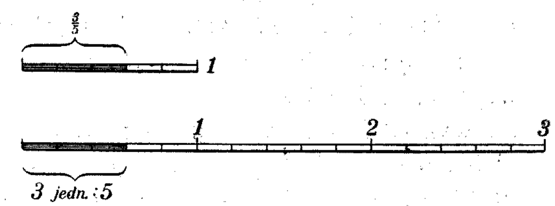
Przekonamy się teraz, że iloraz dokładny wyraża się ułamkiem.

1. Na rys. 30 część jedności zakreślona wynosi $\frac{3}{5}$ jedności. Poniżej mamy 3 jedności, podzielone na 5 równych części, zatem część zakreślona wynosi 3 jedności : 5. Z porównania obu rysunków widzimy, że:

$$3 \text{ jedności} : 5 = \tfrac{3}{5} \text{ jedności}.$$

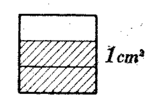
2. Na rys. 31 mamy 1 cm^2 podzielony na 3 równe części, a więc część zacieniowana wynosi $\frac{2}{3}$ cm^2. Na rys. 32 mamy 2 cm^2, podzielone na 3 równe części; zatem część zacieniowana wynosi 2 cm^2 : 3. Z porównania obu rysunków widzimy, że:

$$2\ cm^2 : 3 = \tfrac{2}{3}\ cm^2.$$

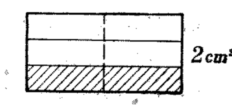


Rys. 30.

3. Jeżeli 7 jabłek rozdzielimy równo między 4 osoby, to każda z nich otrzyma: 7 jabłek : 4.
   Podział ten możemy uskutecznić, rozdzielając równo każde jabłko zosobna między 4 osoby. Ponieważ jedna osoba z każdego jabłka otrzyma 1 ćwiartkę, więc otrzyma razem 7 ćwiartek, czyli $\frac{7}{4}$ jabłka.
   Zatem: 7 jabłek : 4 równa się $\frac{7}{4}$ jabłka.



Rys. 31.



Rys. 32.

4. 3 *kg* : 4 = 3000 *gr* : 4 = 750 *gr*; $\frac{3}{4}$ *kg* = 750 *gr*. A więc

$$3\ kg : 4 = \tfrac{3}{4}\ kg.$$

Aby więc utworzyć jakiś ułamek, np. $\frac{3}{5}$ jedności, możemy postąpić dwojako:

albo jedność podzielić na 5 części równych i wziąć takich części 3, albo 3 jedności podzielić na 5 równych części i wziąć jedną taką część.

Uwaga. **Ilorazem dokładnym** liczby 3 przez 5 nazywać będziemy ułamek $\frac{3}{5}$.

Iloraz ten oznaczamy: $3 : 5$.

Możemy więc napisać:

$$3 : 5 = \tfrac{3}{5}.$$

Podobnie: $2 : 3 = \frac{2}{3}$, $7 : 5 = \frac{7}{5}$ i t. d.

Zadania.

1. Przekonaj się, że:

   a) $3\,m : 5 = \frac{3}{5}\,m$; $14\,m : 25 = \frac{14}{25}\,m$; $2\,km : 125 = \frac{2}{125}\,km$;
   b) $7\,kg : 4 = \frac{7}{4}\,kg$; $35\,kg : 2 = \frac{35}{2}\,kg$; $27\,kg : 8 = \frac{27}{8}\,kg$;
   c) 5 godz. : 6 = $\frac{5}{6}$ godz.; 3 min. : 5 = $\frac{3}{5}$ min.;
   7 godz.: 25 = $\frac{7}{25}$ godz;
   d) 3 tuziny : 4 = $\frac{3}{4}$ tuz.; 5 kóp : 12 = $\frac{5}{12}$ kopy;
   7 kóp : 15 = $\frac{7}{15}$ kopy;
   e) 9 *zł* : 4 = $\frac{9}{4}$ *zł*; 17 *zł* : 20 = $\frac{17}{20}$ *zł*; 3 *zł* : 25 = $\frac{3}{25}$ *zł*.

   Licz: $3\,m : 5 = 30\,dm : 5 = 6\,dm$; $\frac{1}{5}\,m = 2\,dm$; $\frac{3}{5}\,m = 6\,dm$; więc $3\,m : 5 = \frac{3}{5}\,m$.
2. Ile wynosi iloraz dokładny dzielenia:
   a) 8 przez 4; *b)* 9 przez 3; *c)* 10 przez 3; *d)* 12 przez 5; *e)* 17 przez 25; *f)* 1 przez 2; *g)* 2 przez 5; *h)* 3 przez 6; *i)* 57 przez 93; *j)* 13 przez 111?
3. Przekonaj się na odcinkach, że:
   a) $5\,cm : 4 = \frac{5}{4}\,cm$; *b)* $8\,cm : 3 = \frac{8}{3}\,cm$; *c)* $11\,cm : 5 = \frac{11}{5}\,cm$; *d)* $3\,cm : 8 = \frac{3}{8}\,cm$.
4. *a)* Pomiędzy czterech ludzi rozdzielono równo 3 *kg* chleba; ile otrzymał każdy? Odp.: $3\,kg : 4 = \frac{3}{4}\,kg$.
   b) Za 4 *kg* cukru zapłacono 6 *zł*; ile kosztuje 1 *kg* cukru?
   c) Pociąg w 6 godzinach przebiegł drogę 315 *km*; ile *km* przebiegł średnio w 1 godzinie?
   d) Pensja roczna wynosi 3120 zł.; ile wynosi pensja miesięczna?
   e) Koło robi 5 obrotów na 4 minuty; ile obrotów robi na minutę? Jaki ułamek minuty przypada na 1 obrót?
   f) W 6 godzinach robotnik kopie 15 *m* rowu; ile *m* rowu wykopie w 1 godzinie? Jak długo kopie 1 *m* rowu?

Iloraz dokładny jako liczba mieszana.

1. Znaleźć iloraz niedokładny i resztę dzielenia w następujących przykładach: *a)* 13 : 4; *b)* 20 : 7; *c)* 17 : 5.
2. Ile wynosi dzielna, jeśli:
   a) 3 jest dzielnikiem, 5 ilorazem niedokładnym, 2 resztą;
   b) 7 jest dzielnikiem, 3 ilorazem niedokładnym, 5 resztą;
   c) 11 jest dzielnikiem, 8 ilorazem niedokładnym, 9 resztą?
3. Ile wynosi dzielnik, jeśli:
   a) 18 jest dzielną, 2 ilorazem niedokładnym, 4 resztą;

   b) 27 jest dzielną, 4 ilorazem niedokładnym, 3 resztą;
   c) 41 jest dzielną, 5 ilorazem niedokładnym, 1 resztą?
4. Możemy łatwo zamienić ułamek na liczbę mieszaną, przedstawiając ten ułamek w postaci ilorazu dokładnego.
   Np., jak wiemy, $\frac{9}{4} = 9 : 4$. Ponieważ $9 : 4 = 2$ (reszta 1), więc rozdzielając równo np. 9 *m* sukna między 4 osoby, należy dać każdej osobie 2 *m* sukna i czwartą część reszty. Każda więc osoba otrzyma $2\frac{1}{4}$ *m*,

   przeto: $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.

   W podobny sposób zamień następujące ułamki na liczby mieszane, przedstawiając te ułamki w postaci ilorazu dokładnego:

   $$\frac{12}{5},\ \frac{21}{4},\ \frac{317}{21},\ \frac{519}{31},\ \frac{1463}{90}.$$
5. Aby zamienić liczbę mieszaną, np. $5\frac{3}{4}$, na ułamek o mianowniku 4, należy zwrócić uwagę na to, że szukany licznik podzielony przez 4 daje na iloraz niedokładny 5, a na resztę 3.
   Szukany więc licznik wynosi:

   $$(5 \,.\, 4) + 3 = 23.$$

   Zatem:

   $$5\tfrac{3}{4} = \tfrac{23}{4}.$$

   Zamień w podobny sposób następujące liczby mieszane na ułamki: $3\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{7}$, $3\frac{3}{4}$, $2\frac{3}{5}$, $8\frac{5}{12}$, $7\frac{4}{9}$.
6. Przedstaw w postaci liczby mieszanej i zamień na ułamek: 2 *m* 5 *cm*, 3 *m* 2 *cm*, 8 *zł* 25 *gr*, 12 *zł* 5 *gr*, 3 godz. 15 min.

Własności ilorazu dokładnego.

Mamy rozdzielić równo 6 *l* mleka pomiędzy 8 chłopców. Każdy otrzyma:

$$6\,l : 8.$$

Gdyby mleka i chłopców było 2 razy więcej, to każdy otrzymałby to samo, co przedtem. Wynika stąd, że:

$$6\,l : 8 = (6\,l \,.\, 2) : (8 \,.\, 2).$$

Podobnie, gdyby mleka i chłopców było 2 razy mniej, niż na początku, to każdy otrzymałby znowu to samo, co przedtem. Wynika stąd, że:

$$6\,l : 8 = (6\,l : 2) : (8 : 2).$$

Widzimy zatem, że iloraz dokładny nie zmieni się, jeśli dzielną i dzielnik równocześnie przez tę samą liczbę pomnożymy, lub też podzielimy.

Zadania.

1. Opierając się na własnościach ilorazu, zastąp literę x odpowiednią liczbą: *a)* $2:3=x:6$; *b)* $4:5=12:x$; *c)* $9:12=x:4$; *d)* $8:x=2:5$.
2. Przekonaj się o następujących równościach, przedstawiając ułamki w postaci ilorazów dokładnych: *a)* $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$; *b)* $\frac{16}{25}=\frac{64}{100}$; *c)* $\frac{7}{12}=\frac{14}{24}$; *d)* $\frac{4}{15}=\frac{12}{45}$.
3. Przekonaj się, jak w zadaniu 2, o następujących równościach:

   a) $\frac{2}{3}=\frac{2\,.\,2}{3\,.\,2}$, $\frac{2}{3}=\frac{2\,.\,5}{3\,.\,5}$, $\frac{2}{3}=\frac{2\,.\,7}{3\,.\,7}$;

   b) $\frac{24}{36}=\frac{24:2}{36:2}$, $\frac{24}{36}=\frac{24:3}{36:3}$, $\frac{24}{36}=\frac{24:12}{36:12}$.

   Jaka znana już własność o przekształcaniu ułamków wynika z równości *a)*, a jaka z równości *b)*?
4. Czy iloraz dokładny zwiększy się, czy zmniejszy, jeśli:

   a) zwiększymy dzielną;
   b) zmniejszymy dzielną;
   c) zwiększymy dzielnik;
   d) zmniejszymy dzielnik;
   e) zwiększymy dzielną i zmniejszymy dzielnik;
   f) zmniejszymy dzielną i zwiększymy dzielnik?

   Odpowiedzi uzasadnij na odpowiednich przykładach! Np.: iloraz 5 *cm*:4 jest większy, niż iloraz 3 *cm*:4 (rysunek!)

Dodawanie ułamków.

1. Oblicz: $\frac{7}{15}+\frac{13}{21}$, $\frac{25}{48}+\frac{37}{72}$, $\frac{19}{30}+\frac{7}{12}$, $\frac{7}{22}+\frac{8}{33}+\frac{2}{3}$, $\frac{24}{25}+\frac{11}{30}+\frac{7}{45}$, $\frac{31}{27}+\frac{89}{90}+\frac{8}{60}+\frac{13}{18}$, $\frac{11}{40}+\frac{5}{72}+\frac{13}{24}$, $\frac{11}{20}+\frac{9}{28}+\frac{3}{32}+\frac{7}{40}$.
2. Oblicz, zamieniając liczby mieszane na ułamki:

   $3\frac{1}{10}+4\frac{2}{5}+7\frac{1}{2}$, $2\frac{7}{11}+1\frac{3}{22}+4\frac{7}{44}$, $12\frac{1}{2}+3\frac{5}{8}+2\frac{1}{4}$, $8+5\frac{3}{10}+4\frac{1}{15}+\frac{19}{20}$, $5\frac{7}{8}+1\frac{11}{12}+4+\frac{1}{3}$.
3. Jednego dnia rozdzielono równo między 4 dzieci 5 pomarańcz, drugiego 6 pomarańcz, a trzeciego 7 pomarańcz. Wyrachuj, ile każde dziecko otrzymało razem: *a)* obliczając najpierw, ile otrzymało każdego dnia, *b)* obliczając liczbę wszystkich pomarańcz. Przekonaj się, że stąd wynika prawo rozdzielności dzielenia względem dodawania!

4. *a)* Wyraź w ułamkach godziny: 20 minut i 30 sekund.

   (Odp. $\frac{20}{60}+\frac{30}{3600}=\frac{1}{3}+\frac{1}{120}=\frac{41}{120}$).

   b) Wyraź w ułamkach doby: 6 godzin i 20 minut.
   c) Wyraź w ułamkach metra: 3 *cm* i 5 *mm*.
   d) Wyraź w ułamkach kilograma: 750 *g*.
   e) Wyraź w ułamkach kilometra: 350 *m*.
5. Pewien murarz wystawił mur w 20 dniach, inny wystawiłby ten sam mur w 16 dniach. Jaką część muru wystawiliby obaj w jednym dniu, pracując razem?
6. Do basenu wpływa woda dwiema rurami. Gdyby woda wpływała tylko jedną rurą, basen byłby pełny w 5 godzinach, a gdyby wpływała tylko drugą rurą, w 6 godzinach. Jaką część basenu wypełni woda wpuszczona obiema rurami przez jedną godzinę?
7. Do naczynia wlano $\frac{3}{2}$ *l* mleka, $\frac{5}{4}$ *l* mleka, $\frac{5}{2}$ *l* mleka, i 4 *l* mleka.

   a) Czy musisz wiedzieć, w jakim porządku te ilości mleka wlewano, aby obliczyć, ile razem wlano?
   b) Przekonaj się, że stąd wynika również i dla ułamków prawo przemienności sumy!
   c) Oblicz, ile *l* mleka razem wlano!
8. Oblicz sumy:

   a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}$, *b)* $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$,
   c) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, *d)* $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

   Dlaczego wszystkie wyniki są równe?
9. W sumie $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$ przestaw dodajniki na wszystkie możliwe sposoby i za każdym razem oblicz sumę!
10. Oblicz kilkoma sposobami każdą z sum:

    a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$, *b)* $2\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$,
    c) $1\frac{5}{6}+2+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, *d)* $1\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}+1+3\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.
11. Kupiec sprzedał jednego dnia $1\frac{1}{2}$ *kg* herbaty i $3\frac{1}{4}$ *kg* kawy, drugiego zaś dnia $\frac{3}{4}$ *kg* herbaty i $2\frac{1}{2}$ *kg* kawy.

    a) Ile *kg* towaru sprzedał pierwszego dnia, a ile drugiego?

b) Ile *kg* herbaty, a ile *kg* kawy sprzedał w obu dniach?

c) Oblicz, ile *kg* towaru sprzedał w obu dniach: t. j. $1\frac{1}{2}$ *kg* $+ 3\frac{1}{4}$ *kg* $+ \frac{3}{4}$ *kg* $+ 2\frac{1}{2}$ *kg*, opierając się raz na wyniku zadania *(a)*, drugi raz na wyniku zadania *(b)*!

d) Przekonaj się, że stąd wynika prawo łączności również dla sumy liczb ułamkowych. Zaznacz tę własność, posługując się nawiasami!

12. Jaś dostał $2\frac{1}{2}$ *zł*, a Piotruś o $\frac{1}{4}$ *zł* więcej; ile otrzymali razem? Odp. $2\frac{1}{2} + (2\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$.

13. Kupiec sprzedał $2\frac{1}{2}$ *kg* towaru, potem o $\frac{1}{2}$ *kg* więcej, a wreszcie o $\frac{1}{4}$ *kg* więcej, niż za pierwszym razem; ile *kg* towaru razem sprzedał?

14. Oblicz: $121\frac{7}{32} + 13\frac{11}{12}$, $18\frac{7}{60} + 84\frac{1}{36} + 7\frac{1}{150}$,
$5 + 23\frac{1}{16} + 284\frac{19}{32} + 54\frac{11}{80}$, $19\frac{7}{12} + 8 + 145\frac{11}{42} + 93\frac{13}{54}$.
Posługując się prawami przemienności i łączności sumy, licz: $121\frac{7}{32} + 13\frac{11}{12} = 121 + \frac{7}{32} + 13 + \frac{11}{12} =$
$= (121 + 13) + (\frac{7}{32} + \frac{11}{12}) = 134 + \frac{109}{96} = 134 + 1 + \frac{13}{96} =$
$= 135\frac{13}{96}$.

15. Oblicz w najdogodniejszy sposób sumy:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, odp. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3})$;
b) $1\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 3\frac{1}{2} + \frac{4}{5}$, *c)* $5 + \frac{4}{7} + 1\frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{3}{5}$,
d) $3\frac{3}{4} + 2 + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} + 5$.

16. Odlano z beczki $17\frac{1}{5}$ *l* nafty, następnie $8\frac{1}{2}$ *l*, potem $24\frac{3}{4}$ *l*, a wreszcie $36\frac{3}{8}$ *l*; ile litrów nafty beczka zawierała, jeśli zostało $13\frac{7}{40}$ *l*?

Odejmowanie ułamków.

1. Oblicz:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$; $\frac{5}{7} - \frac{1}{8}$; $\frac{5}{8} - \frac{7}{12}$;
b) $1 - \frac{5}{7}$; $3 - \frac{4}{5}$; $9 - \frac{11}{15}$; $17 - \frac{3}{5}$; $26 - \frac{4}{11}$;
c) $\frac{16}{49} - \frac{17}{63}$; $\frac{18}{35} - \frac{19}{45}$; $\frac{39}{54} - \frac{17}{32}$; $\frac{41}{48} - \frac{27}{64}$; $\frac{17}{121} - \frac{4}{33}$.

2. Kupiec zapłacił za 11 *kg* towaru 17 *zł*, sprzedał zaś ten towar za 23 *zł*. Wyrachuj, ile zarobił na 1 *kg*, obliczając: *a)* ile zapłacił za 1 *kg*, za ile sprzedał 1 *kg*; *b)* zysk na 11 *kg* i stąd zysk na 1 *kg*. Przekonaj się, że stąd wynika prawo rozdzielności dzielenia względem odejmowania!

3. Oblicz odjemną, wiedząc, że:

a) odjemnik $= \frac{3}{4}$, różnica $= \frac{5}{16}$;

b) odjemnik $= \frac{2}{3}$, różnica $= \frac{5}{8}$;
c) odjemnik $= \frac{5}{9}$, różnica $= \frac{4}{5}$.

4. Oblicz odjemnik, wiedząc, że:

a) odjemna $= 8$, różnica $= \frac{5}{7}$;
b) odjemna $= \frac{5}{7}$, różnica $= \frac{11}{28}$;
c) odjemna $= \frac{1}{5}$, różnica $= \frac{1}{6}$.

5. Jaka liczba jest o $\frac{8}{3}$ mniejsza od $\frac{21}{5}$?

6. Jaką liczbę należy odjąć od $\frac{49}{64}$, aby otrzymać $\frac{1}{4}$?

7. Jaką liczbę należy dodać do $\frac{10}{7}$, aby otrzymać $\frac{31}{14}$?

8. Które z podanych wyrażeń jest większe i o ile:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ i $\frac{3}{8} - \frac{1}{6}$; *b)* $\frac{5}{2} - \frac{7}{4}$ i $3 - \frac{4}{3}$?

9. Oblicz następujące różnice, zastępując liczby mieszane przez ułamki:

a) $27\frac{1}{5} - \frac{2}{15}$, $9\frac{3}{15} - 2\frac{1}{3}$, $10\frac{2}{7} - 2\frac{7}{10}$, $18\frac{5}{6} - 11\frac{7}{12}$;
b) $7\frac{3}{5} - (2\frac{1}{25} + 3\frac{7}{75})$; $8 - (3\frac{5}{12} - 1\frac{17}{18})$;
c) $(2\frac{23}{49} + 5\frac{1}{7}) - (4\frac{3}{7} - 3\frac{5}{9})$; $(11\frac{4}{30} - 3\frac{5}{60}) - (8\frac{13}{45} - 2\frac{7}{15})$.

10. Jaś przebiegł $\frac{3}{5}$ *km*, Staś zaś $\frac{1}{2}$ *km*. Który z nich przebiegł większą drogę i o ile?

11. $\frac{2}{3}$ pewnej kwoty zmniejszone o jej połowę wynoszą 7 *zł*. Ile wynosi ta kwota?

12. W ułamku $\frac{15}{23}$ zwiększono licznik i mianownik o 7; o ile dany ułamek się zwiększył?

13. Kupiec zapisywał dochody i rozchody, jak następuje: dochód $\frac{11}{2}$ *zł*, rozchód $\frac{9}{4}$ *zł*, dochód $\frac{3}{5}$ *zł*, dochód 7 *zł*, rozchód $\frac{43}{10}$ *zł*. Całkowity jego zysk wynosił złotych:

$$\frac{11}{2} - \frac{9}{4} + \frac{3}{5} + 7 - \frac{43}{10}.$$

Oblicz ten zysk:
a) wykonując pokolei naznaczone działania;
b) odejmując od sumy dochodów sumę rozchodów.
Jakie znane twierdzenie o łącznem dodawaniu i odejmowaniu otrzymasz?

14. Oblicz następujące wyrażenia, wykonując tylko raz działanie odejmowania:

a) $\frac{5}{11} - \frac{3}{11} + \frac{2}{11} - \frac{1}{11}$, $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{1}{18}$, $\frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24}$;
b) $\frac{7}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} - \frac{5}{16}$;
c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{7}{8} - \frac{2}{3}$, $\frac{14}{15} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{1}{2}$.

15. Pamiętając, że liczba mieszana jest sumą części całkowitej i ułamkowej, oblicz następujące wyrażenia:

a) $41\frac{3}{17} - 25\frac{1}{17}$, $25\frac{7}{64} - 18\frac{5}{96}$, $124\frac{19}{98} - 108\frac{13}{196}$;

b) $5\frac{3}{4} + 12\frac{5}{6} - 9\frac{7}{12}$, $3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{10} - \frac{9}{20}$, $6 - 2\frac{2}{3} + 4\frac{1}{6}$;
c) $5\frac{7}{9} - 2\frac{1}{3} + 5 - 3\frac{1}{6}$, $8\frac{1}{4} - 1\frac{1}{3} + 3 - 1\frac{1}{6} - \frac{3}{10} + 1\frac{1}{25}$.

16. Wstaw zamiast litery x odpowiednią liczbę:
a) $2\frac{1}{5} + x = \frac{5}{2}$, $x + 13\frac{11}{15} = 18\frac{1}{20}$, $20 - x = 3\frac{1}{4}$, $x - \frac{17}{18} = 21\frac{3}{4}$;
b) $(14\frac{2}{3} - x) + \frac{2}{5} = 10\frac{1}{6}$, $(x - 8\frac{1}{16}) + 2\frac{1}{3} = 4\frac{1}{12}$, $(14\frac{1}{9} + x) - 8\frac{1}{4} = 25\frac{5}{6}$.

17. *a)* Jak należy zmienić odjemną, aby różnica *a)* zwiększyła się o $2\frac{3}{4}$, *b)* zmniejszyła się o $2\frac{3}{4}$?
b) Jak należy zmienić odjemnik, aby różnica *a)* powiększyła się o $2\frac{3}{4}$, *b)* zmniejszyła się o $2\frac{3}{4}$?
c) Jak się zmieni różnica, jeśli *a)* odjemną powiększymy o $\frac{5}{8}$, *b)* odjemną pomniejszymy o $\frac{5}{8}$, *c)* odjemnik powiększymy o $\frac{5}{8}$, *d)* odjemnik pomniejszymy o $\frac{5}{8}$? Objaśnij odpowiedzi na przykładach!

18. Jak się zmieni różnica, jeśli *a)* odjemną i odjemnik zwiększymy o $3\frac{2}{5}$, *b)* odjemną i odjemnik zmniejszymy o $3\frac{2}{5}$, *c)* odjemną zwiększymy o $4\frac{1}{3}$, odjemnik zaś zwiększymy o $3\frac{1}{5}$, *d)* odjemną zwiększymy o $2\frac{1}{4}$, odjemnik zaś zmniejszymy o $1\frac{1}{4}$, *e)* odjemną zmniejszymy o $\frac{5}{6}$, odjemnik zaś zwiększymy o $1\frac{3}{4}$, *f)* odjemną zmniejszymy o $2\frac{1}{5}$, odjemnik zaś zmniejszymy o $3\frac{1}{4}$?
Objaśnij odpowiedzi na przykładach!

19. Jak się zmieni suma dwóch liczb, jeśli *a)* jeden składnik zwiększymy o $3\frac{1}{8}$, drugi zaś zmniejszymy o $\frac{11}{4}$, *b)* jeden składnik zmniejszymy o $2\frac{1}{15}$, drugi zaś zmniejszymy o $5\frac{2}{3}$? Objaśnij odpowiedzi na przykładach!

20. Towar waży brutto $13\frac{2}{5}$ *kg*, tara (opakowanie) $1\frac{1}{4}$ *kg*; ile waży towar netto?

21. Podróżny miał zrobić $5\frac{3}{4}$ godziny marszu; ile pozostało mu godzin marszu, jeśli był już w drodze $2\frac{4}{5}$ godziny?

22. Ktoś miał dług $1283\frac{3}{10}$ *zł*, a zwrócił $647\frac{1}{5}$ *zł*; ile jeszcze winien?

23. Dwaj robotnicy zarabiają to samo w ciągu tygodnia. Pierwszy wydaje $\frac{4}{5}$, drugi zaś $\frac{11}{15}$ swego zarobku; o jaką część zarobku jeden wydaje więcej od drugiego?

24. Pomiędzy trzech chłopców rozdzielono pewną kwotę pieniędzy. Pierwszy otrzymał $\frac{1}{5}$, drugi $\frac{1}{3}$; jaki ułamek tej kwoty otrzymał trzeci?

25. Waga jest w równowadze, jeśli na jednej szalce położymy towar i $\frac{13}{100}$ *kg*, a na drugiej $\frac{128}{1000}$ *kg*; ile waży towar?

26. Do beczki wlano $35\frac{3}{4}$ *l* wina, sprzedano z tego $27\frac{2}{5}$ *l*, a potem $6\frac{1}{2}$ *l*, dolano następnie $15\frac{1}{4}$ *l*, a sprzedano znowu $12\frac{3}{5}$ *l*; ile litrów wina zostało?

27. Jeden piechur przeszedł w 5 minutach 407 *m*; drugi zaś w 4 minutach 383 *m*; który z nich szedł prędzej i o ile dłuższą drogę robił w minucie?

28. Ktoś wydał najpierw połowę kwoty, którą posiadał, potem jedną trzecią tej kwoty. Jaki mu pozostał ułamek pierwotnej kwoty?

29. Jaś kupił za połowę pieniędzy, które posiadał, papieru, a za czwartą część — atramentu, poczem zostało mu 60 groszy. Ile Jaś miał pieniędzy?

30. Staś wydał połowę swych pieniędzy, a potem szóstą część tego, co miał na początku, poczem pozostało mu 20 groszy. Ile Staś miał pieniędzy?

31. Staś, wyszedłszy z miejscowości *A* na przechadzkę, uszedł $3\frac{1}{2}$ *km* w kierunku do miejscowości *B*, następnie cofnął się o $1\frac{1}{4}$ *km* zpowrotem ku *A*, a potem znów przeszedł $2\frac{2}{5}$ *km* w kierunku do *B*. Jak daleko znajduje się od *A*?

32. Staś wyprzedził Jasia o $\frac{3}{4}$ *km*, następnie Staś przebył $1\frac{4}{5}$ *km*, Jaś zaś w tym samym czasie $2\frac{1}{3}$ *km*; który z nich przebył większą drogę i o ile?

33. Wysokość wieży od podstawy do szczytu wynosi $78\frac{4}{5}$ *m*, wysokość zaś od podstawy wieży do podstawy kopuły $72\frac{1}{2}$ *m*; ile wynosi wysokość kopuły?

34. Jaś miał o $7\frac{3}{4}$ *zł* więcej niż Piotruś. Jaś wydał $3\frac{2}{5}$ *zł*, Piotruś zaś dostał $4\frac{1}{2}$ *zł*; który z nich ma teraz więcej i o ile?

35. Do basenu prowadzą dwie rury — jedną woda wpływa, drugą wypływa. Otwierając tylko pierwszą rurę, napełnimy pusty basen w ciągu 3 godzin; otwierając zaś tylko drugą rurę, opróżnimy pełny basen w ciągu 4 godzin. W jakim czasie napełni się pusty basen, gdy obie rury otworzymy?

Liczby dziesiętne.

Ułamki dziesiętne.

Ułamkiem dziesiętnym nazywamy ułamek, którego mianownik jest 10, 100, 1000 i t. d.

Np. ułamkami dziesiętnemi są:

$\frac{9}{10}$, $\frac{357}{100}$, $\frac{25}{1000}$, $\frac{19}{10000}$, i t. p.

Zadania.

1. Przedstaw następującą sumę w postaci ułamka dziesiętnego:
   a) $4 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100}$; *b)* $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000}$; *c)* $2 + \frac{3}{100}$;
   d) $\frac{1}{10} + \frac{5}{10000}$.
2. Zamień na ułamki dziesiętne następujące ułamki:
   $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{3}{50}$, $\frac{47}{200}$.
3. Przedstaw w postaci ułamka dziesiętnego metra:
   a) 2 *m* 5 *dm*, *b)* 3 *dm*, *c)* 2 *m* 1 *dm* 2 *cm*, *d)* 3 *cm*,
   e) 2 *mm*, *f)* 5 *m* 4 *dm* 7 *cm* 2 *mm*.
4. Zamień na liczby mieszane następujące ułamki dziesiętne:
   a) $\frac{13}{10}$, $\frac{132}{10}$, $\frac{1328}{10}$; *b)* $\frac{271}{100}$, $\frac{5714}{100}$, $\frac{32153}{100}$; *c)* $\frac{3275}{1000}$, $\frac{6288}{1000}$;
   d) $\frac{15273}{10000}$, $\frac{56738}{10000}$.
5. Przyjmując za jednostkę 1 *zł*, napisz w postaci ułamka dziesiętnego wartości następujących monet zdawkowych:
   50 *gr*, 20 *gr*, 10 *gr*, 5 *gr*, 2 *gr*, 1 *gr*.

Jednostki dziesiętne.

Przy mierzeniu obraną jednością zachodzi nieraz potrzeba użycia większych lub mniejszych jednostek.

Zazwyczaj większemi jednostkami są:

10 jedn., 100 jedn., 1000 jedn. i t. d.

Mniejszemi jednostkami są:

$\frac{1}{10}$ jedn., $\frac{1}{100}$ jedn., $\frac{1}{1000}$ jedn. i t. d.

Powyższe jednostki nazywamy **jednostkami dziesiętnemi** obranej jedności.

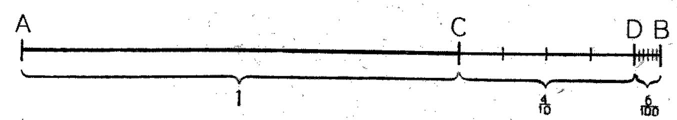
Zadania.

1. Jakie są jednostki dziesiętne metra, kilograma, litra?
2. Ile razy mieści się:
   a) $\frac{1}{10}$ jedn. w 1 jedn.; *b)* $\frac{1}{100}$ jedn. w $\frac{1}{10}$ jedn.;
   c) $\frac{1}{1000}$ jedn. w $\frac{1}{100}$ jedn.; *d)* $\frac{1}{10000}$ jedn. w $\frac{1}{1000}$ jedn.?
3. Ile razy mieści się:
   a) $\frac{1}{100}$ jedn. w 1 jedn.; *b)* $\frac{1}{1000}$ jedn. w $\frac{1}{10}$ jedn.;
   c) $\frac{1}{10000}$ jedn. w $\frac{1}{100}$ jedn.?
4. Które jednostki dziesiętne są 100 razy większe, niż
   a) $\frac{1}{1000}$ jedn.; *b)* $\frac{1}{1000000}$ jedn.?

Liczby dziesiętne.

Określenie i pisanie.

Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć odcinek np. AB przy pomocy jednostek dziesiętnych obranej jedności. W tym celu odkładamy na odcinku AB najpierw całe jedności, na otrzy-



Rys. 33.

manej reszcie dziesiąte części jedności, na nowej reszcie setne części jedności i t. d. zawsze tyle razy, ile razy się da.

Z rys. 33 widzimy, że tak postępując, odłożyliśmy na odcinku AB: 1 jedność, 4 dziesiąte jedności, a wkońcu 6 setnych jedności.

Miara zatem odcinka AB przy obranej jedności wynosi:

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} = \frac{146}{100}.$$

Postępując jak wyżej z dowolnym odcinkiem, odłożymy zawsze co najwyżej 9 dziesiątych jedności, bo pierwsza reszta jest mniejsza od jedności. Podobnie setnych części jedności odłożymy również co najwyżej 9, bo druga reszta jest mniejsza od $\frac{1}{10}$ jedności i t. d.

Miarę odcinka AB zapisujemy w układzie dziesiętnym w następujący sposób.

Piszemy najpierw liczbę całkowitych jedności, potem kropkę u góry (lub przecinek), a następnie kolejno liczby odłożonych dziesiątych, setnych, tysięcznych i t. d. części jedności.

W naszym więc przykładzie miarę odcinka AB zapisujemy:

1·46 lub 1,46.

Widzimy zatem, że:

$$1{\cdot}46 = 1 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{6}{100} = \tfrac{146}{100}.$$

Podobnie:

$$25{\cdot}354 = 25 + \tfrac{3}{10} + \tfrac{5}{100} + \tfrac{4}{1000} = \tfrac{25354}{1000}.$$

Gdybyśmy przy pomiarze nie otrzymali osobno bądź całych jednostek, bądź dziesiątych, setnych, tysięcznych i t. d. części jedności, to brak ten zaznaczamy, pisząc na odpowiednich miejscach 0.

Naprzykład: $0{\cdot}25 = \tfrac{2}{10} + \tfrac{5}{100} = \tfrac{25}{100}$,
$1{,}0206 = 1 + \tfrac{2}{100} + \tfrac{6}{10000} = \tfrac{10206}{10000}$.

Wyrażenia takie, jak:

1·46 25·954 i t. d.

nazywamy **liczbami dziesiętnemi.**

Liczba dziesiętna składa się z **części całkowitej** przed kropką i z **części dziesiętnej** po kropce.

Cyfry części dziesiętnej nazywamy **cyframi dziesiętnemi.** Widzimy, że liczba dziesiętna da się zawsze przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego.

Uwaga. Jeżeli ostatnia cyfra dziesiętna jest 0, to możemy ją opuścić.

Naprzykład: $14{\cdot}280 = 14 + \tfrac{2}{10} + \tfrac{8}{100} = 14{\cdot}28$,
$7{\cdot}400 = 7{\cdot}40 = 7{\cdot}4$.

Naodwrót wartość liczby dziesiętnej nie zmieni się, jeśli na prawo od ostatniej cyfry dziesiętnej dopiszemy kilka zer.

Naprzykład: $7{\cdot}4 = 7{\cdot}400$.

Czytanie liczb dziesiętnych.

Cyfry, znajdujące się w liczbie dziesiętnej po kropce, nazywamy kolejno (postępując od lewej ręki ku prawej) cyfrą dziesiątych, setnych, tysięcznych, dziesięciotysięcznych i t. d. Cyfry, znajdujące się przed kropką, nazywamy (jak przy liczbach całkowitych) kolejno cyfrą jednostek, dziesiątek i t. d.

Następująca tabelka wskazuje nazwę cyfr w liczbie dziesiętnej:

Część całkowita						Część dziesiętna					
setki tysięcy	dziesiątki tysięcy	tysiące	setki	dziesiątki	jednostki	dziesiąte	setne	tysięczne	dziesięciotysięczne	stu-tysięczne	miljonowe

Liczbę dziesiętną czytamy, wygłaszając najpierw część całkowitą, a następnie pokolei liczbę dziesiątych, setnych, tysięcznych i t. d., wskazanych przez cyfry danej liczby.

Naprzykład: 25·4075

czytamy: 25 całych, 4 dziesiąte, 0 setnych, 7 tysięcznych, 5 dziesięciotysięcznych.

Czytamy liczby dziesiętne jeszcze w inny sposób.

Mamy: $25{\cdot}4075 = 25 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{7}{1000} + \tfrac{5}{10000} = 25\tfrac{4075}{10000}$;

czytamy: 25 całych, 4075 dziesięciotysięcznych.

Zatem odczytujemy najpierw część całkowitą, a następnie część ułamkową, napisaną w postaci ułamka dziesiętnego.

Zadania.

1. Napisz w postaci liczby dziesiętnej następujące sumy:
a) $12 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{5}{100}$, *b)* $\tfrac{3}{10} + \tfrac{7}{100} + \tfrac{9}{1000}$, *c)* $2 + \tfrac{3}{100}$,
d) $1 + \tfrac{4}{400} + \tfrac{5}{10000}$, *e)* $\tfrac{3}{100} + \tfrac{1}{10}$, *f)* $\tfrac{5}{100} + \tfrac{8}{10000} + \tfrac{7}{10}$,
g) $\tfrac{3}{100} + 5 + \tfrac{4}{1000} + \tfrac{1}{10}$.

2. Napisz następujące ułamki w postaci liczby dziesiętnej:

$$\tfrac{1}{10},\ \tfrac{1}{100},\ \tfrac{1}{1000},\ \tfrac{1}{10000},\ \tfrac{1}{1000000}.$$

3. Zamień na ułamki następujące liczby dziesiętne:
a) 3·045; 7·5; 0·4; 0·507; 2·008;
b) 25·36; 1·3; 0·0075; 1·135;
c) 4·506; 3·00701; 0·000301; 256·01;
d) 0·00012; 3·1415; 2·7182; 57·306.

4. Odczytaj następujące liczby dziesiętne dwoma sposobami:
0·001001, 0·3333, 2·01037, 3594·01,
27·365, 0·012, 1·301, 3·05,
3657·209, 301·006, 4·0000007, 526·001003.

5. Napisz cyframi następujące liczby dziesiętne:
a) **pięć całych,** dwie dziesiąte — trzydzieści pięć całych, siedem dziesiątych, dwie setne — trzy całe, jedna dziesiąta, 4 setne — zero całych, trzy setne — zero całych,

dwie tysięczne, trzy dziesięciotysięczne — sto dwadzieścia jeden całych, dwie tysięczne, siedem dziesięciotysięcznych — dwie całe, trzy tysięczne, siedem miljonowych — jedna cała, pięć dziesięciomiljonowych, siedem stumiljonowych;

b) dwie całe, dwadzieścia trzy setne — piętnaście całych, dwadzieścia pięć tysięcznych — jedna cała, dwadzieścia pięć miljonowych — zero całych, pięćset trzy dziesięciotysięcznych — sto całych, dwieście sześć miljonowych — zero całych, trzysta dwadzieścia siedem tysięcznych — trzy całe, trzysta czternaście miljonowych — zero całych, siedemdziesiąt jeden tysięcznych.

6. Napisz w postaci liczby dziesiętnej następujące ułamki: $\frac{13}{100}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{325}{1000}$, $\frac{15}{10000}$, $\frac{657}{10000}$, $\frac{257}{10}$, $\frac{305}{10}$, $\frac{457}{100}$, $\frac{2867}{100}$, $\frac{203}{100}$, $\frac{507}{1000}$, $\frac{3270}{10000}$, $\frac{2007}{10000}$.

7. *a)* Ile dziesiątych, setnych, tysięcznych, miljonowych zawiera w sobie jednostka?
   b) Ile setnych, tysięcznych, dziesięciotysięcznych zawiera jedna dziesiąta?
   c) Ile tysięcznych, dziesięciotysięcznych, miljonowych zawiera jedna setna?

8. Ile *a)* dziesiątych, *b)* setnych, *c)* tysięcznych, zawiera liczba: 3·207; 0·4281; 2·35; 15·027; 0·103?
   Np. liczba 25·361 zawiera setnych: $25 . 100 + 3 . 10 + 6 =$ $= 2536$; całe zawierają bowiem po 100 setnych, dziesiąte po 10 setnych.

9. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *m*:
   a) 3 *m* 2 *dm* 4 *cm*, *b)* 67 *m* 25 *mm*, *c)* 4 *dm* 7 *mm*, *d)* 27 *mm*, *e)* 1 *m* 374 *mm*.

10. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *kg*:
    a) 2 *kg* 52 *dkg*, *b)* 36 *dkg*, *c)* 235 *g*, *d)* 15 *kg* 26 *dkg* 5 *g*, *e)* 2 *q* 16 *kg* 7 *g*.

11. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *zł*:
    5 *gr*, 20 *gr*, 36 *gr*, 165 *gr*, 208 *gr*, 3586 *gr*, 1 *gr*.

12. Wyraź w *m*, *dm*, *cm*, *mm*:
    0·3 *km*; 0·75 *km*; 2·507 *km*; 0·08 *km*; 0·001 *km*; 0·0525 *km*; 0·7008 *km*; 0·0002 *km*; 1·3824 *km*; 5·0609 *km*; 50·6 *km*.

13. Wyraź w gramach: 0·25 *kg*; 2·008 *kg*; 3·2 *kg*; 5·736 *kg*.

14. Ile to jest godzin, minut i sekund: 2·5 godz., 0·5 godz., 0·25 godz., 0·05 godz.?

15. Napisz w postaci ułamków nieprzywiedlnych następujące liczby dziesiętne:
    a) 0·25, 0·875, 0·132, 0·0825, 0·01896;
    b) 0·4, 0·95, 0·9514, 0·3996, 0·08375.

Porównywanie liczb dziesiętnych.

Mamy porównać dwie liczby dziesiętne, np.:

54·36 i 35·875.

Pierwsza liczba zawiera 54 jednostek, a druga tylko 35; zatem:

$$54{\cdot}36 > 35{\cdot}875.$$

Widzimy więc, że z dwóch liczb dziesiętnych ta jest większa, której część całkowita jest większa.

Podobnie:

$$102{\cdot}14 > 101{\cdot}95.$$

Jeżeli chcemy porównać dwie liczby dziesiętne, których części całkowite są sobie równe, to porównujemy części dziesiętne.

Np. liczby 15·62 i 15·43 zawierają po 15 jednostek; pierwsza z nich zawiera nadto 6 dziesiątych, druga zaś tylko 4 dziesiąte, więc:

$$15{\cdot}62 > 15{\cdot}43.$$

Liczby 25·4682 i 25·4654 zawierają po 25 jednostek, 4 dziesiąte, 6 setnych; pierwsza z nich zawiera nadto 8 tysięcznych, druga zaś tylko 5 tysięcznych, więc:

$$25{\cdot}4682 > 25{\cdot}4654.$$

Jeżeli zatem dwie liczby dziesiętne mają równe części całkowite, to ta z nich jest większa, w której cyfra dziesiątych jest większa; jeśli cyfry te są równe, to ta liczba jest większa, której cyfra setnych jest większa i t. d. Gdyby jedna liczba miała mniej miejsc dziesiętnych, niż druga, to brakujące miejsca możemy zastąpić cyfrą 0.

Np.: $12{\cdot}36 < 12{\cdot}3658$, gdyż $12{\cdot}36 = 12{\cdot}360$
$5{\cdot}003 < 5{\cdot}003001$, gdyż $5{\cdot}003 = 5{\cdot}003000$.

Zadania.

1. Porównaj liczby:
   a) 8·2 i 8·5, 7·1 i 7·01, 0·306 i 0·36,
   b) 8·354 i 8·3147, 0·007 i 0·012, 8·75634 i 8·756304,
   c) 29·35768 i 29·36, 2·00301 i 2·0301, 35·0001 i 35·001.

2. Uporządkuj następujące liczby dziesiętne wedle wielkości:
   a) 3, 1·01, 2·101, 2·121, 3·789, 3·0789, 1·1, 0·01;
   b) 27·01, 27·013, 27·1035, 27·9, 27·113, 27·1108, 27·9001, 27·2001.
3. Napisz w porządku rosnącym następujące liczby dziesiętne: 3·141, 3·1, 3·14159, 3·1415, 3, 3·14.
4. Co jest większe: $\frac{357}{100}$ czy 3·56?

Zamiana ułamka zwyczajnego na liczbę dziesiętną.

Mamy:

$10 = 2 . 5, \quad 100 = 10 . 10 = 2 . 5 . 2 . 5,$

$1000 = 10 . 10 . 10 = 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5$ i t. d.

Widzimy więc, że mianownik ułamka dziesiętnego jest iloczynem tej samej liczby dwójek i piątek. Przypuśmy, że mamy zamienić na liczbę dziesiętną ułamek, którego mianownik jest iloczynem samych dwójek i piątek (przyczem dwójek i piątek nie jest równa liczba).

Np. $\frac{7}{40} = \frac{7}{2 . 2 . 2 . 5}$.

Aby liczba dwójek i piątek była ta sama, należy licznik i mianownik pomnożyć przez iloczyn dwóch piątek.

Mamy:

$$\frac{7}{40} = \frac{7 . 5 . 5}{2 . 2 . 2 . 5 . 5 . 5} = \frac{175}{1000} = 0{\cdot}175.$$

Podobnie:

$$\frac{3}{25} = \frac{3}{5 . 5} = \frac{3 . 2 . 2}{5 . 5 . 2 . 2} = \frac{12}{100} = 0{\cdot}12.$$

Zadania.

1. Zamień następujące ułamki na liczby dziesiętne:
   a) $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{50}$;
   b) $\frac{3}{16}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{64}$, $\frac{9}{80}$, $\frac{11}{250}$;
   c) $\frac{1}{256}$, $\frac{3}{160}$, $\frac{7}{400}$, $\frac{27}{625}$, $\frac{1}{3125}$.
2. Zamień następujące ułamki na liczby dziesiętne (najpierw sprowadź je do postaci nieprzywiedlnej):

   $\frac{9}{6}$, $\frac{18}{120}$, $\frac{27}{72}$, $\frac{63}{105}$, $\frac{55}{176}$, $\frac{12}{75}$.
3. Napisz wszystkie liczby z pomiędzy liczb od 1 do 30, które są iloczynami tylko dwójek i piątek! Obierz następnie dowolne ułamki właściwe, których mianownikami są znalezione liczby i zamień te ułamki na liczby dziesiętne!

Dodawanie liczb dziesiętnych.

Mamy obliczyć sumę:

$$7{,}956 + 9{,}21 + 0{,}047.$$

Napiszmy wszystkie dodajniki pod sobą tak, by przecinki były pod sobą. W naszym więc przykładzie napiszemy:

$$\begin{array}{r} 7{,}956 \\ 9{,}21 \\ 0{,}047 \\ \hline 17{,}213. \\ \scriptstyle (1)(1) \end{array}$$

Każda z tych liczb jest sumą pewnej liczby całych, dziesiątych, setnych i tysięcznych. Ponieważ w sumie możemy dodajniki dowolnie łączyć i w dowolnym porządku dodawać, więc dodajemy najpierw tysięczne. Otrzymamy tysięcznych: $7 + 6 = 13$ t. j. 1 setna i **3** tysięczne. Otrzymaną **1** setną dodajemy do setnych.

Będziemy mieli setnych: $\mathbf{1} + 4 + 1 + 5 = 11$ t. j. 1 dziesiąta i **1** setna.

Otrzymaną **1** dziesiątą dodajemy do dziesiątych.

Będziemy mieli dziesiątych: $\mathbf{1} + 2 + 9 = 12$ t. j. 1 cała i **2** dziesiąte.

Otrzymaną **1** całą dodajemy do całych. Mamy całych $1 + 9 + 7 = \mathbf{17}$.

Otrzymaliśmy więc: 17,213.

Widzimy zatem, że sumę liczb dziesiętnych oblicza się w podobny sposób, jak sumę liczb całkowitych.

Podobnie mamy:

$$\begin{array}{r} 2{,}561 \\ 0{,}0062 \\ 1{,}05 \\ \hline 3{,}6172. \\ \scriptstyle (1) \end{array}$$

Zadania.

1. Oblicz następujące sumy:
   a) $2{\cdot}8 + 3{\cdot}5$, $2{\cdot}5 + 3{\cdot}07$, $3{\cdot}8 + 0{\cdot}36$, $5{\cdot}4 + 3{\cdot}41$, $80{\cdot}3 + 8{\cdot}03$;

b) 5·384 + 3·75 + 0·406, 0·5 + 1·23 + 3·27, 4·08 + 0·02 + 0·9;
c) 3·71 + 4·07 + 3·005, 1·567 + 4·836 + 9·41, 0·238 + + 0·762 + 2·004, 3·9 + 85 + 15·04 + 0·014 + 9·865.

2. Wykonaj następujące dodawania i sprawdź:

a)	*b)*	*c)*	*d)*
6·57	5·74	0·5	1·8564
4·37	2·693	0·02	2·0081
6·23	3·6	0·37	17·02
		4·153	15·103

3. Oblicz następujące sumy, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne, lub liczby dziesiętne na ułamki:

a) $5{\cdot}37 + \frac{156}{1000}$, $2{\cdot}43 + \frac{19}{100} + 1{\cdot}53 + \frac{54}{100}$,
$3{\cdot}14 + \frac{25}{100} + \frac{17}{10} + 27 + 2\frac{3}{10}$;
b) $3{\cdot}71 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{20} + \frac{3}{40} + 0{\cdot}01$, $2 + 6{\cdot}73 + \frac{9}{25}$;
c) $24{\cdot}73 + \frac{21}{12} + 3\frac{11}{32} + 2{\cdot}008$, $\frac{7}{40} + \frac{11}{80} + 2{\cdot}471 + 0{\cdot}32$.

4. Oblicz następujące sumy, zamieniając liczby dziesiętne na ułamki dziesiętne:

$\frac{2}{7} + 0{\cdot}3 + 2\frac{3}{5}$, $\frac{1}{8} + 2{\cdot}54 + 4\frac{1}{9}$, $0{\cdot}01 + 2\frac{3}{11} + \frac{14}{100}$.

5. Co jest większe:

a) 3·54 + 2·57, czy 4·57 + 0·96;
b) 5·08 + 2·97 + 3·54, czy 6·93 + 4·57;
c) 0·57 + 0·23, czy 0·4 + 0·5?

6. Nie wykonując dodawania, rozstrzygnij, która z sum jest większa:

a) 5·36 + 2·42, czy 2·93 + 1·57;
b) 2·17 + 1·53, czy 0·75 + 1·94;
c) 0·17 + 0·05, czy 0·4 + 0·1?

7. W r. 1927 emigrowało z Polski w tysiącach do:
Niemiec 68·8, Kanady 22·0, Argentyny 20·2, Francji 16·2, Stanów Zjednoczonych 9·8, Brazylji 3·4. Ile tysięcy emigrowało ogółem?

8. Oblicz światową produkcję diamentów w 1926 r., jeśli poszczególne kraje wyprodukowały: Afryka południowa 628·6 *kg*, Kongo Belgijskie 221·6 *kg*, Afryka zachodnia 104 *kg*, Wybrzeże Złote 83·4 *kg*, Gujana Brytyjska 38 *kg*, Angola 30 *kg*, Brazylja 10 *kg*, inne kraje 3·8 *kg*.

9. Oblicz światową produkcję złota w 1927 r., jeśli poszczególne kraje wyprodukowały w tonnach: Afryka południowa 314·8, Stany Zjednoczone 68·3, Kanada 57·4, Z. S. R. R. 30·9, Rodezja południowa 18·1, Australja 15·2, Indje Brytyjskie 11·9, Japonja 8·4, Afryka zachodnia 6·2, Korea 5·9, inne kraje 59·6.

10. Jeśli objętość ziemi przyjmiemy za jednostkę, to objętość innych planet wyraża się liczbami: Merkury 0·05, Venus 0·9, Mars 0·14, Jowisz 1360, Saturn 740, Uran 59, Neptun 82; oblicz objętość wszystkich planet prócz ziemi!

11. Jeden z boków prostokąta wynosi 6·54 *m*, drugi zaś jest o 4·59 *m* dłuższy; ile wynosi obwód tego prostokąta?

12. Dom ma 16·5 *m* długości, a 9·25 *m* szerokości. Ogrodzenie ustawiono w odległości 7 *m* od dłuższego boku i 5·5 *m* od krótszego; oblicz długość ogrodzenia! (Plan w skali 1 : 100!)

13. Koło rozpędowe zrobiło w pierwszej sekundzie 0·3 obrotu, w drugiej 1 obrót, w trzeciej 1·6 obrotu, w czwartej 2·5 obrotu, w piątej 3·2 obrotu. Ile obrotów zrobiło w tych 5 sekundach? O jaki kąt odchyliło się od początkowego położenia?

14. W latach od 1921 r. do 1927 r. polska komunikacja lotnicza wykazuje następujące dane:
a) przebyto drogę w tysiącach *km*: 66·2, 185·3, 263·1, 465·7, 905·9, 918·4, 1133·8;
b) przewieziono bagażu w *q*: 7·7, 17·2, 26·9, 76, 100·3, 159·1, 288·6;
c) przewieziono pocztę w *q*: 9·4, 22·2, 12·3, 12·8, 22·5, 15·0, 141·1.

Oblicz: *a)* całkowitą drogę w tym czasie, *b)* ciężar przewiezionego bagażu i poczty w tym czasie!

15. W r. 1927 zapłacono w Polsce w miljonach złotych za sprowadzone z zagranicy: zwierzęta 6·4, produkty spożywcze 669·5, surowce i półfabrykaty 1544·4, wyroby gotowe 665·1, inne towary 6·6. Ile miljonów złotych wydano ogółem?

Odejmowanie liczb dziesiętnych.

Mamy od liczby 157·431 odjąć liczbę 69·753.
Oczywiście: $157{\cdot}431 = \frac{157431}{1000}$, $69{\cdot}753 = \frac{69753}{1000}$.
A zatem: $157{\cdot}431 - 69{\cdot}753 = \frac{157431}{1000} - \frac{69753}{1000}$.

Ponieważ:

$$\begin{array}{r} 157431 \\ -\ 69753 \\ \hline 87678, \end{array}$$

przeto: $157{\cdot}431 - 69{\cdot}753 = \frac{87678}{1000} = 87{\cdot}678.$

Ten sam wynik otrzymamy, podpisując pod odjemną odjemnik tak, aby kropki były pod sobą, następnie wykonując odejmowanie, jak w przypadku liczb całkowitych, a w otrzymanym wyniku umieszczając kropkę w kolumnie kropek.

W naszym więc przykładzie otrzymamy:

$$\begin{array}{r} 157{\cdot}431 \\ -\ 69{\cdot}753 \\ \hline 87{\cdot}678. \end{array}$$

Uwaga. Przy obliczaniu różnicy przyjmujemy, że składniki mają równą liczbę miejsc dziesiętnych. Wyobrażamy bowiem sobie, że brakujące cyfry dziesiętne są zerami.

Np.:

$$\begin{array}{r} 12{\cdot}1\emptyset\emptyset \\ 3{\cdot}457 \\ \hline 8{\cdot}643. \end{array}$$

Zadania.

1. Wykonaj odejmowania i sprawdź:
   a) 38·3 — 3·865, 203 — 5·847, 2 — 0·0042, 9·436 — 8·679;
   b) 0·47 — 0·294, 0·5 — 0·05, 3·008 — 2·949, 23·7 — 15·8, 7 — 0·375, 1 — 0·83.
2. Oblicz następujące wyrażenia:
   a) 4·56 + 2·37 — 5·94;
   b) 2·57 — 1·43 — 0·57 — 0·34 — 0·12 + 0·34 — 0·45;
   c) 0·52 + 0·23 — 0·71 — 0·01 — 0·02 + 0·23.
3. Oblicz następujące różnice, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne, lub liczby dziesiętne na ułamki: $3{\cdot}7 - \frac{2}{5}$; $16{\cdot}031 - \frac{4}{25}$; $5{\cdot}32 - \frac{5}{40}$; $\frac{171}{32} - 3{\cdot}21$; $\frac{192}{16} - 7{\cdot}32$.
4. Oblicz następujące różnice, zamieniając liczby dziesiętne na ułamki: $2{\cdot}5 - \frac{1}{6}$; $\frac{17}{3} - 2{\cdot}71$; $2\frac{3}{7} - 0{\cdot}01$; $0{\cdot}001 - \frac{1}{1001}$.
5. Oblicz następujące wyrażenia:
   a) $2{\cdot}73 + \frac{4}{5} - 0{\cdot}01 + \frac{1}{8}$; *b)* $14\frac{2}{5} - 3{\cdot}21 + \frac{1}{25} - \frac{1}{16}$;
   c) $15\frac{1}{16} - 8{\cdot}26 - 2\frac{3}{4} + \frac{1}{40}$; *d)* $21{\cdot}42 - \frac{1}{6} + 3\frac{8}{9} - 0{\cdot}41$;

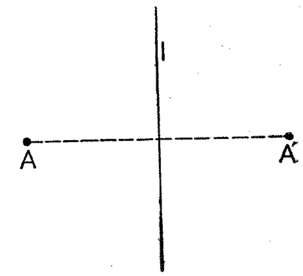
   e) $28\frac{14}{7} - 9{\cdot}06 + 2{\cdot}3 + \frac{3}{16} - \frac{1}{3}$;
   f) $4\frac{2}{11} - \frac{1}{32} + 0{\cdot}14 - 0{\cdot}04 + 2\frac{1}{2}$.
6. Oblicz następujące różnice, zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne:
   a) 16 *m* 37 *cm* — 2 *m* 28 *cm*, 2 *m* 4 *dm* 7 *cm* — 8 *dm* 9 *cm*;
   b) 13 *ha* 41 *a* 25 cm^2 — 8 *ha* 2 *a* 41 m^2, 121 km^2 84 *ha* 18 *a* — 83 km^2 46 *ha* 63 *a*;
   c) 214 m^3 411 dm^3 655 cm^3 — 108 m^3 603 dm^3 719 cm^3.
7. *a)* Ile należy dodać do liczby 4·23, aby otrzymać 100?
   b) Jak się zmieni reszta, jeżeli odjemnik zwiększymy o 5·23?
   c) Jak się zmieniła reszta, jeśli odjemną zmniejszono o 0·47, odjemnik zaś zwiększono o 0·25?
   d) W różnicy 5·34 — 2·97 zmniejszono odjemną o 1·57. Jak musiano zmienić odjemnik, jeżeli reszta wynosiła 0·43?
8. Wstaw zamiast litery *x* odpowiednią liczbę:
   a) $287{\cdot}23 + x = 321{\cdot}49$, $x - 28{\cdot}19 = 36{\cdot}294$, $28{\cdot}46 - x = 9{\cdot}164$;
   b) $(264{\cdot}21 - x) + 12{\cdot}8 = 115{\cdot}03$;
   c) $(x - 16{\cdot}29) + 43{\cdot}18 = 96{\cdot}001$;
   d) $(18{\cdot}24 - x) + 9{\cdot}05 = 12{\cdot}41$;
   e) $(65{\cdot}23 + x) - 8{\cdot}01 = 75{\cdot}26$.
9. Oblicz następujące wyrażenia, wykonując tylko raz odejmowanie:
   a) 54·26 — 18·31 + 0·004 — 2·315 — 0·16 + 21·18;
   b) 104·008 — 63·0108 + 13·402 — 11·60001.
10. Kupiec kupił 5·73 tonn zboża i sprzedał 3·07 tonny; ile mu zostało?
11. Staś miał o 5·45 *zł* więcej, niż Stefek, Wacek zaś o 16·04 *zł* więcej, niż Stefek; o ile więcej pieniędzy miał Wacek, niż Staś?
12. Z posiadanej kwoty 10000 *zł* zapłacono za budowę domu w maju 6375·57 *zł*, w czerwcu 1487·59 *zł*, w lipcu 2114·21 *zł*; ile pieniędzy brakuje w sierpniu do wypłacenia 1438 *zł*?
13. Z worka 100-kilowego mąki usypano najpierw 27·5 *kg*, a potem 16·3 *kg*. Następnie dosypano 41 *kg*; ile *kg* mąki brakuje, aby worek był pełny?

14. Porównaj produkcję ziemniaków w Polsce w roku 1927 z produkcją innych krajów, wiedząc, że produkcja ta w miljonach tonn wyraża się następującemi liczbami: Polska 317·6, Stany Zjednoczone 109·4, Czechosłowacja 91·1, Wielka Brytanja 49·9, Belgja 33·1, Holandja 24·5, Włochy 19·5, Niemcy 375·5.
15. Przyjmując jako długość granic Polski 100 jednostek, znajdujemy w tych jednostkach następujące długości poszczególnych granic: wybrzeże morskie 2·6, granica z Czechosłowacją 16·6, z Rumunją 7, z Rosją 25·4, z Łotwą 1·9, z Litwą 9·4 i W. M. Gdańskiem 2·5; oblicz długość granicy z Niemcami!
16. Przyjmując jako powierzchnię ziemi 100 jednostek, otrzymujemy jako powierzchnię lądów 29·2, przyczem tych jednostek ma: Europa 2, Afryka 5·8, Ameryka 8·2, Australja 1·8, Antarktyda 2·7, ocean Indyjski 14·7, ocean Spokojny 35·2; oblicz w tych jednostkach powierzchnię Azji i oceanu Atlantyckiego.

Symetrja osiowa.

O k r e ś l e n i e.

Naznaczmy atramentem na kartce papieru punkt A i zegnijmy kartkę wzdłuż dowolnej prostej l. Odbity punkt oznaczmy literą A'. Po rozłożeniu kartki otrzymamy rysunek 34.

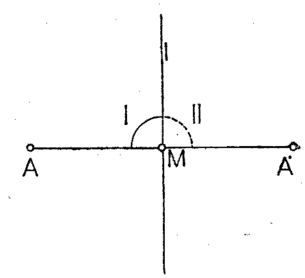


Rys. 34.

O punktach A i A' mówimy, że są s y m e t r y c z n i e położone względem prostej l. Prostą l nazywamy o s i ą s y m e t r j i.

Uwaga. Połączmy punkty A i A' odcinkiem (rys. 35) i oznaczmy przez M punkt, w którym odcinek AA' przecina oś l.

Przy zgięciu papieru we dwoje, odcinek AM nakryje odcinek $A'M$. Kąt I nakryje kąt II. Zatem $AM = A'M$, a kąty I i II, jako połowy kąta półpełnego, są kątami prostemi.



Rys. 35.

Zatem punkty, symetrycznie położone względem prostej l, leżą na prostej prostopadłej do osi symetrji po przeciwnych stronach i w równej odległości od osi symetrji.

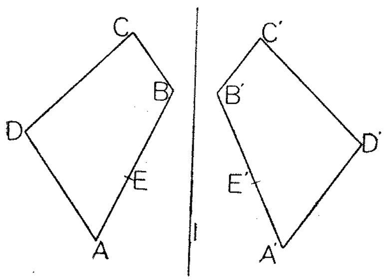
Z a d a n i a.

1. Narysuj oś l i kilka punktów, i wyznacz do nich (odbijając) punkty symetryczne!
2. Zegnij papier we dwoje wzdłuż dowolnej prostej i przekłuj go szpilką w dowolnym punkcie! Po rozłożeniu kartki, otrzymasz punkty symetrycznie położone względem obranej prostej.

3. Narysuj prostą l i kilka punktów, symetrycznie względem l położonych, posługując się tylko cyrklem i ekierkami. *Uwaga.* Skorzystaj z uwagi na str. 61.
4. Obierz kilka punktów, leżących na prostej i narysuj punkty do nich symetrycznie położone względem obranej prostej l! Przekonaj się, że otrzymane punkty leżą też na linji prostej!

Figury symetryczne.

Narysujmy atramentem na kartce papieru dowolną figurę, np. wielokąt $ABCD$, a następnie zegnijmy kartkę we dwoje wzdłuż dowolnej prostej l. Wielokąt $ABCD$ odbije się i po wyprostowaniu kartki otrzymamy rysunek, jak na rys. 36.



Rys. 36.

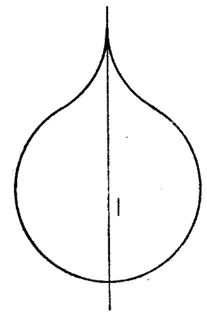
Podobny rysunek możemy otrzymać przy użyciu kalki. Papier, zgięty we dwoje wzdłuż prostej l, kładziemy na farbującej stronie kalki. Rysując na papierze dowolną figurę, np. wielobok $ABCD$ i prostując kartkę, otrzymamy rysunek, jak poprzednio.

O wielokątach $ABCD$ i $A'B'C'D'$ mówimy, że są symetryczne (lub symetrycznie położone) względem prostej l. Prostą l nazywamy osią symetrji. Dwa punkty jak A i A', jeden wielokąta $ABCD$, drugi $A'B'C'D'$, które przy zgięciu nakrywają się, nazywamy punktami odpowiedniemi. Np. punkty B i B', E i E', są punktami odpowiedniemi. Oczywiście, że punkty odpowiednie są położone symetrycznie względem osi l.

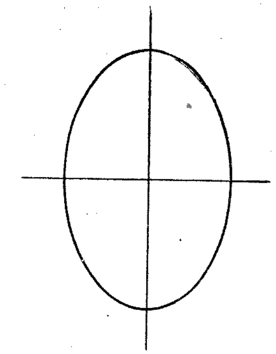
Zadania.

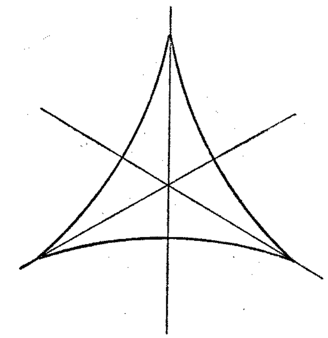
1. Narysuj figurę symetryczną względem osi l, do trójkąta, czworokąta, pięciokąta przy pomocy: *a)* odbicia, *b)* kalki. Zaznacz kilka par punktów odpowiednich!
2. Narysuj dowolny wielokąt i prostą l, nie przecinającą tego wielokąta. Wyznacz następnie punkty odpowiednie wierzchołkom danego wielokąta, przy pomocy przekłucia szpilką, jak w zad. 2 str. 61. Łącząc odpowiednio tak wyznaczone punkty, otrzymasz wielokąt symetrycznie położony względem l.

3. Powtórz zadanie poprzednie, wyznaczając odpowiednie wierzchołki przy pomocy cyrkla i linijki!
4. Narysuj dowolną prostą l i linję łamaną, nie przecinającą l, a następnie kilkoma sposobami linję łamaną, symetrycznie położoną (do poprzedniej) względem prostej l!



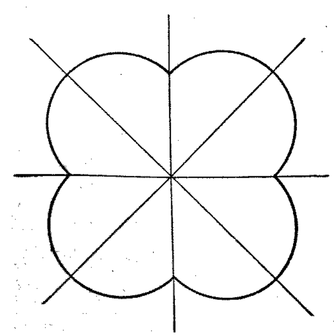
Rys. 37.

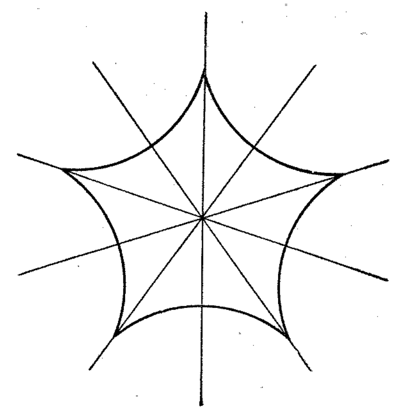

Rys. 38.


Rys. 39.

Oś symetrji figury.

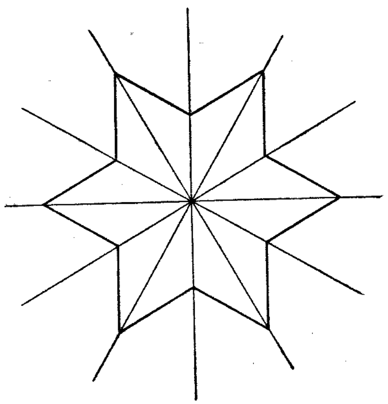
Na rys. 37 mamy figurę, którą prosta l dzieli na dwie części symetryczne względem tej prostej. O prostej l mówimy, że jest osią symetrji danej figury.


Rys. 40.

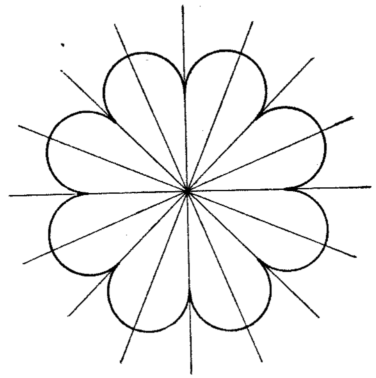

Rys. 41.

Istnieją figury, mające kilka osi symetrji.

Na rys. 38 widzimy figurę, mającą dwie osie symetrji, na rys. 39 trzy osie symetrji, na rys. 40 cztery osie symetrji,

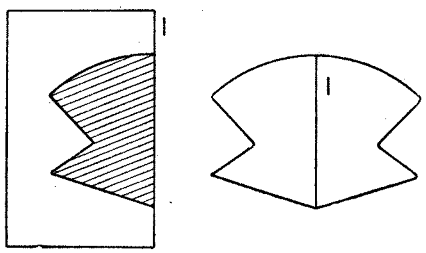


Rys. 42.



Rys. 43.

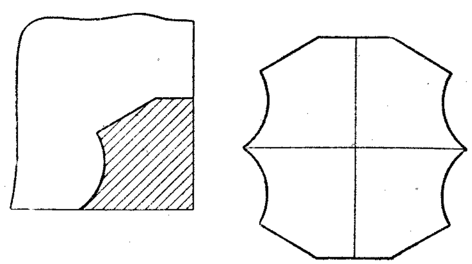
na rys. 41 pięć osi symetrji, na rys. 42 sześć osi symetrji, na rys. 43 ośm osi symetrji. Figurę, posiadającą oś symetrji, otrzymamy w następujący sposób: zginamy papier we dwoje wzdłuż prostej *l*, a następnie wycinamy dowolną figurę wzdłuż linji łamanej (lub krzywej), biegnącej od jednego do drugiego punktu prostej *l* (rys. 44 *a*). Rozkładając odciętą część, otrzymamy figurę, posiadającą oś symetrji (rys. 44 *b*).



Rys. 44.

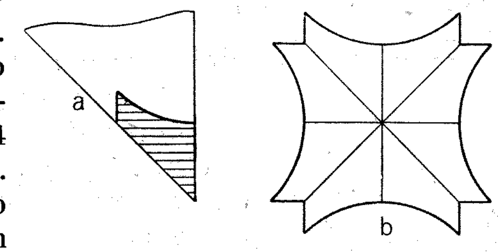
Zadania.

1. Wytnij z papieru kilka figur, mających oś symetrji!
2. Aby otrzymać figurę, mającą 2 osie symetrji, należy kartkę papieru złożyć we czworo, a następnie rozciąć wzdłuż linji łamanej (lub krzywej), biegnącej od jednej prostej zgięcia do drugiej. Część odcięta, po rozłożeniu, będzie figurą, mającą 2 osie symetrji (rys. 45). Utwórz w ten sposób kilka figur, mających 2 osie symetrji.



Rys. 45.

3. Zginając papier, złożony we czworo, tak, aby proste zgięcia padły na siebie i odcinając wzdłuż dowolnej linji, biegnącej od jednej prostej zgięcia do drugiej (rys. 46 *a*) otrzymamy, po rozłożeniu odciętej części, figurę, mającą 4 osie symetrji (rys. 46 *b*). Utwórz w ten sposób kilka figur, mających 4 osie symetrji. Spróbuj, zginając papier dalej, otrzymać figury, mające więcej niż 4 osie symetrji!

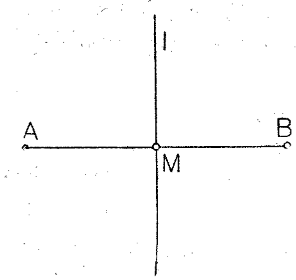


Rys. 46 *a*, *b*.

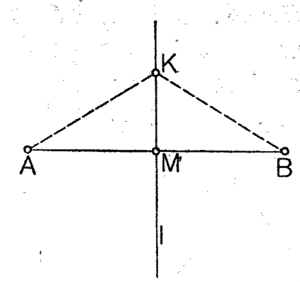
4. Narysuj kilka dużych drukowanych liter, które posiadają oś symetrji; narysuj takie, które mają 2 osie symetrji!

Symetralna odcinka.

Narysujmy dowolny odcinek AB, a przez jego środek M prostą prostopadłą l (rys. 47). Prostą l nazywamy **symetralną** odcinka AB.



Rys. 47.



Rys. 48.

Obierzmy dowolny punkt K na symetralnej l (rys. 48).

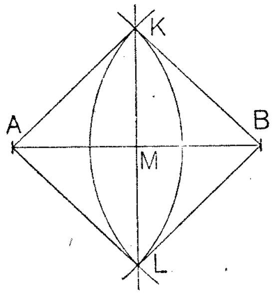
Składając papier we dwoje wzdłuż l, przekonamy się, że odcinek KA nakryje się z odcinkiem KB.

Zatem: $KA = KB$.

Widzimy stąd, że każdy punkt symetralnej odcinka jest równo odległy od końców tego odcinka.

Uwaga. Naodwrót, można się przekonać: jeżeli jakiś punkt jest równo odległy od końców danego odcinka, to leży na jego symetralnej.

Konstrukcja symetralnej odcinka.



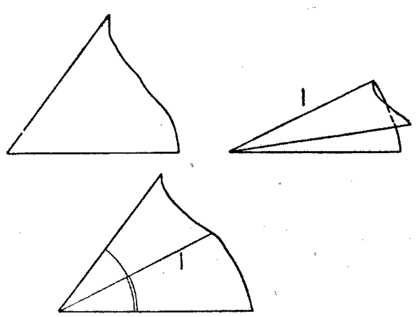
Rys. 49.

Przy pomocy linijki i cyrkla łatwo można wykreślić symetralną danego odcinka. Z punktów A i B, jako środków, kreślimy dwa koła równą rozwartością cyrkla (większą od połowy odcinka AB). Punkty przecięcia się tych kół K i L są równo odległe od końców danego odcinka, leżą zatem na szukanej symetralnej. Łącząc więc punkty K *i* L prostą, otrzymujemy symetralną odcinka AB (rys. 49).

Zadania.

1. Narysuj trzy odcinki i ich symetralne przy pomocy cyrkla i linijki!
2. Narysuj trójkąt, a w nim symetralne jego boków!
3. Narysuj prostą l i obierz na niej dowolny punkt M; przy pomocy cyrkla i linijki narysuj prostą prostopadłą do l w punkcie M.
   Uwaga. Obierz dwa punkty A i B, położone na prostej l w równej odległości od M, a następnie wykreśl symetralną odcinka AB!
4. Czy odcinek posiada oś symetrji?

Symetralna kąta.



Rys. 50.

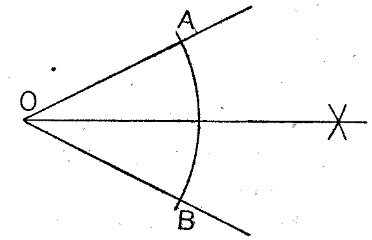
Wytnijmy z papieru dowolny kąt. Zegnijmy następnie kartkę papieru tak, by ramiona kąta padły na siebie. Prosta l, wzdłuż której papier zginaliśmy, nazywa się **symetralną kąta.** Jest ona, oczywiście, osią symetrji kąta i dzieli go na dwie połowy (rys. 50).

Konstrukcja symetralnej kąta.

Przy pomocy cyrkla i linijki możemy nakreślić symetralną danego kąta w następujący sposób (rys. 51):

Na ramionach kąta odcinamy zapomocą cyrkla równe (zresztą dowolne) odcinki OA i OB.

Z punktów A i B kreślimy równą rozwartością cyrkla dwa koła. Prosta, łącząca punkt przecięcia się tych dwu kół z wierzchołkiem O, jest szukaną symetralną.



Rys. 51.

Zadania.

1. Narysuj trzy dowolne kąty i ich symetralne!
2. Narysuj przy pomocy kątomierza kąty: 46^0, 60^0, 80^0, 120^0, 150^0 i ich symetralne!
3. Narysuj dowolny kąt i podziel go *a)* na dwie, *b)* na cztery równe części!
4. Bez użycia kątomierza narysuj kąty: 90^0, 45^0, $22\frac{1}{2}^0$.
5. Wiedząc, że kąt w trójkącie równobocznym ma 60^0, narysuj bez kątomierza kąty 60^0, 30^0, 15^0.
6. Narysuj dwa kąty przyległe i ich symetralne!
7. Narysuj dwa kąty wierzchołkowe i ich symetralne!
8. Narysuj dowolny trójkąt, a w nim symetralne jego kątów!

Trójkąt.

(Powtórzenie).

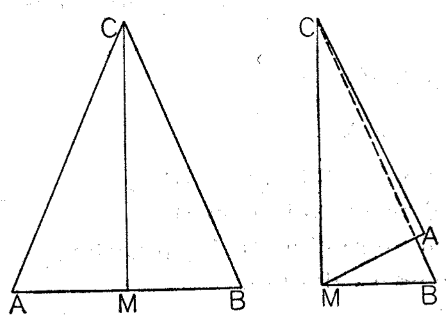
1. Narysuj trójkąt, mający: *a)* wszystkie kąty ostre,
   b) jeden kąt rozwarty
   i oznacz wierzchołki dużemi literami alfabetu, przeciwległe zaś boki odpowiedniemi małemi literami.
2. *a)* Narysuj trójkąt prostokątny.
   b) Jak nazywamy poszczególne boki trójkąta prostokątnego?
3. *a)* Ile wynosi suma kątów w trójkącie?
   b) Ile wynosi suma kątów ostrych w trójkącie prostokątnym?
   c) Dwa kąty trójkąta są: *a)* 30^0, 50^0, *b)* 45^0, 70^0; ile wynosi kąt trzeci?

4. *a)* Narysuj trójkąt, a w nim wysokość i wskaż podstawę, odpowiadającą tej wysokości.
   b) Narysuj trójkąty, jak w zadaniu 1. *a), b),* a w nich wszystkie wysokości.
   c) Narysuj w trójkącie prostokątnym wszystkie wysokości.
5. *a)* Narysuj trójkąt równoramienny!
   b) Jak nazywamy poszczególne boki trójkąta równoramiennego?
   c) Który bok zwykle nazywamy podstawą trójkąta równoramiennego?
   d) O którym wierzchołku zwykle myślimy, mówiąc: wierzchołek trójkąta równoramiennego?
6. Narysuj trójkąt, znając jego trzy boki: *a)* 8 *cm*, 6 *cm*, 3 *cm*, *b)* 0·5 *dm*, 0·7 *dm*, 0·4 *dm*.
7. Narysuj trójkąt równoramienny, znając: podstawę *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 5 *cm*, i jedno ramię *a)* 5·7 *cm*, *b)* 8 *cm*.
8. Narysuj trójkąt równoboczny o boku *a)* 3·5 *cm*, *b)* $5\frac{1}{2}$ *cm*.
9. Narysuj trójkąt, znając dwa boki i kąt między niemi zawarty *a)* 5 *cm*, 4 *cm*, $\sphericalangle 60^\circ$; *b)* 9 *cm*, 6 *cm*, $\sphericalangle 45^\circ$.

Symetrja osiowa trójkąta.

Trójkąt równoramienny.

Wytnijmy trójkąt równoramienny z papieru (rys. 52) i przegnijmy go wzdłuż symetralnej kąta u wierzchołka. Przekonamy się, że oba trójkąty, na które symetralna dzieli trójkąt równoramienny, nakryją się. Widzimy więc, że w trójkącie równoramiennym:

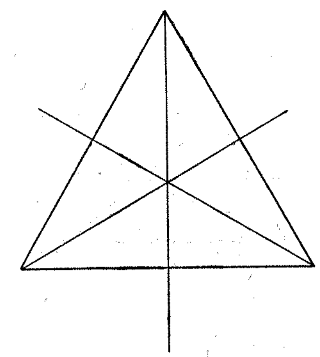


Rys. 52.

a) symetralna kąta u wierzchołka jest osią symetrji;
b) symetralna kąta u wierzchołka połowi podstawę;
c) symetralna kąta u wierzchołka jest prostopadłą do podstawy, gdyż $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMC$, a więc jest wysokością;
d) kąty, leżące naprzeciw równych boków (t. j. przy podstawie), są równe.

Trójkąt równoboczny.

W trójkącie równobocznym każdy bok uważać możemy za podstawę trójkąta równoramiennego. Zatem trójkąt równoboczny ma trzy osie symetrji (rys. 53).



Rys. 53.

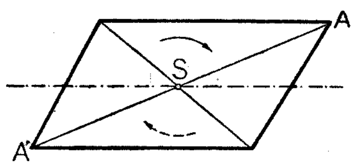
Zadania.

1. Narysuj trójkąt równoramienny, którego podstawa wynosi 3 *cm*, kąt zaś przy niej 40°.
2. Oblicz wszystkie kąty trójkąta równoramiennego, którego kąt u wierzchołka równa się: *a)* 25°, *b)* 36°, *c)* 50°.
3. Oblicz wszystkie kąty trójkąta równoramiennego, którego kąt u podstawy równa się: *a)* 55°, *b)* 63°, *c)* 75°, *d)* 47°.
4. Narysuj trójkąt równoramienny, którego podstawa wynosi 3 *cm*, kąt zaś u wierzchołka 30°.
5. Narysuj trójkąt równoramienny, wiedząc, że jego podstawa wynosi: *a)* 4 *cm*, *b)* 6 *cm*, *c)* 3 *cm*, wysokość zaś: *a)* 5 *cm*, *b)* 4 *cm*, *c)* 2 *cm*.
6. Narysuj trójkąt równoramienny, którego kąt u wierzchołka wynosi: *a)* 30°, *b)* 40°, *c)* 55°, ramię zaś: *a)* 4 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* 3 *cm*.
7. Narysuj trójkąt prostokątny równoramienny; oblicz jego kąty! Narysuj dwa trójkąty równoramienne o wspólnej podstawie i prostą, przechodzącą przez ich wierzchołki. Co zauważysz? Wytnij z papieru dwa równe trójkąty prostokątne równoramienne i złóż je razem wzdłuż przeciwprostokątnych. Jaką figurę otrzymasz?
8. W trójkącie równoramiennym podstawa wynosi: *a)* 4 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* 3·5 *cm*, *d)* 4·6 *cm*, ramię zaś: *a)* 3 *cm*, *b)* 4 *cm*, *c)* 2·8 *cm*, *d)* 3·5 *cm*; oblicz obwód!
9. Obwód trójkąta równoramiennego wynosi: *a)* 10 *cm*, *b)* 12 *cm*, *c)* 14·5 *cm*, *d)* 11·6 *cm*, podstawa zaś: *a)* 4 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* 5·4 *cm*, *d)* 4·3 *cm*; oblicz ramię!
10. W trójkącie równoramiennym obwód wynosi: *a)* 11 *cm*, *b)* 12·5 *cm*, *c)* 15·4 *cm*, *d)* 13·8 *cm*, ramię zaś: *a)* 4 *cm*, *b)* 4·8 *cm*, *c)* 6 *cm*, *d)* 5·2 *cm*; oblicz podstawę!
11. Narysuj trójkąt równoboczny o boku 5 *cm* i jego osie symetrji!
12. Ile wynosi kąt w trójkącie równobocznym?

Figury środkowo symetryczne.

Określenia.

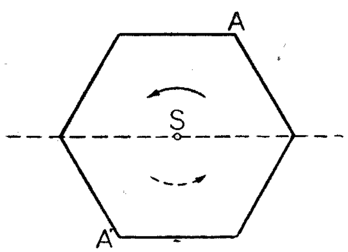
Wytnijmy z kartonu równoległobok (rys. 54). Połóżmy ten równoległobok na kartce papieru i przebijmy go szpilką w punkcie *S*, w którym przecinają się przekątne. Zaznaczmy ołówkiem jego kontur na kartce papieru. Obróćmy teraz równoległobok z kartonu około punktu *S*, o 180°. Przekonamy się, że po tym obrocie równoległobok z kartonu nakryje równoległobok narysowany na papierze.



Rys. 54.

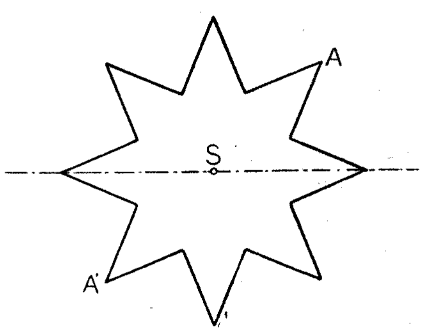
Punkt, około którego obracaliśmy równoległobok, nazywamy środkiem symetrji równoległoboku.

Podobnie, gdybyśmy którąkolwiek z figur podanych na rys. 55 *a b c* wycięli z kartonu i zaznaczyli jej kontur na papierze, a następnie obrócili o 180° około punktu, oznaczonego literą *S*, to przekonalibyśmy się, że po obrocie figura z kartonu znowu nakryje kontur, poprzednio narysowany.

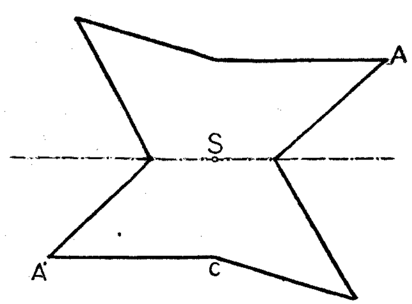


Rys. 55 *a*.

O takich figurach, jak na rys. 55 *abc*, powiadamy, że są symetryczne względem punktu *S*, punkt *S* zaś nazywamy środkiem symetrji.



Rys. 55 *b*.



Rys. 55 *c*.

Punkty, jak np. *A* i *A'*, które po obrocie nakrywają się, nazywamy punktami odpowiedniemi (rys. 55 *a b c*).

Oczywiście, odcinki *SA* i *SA'* po obrocie nakrywają się, więc

$$SA = SA'.$$

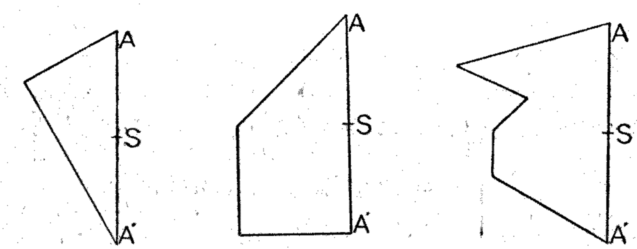
Ponieważ obróciliśmy figurę o 180°, więc odcinek *SA* zakreślił kąt 180°, a zatem punkty *A*, *S*, *A'* leżą na jednej prostej.

Widzimy stąd, że środek symetrji jest środkiem każdego odcinka, łączącego odpowiednie punkty.

Zadania.

1. Przerysuj niżej podane figury i uzupełnij tak, aby z nich powstały figury, posiadające punkt *S* jako środek symetrji. (We wszystkich rysunkach $SA = SA'$).

   Uwaga. Wyznacz punkty odpowiednie wierzchołkom linji łamanej, opierając się na tem, że *S* jest środkiem odcinków, łączących odpowiednie punkty.



Rys. 56.

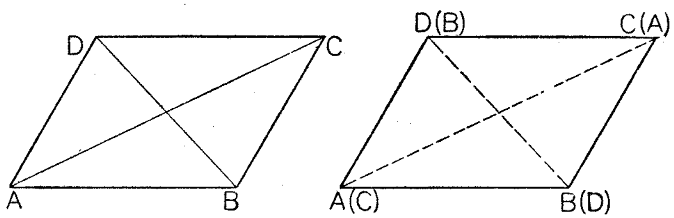
2. Narysuj kilka figur, mających środek symetrji!
3. Wytnij z papieru dowolną figurę, mającą środek symetrji (np. równoległobok). Przetnij ją wzdłuż dowolnej prostej, przechodzącej przez środek i przekonaj się, że te części są równe.
4. Wskaż litery drukowane, mające środek symetrji.

Równoległobok.

Symetrja środkowa równoległoboku.

Jeżeli równoległobok obrócimy o 180° około punktu przecięcia się przekątnych, to, jak wiemy, równoległobok nakryje się ze sobą (rys. 57).

Widzimy stąd, że w równoległoboku:
1) przeciwległe boki są równe,
2) przeciwległe kąty są równe,
3) przekątne połowią się.



Rys. 57.

Zadania.

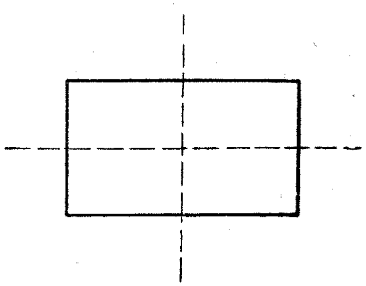
1. Narysuj równoległobok, w którym sąsiednie boki wynoszą: *a)* 3·5 *cm*, 4·5 *cm*; *b)* 2 *cm*, 3 *cm*; *c)* 2·5 *cm*, 4 *cm*, kąt zaś między niemi zawarty *a)* 60°, *b)* 130°, *c)* 80°.
2. Narysuj równoległobok, w którym przekątne wynoszą: *a)* 6 *cm*, 4 *cm*; *b)* 5 *cm*, 7 *cm*, kąt zaś między niemi zawarty *a)* 70°, *b)* 45°.
3. Narysuj równoległobok, w którym jedna przekątna byłaby prostopadłą do jednego z boków.

Prostokąt i kwadrat.

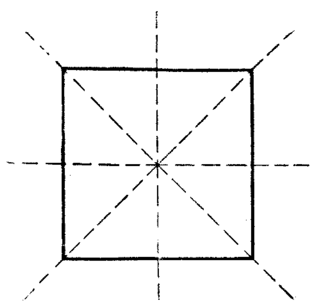
Prostokąt posiada dwie osie symetrji; są to symetralne boków (rys. 58).

Kwadrat posiada cztery osie symetrji; dwie są to symetralne boków, a dwie to przekątne (rys. 59).

Ponieważ prostokąt jest równoległobokiem, więc jego przekątne połowią się.



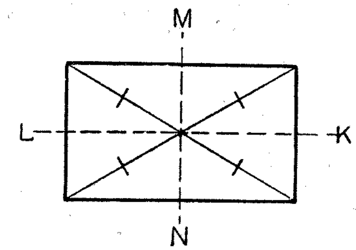
Rys. 58.



Rys. 59.

Na rys. 60 proste *MN* i *LK* są osiami symetrji prostokąta. Zginając prostokąt we dwoje, raz wzdłuż *MN*, drugi raz wzdłuż *LK*, przekonamy się, że odcinki zakreślone są sobie równe. Zatem w prostokącie przekątne są sobie równe.

Ponieważ prostokąt i kwadrat są równoległobokami, więc posiadają środek symetrji.



Rys. 60.

Zadania.

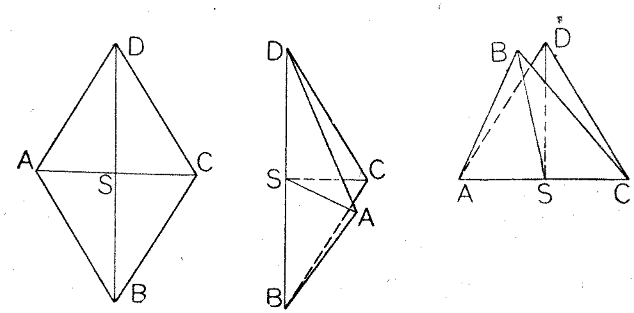
1. Nakreśl prostokąt o bokach: *a)* 3·5 *cm* i 4 *cm*; *b)* $2\frac{1}{2}$ *cm* i 5 *cm*, a w nim narysuj osie symetrji i wskaż środek symetrji!
2. Nakreśl kwadrat o boku: *a)* 4 *cm*, *b)* 3·8 *cm*, a w nim wszystkie osie symetrji.
3. Narysuj prostokąt, którego przekątna wynosi: *a)* 4 *cm*, *b)* $5\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 4·8, a kąt między przekątnemi zawarty: *a)* 30°, *b)* 45°, *c)* 90°!

Romb.

Romb jest to równoległobok, mający wszystkie boki równe (rys. 61).

Wycinając romb z papieru, możemy się przekonać, że jego przekątne są osiami symetrji (rys. 61).

Ponieważ *A* i *C* są punktami odpowiedniemi względem osi symetrji *DB*, więc *AC* jest prostopadłe do *DB*. A zatem w rombie przekątne połowią się i są do siebie prostopadłe.



Rys. 61.

Uwaga. Ponieważ kwadrat jest rombem, więc posiada również powyższe własności.

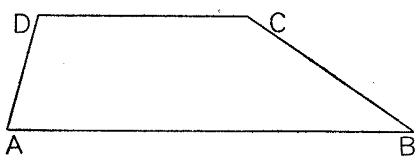
Zadania.

1. Narysuj romb o boku *a)* 3 *cm*, *b)* 5 *cm* i kącie *a)* 70°, *b)* 120°.
2. Narysuj romb, w którym przekątne wynoszą *a)* 4 *cm*, 6 *cm*, *b)* 3 *cm*, 8 *cm*.
3. Narysuj romb, w którym bok wynosi *a)* 4 *cm*, *b)* 8 *cm*, przekątna zaś *a)* 2 *cm*, *b)* 5 *cm*.
4. Narysuj romb, w którym przekątne są równe. Co to za czworokąt?
5. Narysuj kwadrat o przekątnej *a)* 5 *cm*, *b)* 7½ *cm*, *c)* 8·4 *cm*.

Trapez.

Określenia.

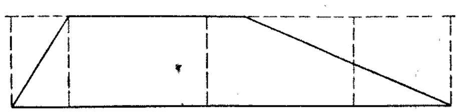
Czworokąt, w którym dwa boki są równoległe, pozostałe zaś dwa nie są równoległe, nazywa się trapezem.



Rys. 62.

W trapezie $ABCD$ bok AB jest równoległy do boku CD. Boki równoległe trapezu nazywamy podstawami.

Poprowadźmy z dowolnego punktu podstawy trapezu prostopadłą do tej podstawy, aż do przecięcia się z drugą podstawą lub jej przedłużeniem (rys. 63).


Rys. 63.

Prowadząc kilka takich odcinków, przekonamy się, że wszystkie są sobie równe. Którykolwiek z nich nazywamy wysokością trapezu.

Trapez równoramienny.

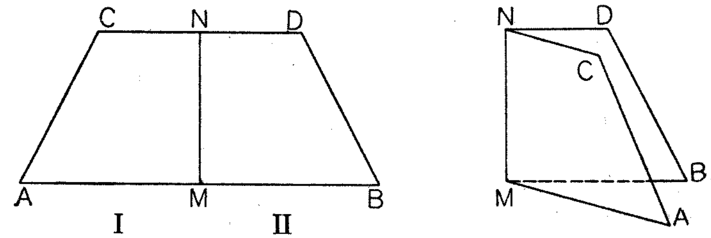
Trapez, w którym nierównoległe boki są równe (rys. 64), nazywa się trapezem równoramiennym.

Wytnijmy z papieru trapez równoramienny i zegnijmy go we dwoje wzdłuż prostej, łączącej środki podstaw (rys. 64).

Przekonamy się, że trapezy I i II nakryją się.

Zatem w trapezie równoramiennym prosta, łącząca środki podstaw, jest osią symetrji.

Ponieważ po zgięciu $\sphericalangle A$ nakrywa się z $\sphericalangle B$ (podobnie $\sphericalangle C$ nakrywa się z $\sphericalangle D$), więc w trapezie równoramiennym kąty, leżące przy tej samej podstawie, są sobie równe.



Rys. 64.

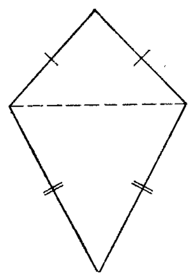
Naodwrót, można się przekonać: jeżeli kąty leżące przy jednej z podstaw trapezu są równe, wówczas trapez jest równoramienny.

Zadania.

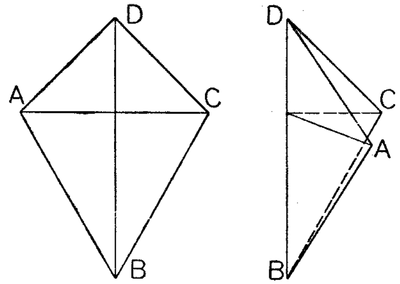
1. Narysuj trapez, w którym podstawa wynosi: *a)* 6 *cm*, *b)* 8 *cm*, *c)* 5·5 *cm*, wysokość: *a)* 2 *cm*, *b)* 3·5 *cm*, *c)* 4·8 *cm*, kąty zaś przypodstawne: *a)* 60° i 80°, *b)* 45° i 90°, *c)* 80° 30′ i 60°.
2. Narysuj trapez równoramienny, w którym podstawa wynosi: *a)* 4·5 *cm*, *b)* 7 *cm*, *c)* 6·5 *cm*, sąsiedni bok: *a)* 2 *cm*, *b)* 3·4 *cm*, *c)* 2·8 *cm*, kąt zaś między tym bokiem a podstawą: *a)* 60°, *b)* 45°, *c)* 80°30′.
3. Narysuj trapez równoramienny, w którym boki równoległe wynoszą: *a)* 8 *cm* i 6 *cm*, *b)* 7 *cm* i 4·5 *cm*, *c)* 6·5 *cm* i 4·5 *cm*, wysokość zaś *a)* 4 *cm*, *b)* 3·5 *cm*, *c)* 2·5 *cm*.
4. Przekonaj się, posługując się symetrją osiową trapezu równoramiennego, że jego przekątne są sobie równe! Rysunek!
5. Przetnij trapez równoramienny na 2 równe części tak, aby z nich dał się złożyć prostokąt! Rysunek!

Deltoid.

Deltoid jest to czworokąt, który ma dwie pary sąsiednich boków równych. Na rys. 65 mamy deltoid, w którym boki raz



Rys. 65.



Rys. 66.

zakreślone i dwa razy zakreślone są odpowiednio równe. Łatwo zauważyć, że deltoid składa się z dwóch trójkątów równoramiennych o wspólnej podstawie.

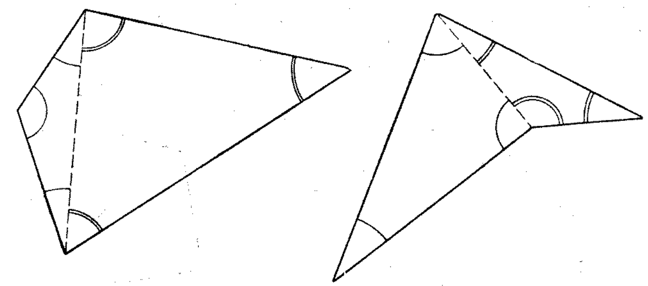
Wytnijmy z papieru dowolny deltoid $ABCD$ (rys. 66). Zegnijmy deltoid wzdłuż przekątnej, łączącej wierzchołki, w których schodzą się równe boki. Przekonamy się, że trójkąty ABD i CBD nakrywają się. Zatem przekątna BD jest osią symetrji. Ponieważ A i C są punktami odpowiedniemi, więc przekątna DB (jako oś symetrji) połowi AC i jest do AC prostopadłą.

Zadania.

1. Narysuj deltoid, w którym dwa boki wynoszą: *a)* 3 *cm* i 4 *cm*, *b)* 2·5 *cm* i 4 *cm*, *c)* 3·5 *cm* i 5 *cm*, kąt zaś między niemi zawarty *a)* 120°, *b)* 140°, *c)* 125° 30′.
2. Narysuj dwa trójkąty równoramienne, z których da się złożyć deltoid.
3. Narysuj kilka deltoidów, w których przekątne wynoszą: *a)* 3 *cm* i 4 *cm*, *b)* 4 *cm* i 6 *cm*, *c)* 3·5 *cm* i 4·6 *cm*.
4. Jakim czworokątem jest deltoid, w którym przekątne są sobie równe? Rysunek!
5. Narysuj dowolny trójkąt i obierz najdłuższy bok na oś symetrji. Jeśli narysujesz figurę symetryczną, to jaki otrzymasz czworokąt?

Suma kątów w czworokącie.

Jedna z przekątnych dzieli czworokąt na dwa trójkąty (rys. 67). Ponieważ suma kątów w jednym trójkącie wynosi 180°, zatem suma kątów w czworokącie wynosi 360°.



Rys. 67.

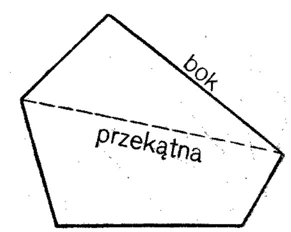
Zadania.

1. W czworokącie suma trzech kątów wynosi: *a)* 280° 50′, *b)* 310° 18′ 30″, *c)* 296° 14′16″; ile wynosi czwarty kąt?
2. W równoległoboku jeden kąt wynosi *a)* 60°, *b)* 70° 40′, *c)* 72° 18′ 40″; ile wynoszą inne kąty tego równoległoboku?
3. W którym czworokącie wszystkie kąty są sobie równe? Rysunek!
4. Oblicz kąty trapezu równoramiennego, wiedząc, że jeden kąt wynosi: *a)* 72°, *b)* 64° 25′, *c)* 120° 16′ 25″.
5. Czy w czworokącie mogą być wszystkie kąty *a)* ostre, *b)* rozwarte?
6. W deltoidzie kąty, między równemi bokami zawarte, wynoszą: *a)* 120° i 50°, *b)* 110° i 64°, *c)* 108° 60′ i 70° 20′ 16″; oblicz pozostałe kąty!

Wielokąty.

Określenia.

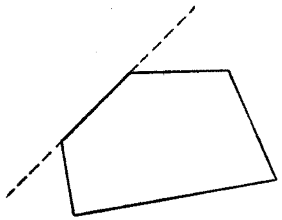
Część płaszczyzny, ograniczoną odcinkami, nazywamy **wielokątem** (rys. 68). Odcinki ograniczające, nazywamy **bokami**. Zależnie od liczby boków mamy: czworokąty, pięciokąty, ośmiokąty i t. d. Odcinki, łączące dwa nieprzyległe wierzchołki, nazywamy **przekątnemi**.



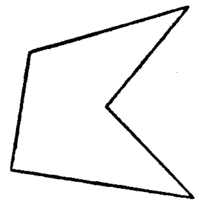
Rys. 68.

Wielokąty wypukłe i wklęsłe.

Wielokąt posiada tyle kątów, ile boków. Jeżeli każdy kąt wielokąta jest mniejszy od 180°, wówczas wielokąt nazywamy wypukłym (rys. 69).



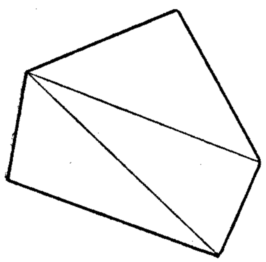
Rys. 69.



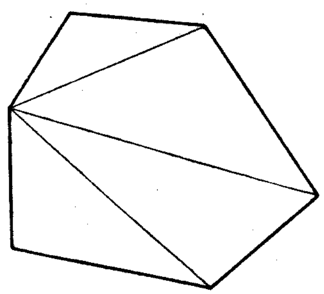
Rys. 70.

Jeżeli przynajmniej jeden kąt wielokąta jest większy od 180°, wówczas wielokąt nazywamy wklęsłym (rys. 70). Jeżeli w wielokącie wypukłym przedłużymy w obie strony którykolwiek bok (rys. 69), to przekonamy się, że wielokąt leży całkowicie po jednej stronie, tak otrzymanej prostej.

Suma kątów wielokąta.



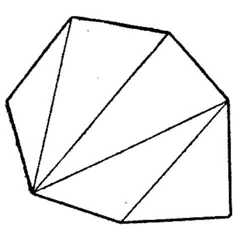
Rys. 71.



Rys. 72.

Pięciokąt da się, przy pomocy przekątnych, rozbić na trzy trójkąty (rys. 71). Zatem suma kątów pięciokąta wynosi: $180^\circ . 3 = 540^\circ$.

Sześciokąt da się, przy pomocy przekątnych, rozbić na cztery trójkąty (rys. 72). Zatem suma kątów sześciokąta wynosi: $180^\circ . 4 = 720^\circ$.



Rys. 73.

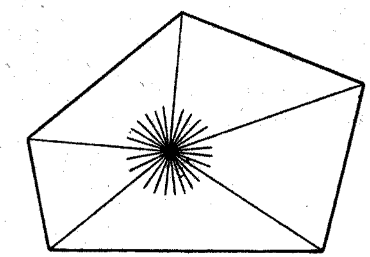
Siedmiokąt da się rozbić na pięć trójkątów (rys. 73). Zatem suma kątów siedmiokąta wynosi: $180^\circ . 5 = 900^\circ$.

Widzimy stąd, że sumę kątów wielokąta otrzymamy, mnożąc 180° przez liczbę boków, zmniejszoną o 2.

Np. suma kątów trzydziestokąta wynosi $180^\circ \times 28 = 5040^\circ$.

Zadania.

1. Narysuj kilka wielokątów wypukłych i wklęsłych!
2. Narysuj *a)* siedmiokąt wypukły, *b)* siedmiokąt wklęsły i podziel go przekątnemi na trójkąty.
3. Narysuj wszystkie przekątne *a)* w pięciokącie, *b)* sześciokącie, *c)* siedmiokącie i policz, ile ich jest!
4. W pięciokącie cztery kąty wynoszą: 121°, 86°, 71°, 147°; oblicz piąty kąt!
5. Ile wynosi suma kątów *a)* w siedmiokącie, *b)* dziewięciokącie, *c)* dziesięciokącie, *d)* dwudziestokącie, *e)* stokącie?
6. Narysuj ośmiokąt (wklęsły), w którym każde dwa sąsiednie boki są do siebie prostopadłe. Zaznacz kąty tego wielokąta i oblicz ich sumę!
7. Narysuj wielokąt, w którym z każdego wierzchołka można poprowadzić tylko *a)* 2, *b)* 3 przekątne!
8. Na rys. 74 mamy pięciokąt, rozbity na 5 trójkątów o wspólnym wierzchołku.
   a) Ile wynosi suma kątów tych pięciu trójkątów?
   b) Ile wynosi suma kątów zacieniowanych?
   c) Ile zatem wynosi suma kątów pięciokąta?
   d) Oblicz w ten sposób sumę kątów *a)* sześciokąta, *b)* siedmiokąta, *c)* dziesięciokąta!



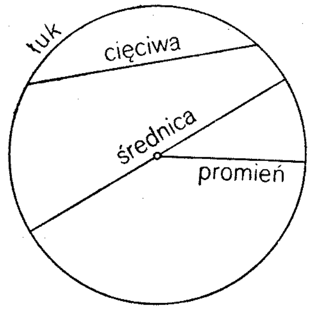
Rys. 74.

Koło.

Określenia.

Narysujmy na kartce papieru przy pomocy cyrkla koło (rys. 75). Wszystkie punkty na okręgu koła są równo odległe od środka. Odcinek, łączący środek koła z dowolnym punktem okręgu, nazywa się promieniem.

Wszystkie promienie są równe. Odcinek, łączący dwa dowolne punkty okręgu, nazywa się cięciwą.

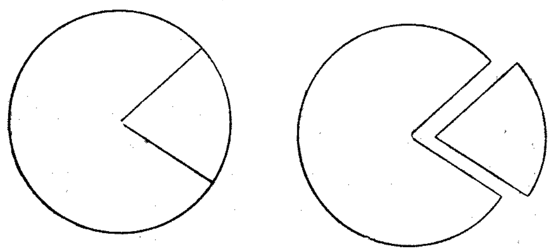


Rys. 75.

Cięciwa dzieli okrąg koła na dwie części, z których każdą nazywamy **łukiem**. Cięciwa, przechodząca przez środek koła, nazywa się **średnicą**.

Średnica jest sumą dwóch promieni, zatem wszystkie średnice koła są sobie równe.

Jeżeli koło przetniemy wzdłuż dwóch promieni, to ono rozpadnie się na dwie części, z których każdą nazywamy **wycinkiem** (rys. 76).



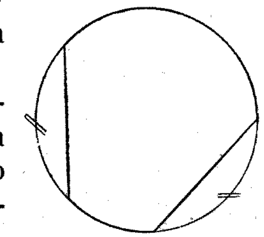
Rys. 76.

Zadania.

1. Ile wynosi średnica koła, którego promień równa się: *a)* 7 *cm*, *b)* 3·4 *cm*, *c)* $3\frac{1}{3}$ *cm*, *d)* $5\frac{4}{5}$ *cm*?
2. Ile wynosi promień koła, którego średnica równa się: *a)* 18 *cm*, *b)* 37 *cm*, *c)* $8\frac{1}{2}$ *cm*, *d)* 11·8 *cm*?
3. Narysuj najdłuższą cięciwę w kole.
4. Narysuj koło, którego środek leży w danym punkcie O, a które nadto przechodzi przez inny punkt A; ile jest takich kół?
5. Punkty O, A, B leżą na jednej linji prostej. Kiedy można z punktu O, jako środka, nakreślić koło tak, aby przeszło przez punkty A i B?
6. Narysuj koło, jego oś symetrji i zaznacz środek symetrji; ile osi symetrji posiada koło?
7. Narysuj wszystkie osie symetrji dwóch kół przecinających się *a)* o różnych promieniach, *b)* o równych promieniach!
8. Narysuj w kole dwa promienie pod kątem 60° i połącz końce cięciwą. Oblicz kąty, tak powstałego, trójkąta. Co to za trójkąt?

Podział okręgu koła na równe części.

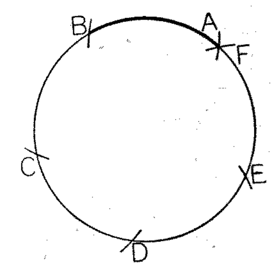
a) Narysujmy w kole dwie równe cięciwy (rys. 77). Łuki, odpowiadające równym cięciwom (na rysunku dwa razy zakreślone), są sobie równe. Można się o tem przekonać, rozcinając koło wzdłuż jednej cięciwy i nakładając jeden łuk na drugi. Na własności powyższej polega przybliżony sposób podziału okręgu koła na kilka równych części.



Rys. 77.

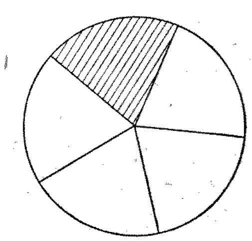
Aby podzielić okrąg koła np. na pięć równych części, zaznaczamy na okręgu koła łuk AB, który wydaje się nam na oko piątą częścią okręgu koła. Bierzemy następnie w otwór cyrkla cięciwę, odpowiadającą zaznaczonemu łukowi.

Otrzymaną rozwartością cyrkla, zaczynając od punktu B, zaznaczamy punkty C, D, E, F (rys. 78). Jeżeli punkt F padnie na punkt A, wówczas łuk, obrany na początku, jest dokładnie piątą częścią okręgu koła. Jeżeli punkt F nie padnie na punkt A, to rozwartość cyrkla odpowiednio zmniejszamy lub powiększamy i jeszcze raz postępujemy, jak poprzednio. Po kilku próbach, dość dokładnie podzielimy okrąg koła na pięć równych części.



Rys. 78.

b) Podzielmy okrąg koła na kilka równych części, np. na pięć, i połączmy punkty podziału promieniami ze środkiem koła. Rozetnijmy koło wzdłuż tych promieni. Przekonamy się przez nakrywanie, że otrzymane wycinki są sobie równe, a więc sąsiednie promienie tworzą równe kąty. Ponieważ tych kątów jest pięć i suma ich wynosi 360°, więc każdy z nich ma $360^\circ : 5 = 72^\circ$. Wynika stąd, że okrąg koła podzielimy na pięć równych części, kreśląc pokolei 5 promieni tak, by każdy następny tworzył z poprzednim kąt 72°. Możemy to łatwo uczynić przy pomocy kątomierza.



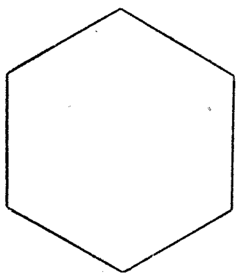
Rys. 79.

Zadania.

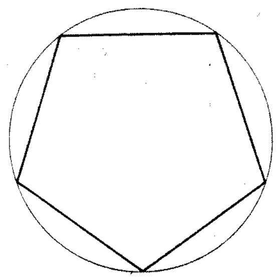
1. Podziel drogą próby okrąg dowolnie obranego koła na *a)* 5, *b)* 6, *c)* 7 części równych!
2. Podziel okrąg obranego koła na *a)* 6, *b)* 4, *c)* 8, *d)* 16, *e)* 5 równych części, posługując się kątomierzem!
3. Koniec wskazówki minutowej opisuje w ciągu godziny okrąg koła. Jaką część tego okręgu opisze koniec tej wskazówki w *a)* 10, *b)* 5, *c)* 20, *d)* 15 minutach?
4. Podziel okrąg koła na 6 równych części, opierając się na tem, że w kole cięciwa, należąca do kąta 60^0, równa jest promieniowi!

Wielokąty foremne.

Wielokąt, mający wszystkie kąty i boki równe, nazywamy foremnym albo umiarowym (rys. 80). Więc np. trójkąt równoboczny jest trójkątem foremnym, kwadrat jest czworokątem foremnym.

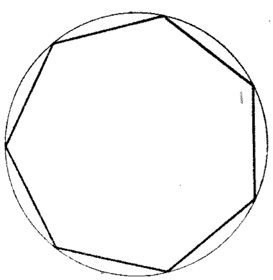


Rys. 80.



Rys. 81.

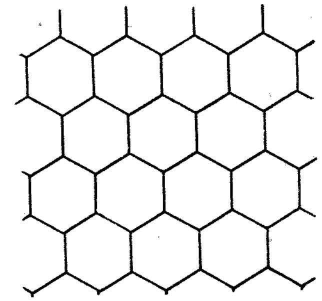
Podzielmy na kilka równych części okrąg koła, np. na 5 (rys. 81). Łącząc pokolei punkty podziału, otrzymamy pięciokąt foremny. Na rys. 82 mamy w podobny sposób utworzony siedmiokąt. Mówimy, że koło jest na wielokącie opisane, o wielokącie zaś, że jest w koło wpisany.



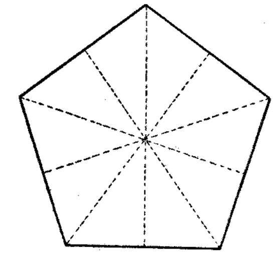
Rys. 82.

Chcąc w szczególności otrzymać sześciokąt foremny, wpisany w dane koło, wystarczy wziąć w otwór cyrkla promień tego koła, a następnie tą rozwartością cyrkla odkładać kolejno punkty na jego okręgu i otrzymane punkty odpowiednio połączyć odcinkami.

Uwaga. Sześciokątami foremnemi możemy wypełnić płaszczyznę (rys. 83). (W ten sposób pszczoły budują swe komórki).



Rys. 83.

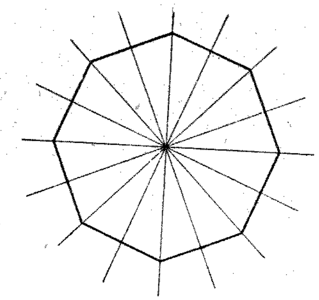


Rys. 84.

Z innych wielokątów foremnych podobną własność posiadają tylko trójkąty równoboczne i kwadraty.

Osie symetrji wielokąta foremnego.

W wielokącie foremnym symetralna któregokolwiek z jego kątów, jako też symetralna któregokolwiek boku jest osią symetrji wielokąta (rys. 84). Środek symetrji mają tylko wielokąty foremne o parzystej liczbie boków (rys. 85).



Rys. 85.

Zadania.

1. Wpisz w koło *a)* trójkąt równoboczny, *b)* kwadrat, *c)* sześciokąt foremny, *d)* ośmiokąt foremny! Narysuj ich osie symetrji!
2. Połącz wierzchołki dwunastokąta foremnego zapomocą odcinków z jego środkiem. Ile wynosi kąt zawarty między odcinkami sąsiedniemi?
3. Co możemy powiedzieć o trójkątach, które powstają przez przecięcie danego wielokąta foremnego wzdłuż odcinków, łączących środek z wierzchołkami. Ile ich będzie? Zrób rysunek!
4. Ile wynosi kąt zawarty między sąsiedniemi bokami: *a)* sześciokąta foremnego, *b)* dziesięciokąta foremnego, *c)* dwudziestopięciokąta foremnego?

5. Wypełnij płaszczyznę: *a)* kwadratami, *b)* trójkątami równobocznemi.
6. Spróbuj wypełnić płaszczyznę: *a)* sześciokątami umiarowemi i trójkątami równobocznemi o wspólnym boku, *b)* kwadratami i trójkątami równobocznemi o wspólnym boku, *c)* sześciokątami umiarowemi, trójkątami równobocznemi i kwadratami o bokach tej samej długości.
7. Narysuj *a)* pięciokąt foremny, *b)* sześciokąt foremny, *c)* siedmiokąt foremny, *d)* ośmiokąt foremny! Wskaż ich osie symetrji! Które z nich posiadają środek symetrji?

Mnożenie i dzielenie ułamków.

Mnożenie ułamka przez liczbę całkowitą.

Określenie.

Iloczyn ułamka przez liczbę całkowitą określamy podobnie, jak iloczyn dwóch liczb całkowitych. Jak wiemy:

$$3+3+3+3+3=3\times 5.$$

Podobnie sumę, w której wszystkie dodajniki są równemi ułamkami, jak np.:

$$\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}$$

zapisujemy: $\tfrac{3}{4}\times 5$,

zatem: $\tfrac{3}{4}\times 5=\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}=\tfrac{15}{4}$.

Dodajnik $\tfrac{3}{4}$, który powtarza się, nazywamy mnożną, liczbę 5, wskazującą, ile razy mnożna powtarza się, nazywamy mnożnikiem, wynik zaś $\tfrac{15}{4}$ iloczynem. Podobnie jak dla liczb całkowitych:

a) Jeżeli mnożnik jest 1, to iloczyn równa się mnożnej. Zatem: $\tfrac{3}{4}\times 1=\tfrac{3}{4}$; $\tfrac{7}{5}\times 1=\tfrac{7}{5}$.

b) Jeżeli mnożnik jest 0, to iloczyn równa się 0. A więc: $\tfrac{2}{4}\times 0=0$; $\tfrac{2}{7}\times 0=0$.

Uwaga. Mnożna może być liczbą mianowaną, np.:

$$\tfrac{3}{5}\,cm\times 4=\tfrac{3}{5}\,cm+\tfrac{3}{5}\,cm+\tfrac{3}{5}\,cm+\tfrac{3}{5}\,cm.$$

Należy pamiętać, że mnożnik nie może być liczbą mianowaną, gdyż mnożnik wskazuje, ile razy mnożna powtarza się jako dodajnik.

Obliczanie iloczynu.

Przykład 1.

Mamy obliczyć iloczyn:

$$\tfrac{3}{4}\times 5.$$

Ponieważ:

$$\tfrac{3}{4} \times 5 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} = \frac{3+3+3+3+3}{4},$$

więc:

$$\tfrac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \tfrac{15}{4}.$$

Widzimy więc, że, *aby ułamek pomnożyć przez liczbę całkowitą, należy pomnożyć licznik przez daną liczbę, mianownik zaś pozostawić bez zmiany.*

Możemy to sprawdzić również na następującym przykładzie:

Ile litrów mleka jest w pięciu naczyniach, jeżeli każde zawiera $\tfrac{3}{4}$ *l* mleka?

Ponieważ każde naczynie zawiera 3 czwarte części litra mleka, więc 5 naczyń zawiera czwartych części litra 5 razy więcej, t. j. $3 \times 5 = 15$.

A więc:

$$\tfrac{3}{4}\, l \times 5 = \frac{3 \times 5}{4}\, l = \tfrac{15}{4}\, l.$$

Przykład 2.

Mamy obliczyć iloczyn:

$$\tfrac{5}{12} \times 3.$$

Wiemy, że:

$$\tfrac{5}{12} \times 3 = \frac{5 \times 3}{12}.$$

Upraszczając ostatni ułamek przez 3, otrzymamy:

$$\tfrac{5}{12} \times 3 = \tfrac{5}{4}, \text{ a więc } \tfrac{5}{12} \times 3 = \frac{5}{(12:3)}.$$

Widzimy więc, że, *jeżeli mianownik mnożnej jest przez mnożnik podzielny, to iloczyn otrzymamy, dzieląc mianownik przez mnożnik, nie zmieniając przytem licznika.*

Uwaga. Przypuśćmy, że mianownik mnożnej ma wspólny dzielnik z mnożnikiem, np.:

$$\tfrac{7}{20} \times 15.$$

Widzimy, że 20 i 15 mają wspólny dzielnik 5.

Mamy:

$$\tfrac{7}{20} \times 15 = \frac{7 \times 15}{20}.$$

Upraszczając ostatni ułamek przez 5, otrzymamy:

$$\tfrac{7}{20} \times 15 = \frac{7 \times 3}{4} = \tfrac{21}{4}.$$

Podobnie:

$$\tfrac{5}{8} \times 12 = \frac{5 \times 12}{8}.$$

Upraszczając przez 4, otrzymamy:

$$\tfrac{5}{8} \times 12 = \frac{5 \times 3}{2} = \tfrac{15}{2}.$$

Zatem przed wykonaniem iloczynu można mnożnik i mianownik mnożnej uprościć przez wspólny dzielnik.

Przykład 3.

Przypuśćmy, że mamy obliczyć iloczyn liczby mieszanej przez ułamek:

Np.: $3\tfrac{2}{5} \times 4.$

Mamy: $3\tfrac{2}{5} \times 4 = 3\tfrac{2}{5} + 3\tfrac{2}{5} + 3\tfrac{2}{5} + 3\tfrac{2}{5}.$

Dodając do siebie osobno części całkowite, a osobno części ułamkowe, otrzymamy:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 12,$$

$$\tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5} = \tfrac{2}{5} \times 4 = \tfrac{8}{5} = 1\tfrac{3}{5},$$

więc: $3\tfrac{2}{5} \times 4 = 12 + 1\tfrac{3}{5} = 13\tfrac{3}{5}.$

Widzimy więc, że liczbę mieszaną mnożymy przez liczbę całkowitą, mnożąc najpierw część całkowitą, następnie część ułamkową przez tę liczbę i dodając uzyskane wyniki.

Uwaga. **Moglibyśmy również obliczyć iloczyn, zamieniając liczbę mieszaną na ułamek:**

$$3\tfrac{2}{5} \times 4 = \tfrac{17}{5} \times 4 = \frac{17 \times 4}{5} = \tfrac{68}{5} = 13\tfrac{3}{5}.$$

Zadania.

1. Oblicz następujące iloczyny:

a) $\tfrac{7}{8} \times 5,\quad \tfrac{2}{3} \times 7,\quad \tfrac{2}{11} \times 8,\quad \tfrac{9}{8} \times 7,\quad \tfrac{4}{5} \times 6;$

b) $\tfrac{3}{4} \times 9,\quad \tfrac{5}{12} \times 11,\quad \tfrac{4}{9} \times 8,\quad \tfrac{12}{7} \times 11,\quad \tfrac{5}{13} \times 15.$

2. Oblicz następujące iloczyny, zamieniając liczby mieszane na ułamki:

a) $3\tfrac{1}{4} \times 3,\quad 2\tfrac{1}{7} \times 5,\quad 7\tfrac{1}{2} \times 3,\quad 15\tfrac{1}{4} \times 3,\quad 20\tfrac{9}{5} \times 2;$

b) $3\tfrac{11}{12} \times 11,\quad 7\tfrac{8}{15} \times 4,\quad 12\tfrac{3}{5} \times 4,\quad 10\tfrac{2}{11} \times 6,\quad 4\tfrac{6}{7} \times 9.$

3. Oblicz następujące iloczyny, dzieląc mianownik przez mnożnik:

a) $\tfrac{8}{9} \times 3,\quad \tfrac{5}{4} \times 2,\quad \tfrac{7}{12} \times 4,\quad \tfrac{9}{20} \times 5,\quad \tfrac{11}{16} \times 4;$

b) $\tfrac{15}{62} \times 31,\quad \tfrac{67}{52} \times 13,\quad \tfrac{347}{259} \times 259,\quad \tfrac{2}{11} \times 11,\quad \tfrac{751}{96} \times 16.$

4. Oblicz następujące iloczyny:

   a) $\frac{5}{12} \times 8$, $\frac{4}{15} \times 10$, $\frac{5}{6} \times 9$, $\frac{7}{20} \times 16$, $\frac{3}{14} \times 28$;
   b) $\frac{8}{45} \times 30$, $\frac{13}{18} \times 24$, $\frac{37}{16} \times 16$, $\frac{8}{35} \times 49$, $\frac{17}{45} \times 54$;
   c) $\frac{11}{144} \times 96$, $\frac{7}{180} \times 120$, $\frac{25}{126} \times 1026$, $\frac{5}{81} \times 675$.

   Uwaga. Przed wykonaniem mnożenia uprość!

5. Oblicz następujące iloczyny:

   a) $2\frac{3}{4} \times 5$, $3\frac{1}{7} \times 7$, $2\frac{3}{7} \times 2$, $5\frac{4}{9} \times 7$, $8\frac{3}{5} \times 9$;
   b) $2\frac{1}{4} \times 2$, $8\frac{1}{16} \times 4$, $3\frac{1}{100} \times 10$, $2\frac{15}{18} \times 9$, $1\frac{11}{125} \times 25$;
   c) $3\frac{2}{15} \times 25$, $5\frac{4}{27} \times 63$, $20\frac{5}{36} \times 81$, $8\frac{5}{144} \times 36$, $2\frac{13}{21} \times 49$.

   Uwaga. Mnóż osobno część całkowitą i osobno część ułamkową przez mnożnik!

6. Przekonaj się, że ułamek, pomnożony przez swój mianownik, daje na wynik licznik.
7. Paczka herbaty kosztuje $1\frac{3}{4}$ *zł*; ile kosztuje 16 takich paczek?
8. Robotnik wykopuje dziennie $8\frac{1}{4}$ *m* rowu; ile metrów rowu wykopie w sześciu dniach?
9. Pewna rodzina spożywa dziennie $1\frac{1}{4}$ *l* mleka; ile litrów mleka spożyje ta rodzina w ciągu miesiąca?
10. Na jedno ubranie potrzeba $2\frac{1}{2}$ *m* materji; ile metrów materji potrzeba dla całej klasy, liczącej 45 uczniów?
11. Pewna maszyna spala w ciągu godziny $120\frac{3}{4}$ *kg* węgla ile *kg* węgla spali ta maszyna w ciągu 24 godzin?
12. Jeden stopień Réaumura równa się $\frac{5}{4}$ stopnia Celsjusza; ile stopni Celsjusza wynosi 15 stopni Réaumura?
13. Jeden frank szwajcarski kosztuje $1\frac{4}{5}$ *zł*; ile złotych kosztuje 25 franków szwajcarskich?
14. Pociąg biegnie z prędkością $13\frac{1}{3}$ *m* na sek.; jaką drogę przebiegnie w kwadransie?
15. Z fontanny wypływa $8\frac{3}{5}$ *l* wody w ciągu minuty; ile wody wypłynie w godzinie, a ile w 12 godzinach?
16. Do pewnej budowy użyto 8 murarzy; płaca dzienna każdego z nich wynosiła $8\frac{3}{4}$ *zł*. Ile należy im zapłacić za 6 tygodni pracy (nie licząc niedziel)?
17. Bok kwadratu ma $7\frac{2}{5}$ *cm*; ile wynosi obwód kwadratu?
18. Ściana sześcianu ma $12\frac{3}{4}$ cm^2; ile wynosi powierzchnia sześcianu?
19. Człowiek wykonuje 15 oddechów na minutę; każdy oddech wprowadza do płuc $\frac{5}{7}$ *l* powietrza. Jaką ilość powietrza wprowadza człowiek do płuc w ciągu 24 godzin?
20. Kupiec płacił za *kg* pewnego towaru po $3\frac{1}{2}$ *zł*, a sprzedawał po $3\frac{3}{4}$ *zł*; ile zarobił na 15 *kg*?
21. Ile kosztuje 3 *m* płótna, jeśli 5 *m* tego płótna kosztuje 14 *zł*?
22. Jeden robotnik wyrabia $\frac{4}{5}$ *m*, drugi zaś $\frac{5}{7}$ *m* płótna w ciągu godziny; który z nich szybciej pracuje i o ile więcej płótna wyrobi w ciągu 8 godzin pracy?
23. Z dwóch miast wyruszają naprzeciwko siebie dwaj posłańcy; jeden idzie z prędkością $4\frac{3}{4}$ *km* na godz., drugi z prędkością $5\frac{1}{2}$ *km* na godz. Jaka jest odległość tych miast, jeśli spotkali się po 5 godzinach?

Iloraz ułamka przez liczbę całkowitą.

O k r e ś l e n i e.

Iloraz ułamka przez liczbę całkowitą określamy i oznaczamy podobnie, jak iloraz dwóch liczb całkowitych.

Jak wiemy:

$$15 : 5 = 3, \text{ gdyż } 3 \,.\, 5 = 15.$$

Podobnie podzielić ułamek przez liczbę całkowitą, np. $\frac{15}{4}$ podzielić przez 5, znaczy to znaleźć taki ułamek, który pomnożony przez 5 da na wynik $\frac{15}{4}$. W naszym wypadku szukanym ułamkiem jest $\frac{3}{4}$, gdyż:

$$\frac{3}{4} \times 5 = \frac{15}{4}.$$

Piszemy:

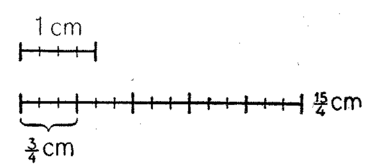
$$\frac{15}{4} : 5 = \frac{3}{4}.$$

Ułamek $\frac{15}{4}$ nazywamy d z i e l n ą, liczbę 5 d z i e l n i k i e m, ułamek $\frac{3}{4}$ i l o r a z e m.

Należy pamiętać, że, podobnie jak przy liczbach całkowitych, dzielnik nie może być zerem.

Uwaga. Dzielenia przez liczbę całkowitą używamy zazwyczaj wtedy, gdy mamy jakąś wielkość podzielić na kilka równych części.

Np. odcinek $\frac{15}{4}$ *cm* podzielono na 5 równych części; jaka jest długość jednej takiej części?



Rys. 86.

Szukamy więc odcinka, który dodany do siebie 5 razy, daje odcinek $\frac{15}{4}$ *cm*. Zadanie nasze możemy więc w następujący sposób zapisać:

$$? \, cm \times 5 = \tfrac{15}{4} \, cm.$$

Szukamy zatem mnożnej. Długość piątej części danego odcinka wynosi więc:

$$\tfrac{15}{4} \, cm : 5.$$

Z rys. 86 widzimy, że:

$$\tfrac{15}{4} \, cm : 5 = \tfrac{3}{4} \, cm.$$

Obliczanie ilorazu.

Przykład I.

Mamy obliczyć iloraz:

$$\tfrac{6}{7} : 3.$$

Ponieważ dzielna zawiera 6 siódmych części jedności, więc iloraz zawierać będzie tych siódmych części trzy razy mniej t. j. $6 : 3 = 2$ (rys. 87).

Rys. 87.

Widzimy zatem, że:

$$\tfrac{6}{7} : 3 = \frac{(6:3)}{7} = \tfrac{2}{7}.$$

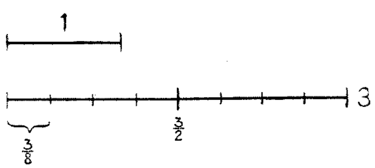
Aby więc obliczyć iloraz ułamka przez liczbę całkowitą, dzielimy jego licznik przez tę liczbę, o ile licznik jest przez nią podzielny.

Przykład II.

Mamy obliczyć iloraz:

$$\tfrac{3}{2} : 4.$$

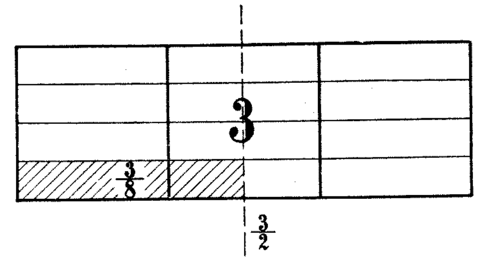
Dzielną otrzymamy, dzieląc 3 jedności na 2 równe części. Aby otrzymać iloraz, należy taką część podzielić jeszcze na 4 równe części. Widzimy stąd, że w ten sposób podzielimy 3 jedności na $2 \cdot 4$ t. j. 8 równych części. Zatem:



Rys. 88.

$$\tfrac{3}{2} : 4 = \frac{3}{2 \times 4} = \tfrac{3}{8}.$$

Aby więc obliczyć iloraz ułamka przez liczbę całkowitą, mnożymy mianownik przez tę liczbę.



Rys. 89.

Na rys. 89 mamy przedstawiony iloraz $\frac{3}{2} : 4$ w przypadku, gdy jednością jest kwadrat.

Zadania.

1. Wykonaj dzielenie, mnożąc mianownik (liczby mieszane zamień na ułamki):

   a) $\frac{2}{5} : 7$, $\frac{3}{4} : 8$, $\frac{6}{13} : 5$, $\frac{3}{11} : 8$, $\frac{7}{16} : 6$;
   b) $2\frac{1}{3} : 5$, $3\frac{1}{4} : 6$, $7\frac{2}{9} : 3$, $11\frac{1}{2} : 5$, $15\frac{2}{3} : 8$;
   c) $1\frac{11}{12} : 5$, $\frac{37}{40} : 8$, $2\frac{2}{13} : 11$, $\frac{7}{256} : 25$, $\frac{13}{24} : 9$.

2. Wykonaj dzielenie, dzieląc licznik (liczby mieszane zamień na ułamki):

   a) $\frac{2}{3} : 2$, $\frac{8}{5} : 4$, $\frac{36}{17} : 9$, $\frac{144}{23} : 12$, $\frac{600}{723} : 25$;
   b) $3\frac{3}{4} : 5$, $7\frac{5}{6} : 47$, $8\frac{4}{7} : 10$, $24\frac{6}{7} : 3$, $18\frac{9}{11} : 9$.

3. Przed wykonaniem dzielenia uprość:

   a) $\frac{36}{17} : 24$, $\frac{8}{5} : 6$, $\frac{27}{41} : 6$, $\frac{5}{8} : 15$, $\frac{64}{55} : 128$;
   b) $\frac{36}{41} : 39$, $\frac{75}{82} : 225$, $\frac{144}{203} : 96$, $\frac{225}{314} : 125$, $\frac{121}{125} : 33$;
   c) $3\frac{3}{4} : 25$, $1\frac{23}{40} : 27$, $2\frac{26}{35} : 678$, $16\frac{1}{3} : 35$, $5\frac{1}{25} : 54$.

   Uwaga. W przypadku, gdy licznik dzielnej i dzielnik są przez tę samą liczbę podzielne, należy rachunki wykonywać, jak wskazuje przykład:

   $$\tfrac{20}{3} : 8 = \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{3 \times \underset{2}{\cancel{8}}} = \tfrac{5}{6}.$$

4. Jaka jest trzecia część z: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$?
5. Jaka liczba, pomnożona przez 6, daje na wynik: *a)* $\frac{3}{4}$, *b)* $15\frac{6}{7}$, *c)* $18\frac{1}{3}$?
6. Pomniejsz siedem razy ułamki:

   $$\tfrac{4}{5}, \ \tfrac{35}{36}, \ \tfrac{14}{11}.$$

7. Ile kosztuje 1 *kg* pewnego towaru, jeśli 7 *kg* tego towaru kosztuje $26\frac{1}{4}$ *zł*?

8. Krawiec uszył 6 ubrań z $20\frac{2}{5}$ *m* sukna; ile metrów sukna potrzeba na 1 ubranie?
9. Pociąg przebiegł w ciągu 5 minut $8\frac{3}{4}$ *km*; jaką drogę przebiegł w *a)* 1 min., *b)* 1 sek.?
10. Zegarek przyśpiesza w ciągu doby o $4\frac{1}{2}$ min.; o ile przyśpiesza w ciągu jednej godziny?
11. Sześć butelek równej pojemności zawiera $2\frac{1}{4}$ *l* wina; ile zawiera jedna butelka?
12. Automobil przebiegł w 7 godz. $345\frac{4}{5}$ *km*; ile przebiegł w jednej godzinie?
13. Schody wysokości $5\frac{1}{2}$ *m* mają 50 stopni; jaka jest wysokość stopnia?
14. Trzy osoby rozdzieliły między sobą $\frac{4}{5}$ pewnej sumy pieniędzy, jaki ułamek tej sumy otrzyma każda osoba?
15. Odkręcając kurek, wypełnimy $\frac{4}{5}$ basenu w ciągu 8 godzin; jaką część basenu wypełnimy w ciągu jednej godziny?
16. Obwód kwadratu wynosi $17\frac{3}{5}$ *m*; jak długi jest bok?
17. Powierzchnia sześcianu wynosi $6\frac{3}{5}$ dm^2; jaka jest powierzchnia jednej ściany?
18. Kupiec sprzedał 12 *kg* towaru po $3\frac{1}{2}$ *zł* za 1 *kg* i zarobił 6 *zł*; ile kupiec płacił za 1 *kg* tego towaru?
19. Kupiec zmieszał 3 *kg* kawy po $42\frac{3}{4}$ *zł* z 2 *kg* kawy po $37\frac{1}{2}$ *zł*; ile kosztuje 1 *kg* tej mieszanki?
20. Jeden robotnik wykonał w ciągu 9 dni $\frac{2}{3}$ pewnej roboty; drugi robotnik wykonał w 5 dniach $\frac{2}{7}$ tej samej roboty. Który robotnik szybciej pracuje?
21. Sześć metrów płótna kosztuje 20 *zł*; ile kosztuje 15 metrów tego płótna?
22. $\frac{4}{5}$ *kg* pewnego towaru kosztuje $16\frac{1}{2}$ *zł*; ile kosztuje $\frac{1}{5}$ *kg* tego towaru?

Mnożenie ułamka przez ułamek.

Ułamek wielkości lub liczby.

Aby utworzyć jakiś ułamek, np. $\frac{2}{3}$ danej wielkości, to, jak wiemy, należy tę wielkość podzielić na 3 równe części i wziąć takich części 2, albo też 2 takie wielkości podzielić na 3 równe części i wziąć jedną taką część.

Przykład I.

Jeśli beczka zawiera 200 *l* wina, to ile litrów zawiera $\frac{4}{5}$ tej beczki? Mamy obliczyć, ile to jest litrów: cztery piąte części dwustu litrów, czyli ile to jest:

$$\tfrac{4}{5} \text{ z } 200\ l.$$

Aby utworzyć ułamek $\frac{4}{5}$ zawartości beczki, należy zawartość beczki podzielić na 5 równych części i wziąć takich części 4.

Ponieważ $\frac{1}{5}$ część zawartości beczki wynosi:

$$200\ l : 5 = 40\ l,$$

zatem $\frac{4}{5}$ części zawartości beczki wynoszą:

$$40\ l \times 4 = 160\ l.$$

A więc: $\frac{4}{5}$ z $200\ l = 160\ l$.

Zadanie powyższe mogliśmy rozwiązać jeszcze w inny sposób. Możemy bowiem utworzyć $\frac{4}{5}$ zawartości beczki, dzieląc zawartość 4 beczek na 5 równych części i biorąc jedną taką część.

Ponieważ 4 beczki zawierają:

$$200\ l \times 4 = 800\ l,$$

zatem $\frac{1}{5}$ zawartości 4 beczek wynosi:

$$800\ l : 5 = 160\ l,$$

czyli, jak poprzednio: $\frac{4}{5}$ z $200\ l = 160\ l$.

Przykład II.

Dany jest odcinek o długości $\frac{2}{3}$ *dm*; jaka jest długość odcinka, który otrzymamy, biorąc $\frac{4}{5}$ danego odcinka? Mamy więc obliczyć, ile to jest:

$$\tfrac{4}{5} \text{ z } \tfrac{2}{3}\ dm.$$

a) Ponieważ piąta część z $\frac{2}{3}$ *dm* wynosi:

$$\tfrac{2}{3}\ dm : 5 = \frac{2}{3 \times 5}\ dm = \tfrac{2}{15}\ dm,$$

więc $\frac{4}{5}$ z $\frac{2}{3}$ *dm* jest:

$$\tfrac{2}{15}\ dm \times 4 = \frac{2 \times 4}{15}\ dm = \tfrac{8}{15}\ dm.$$

b) Ponieważ:

$$\tfrac{2}{3}\ dm \times 4 = \frac{2 \times 4}{3}\ dm = \tfrac{8}{3}\ dm,$$

więc $\frac{4}{5}$ z $\frac{2}{3}$ *dm* wynosi:

$$\tfrac{8}{3}\ dm : 5 = \frac{8}{3 \times 5}\ dm = \tfrac{8}{15}\ dm.$$

Przykład III.

Podobnie, jak tworzymy ułamek wielkości, możemy tworzyć ułamek jakiejś liczby.

Np. ile to jest trzy czwarte części ułamka $\frac{7}{5}$, czyli ile to jest $\frac{3}{4}$ z $\frac{7}{5}$?

Ponieważ czwarta część ułamka $\frac{7}{5}$ wynosi

$$\tfrac{7}{5} : 4 = \frac{7}{5 \times 4},$$

więc trzy czwarte części ułamka $\frac{7}{5}$ jest:

$$\frac{7}{5 \times 4} \times 3 = \frac{7 \times 3}{5 \times 4}.$$

Zatem: $\frac{3}{4}$ z $\frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.

Podobnie jak przy wielkościach, możemy ułamek $\frac{3}{4}$ z ułamka $\frac{7}{5}$ obliczyć jeszcze w inny sposób. Należy ułamek $\frac{7}{5}$ trzy razy powiększyć i wziąć czwartą część wyniku.

Ponieważ:

$$\tfrac{7}{5} \times 3 = \frac{7 \times 3}{5},$$

więc:

$$\tfrac{3}{4} \text{ z } \tfrac{7}{5} = \frac{7 \times 3}{5} : 4 = \frac{7 \times 3}{5 \times 4} = \tfrac{21}{20}.$$

Zadania.

1. Ile to jest:
   a) $\frac{3}{4}$ z 150 *l*, $\frac{5}{8}$ z 4 *kg*, $\frac{2}{3}$ z $\frac{6}{11}$ *hl*, $\frac{41}{15}$ z 8 *t*, $\frac{17}{12}$ z $\frac{21}{4}$ *g*;
   b) $\frac{4}{5}$ z 6 *dm*, $\frac{11}{18}$ z 2 *km*, $\frac{11}{12}$ z $\frac{64}{7}$ m^2, $\frac{19}{7}$ z 8 m^3, $\frac{9}{19}$ z $\frac{3}{4}$ km^2;
   c) $\frac{3}{5}$ z 8, $\frac{4}{7}$ z $\frac{2}{11}$, $\frac{13}{8}$ z 5, $\frac{4}{9}$ z $\frac{141}{12}$.

   Uwaga. wszystkie powyższe zadania rozwiązuj dwoma sposobami, jak w przykładach I, II i III!
2. Oblicz: $\frac{2}{3}$ z ($\frac{4}{5}$ *dm* + $\frac{2}{3}$ *dm*); $\frac{3}{4}$ z ($\frac{1}{4}$ *kg* + $\frac{3}{8}$ *kg*); $\frac{11}{2}$ z ($\frac{11}{2}$ *l* + $\frac{3}{4}$ *l*); $\frac{4}{3}$ z ($\frac{5}{6}$ *km* — $\frac{1}{3}$ *km*).
3. Oblicz: $\frac{5}{6}$ z ($\frac{3}{3}$ z $\frac{4}{7}$ *dm*); $\frac{3}{11}$ z ($\frac{4}{9}$ z $\frac{1}{6}$ *kg*); $\frac{2}{15}$ z ($\frac{4}{7}$ z 9 *l*); $\frac{8}{13}$ z ($\frac{9}{5}$ z $\frac{2}{5}$ m^2).
4. a) Ile to jest: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ tuzina?
   b) „ „ „ $\frac{15}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{60}$ kopy?
   c) „ „ „ $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{10}$ z 30?
   d) „ „ „ minut: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{30}$ godziny?
   e) „ „ „ godzin: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ doby?

Mnożenie przez ułamek.

Iloczyn wielkości przez ułamek.

Jeżeli 1 *l* mleka kosztuje 40 *gr*, to
2 *l* kosztują: 40 *gr* × 2 = 80 *gr*,
3 *l* kosztują: 40 *gr* × 3 = 120 *gr* i t. d.

Zajmiemy się teraz obliczaniem ceny mleka w przypadku, gdy ilość mleka wyraża się liczbą ułamkową litrów.

Obliczmy np. ile kosztuje $\frac{3}{4}$ *l* mleka.

Ponieważ 1 *l* mleka kosztuje 40 *gr*, więc $\frac{1}{4}$ *l* kosztuje czwartą część z 40 *gr*. Zatem $\frac{3}{4}$ *l* kosztuje trzy razy więcej t. j. trzy czwarte części z 40 *gr*.

Zatem $\frac{3}{4}$ *l* kosztuje $\frac{3}{4}$ z 40 *gr* = 30 *gr*.

Podobnie $\frac{7}{4}$ *l* kosztuje $\frac{7}{4}$ z 40 *gr* = 70 *gr*.

Z powyższych przykładów wynika, że:

cena mleka = 40 *gr* × ilość litrów pod warunkiem, że ilość litrów jest liczbą całkowitą.

Cenę zaś ułamka litra mleka obliczamy, tworząc ten ułamek z 40 *gr*.

Aby i w tym wypadku obliczać cenę mleka mnożeniem 40 *gr* przez ilość litrów, mówimy, że mnożyć jakąś wielkość przez ułamek, to znaczy utworzyć ten ułamek z wielkości. A więc:

40 *gr* × $\frac{3}{4}$ to znaczy $\frac{3}{4}$ z 40 *gr*.

Zatem:

40 *gr* × $\frac{3}{4}$ = 30 *gr*.

Czynnik 40 *gr* nazywamy mnożną, $\frac{3}{4}$ mnożnikiem wynik 30 *gr* iloczynem.

Podobnie:

40 *gr* × $\frac{7}{4}$ to znaczy $\frac{7}{4}$ z 40 *gr*.

Zatem:

40 *gr* × $\frac{7}{4}$ = 70 *gr*.

Widzimy stąd, że, czy ilość litrów wyraża się liczbą całkowitą, czy też ułamkową, to zawsze:

cena mleka = 40 *gr* × ilość litrów.

Zadania.

1. Przedstaw w postaci iloczynu i oblicz: $\frac{2}{5}$ z 3 *kg*, $\frac{3}{4}$ z $\frac{5}{6}$ *l*, $\frac{1}{3}$ z $\frac{2}{5}$ *kg*, $\frac{3}{7}$ z $2\frac{1}{3}$ godz.

2. Oblicz: $\frac{5}{8}$ *kg* $\times \frac{3}{4}$, $3\frac{1}{2}$ *kg* $\times \frac{2}{5}$, $\frac{7}{20}$ zł $\times \frac{3}{5}$, 8 godz. $\times \frac{5}{6}$.

3. Ile kosztuje:

a) $\frac{3}{4}$ *l* mleka, jeżeli *l* kosztuje 44 *gr.*
b) $\frac{5}{8}$ *kg* masła, „ *kg* „ 8 *zł.*
c) $\frac{2}{3}$ *t* węgla, „ *t* „ 60 *zł.*
d) $\frac{4}{5}$ *q* mąki, „ *q* „ 45 *zł.*
e) $\frac{7}{9}$ *kg* chleba, „ *kg* „ 45 *gr.*
f) $\frac{6}{7}$ *q* ryżu, „ *q* „ 280 *zł.*
g) $\frac{3}{5}$ *kg* szynki, „ *kg* „ 5 *zł?*

Napisz odpowiedź w postaci iloczynu a następnie oblicz!

Np.: *a)* $\frac{3}{4}$ *l* mleka kosztuje:

$$44\ gr \times \tfrac{3}{4} = 33\ gr.$$

Iloczyn liczby przez ułamek.

Podobnie, jak iloczyn wielkości przez ułamek, określamy iloczyn liczby przez ułamek. A więc

$$\tfrac{2}{3} \times \tfrac{4}{5} = \tfrac{4}{5} \text{ z } \tfrac{2}{3}.$$

Ponieważ piąta część z $\frac{2}{3}$ jest:

$$\tfrac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3 \times 5},$$

więc 4 piąte części z $\frac{2}{3}$ jest:

$$\frac{2}{3 \times 5} \times 4 = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}.$$

Zatem:

$$\tfrac{2}{3} \times \tfrac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \tfrac{8}{15}.$$

Widzimy więc, że iloczyn dwóch ułamków jest ułamkiem, którego licznik jest iloczynem liczników, mianownik zaś iloczynem mianowników danych ułamków.

Wynika stąd również znany nam sposób mnożenia ułamka przez liczbę całkowitą:

Np.

$$\tfrac{8}{5} \times 7 = \tfrac{8}{5} \times \tfrac{7}{1} = \frac{8 \times 7}{5 \times 1} = \tfrac{56}{5}.$$

Uwaga. Nie należy się spieszyć z wykonaniem iloczynu liczników i mianowników. Jeśli istnieje wspólny podzielnik jednego z liczników i jednego z mianowników, należy najpierw przez ten wspólny podzielnik uprościć.

Np.

$$\tfrac{8}{15} \times \tfrac{9}{12} = \frac{8 \times 9}{15 \times 12}.$$

Upraszczając przez 4 (wspólny podzielnik 8 i 12), otrzymujemy:

$$\frac{2 \times 9}{15 \times 3}.$$

Upraszczając przez 3 (wspólny podzielnik 9 i 3), otrzymujemy:

$$\frac{2 \times 3}{15 \times 1}.$$

Wkońcu upraszczając przez 3 (wspólny podzielnik 3 i 15), otrzymujemy:

$$\frac{2 \times 1}{5 \times 1} = \tfrac{2}{5}.$$

Zadania.

1. Oblicz:

a) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$, $\frac{5}{8} \times \frac{7}{6}$, $\frac{12}{25} \times \frac{3}{5}$, $\frac{7}{9} \times \frac{14}{5}$, $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$;
b) $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4}$, $\frac{3}{8} \times \frac{4}{15}$, $\frac{2}{5} \times \frac{10}{3}$, $\frac{5}{24} \times \frac{9}{10}$, $\frac{7}{18} \times \frac{9}{2}$;
c) $7 \times \frac{2}{3}$, $8 \times \frac{3}{16}$, $5 \times \frac{5}{9}$, $6 \times \frac{1}{3}$, $3 \times \frac{2}{27}$;
d) $1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$, $\frac{5}{4} \times 2\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5} \times 7\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{4}$;
e) $3\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}$, $3 \times 5\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2} \times 5\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3} \times 1\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{7} \times 2\frac{1}{3}$.

2. Oblicz:

a) $\frac{7}{25} \times \frac{10}{21}$, $\frac{13}{20} \times \frac{15}{26}$, $\frac{8}{15} \times \frac{25}{36}$, $\frac{27}{32} \times \frac{44}{45}$;
b) $\frac{18}{35} \times \frac{14}{27}$, $2\frac{1}{5} \times \frac{15}{22}$, $6\frac{2}{3} \times \frac{9}{10}$, $\frac{16}{21} \times 8\frac{3}{4}$;
c) $5\frac{4}{9} \times 2\frac{4}{7}$, $9\frac{2}{7} \times 3\frac{3}{13}$, $8\frac{2}{3} \times 4\frac{1}{2}$, $\frac{4}{15} \times 1\frac{11}{34}$;
d) $4\frac{23}{25} \times \frac{10}{41}$, $\frac{10}{11} \times 2\frac{32}{39}$, $\frac{9}{14} \times 6\frac{1}{8}$, $5\frac{1}{8} \times 4\frac{4}{7}$;
e) $\dfrac{2 \times 3 \times 5}{7 \times 11} \times \dfrac{11}{3 \times 5}$, $\dfrac{8 \times 9}{5} \times \dfrac{15}{16 \times 18}$,
$\dfrac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{11 \times 13} \times \dfrac{26 \times 33}{4 \times 25 \times 7}$;
f) $343 \times \frac{65}{49}$, $27 \times \frac{53}{729}$, $693 \times \frac{127}{462}$, $\frac{37}{49} \times \frac{21}{74}$;
g) $\frac{72}{125} \times \frac{25}{36}$, $\frac{121}{117} \times \frac{39}{77}$, $\frac{729}{304} \times \frac{76}{81}$, $\frac{216}{343} \times \frac{147}{64}$;
h) $\frac{19}{225} \times \frac{63}{95}$, $26\frac{13}{27} \times \frac{21}{52}$, $15\frac{45}{64} \times 36\frac{72}{75}$, $95 \times 100\frac{17}{19}$.

Uwaga. Przed wykonaniem mnożenia uprość!

Przykłady praktyczne mnożenia przez ułamek.

Przykład I.

Ile waży kulka ołowiana o objętości $\frac{2}{3}$ *cm*³, jeżeli 1 *cm*³ ołowiu waży $11\frac{2}{5}$ *g*?

Ponieważ 1 *cm*³ waży $11\frac{2}{5}$ *g*, więc $\frac{1}{3}$ *cm*³ waży trzecią część z $11\frac{2}{5}$ *g*. Zatem $\frac{2}{3}$ *cm*³ ważą dwie trzecie z $11\frac{2}{5}$ *g*, czyli $\frac{2}{3}$ z $11\frac{2}{5}$ *g*.

Widzimy stąd, że kulka waży:

$$11\tfrac{2}{5}\ g \times \tfrac{2}{3}.$$

Ponieważ $11\frac{2}{5}\ g \times \frac{2}{3} = \frac{57}{5}\ g \times \frac{2}{3} = \frac{114}{15}\ g = 7\frac{9}{15}\ g = 7\frac{3}{5}\ g$, zatem kulka waży $7\frac{3}{5}\ g$.

Widzimy zatem, że:

ciężar kulki = ciężar 1 cm^3 $\times$ ilość cm^3,
bez względu na to, czy objętość wyraża się liczbą całkowitą, czy też ułamkową.

Przykład II.

Goniec biegł do mety $9\frac{3}{5}$ sek., przebiegając w jednej sekundzie $6\frac{1}{4}\ m$. Jaką drogę przebiegł?

Mamy: $9\frac{3}{5}$ sek. $= \frac{48}{5}$ sek.

W $\frac{1}{5}$ sek. goniec przebiegł piątą część z $6\frac{1}{4}\ m$, zatem w 48 piątych częściach sek. przebiegł 48 piątych części z $6\frac{1}{4}\ m$, czyli: $\frac{48}{5}$ z $6\frac{1}{4}\ m$,

a więc przebiegł: $6\frac{1}{4}\ m \times \frac{48}{5}$.

Mamy: $$6\tfrac{1}{4}\ m \times \tfrac{48}{5} = \tfrac{25}{4}\ m \times \tfrac{48}{5} = \frac{25 \times 48}{4 \times 5}\ m.$$

Upraszczając 25 i 5 przez 5, 48 i 4 przez 4, mamy:

$$6\tfrac{1}{4}\ m \times \tfrac{48}{5} = \frac{5 \times 12}{1 \times 1}\ m = 60\ m.$$

Goniec przebiegł więc 60 m.

Widzimy więc, że:

droga przebyta = droga w 1 sek. $\times$ ilość sek.,
bez względu na to, czy ilość sek. jest ułamkowa, czy całkowita.

Przykład III.

Pole prostokąta.

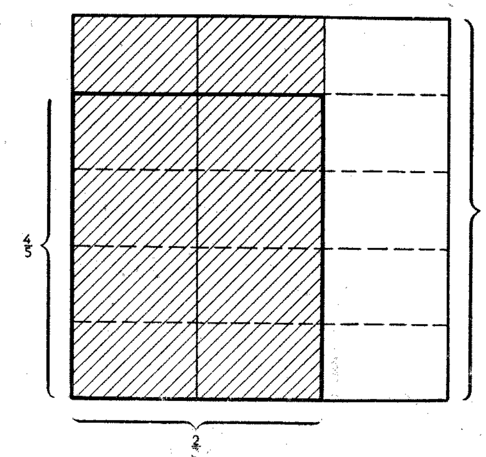
Na rys. 90 mamy kwadrat jednostkowy, a w nim prostokąt o bokach $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$ jedności. Linje pionowe dzielą kwadrat jednostkowy na 3 równe części, zatem pole zacieniowane wynosi $\frac{2}{3}$ kwadratu jednostkowego. Nasz prostokąt otrzymamy, dzieląc (linjami poziomemi) pole zacieniowane na 5 równych części i biorąc takich części 4. Wynika stąd, że pole naszego prostokąta wynosi $\frac{4}{5}$ z $\frac{2}{3}$ kwadratu jednostkowego. Możemy zatem na podstawie określenia iloczynu ułamków powiedzieć, że

pole naszego prostokąta wyraża się iloczynem:

$$\tfrac{2}{3}\ \text{kw. jedn.} \times \tfrac{4}{5}.$$

Ponieważ $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$, więc pole prostokąta wynosi $\frac{8}{15}$ kw. jedn.

Widzimy stąd, że miara pola prostokąta jest iloczynem liczb, wyrażających długość podstawy i wysokości, przyczem obojętną jest rzeczą, czy liczby te są całkowite, czy ułamkowe.



Rys. 90.

Zadania.

1. 1 kg pewnego towaru kosztuje 12 *zł*; ile kosztuje $\frac{3}{4}$ kg, $\frac{2}{3}$ kg, $3\frac{1}{2}$ kg, $6\frac{1}{4}$ kg tego towaru?
2. Las kosztuje 10.000 *zł*; ile kosztuje $\frac{3}{4}$ tego lasu?
3. 1 kg cukru kosztuje $1\frac{1}{2}$ *zł*; ile kosztuje $\frac{2}{5}$ kg, $\frac{1}{2}$ kg, $3\frac{1}{5}$ kg?
4. Posłaniec idzie z prędkością $5\frac{3}{4}$ km na godz.; jaką drogę przejdzie w $1\frac{1}{3}$ godz.?
5. Pociąg biegnie z prędkością $40\frac{2}{5}$ km na godz.; jaką drogę przebiegnie w ciągu $3\frac{3}{4}$ godz.?
6. Otwierając kurek, napełnimy basen w 5 godz.; jaki ułamek pojemności basenu napełnimy w ciągu 1 godz., $\frac{3}{4}$ godz., $2\frac{3}{5}$ godz.?
7. 1 cm^3 platyny waży $21\frac{2}{5}$ g; ile waży $2\frac{1}{2}$ cm^3, $\frac{7}{9}$ cm^3, $4\frac{2}{9}$ cm^3 platyny?
8. Ktoś, mając 140 *zł*, wydał $\frac{3}{5}$ tej sumy; ile mu zostało?
9. Za wykonanie pewnej roboty miał robotnik otrzymać 100 *zł*; ile mu się należy, jeśli wykonał tylko $\frac{4}{5}$ tej roboty?
10. Z fontanny wypływa $\frac{3}{4}$ hl wody w ciągu godziny; ile wody wypłynie w ciągu $7\frac{1}{3}$ godz.?
11. Maszyna przędzie $\frac{3}{7}$ kg bawełny w 1 godz.; ile wyprzędzie w ciągu $2\frac{1}{2}$ godz., $5\frac{3}{4}$ godz., $12\frac{1}{2}$ godz.?
12. Maszyna spala w godzinie $125\frac{2}{3}$ kg węgla; ile spali w ciągu $8\frac{3}{4}$ godziny?

13. Statek wystaje 4 *m* nad poziom wody; wiedząc, że część zanurzona jest $\frac{7}{2}$ tego, co wystaje, oblicz wysokość statku.
14. Kawa po upaleniu traci $\frac{1}{5}$ pierwotnego ciężaru; ile waży $3\frac{1}{2}$ *kg* kawy surowej po upaleniu?
15. Dwie skrzynie towarów ważą 76 *kg*. Ciężar jednej wynosi $\frac{5}{8}$ ciężaru obu skrzyń; ile waży każda skrzynia?
16. W prostokącie dwa sąsiednie boki wynoszą: *a)* $\frac{1}{2}$ *cm* i 3 *cm*, *b)* $\frac{3}{4}$ *dm* i $\frac{1}{2}$ *dm*, *c)* $1\frac{1}{2}$ *m* i $1\frac{3}{4}$ *m*, *d)* $4\frac{2}{5}$ *dm* i $6\frac{1}{8}$ *dm*, *e)* $12\frac{1}{12}$ *dm* i $9\frac{4}{11}$ *dm*; oblicz obwód i pole prostokąta.
17. W prostokącie jeden bok wynosi: *a)* $\frac{9}{4}$ *m*, *b)* $1\frac{1}{2}$ *dm*, *c)* $3\frac{1}{5}$ *km*, a drugi bok wynosi: *a)* $\frac{3}{9}$, *b)* $\frac{11}{12}$, *c)* $\frac{15}{16}$ pierwszego; oblicz obwód i pole prostokąta.

Własności iloczynu.

Iloczyn kilku ułamków.

1. Oblicz, wykonując pokolei naznaczone działania:
a) $\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{10}{9}$; *b)* $\frac{11}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{9}\times\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}\times\frac{5}{8}\times\frac{13}{2}$;
d) $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}$; *e)* $\frac{3}{8}\times\frac{5}{2}\times\frac{2}{3}$; *f)* $\frac{7}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{9}{2}$; *g)* $\frac{5}{8}\times\frac{9}{7}\times\frac{3}{2}$;
h) $2\frac{1}{2}\times1\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$; *i)* $3\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times3$; *j)* $2\frac{2}{5}\times2\frac{2}{5}\times2$;
k) $7\times\frac{3}{5}\times8\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$; *l)* $\frac{1}{3}\times3\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{7}{5}$,
i przekonaj się, że iloczyn kilku ułamków oblicza się podobnie, jak iloczyn dwóch ułamków.
2. Oblicz następujące wyrażenia:
a) $(\frac{2}{5}\times\frac{1}{7})\times(\frac{4}{3}\times\frac{6}{11})$; *b)* $\frac{1}{2}\times(\frac{3}{4}\times\frac{7}{2})\times\frac{7}{9}$;
c) $\frac{1}{4}(2\times\frac{4}{5})\times(\frac{1}{2}\times\frac{3}{11})$; *d)* $\frac{3}{7}\times(\frac{2}{5}+\frac{1}{10})\times\frac{5}{9}$;
e) $\frac{3}{5}\times(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})\times(\frac{2}{7}+1)$; *f)* $(\frac{2}{7}\times\frac{4}{5})\times(\frac{7}{3}-\frac{1}{2})\times(\frac{2}{3}+\frac{3}{4})$.

Uwaga. Należy najpierw wykonać działania naznaczone w nawiasach!
3. Oblicz:
a) $\frac{8}{15}\times\frac{9}{4}\times\frac{5}{3}$, $\frac{4}{9}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{8}$, $\frac{10}{21}\times\frac{14}{15}\times\frac{3}{2}$;
b) $\frac{75}{100}\times\frac{63}{48}\times\frac{27}{72}$, $\frac{42}{21}\times\frac{57}{91}\times\frac{26}{19}$, $\frac{42}{75}\times\frac{39}{95}\times\frac{38}{91}\times\frac{45}{60}$;
c) $\frac{1}{8}\times5\frac{1}{3}\times\frac{6}{7}$, $3\frac{1}{2}\times\frac{9}{14}\times\frac{8}{3}$, $\frac{33}{30}\times2\frac{2}{11}\times\frac{56}{44}$;
d) $4\frac{23}{25}\times\frac{10}{41}\times2\frac{32}{39}$, $3\frac{1}{3}\times4\frac{1}{5}\times\frac{3}{70}$, $2\frac{5}{6}\times\frac{4}{15}\times1\frac{11}{34}$.

Uwaga. Przed wykonaniem mnożenia należy zwrócić uwagę, czy któryś z liczników i mianowników nie mają wspólnego podzielnika. Jeśli wspólny podzielnik istnieje, należy przez niego uprościć!

Np.:

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{10}{9}\times\frac{7}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\times\overset{1}{\cancel{2}}\times\overset{2}{\cancel{10}}\times\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\times\underset{1}{\cancel{7}}\times\underset{3}{\cancel{9}}\times\underset{3}{\cancel{6}}}=\frac{1\times1\times2\times1}{1\times1\times3\times3}=\frac{2}{9}.$$

4. Ile kosztuje podłoga o wymiarach $8\frac{3}{4}$ *m* i $12\frac{1}{2}$ *m*, jeśli 1 m^2 podłogi kosztuje 9 *zł* 20 *gr*?
5. Ile zarobiło 9 robotników w $4\frac{1}{2}$ dniach, jeśli dziennie każdy z nich zarabiał $7\frac{3}{5}$ *zł*?
6. Robotnik dostaje za 1 godzinę pracy $1\frac{2}{5}$ *zł*; ile zarobi w ciągu 6 dni, pracując dziennie $7\frac{3}{4}$ godziny?
7. Jeden *hl* pszenicy waży około 75 *kg*. Wiedząc, że mąka otrzymana z pszenicy waży $\frac{13}{15}$ ciężaru pszenicy i że chleb otrzymany z mąki waży $\frac{7}{5}$ ciężaru mąki, obliczyć, ile *kg* chleba mamy z 1 *hl* pszenicy?

Prawo przemienności.

Mamy:
$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2\times5}{3\times7}.$$

Zmieniając porządek czynników, otrzymamy:
$$\frac{5}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{5\times2}{7\times3}.$$

Widzimy zatem, że iloczyn dwóch ułamków nie zależy od porządku czynników.

Podobnie iloczyn kilku ułamków nie zależy od porządku czynników.

Np.:
$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{9}\times\frac{11}{7}=\frac{3\times2\times11}{5\times9\times7}.$$

Zmieniając porządek czynników, otrzymamy:
$$\frac{2}{9}\times\frac{11}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{2\times11\times3}{9\times7\times5}.$$

W obu wynikach tak liczniki, jak i mianowniki są odpowiednio równe, są to bowiem iloczyny liczb całkowitych, różniące się tylko porządkiem czynników.

Prawo łączności.

Podobnie jak dla liczb całkowitych, zachodzi dla iloczynu ułamków prawo łączności.

Mamy naprzykład:
$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}\times\frac{5}{2}\times\frac{6}{11}=\frac{2\times3\times5\times6}{5\times7\times2\times11}.$$

Zastępując czynniki $\frac{3}{7}$ i $\frac{5}{2}$ ich iloczynem $\frac{3 \times 5}{7 \times 2}$, otrzymamy:

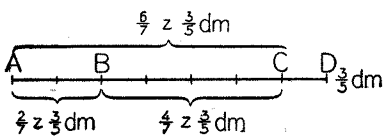
$$\tfrac{2}{5} \times \frac{3 \times 5}{7 \times 2} \times \tfrac{6}{11} = \frac{2 \times (3 \times 5) \times 6}{5 \times (7 \times 2) \times 11}.$$

Otrzymaliśmy ten sam wynik, jak poprzednio, gdyż na mocy prawa łączności, poznanego dawniej dla iloczynu liczb całkowitych, liczniki i mianowniki w obu wynikach są odpowiednio sobie równe.

Zatem: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{5}{2} \times \frac{6}{11} = \frac{2}{5} \times (\frac{3}{7} \times \frac{5}{2}) \times \frac{6}{11}$.

Prawo rozdzielności względem dodawania i odejmowania.

Odcinek AD równa się $\frac{3}{5}$ *dm*. Podzieliliśmy go na 7 równych części tak, że:



Rys. 91.

$$AB = \tfrac{2}{7} \text{ odcinka } AD,$$
$$BC = \tfrac{4}{7} \text{ odcinka } AD.$$

Z rysunku 91 widzimy, że:

$$AC = AB + BC,$$

czyli:

$$\tfrac{6}{7} \text{ z } \tfrac{3}{5}\, dm = (\tfrac{2}{7} \text{ z } \tfrac{3}{5}\, dm) + (\tfrac{4}{7} \text{ z } \tfrac{3}{5}\, dm),$$

więc:

$$\tfrac{3}{5}\, dm \times \tfrac{6}{7} = (\tfrac{3}{5}\, dm \times \tfrac{2}{7}) + (\tfrac{3}{5}\, dm \times \tfrac{4}{7}).$$

Zatem:

$$\tfrac{3}{5} \times (\tfrac{2}{7} + \tfrac{4}{7}) = (\tfrac{3}{5} \times \tfrac{2}{7}) + (\tfrac{3}{5} \times \tfrac{4}{7}).$$

Otrzymaliśmy więc prawo rozdzielności iloczynu względem dodawania (znane nam już dla liczb całkowitych).

Z rys. 91 widzimy również, że:

$$\tfrac{4}{7} \text{ z } \tfrac{3}{5}\, dm = (\tfrac{6}{7} \text{ z } \tfrac{3}{5}\, dm) - (\tfrac{2}{7} \text{ z } \tfrac{3}{5}\, dm),$$

czyli:

$$\tfrac{3}{5}\, dm \times \tfrac{4}{7} = (\tfrac{3}{5}\, dm \times \tfrac{6}{7}) - (\tfrac{3}{5}\, dm \times \tfrac{2}{7}),$$

więc: $\frac{3}{5} \times (\frac{6}{7} - \frac{2}{7}) = (\frac{3}{5} \times \frac{6}{7}) - (\frac{3}{5} \times \frac{2}{7})$.

Otrzymaliśmy więc prawo rozdzielności iloczynu względem odejmowania.

Zadania.

1. Przekonaj się, że następujące pary iloczynów są sobie równe:
   a) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$ i $\frac{4}{7} \times \frac{2}{3}$; *b)* $2 \times \frac{4}{11}$ i $\frac{4}{11} \times 2$; *c)* $\frac{11}{5} \times 3$ i $3 \times \frac{11}{5}$; *d)* $\frac{13}{2} \times \frac{5}{9}$ i $\frac{5}{9} \times \frac{13}{2}$.

2. W iloczynie $\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{11}$ przestaw czynniki na wszystkie możliwe sposoby i przekonaj się, że wszystkie otrzymane iloczyny będą sobie równe.
3. Narysuj prostokąt o wymiarach $\frac{1}{2}$ *dm* i $\frac{3}{4}$ *dm*; obierając raz jeden bok, drugi raz drugi bok za podstawę, oblicz jego pole. Jakie prawo tu zauważysz?
4. *a)* Jeden robotnik zarabiał przez 6 dni po $4\frac{1}{2}$ *zł*, drugi zaś przez $4\frac{1}{2}$ dnia po 6 *zł*; porównaj ich zarobki.
   b) Jeden piechur szedł $4\frac{1}{2}$ godziny, przechodząc $5\frac{1}{4}$ *km* w godzinie, drugi zaś szedł $5\frac{1}{4}$ godziny, przechodząc $4\frac{1}{2}$ *km* w godzinie; porównaj ich drogi.
5. Ile to jest $\frac{7}{8}$ z $\frac{3}{4}$, a ile $\frac{3}{4}$ z $\frac{7}{8}$?
6. Oblicz:

   $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{2}{3})^2$, $(1\frac{3}{5})^2$, $(\frac{1}{3})^3$, $(2\frac{1}{7})^3$, $(\frac{5}{4})^3$.
7. Przekonaj się, nie obliczając, że następujące iloczyny są sobie równe:

   a) $(\frac{4}{5} \times \frac{3}{11}) \times (\frac{25}{8} \times \frac{9}{4})$ i $\frac{4}{5} \times (\frac{3}{11} \times \frac{25}{8}) \times \frac{9}{4}$;
   b) $\frac{2}{3} \times (\frac{4}{5} \times \frac{11}{7} \times \frac{13}{9}) \times \frac{8}{17}$ i $\frac{2}{3} \times (\frac{4}{5} \times \frac{11}{7}) \times (\frac{13}{9} \times \frac{8}{17})$;
   c) $\frac{4}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{11} \times \frac{13}{17}$ i $\frac{4}{3} \times \frac{10}{77} \times \frac{13}{17}$.
8. W iloczynie $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{9}$ *a)* powiększ którykolwiek czynnik, *b)* pomniejsz którykolwiek czynnik; jak w każdym wypadku zmieni się iloczyn?
9. Sprawdź następujące równości:

   a) $(\frac{5}{12} + \frac{7}{8}) \times \frac{6}{5} = (\frac{5}{12} \times \frac{6}{5}) + (\frac{7}{8} \times \frac{6}{5})$;
   b) $(2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4}) \times \frac{5}{6} = (2\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}) + (3\frac{1}{4} \times \frac{5}{6})$;
   c) $(\frac{25}{48} - \frac{15}{64}) \times \frac{36}{125} = (\frac{25}{48} \times \frac{36}{125}) - (\frac{15}{64} \times \frac{36}{125})$;
   d) $(2\frac{23}{36} - 1\frac{15}{42}) \times \frac{6}{19} = (2\frac{23}{36} \times \frac{6}{19}) - (1\frac{15}{42} \times \frac{6}{12})$.
10. Rozwiąż następujące zadania dwoma sposobami:
    a) Kupiec płacił za 1 *kg* towaru $8\frac{1}{2}$ *zł*, a sprzedawał po $10\frac{1}{4}$ *zł*; ile zarobił na $6\frac{1}{5}$ *kg*?
    b) Ktoś zarabia dziennie $13\frac{1}{4}$ *zł*, a wydaje $7\frac{1}{2}$ *zł*; ile zaoszczędzi w 10 dniach?
    c) Piechur szedł pierwszego dnia $4\frac{1}{2}$ godz. po $5\frac{1}{4}$ *km*, a drugiego dnia $6\frac{1}{4}$ godz. też po $5\frac{1}{4}$ *km*; ile *km* przeszedł w obu dniach?
11. W iloczynie, którego jeden czynnik jest $\frac{8}{9}$, *a)* powiększono drugi czynnik o $\frac{3}{4}$, *b)* pomniejszono drugi czynnik o $\frac{1}{2}$; jak zmienił się za każdym razem iloczyn i o ile?

Ćwiczenia.

1. Ile otrzymamy, jeżeli od liczby 325 odejmiemy $\frac{4}{5}$ tej liczby?
2. Co jest większe: suma, czy iloczyn ułamków $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{4}$?
3. Ziemia przebiega w ciągu jednej sekundy $30\frac{13}{25}$ *km*; ile *km* przebiegnie w ciągu roku ($365\frac{1}{4}$ dni)?
4. Śruba wkręca się o $\frac{3}{16}$ *mm* za każdym obrotem; jak głęboko się wkręci po $15\frac{2}{9}$ obrotach?
5. Dwaj robotnicy za wykonanie pewnej pracy otrzymali razem 120 *zł*; pierwszy wykonał $\frac{3}{4}$ pracy, drugi resztę. Ile każdy z nich zarobił?
6. Za ile ma kupiec sprzedać towar, który go kosztował 300 *zł*, jeśli chce zarobić $\frac{3}{20}$ tego, co zapłacił?
7. Kupiec kupił $50\frac{2}{5}$ *kg* towaru, płacąc $2\frac{1}{2}$ *zł* za 1 *kg*; chce zarobić $\frac{3}{25}$ tego, co zapłacił. *a)* Ile zapłacił za towar? *b)* Jaki będzie miał zysk? *c)* Jaka będzie cena sprzedaży 1 *kg* tego towaru?
8. Z dwóch miejscowości, odległych od siebie o $97\frac{1}{4}$ *km*, wychodzą równocześnie naprzeciwko siebie dwaj posłańcy; jeden przebywa w ciągu godziny $4\frac{3}{5}$ *km*, drugi $5\frac{1}{4}$ *km*. W jakiej odległości od siebie będą po $6\frac{1}{2}$ godzinach?
9. Kwotę 3256 *zł* rozdzielono między cztery osoby tak, że pierwsza otrzymała $\frac{2}{5}$, druga $\frac{1}{8}$, trzecia $\frac{1}{4}$, a czwarta resztę; ile otrzymała każda osoba?
10. Rozdzielono 1200 *zł* pomiędzy 15 osób w ten sposób, że pomiędzy 10 osób rozdzielono $\frac{5}{6}$ całej sumy na równe części, a pomiędzy pozostałych 5 osób resztę również na równe części. Ile otrzymała każda osoba?
11. Ktoś wydał naprzód $\frac{2}{5}$ tej sumy pieniędzy, którą posiadał, a następnie $\frac{3}{4}$ reszty; jaki ułamek ma jeszcze tej sumy, którą posiadał na początku?
12. Ktoś mierzył fałszywym metrem, mianowicie o $1\frac{1}{4}$ *cm* krótszym i wymierzył $15\frac{1}{2}$ *m*; jaka jest prawdziwa długość?
13. Wapno gaszone zajmuje $3\frac{1}{2}$ razy większą objętość, aniżeli przed gaszeniem; jaką objętość będzie miało $5\frac{3}{4}$ m^3 wapna po gaszeniu?
14. Obwód pola w kształcie prostokąta wynosi 545 *m*, a szerokość jego wynosi $\frac{2}{3}$ długości. Jaka jest wartość tego pola, jeśli 1 m^2 kosztuje $\frac{1}{5}$ *zł*?

15. Oblicz w stopniach, minutach i sekundach kąt, jaki opisuje wskazówka mała (godzinowa) zegara w *a)* $\frac{7}{15}$ godz., *b)* $\frac{5}{12}$ godz., *c)* $1\frac{3}{4}$ godz.?
16. Trawa traci $\frac{13}{20}$ swego ciężaru po wysuszeniu na siano. Jaka jest wartość zbiorów z łąki, która przy pierwszem skoszeniu dała 12 *t* trawy, a przy drugiem $\frac{2}{3}$ tej ilości, jeśli 1 *t* siana kosztuje 75 *zł*?
17. Brukarze wybrukowali trzy ulice o wymiarach $11\frac{1}{2}$ *m* i $98\frac{1}{5}$ *m*, $10\ \frac{1}{4}$ *m* i $72\frac{1}{2}$ *m*, 12 *m* i $110\frac{3}{4}$ *m*; ile należy się brukarzom za robotę, jeśli 1 m^2 kosztuje $1\frac{1}{2}$ *zł*?
18. Sztuka płótna miała $\frac{4}{5}$ *m* szerokości, a $25\frac{1}{2}$ *m* długości. Po wypraniu straciła $\frac{1}{20}$ swej szerokości i $\frac{1}{16}$ swej długości; ile m^2 ma teraz ta sztuka płótna?
19. 30 mężczyzn, 20 kobiet i 15 dzieci urządziło wycieczkę, która przeciętnie kosztowała 2 *zł* za jedno dziecko, za jedną kobietę $\frac{7}{4}$ tego, co za dziecko i za jednego mężczyznę $\frac{5}{2}$ tego, co za dziecko; ile kosztowała wycieczka?

Iloraz ułamka przez ułamek.

Iloraz liczby mianowanej przez ułamek.

Ile kosztuje 1 *kg* towaru, jeżeli $\frac{3}{5}$ *kg* tego towaru kosztuje 21 *zł*?

Jak wiemy:

cena towaru = cena 1 *kg* $\times$ ilość *kg* towaru.

Nasze więc zadanie możemy zaznaczyć w następujący sposób:

$$21\ zł = ?\ zł \times \tfrac{3}{5}.$$

Szukamy więc mnożnej, znając mnożnik i iloczyn.

Podobnie jak dla liczb całkowitych, daną wartość iloczynu (21 *zł*) nazywamy dzielną, dany mnożnik ($\frac{3}{5}$) dzielnikiem, szukaną zaś mnożną ilorazem.

Iloraz oznaczamy, pisząc:

$$21\ zł : \tfrac{3}{5}.$$

Zadanie powyższe rozwiązujemy w następujący sposób:

$\frac{3}{5}$ *kg* kosztuje 21 *zł*;
$\frac{1}{5}$ *kg* kosztuje 3 razy mniej, t. j. 21 *zł* : 3 = 7 *zł*;
1 *kg* kosztuje 5 razy więcej, niż $\frac{1}{5}$ *kg*, t. j.: 7 *zł* $\times$ 5 = 35 *zł*.
Zatem:

$$21\ zł : \tfrac{3}{5} = 35\ zł.$$

Zadania.

1. $\frac{5}{8}$ *kg* pewnego towaru kosztuje $\frac{5}{2}$ *zł*; ile kosztuje 1 *kg* tego towaru?
2. Ile kosztuje gram złota, jeśli $2\frac{1}{2}$ *g* złota kosztuje $14\frac{1}{2}$ *zł*?
3. Automobil przebiegł w $5\frac{1}{2}$ godziny 260 *km*; jaką drogę przebiegł w 1 godzinie?
4. Robotnik za $3\frac{1}{2}$ godziny pracy otrzymał $8\frac{3}{4}$ *zł*; ile płacono mu za 1 godzinę pracy?
5. $\frac{2}{5}$ sztuki sukna kosztuje 240 *zł*; ile kosztuje cała sztuka?
6. W ciągu $\frac{5}{6}$ godziny robotnik wykonał $\frac{2}{5}$ przyjętej pracy; w jakim czasie wykona całą pracę?
7. $\frac{3}{4}$ butelki octu kosztuje $\frac{6}{25}$ *zł*; ile kosztuje pełna butelka octu?
8. Przedstaw szukane mnożne w postaci ilorazu:

$? \text{ zł} \times \frac{3}{4} = 18 \text{ zł}$; $\qquad ? \; l \times \frac{3}{10} = 1\frac{1}{2} \; l$;

$? \text{ kg} \times \frac{4}{5} = \frac{17}{2} \text{ kg}$; $\qquad ? \text{ godz.} \times \frac{2}{5} = 2\frac{1}{2} \text{ godz.}$;

$? \text{ km} \times \frac{5}{2} = \frac{19}{4} \text{ km}$; $\qquad ? \; m^2 \times \frac{3}{25} = 4\frac{1}{2} \; m^2$.

9. Napisz iloczyny, w których mnożna będzie szukanym ilorazem:

$3\frac{1}{2} \text{ zł} : \frac{4}{5} = ?$; $\qquad \frac{9}{2} \; l : 1\frac{1}{5} = ?$;

$\frac{7}{4} \text{ kg} : 1\frac{1}{2} = ?$; $\qquad 1\frac{1}{4} \text{ godz.} : \frac{3}{11} = ?$;

$\frac{7}{8} \text{ km} : \frac{5}{12} = ?$; $\qquad 5\frac{3}{8} \; m^2 : 1\frac{1}{4} = ?$.

Iloraz liczby mianowanej przez mianowaną.

W jakim czasie przebiegł goniec 90 *m*, jeżeli w sekundzie przebiegał $7\frac{1}{5}$ *m*?

Jak wiemy:

droga przebyta = droga w 1 sek. $\times$ ilość sek.

Zadanie możemy więc tak zaznaczyć:

$$90 \; m = 7\frac{1}{5} \; m \times ?,$$

czyli:

$$90 \; m = \frac{36}{5} \; m \times ?.$$

Mamy więc wyznaczyć mnożnik, znając mnożną i iloczyn. W tym wypadku dany iloczyn (90 *m*) nazywamy dzielną, znaną mnożną ($\frac{36}{5}$ *m*) dzielnikiem, szukany mnożnik ilorazem. Iloraz oznaczamy, jak poprzednio.

A więc:

$$\text{ilość sek.} = 90 \; m : \frac{36}{5} \; m.$$

Aby zadanie rozwiązać, obliczamy, w jakim czasie goniec przebiega 1 *m*. Ponieważ $\frac{36}{5}$ *m* przebiega w 1 sek., więc $\frac{1}{5}$ *m*

przebiega w czasie 36 razy krótszym, t. j. w $\frac{1}{36}$ sek., zatem 1 *m* przebiega w czasie 5 razy dłuższym, t. j. w $(\frac{1}{36} \times 5)$ sek., czyli w $\frac{5}{36}$ sek.

Ponieważ 1 *m* przebiega w czasie $\frac{5}{36}$ sek., więc 90 *m* przebiegnie w czasie 90 razy dłuższym, t. j. w czasie:

$$(\frac{5}{36} \times 90) \text{ sek.} = \frac{5 \times 90}{36} \text{ sek.}$$

Upraszczając licznik i mianownik przez 18, otrzymujemy:

$$\frac{5}{36} \times 90 = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

A więc goniec biegł $12\frac{1}{2}$ sek.

Uwaga. Otrzymaliśmy poprzednio:

$$90 \; m : \frac{36}{5} \; m = \frac{25}{2}.$$

Oczywiście:

$$90 \; m = \frac{36}{5} \; m \times \frac{25}{2},$$

czyli:

$$\frac{25}{2} \text{ z } \frac{36}{5} \; m = 90 \; m.$$

Mówimy, że $\frac{36}{5}$ *m* mieści się w 90 *m* — $\frac{25}{2}$ razy. Rozumiemy przez to, że $\frac{25}{2}$ części z $\frac{36}{5}$ *m* daje na wynik 90 *m*.

A więc pytanie: ile razy jedna wielkość mieści się w drugiej, oznacza pytanie: jaki ułamek, utworzony z pierwszej wielkości, daje na wynik drugą?

Zadania.

1. 12 *l* wina rozlano w butelki o pojemności $\frac{3}{4}$ *l*; ile butelek napełniono?
2. Ile razy odcinek $13\frac{1}{2}$ *m* jest dłuższy od odcinka $2\frac{1}{4}$ *m*?
3. Kilogram cukru kosztuje $1\frac{3}{4}$ *zł*; ile *kg* cukru otrzymamy za $6\frac{1}{8}$ *zł*?
4. Zegar przyśpiesza dziennie o $2\frac{2}{9}$ minuty; po ilu dniach przyśpieszy o godzinę?
5. Ile kamizelek można uszyć ze sztuki 6 *m* sukna, jeśli na jedną kamizelkę potrzeba $\frac{3}{5}$ *m* sukna?
6. Metr ma około $1\frac{3}{4}$ łokcia; ile to jest metrów $4\frac{1}{5}$ łokcia?
7. Obwód koła u wozu wynosi $\frac{22}{7}$ *m*; ile razy koło obróci się na drodze o długości $97\frac{3}{7}$ *m*?
8. Śruba wkręca się o $\frac{3}{4}$ *mm* za jednym obrotem; ile razy trzeba śrubę obrócić, aby wkręciła się o $3\frac{3}{4}$ *mm*?

9. Przedstaw szukane mnożniki w postaci ilorazu:

$\frac{5}{4}\ cm \times ? = 1\frac{1}{2}\ cm$; $\quad \frac{11}{4}\ l \times ? = \frac{2}{5}\ l$;

$1\frac{1}{2}\ kg \times ? = 3\frac{1}{5}\ kg$; $\quad 1\frac{1}{12}$ godz. $\times ? = 2\frac{1}{2}$ godz.;

$5\frac{3}{4}\ zł \times ? = \frac{5}{8}\ zł$; $\quad 3\frac{1}{8}\ m^2 \times ? = 1\frac{3}{4}\ m^2$.

10. Napisz iloczyny, w których mnożnik będzie szukanym ilorazem:

$11\frac{1}{2}\ cm : 3\frac{1}{4}\ cm = ?$; $\quad 1\frac{1}{2}\ zł : 2\frac{1}{2}\ zł = ?$;

$2\frac{1}{5}\ kg : 1\frac{3}{4}\ kg = ?$; $\quad 8\frac{1}{2}\ l : 1\frac{1}{4}\ l = ?$;

$4\frac{13}{20}\ m^2 : 5\frac{1}{5}\ m^2 = ?$; $\quad 3\frac{1}{3}$ godz. : $1\frac{1}{5}$ godz. = ?.

Iloraz liczb niemianowanych.

W poprzednich wypadkach mieliśmy jako zadanie wyznaczyć czynnik iloczynu, znając wartość iloczynu i drugi czynnik.

Podobne zadanie możemy postawić dla liczb niemianowanych.

Np. wartość iloczynu jest $\frac{56}{15}$, a jeden jego czynnik jest $\frac{7}{3}$; ile wynosi drugi czynnik?

Jeżeli szukany czynnik jest mnożną, to zadanie możemy zaznaczyć w następujący sposób:

$$? \times \frac{7}{3} = \frac{56}{15};$$

jeżeli szukany czynnik jest mnożnikiem, to napiszemy:

$$\frac{7}{3} \times ? = \frac{56}{15}.$$

W obu wypadkach odpowiedź jest ta sama, t. j. $\frac{8}{5}$, albowiem

$$\frac{8}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{56}{15}.$$

Widzimy stąd, że (podobnie jak dla liczb całkowitych), obojętną jest rzeczą, czy szukany czynnik jest mnożną, czy mnożnikiem.

Dany iloczyn ($\frac{56}{15}$) nazywamy dzielną, dany czynnik ($\frac{7}{3}$) dzielnikiem, szukany czynnik ($\frac{8}{5}$) ilorazem.

Widzimy, że iloraz pomnożony przez dzielnik daje na wynik dzielną.

Zatem: Ilorazem dwóch ułamków (z których pierwszy nazywa się dzielną, drugi zaś dzielnikiem) jest ułamek, który pomnożony przez dzielnik daje na wynik dzielną.

Iloraz ułamków oznaczamy podobnie jak iloraz liczb całkowitych, zatem:

$$\frac{56}{15} : \frac{7}{3} = \frac{8}{5}.$$

Podobnie:

$$\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5}, \quad \text{bo} \quad \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

Uwaga. Należy pamiętać, że dzielnik nigdy nie może być zerem.

Jeżeli dzielna jest zerem, to iloraz jest zerem.

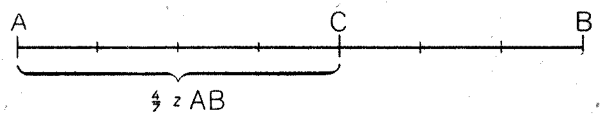
Np.: $\quad 0 : \frac{2}{3} = 0, \quad$ bo $\quad 0 \times \frac{2}{3} = 0.$

Obliczanie ilorazu dwóch ułamków.

Mamy obliczyć iloraz:

$$\frac{3}{14} : \frac{4}{7}.$$

Zadanie to możemy uzmysłowić sobie na następującym przykładzie:



Rys. 92.

Odcinek AC jest $\frac{4}{7}$ odcinka AB i ma długość $\frac{3}{14}\ dm$; jaka jest długość odcinka AB (rys. 92)?

Mamy: $\quad$ długość $AC = \frac{4}{7}$ długości AB.

Zatem: $\quad$ długość $AC =$ długość $AB \times \frac{4}{7}$,

więc: $\quad \frac{3}{14}\ dm = ?\ dm \times \frac{4}{7}$.

Szukamy więc mnożnej, przeto:

$$\frac{3}{14}\ dm : \frac{4}{7} = \text{długość } AB.$$

Z rys. 92 widzimy, że odcinek AB składa się z 7 czwartych części odcinka AC.

Zatem: $\quad$ długość $AB = \frac{7}{4}$ z $\frac{3}{14}\ dm$,

czyli: $\quad$ długość $AB = \frac{3}{14}\ dm \times \frac{7}{4}$.

A więc: $\quad \frac{3}{14}\ dm : \frac{4}{7} = \frac{3}{14}\ dm \times \frac{7}{4}$.

Zatem: $\quad \frac{3}{14} : \frac{4}{7} = \frac{3}{14} \times \frac{7}{4}$.

Ułamek $\frac{7}{4}$ nazywamy odwrotnością ułamka $\frac{4}{7}$.

Możemy więc powiedzieć: Iloraz dwóch ułamków otrzymujemy, mnożąc dzielną przez odwrotność dzielnika.

Uwaga. Odwrotność liczby całkowitej lub mieszanej otrzymamy, pisząc ją w postaci ułamka, a następnie odwracając. Zatem odwrotnością liczby $7 = \frac{7}{1}$ jest ułamek $\frac{1}{7}$.

Podobnie odwrotnością liczby $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ jest ułamek $\frac{2}{7}$.

W powyższej regule dzielenia ułamków mieści się również reguła dzielenia ułamka przez liczbę całkowitą. Mamy bowiem:

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4 \times 5};$$

$$\frac{7}{2} : 3 = \frac{7}{2} : \frac{3}{1} = \frac{7}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{2 \times 3} \quad \text{i t. d.}$$

Zadania.

1. Podaj szukane czynniki w postaci ilorazu:
$4\frac{1}{2} \times ? = 5\frac{3}{10}$, $? \times \frac{3}{5} = 1\frac{1}{4}$, $8\frac{4}{9} \times ? = \frac{1}{10}$, $? \times \frac{1}{8} = 1\frac{1}{10}$.
2. Przekonaj się o następujących równościach:
$9 : \frac{3}{4} = 12$, $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$, $1\frac{1}{2} : \frac{3}{5}, = 2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2} : 1\frac{2}{5} = 2\frac{1}{2}$.
3. Podaj odwrotności następujących liczb:
a) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$; *b)* 3, 5, 10; *c)* $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $7\frac{2}{5}$, $5\frac{1}{3}$.
4. Oblicz: *a)* $\frac{2}{3} : \frac{4}{3}$, $\frac{7}{5} : \frac{8}{25}$, $\frac{1}{3} : \frac{3}{8}$, $\frac{7}{15} : \frac{7}{25}$, $\frac{12}{25} : \frac{18}{5}$;
b) $3 : \frac{2}{3}$, $7 : \frac{1}{5}$, $2 : \frac{3}{5}$, $9 : \frac{3}{4}$, $10 : \frac{100}{101}$;
c) $2\frac{1}{2} : \frac{7}{5}$, $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$, $3 : 2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} : 1\frac{1}{5}$, $7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$.
5. Oblicz: *a)* $369 : \frac{41}{37}$, $27 : \frac{198}{113}$, $\frac{51}{26} : \frac{68}{65}$;
b) $17\frac{3}{13} : \frac{49}{52}$, $107 : 35\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{32} : 7\frac{13}{16}$;
c) $6\frac{86}{121} : \frac{2}{121}$, $5\frac{7}{121} : 5\frac{35}{44}$, $\frac{477}{187} : \frac{212}{561}$.

Po zamianie ilorazu na iloczyn uprość!

6. Ile wynosi mnożna, jeżeli:
a) iloczyn wynosi $\frac{3}{4}$, a mnożnik $\frac{5}{7}$;
b) „ „ $1\frac{1}{2}$, „ „ $\frac{8}{11}$;
c) „ „ $3\frac{4}{5}$, „ „ $1\frac{8}{9}$?
7. Ile wynosi mnożnik, jeżeli:
a) iloczyn wynosi $\frac{17}{4}$, a mnożna $\frac{5}{8}$;
b) „ „ $3\frac{1}{6}$, „ „ $\frac{23}{12}$;
c) „ „ $4\frac{1}{2}$, „ „ $3\frac{1}{4}$?
8. Przez co trzeba pomnożyć liczbę $3\frac{1}{2}$, aby otrzymać 4?
9. Iloczyn dwóch liczb wynosi $\frac{11}{8}$; jedna z tych liczb jest $2\frac{1}{3}$. Ile wynosi druga?
10. Ile razy można odejmować $\frac{3}{4}$ od $4\frac{2}{3}$?
11. Jaka liczba podzielona przez: *a)* $\frac{3}{2}$, *b)* $2\frac{1}{3}$, *c)* $5\frac{3}{7}$, daje iloraz *a)* $\frac{4}{5}$, *b)* $\frac{11}{8}$, *c)* $3\frac{1}{6}$?
12. *a)* Jaka liczba jest swoją własną odwrotnością?

b) Jeżeli liczba jest mniejsza od 1, to jej odwrotność jest większa od 1; podaj przykłady!
c) Iloczyn liczby przez jej odwrotność równa się jedności; podaj przykłady!

13. Pole prostokąta wynosi: *a)* 2 cm^2, *b)* $\frac{3}{4}$ cm^2, *c)* $6\frac{2}{5}$ cm^2, jeden zaś bok ma: *a)* $\frac{4}{5}$ *cm*, *b)* $\frac{3}{8}$ *cm*, *c)* $2\frac{2}{5}$ *cm*; ile wynosi drugi bok?
Oprzyj się na tem, że miara pola prostokąta jest iloczynem liczb, mierzących oba boki.
14. Zamień następujące iloczyny na ilorazy: *a)* $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$, *b)* 2×5, *c)* $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{3}$, *d)* $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$.

Uwaga. Np. $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{7} : \frac{3}{2}$.

Własności ilorazu.

Dzielna, dzielnik, iloraz.

Jak wiemy:

cena towaru = cena 1 *kg* $\times$ ilość *kg*.

Jeśli zatem 1 *kg* kosztuje $\frac{2}{5}$ *zł*, to, aby obliczyć, ile *kg* kupimy za $\frac{14}{10}$ *zł*, należy znaleźć iloraz:

$$\frac{14}{10} \text{ zł} : \frac{2}{5} \text{ zł}.$$

Mamy:

$$\frac{14}{10} : \frac{2}{5} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{7}{2}.$$

Widzimy stąd, że za $\frac{14}{10}$ *zł* kupimy $\frac{7}{2}$ *kg* towaru.

Gdybyśmy znali dzielną i wartość ilorazu, t. zn. wiedzieli, że za $\frac{14}{10}$ *zł* można kupić $\frac{7}{2}$ *kg*, to cenę jednego kilograma tego towaru otrzymalibyśmy, obliczając iloraz:

$$\frac{14}{10} \text{ zł} : \frac{7}{2}.$$

A więc: $\frac{2}{5}$ *zł* $= \frac{14}{10}$ *zł* $: \frac{7}{2}$.

Widzimy stąd: dzielnik równa się dzielnej, podzielonej przez iloraz.

Zadania.

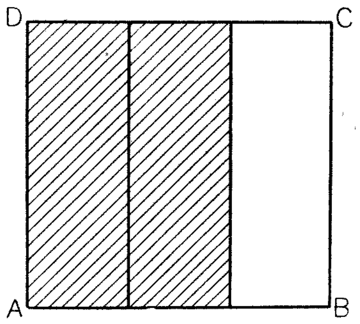
1. Ile wynosi dzielna, jeżeli:
a) dzielnik wynosi 6, a iloraz $\frac{7}{2}$;
b) „ „ 12, „ „ $\frac{4}{5}$;
c) „ „ $\frac{6}{7}$, „ „ $\frac{14}{9}$;
d) „ „ $3\frac{1}{5}$, „ „ $1\frac{2}{3}$?

2. Ile wynosi dzielnik, jeżeli:
   a) dzielna wynosi 4, a iloraz 5;
   b) „ „ $\frac{2}{3}$, „ „ 4;
   c) „ „ 3, „ „ $\frac{2}{5}$;
   d) „ „ $\frac{4}{5}$, „ „ $\frac{15}{8}$?
3. Przez jaką liczbę należy $\frac{2}{3}$ podzielić, aby otrzymać $\frac{3}{2}$?
4. Zastąp literę x liczbą tak, aby była spełniona równość: *a)* $\frac{2}{3} : x = \frac{5}{4}$; *b)* $x : \frac{7}{8} = \frac{2}{3}$; *c)* $3\frac{1}{2} : x = 2$; *d)* $x : \frac{2}{5} = 7\frac{1}{4}$.
5. Oblicz następujące wyrażenia: *a)* $(\frac{2}{5} : 3) \times 3$; *b)* $(1\frac{1}{3} : \frac{2}{5}) \times \frac{2}{5}$; *c)* $(\frac{2}{7} : 3\frac{1}{4}) \times 3\frac{1}{4}$; *d)* $(5\frac{2}{9} : 1\frac{4}{5}) \times 1\frac{4}{5}$.

Przekształcanie ilorazu.

Prostokąt $ABCD$ o podstawie $\frac{2}{5}$ *dm* (rys. 93) ma pole $\frac{3}{20}$ *dm*^{2}. Wysokość AD prostokąta $ABCD$ wynosi zatem:

$$(\tfrac{3}{20} : \tfrac{2}{5})\ dm.$$



Rys. 93.

Prostokąt zacieniowany ma podstawę $\frac{2}{5}$ *dm* $\times \frac{2}{3}$ i pole $\frac{3}{20}$ *dm*$^2 \times \frac{2}{3}$. Wysokość AD prostokąta zacieniowanego ma zatem decymetrów:

$$(\tfrac{3}{20} \times \tfrac{2}{3}) : (\tfrac{2}{5} \times \tfrac{2}{3}).$$

Widzimy stąd, że:

$$\tfrac{3}{20} : \tfrac{2}{5} = (\tfrac{3}{20} \times \tfrac{2}{3}) : (\tfrac{2}{5} \times \tfrac{2}{3}).$$

Zatem:

Iloraz nie zmieni się, jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy przez tę samą liczbę.

Gdybyśmy dzielną i dzielnik podzielili przez tę samą liczbę, to iloraz również nie zmieniłby się. Pisząc bowiem w ostatnim wzorze:

$$\tfrac{3}{20} : \tfrac{3}{2} \quad \text{zamiast} \quad \tfrac{3}{20} \times \tfrac{2}{3} \text{ i } \tfrac{2}{5} : \tfrac{3}{2} \quad \text{zamiast} \quad \tfrac{2}{5} \times \tfrac{2}{3},$$

otrzymamy: $\frac{3}{20} : \frac{2}{5} = (\frac{3}{20} : \frac{3}{2}) : (\frac{2}{5} : \frac{3}{2})$.

Zadania.

1. Sprawdź następujące równości: *a)* $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = (\frac{3}{5} \times \frac{8}{11}) : (\frac{4}{7} \times \frac{8}{11})$; *b)* $2 : \frac{3}{7} = (2 \times \frac{4}{5}) : (\frac{3}{7} \times \frac{4}{5})$; *c)* $\frac{5}{11} : 8 = (\frac{5}{11} : \frac{3}{4}) : (8 : \frac{3}{4})$; *d)* $2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{5} = (2\frac{1}{3} : \frac{2}{13}) : (4\frac{2}{5} : \frac{2}{13})$.
2. Literę x zastąp odpowiednim ułamkiem: *a)* $\frac{1}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} : x$; *b)* $\frac{3}{7} : \frac{2}{5} = x : \frac{22}{5}$; *c)* $x : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} : \frac{9}{5}$; *d)* $\frac{2}{3} : x = \frac{2}{15} : \frac{7}{3}$.
   Zbadaj, jak się zmieniła dzielna względnie dzielnik!

Rozdzielność dzielenia względem dodawania i odejmowania.

1. Kupiec sprzedał pierwszego dnia za $3\frac{1}{4}$ *zł* towaru, drugiego zaś dnia za $14\frac{1}{4}$ *zł*; ile *kg* towaru sprzedał razem, jeśli za 1 *kg* towaru żądał $2\frac{1}{2}$ *zł*?

Zadanie powyższe rozwiążemy dwoma sposobami.

I. Pierwszego dnia sprzedał:

$$3\tfrac{1}{4} : 2\tfrac{1}{2} \text{ kilogramów towaru.}$$

Drugiego dnia sprzedał:

$$14\tfrac{1}{4} : 2\tfrac{1}{2} \text{ kilogramów towaru.}$$

Razem więc sprzedał:

$$(3\tfrac{1}{4} : 2\tfrac{1}{2}) + (14\tfrac{1}{4} : 2\tfrac{1}{2}) \text{ kilogramów towaru.}$$

II. Kupiec sprzedał w obu dniach towaru za:

$$3\tfrac{1}{4} + 14\tfrac{1}{4} \text{ złotych.}$$

A więc sprzedał:

$$(3\tfrac{1}{4} + 14\tfrac{1}{4}) : 2\tfrac{1}{2} \text{ kilogramów.}$$

Widzimy zatem, że:

$$(3\tfrac{1}{4} + 14\tfrac{1}{4}) : 2\tfrac{1}{2} = (3\tfrac{1}{4} : 2\tfrac{1}{2}) + (14\tfrac{1}{4} : 2\tfrac{1}{2}).$$

Wynika stąd prawo rozdzielności dzielenia względem dodawania.

2. Kupiec sprzedał w dwóch dniach za $17\frac{1}{2}$ *zł* towaru, przyczem pierwszego dnia sprzedał za $3\frac{1}{4}$ *zł*; ile *kg* sprzedał drugiego dnia, jeśli za 1 *kg* żądał $2\frac{1}{2}$ *zł*?

Zadanie rozwiążemy dwoma sposobami.

I. Kupiec sprzedał w obu dniach:

$$17\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2} \text{ kilogramów towaru.}$$

Pierwszego dnia sprzedał:

$$3\tfrac{1}{4} : 2\tfrac{1}{2} \text{ kilogramów towaru.}$$

Zatem drugiego dnia sprzedał:

$$(17\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2}) - (3\tfrac{1}{4} : 2\tfrac{1}{2}) \text{ kilogramów towaru.}$$

II. Kupiec sprzedał drugiego dnia towaru za:

$$17\tfrac{1}{2} - 3\tfrac{1}{4} \text{ złotych.}$$

A więc drugiego dnia sprzedał:

$$(17\tfrac{1}{2} - 3\tfrac{1}{4}) : 2\tfrac{1}{2} \text{ kilogramów towaru.}$$

Widzimy zatem, że:

$$(17\tfrac{1}{2} - 3\tfrac{1}{4}) : 2\tfrac{1}{2} = (17\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2}) - (3\tfrac{1}{4} : 2\tfrac{1}{2}).$$

Wynika stąd prawo rozdzielności dzielenia względem odejmowanią. Oba prawa powyższe poznaliśmy już poprzednio dla liczb całkowitych.

Zadania.

1. Przekonaj się o prawdziwości następujących równości:

   a) $(\frac{2}{3} + \frac{1}{7}) : \frac{4}{5} = (\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) + (\frac{1}{7} : \frac{4}{5})$;
   b) $(\frac{11}{24} + 5\frac{2}{5} + \frac{14}{15}) : \frac{7}{8} = (\frac{11}{24} : \frac{7}{8}) + (5\frac{2}{5} : \frac{7}{8}) + (\frac{14}{15} : \frac{7}{8})$;
   c) $(5\frac{3}{8} - \frac{21}{4}) : \frac{8}{9} = (5\frac{3}{8} : \frac{8}{9}) - (\frac{21}{4} : \frac{8}{9})$;
   d) $(6\frac{1}{2} - \frac{4}{9} + 8\frac{2}{3}) : \frac{5}{6} = (6\frac{1}{2} : \frac{5}{6}) - (\frac{4}{9} : \frac{5}{6}) + (8\frac{2}{3} : \frac{5}{6})$.

2. Podziel w prosty sposób przez *a)* $\frac{3}{4}$, *b)* $3\frac{1}{2}$ wyrażenie:

   a) $(2\frac{1}{5} \times \frac{3}{4}) + (\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}) + (6 \times \frac{3}{4}) + (1\frac{1}{2} \times \frac{3}{4})$;
   b) $(8\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{2}) - (\frac{11}{12} \times 3\frac{1}{2}) + (\frac{14}{15} \times 3\frac{1}{2})$.

3. Oblicz w prosty sposób:

   a) $(2\frac{1}{3} \times \frac{5}{4}) + (\frac{4}{3} \times \frac{5}{4}) + (\frac{5}{2} \times \frac{5}{4})$;
   b) $(8\frac{1}{6} \times \frac{4}{7}) - (4 \times \frac{4}{7}) + (\frac{2}{3} \times \frac{4}{7})$.

4. Rozwiąż dwoma sposobami następujące zadania:

   a) Robotnik zarabiał dziennie $7\frac{1}{2}$ *zł*. W jednym miesiącu zarobił 180 *zł*, w drugim $168\frac{3}{4}$ *zł*; ile dni pracował w obu miesiącach razem?

   b) Piechur przeszedł w dwóch dniach 54 *km*, idąc przeciętnie $4\frac{1}{2}$ *km* na godzinę. Pierwszego dnia przeszedł 36 *km*; przez ile godzin był w drodze w drugim dniu?

5. Ile szklanek o pojemności $\frac{3}{10}$ *l* zawierają dwa dzbanki, z których jeden ma pojemność $5\frac{2}{5}$ *l*, a drugi $6\frac{3}{4}$ *l*?

Ćwiczenia.

1. Jeżeli do $\frac{1}{3}$ pewnego odcinka dodamy $\frac{1}{6}$ tego odcinka, to otrzymamy odcinek o długości 9 *cm*. Jaka jest długość danego odcinka?
2. Kupiec kupował cukier po $1\frac{7}{20}$ *zł*, a sprzedawał po $1\frac{1}{2}$ *zł*; ile *kg* sprzedał, jeśli zarobił 90 *zł*?
3. Kupiec płacił za 1 *kg* towaru $4\frac{1}{5}$ *zł*, a sprzedawał po $5\frac{2}{5}$ *zł*; ile *kg* sprzedał i ile zarobił, jeśli za towar otrzymał $17\frac{11}{20}$ *zł*?
4. Kupiec sprzedał $\frac{3}{5}$ swojego zapasu cukru i pozostało mu 25 *kg*; jaki był zapas cukru kupca?

5. Kupiec, sprzedając towar za 60 *zł*, zarobił $\frac{1}{5}$ tego, co zapłacił; ile kupiec zapłacił za towar i ile zarobił?
6. Robotnik za wykonanie $\frac{4}{5}$ zadanej pracy otrzymał $12\frac{1}{5}$ *zł*; ileby zarobił, gdyby wykonał całkowitą pracę?
7. Pewien robotnik wykona zadaną pracę w ciągu 4 godzin, a towarzysz jego wykonałby tę samą pracę w ciągu 5 godzin; w jakim czasie wykonają tę pracę, pracując razem?
8. Dwaj robotnicy, pracując razem, wykonali pewną pracę w $3\frac{11}{15}$ godz.; oblicz, w jakim czasie wykona tę pracę pierwszy robotnik, jeżeli drugi wykona ją w 8 godzinach?
9. Jeżeli pewną liczbę zwiększymy o jej $\frac{2}{3}$, to otrzymamy 8; jaka to jest liczba?
10. Jeżeli $\frac{4}{7}$ pewnej kwoty zwiększymy o 5 *zł*, otrzymamy 11 *zł*; ile to jest $\frac{4}{7}$ tej kwoty, a ile wynosi cała kwota?
11. $\frac{3}{4}$ odcinka AB równa się $\frac{2}{3}$ odcinka CD; jakim ułamkiem odcinka CD jest odcinek AB?
12. Różnica między $\frac{3}{4}$ pewnej liczby, a $\frac{2}{5}$ tej samej liczby wynosi 14; jaka to jest liczba?
13. Odkręcając jeden kurek, napełnimy basen w ciągu $1\frac{1}{4}$ godziny, odkręcając zaś drugi kurek, napełnimy basen w ciągu $2\frac{2}{3}$ godz.; w jakim czasie napełnimy basen, jeśli oba kurki otworzymy równocześnie?
14. Ktoś wydał najpierw $\frac{2}{5}$ sumy, którą posiadał, następnie $\frac{3}{4}$ reszty i zostało mu 12 *zł*; ile posiadał na początku?
15. Kupiec miał 126 *kg* cukru. Najpierw sprzedał $\frac{5}{9}$ tego zapasu, a następnie $\frac{3}{8}$ reszty; ile mu zostało?
16. Z beczki wina odlano najpierw $\frac{1}{4}$ zawartości, następnie 76 *l* i okazało się, że zostało $\frac{5}{13}$ początkowej ilości wina; ile litrów wina zawierała beczka na początku?
17. Dwaj chłopcy mieli razem 52 *zł*; skoro jeden wydał $\frac{2}{5}$ tego, co posiadał, a drugi $\frac{4}{9}$, okazało się, że mają równo. Ile każdy z nich miał na początku?
18. Dwie skrzynie ważą 65 *kg*; ciężar jednej wynosi $\frac{5}{8}$ ciężaru drugiej. Ile waży każda skrzynia?
19. Do naczynia o pojemności $46\frac{2}{3}$ *l* rura dopływowa dostarcza $5\frac{1}{2}$ *l* wody w każdej minucie, rura zaś odpływowa odprowadza $3\frac{1}{4}$ *l* wody w każdej minucie; w jakim czasie

napełni się to naczynie, jeśli obie rury będą równocześnie otwarte?

20. Trzy osoby podzieliły pewną kwotę pieniędzy tak, że pierwsza osoba wzięła $\frac{2}{3}$ całej kwoty i 6 *zł*, druga wzięła $\frac{1}{7}$ całej kwoty i 2 *zł*, a trzecia wzięła 16 *zł*; jaka to była kwota i ile wzięły pierwsza i druga osoba?

Iloczyn i iloraz liczb dziesiętnych.

Iloczyn liczb dziesiętnych.

Mamy obliczyć iloczyn dwóch liczb dziesiętnych, np.:

$$24{\cdot}36 \times 7{\cdot}8.$$

Zamieniając liczby dziesiętne na ułamki, otrzymujemy:

$$24{\cdot}36 \times 7{\cdot}8 = \tfrac{2436}{100} \times \tfrac{78}{10} = \frac{2436 \times 78}{1000}.$$

Mamy:

$$\begin{array}{r} 2436 \times 78 \\ \hline 19488 \\ 17052 \\ \hline 190008. \end{array}$$

Widzimy więc, że:

$$24{\cdot}36 \times 7{\cdot}8 = \tfrac{190008}{1000} = 190{\cdot}008.$$

A zatem, **aby znaleźć iloczyn dwóch liczb dziesiętnych, należy opuścić kropki i utworzyć iloczyn w ten sposób powstałych liczb całkowitych, a następnie w tym iloczynie odciąć tyle miejsc dziesiętnych, ile razem posiadają mnożna i mnożnik.**

Uwaga. Gdyby w iloczynie zabrakło miejsc dziesiętnych, wówczas brakujące miejsca zastępujemy zerami.

Np.:

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}27 \times 0{\cdot}031 \\ 27 \times 31 \\ \hline 27 \\ 81 \\ \hline 837. \end{array}$$

W otrzymanym iloczynie mamy odciąć $2+3$, t. j. 5 miejsc dziesiętnych. Brakujące miejsca zastępujemy zerami. Więc:

$$0{\cdot}27 \times 0{\cdot}031 = 0{\cdot}00837.$$

Zadania.

1. Oblicz następujące iloczyny:
a) $2{\cdot}5 \times 3{\cdot}1$, $4{\cdot}2 \times 7{\cdot}3$, $35 \times 2{\cdot}1$, $7{\cdot}5 \times 4$;

b) 7·03 × 2·01, 0·5 × 0·2, 7·35 × 0·031, 25·01 × 0·5;
c) 0·07 × 0·083, 0·00032 × 0·000075, 0·1005 × 0·0024, 0·03 × 0·0052.

2. Pomnóż następujące liczby: 2·1356, 7·53, 0·0075, 2·1 przez *a)* 10, *b)* 100, *c)* 1000 i przekonaj się, że iloczyn otrzymujemy, przesuwając kropkę o: *a)* jedno, *b)* dwa, *c)* trzy miejsca na prawo!
3. Pomnóż następujące liczby: 7354·6, 25·4, 1·2, 0·035 przez *a)* 0·1, *b)* 0·01, *c)* 0·001 i przekonaj się, że iloczyn otrzymujemy, przesuwając kropkę o: *a)* jedno, *b)* dwa, *c)* trzy miejsca na lewo!
4. Oblicz: *a)* 6·21 × 10, 13·5 × 10, 1·253 × 10, 6·21 × 100, 13·5 × 100, 1·253 × 100, 6·21 × 1000, 13·5 × 1000, 1·253 × 1000;
b) 2·35 × 0·1, 6·325 × $\frac{1}{10}$, 2·55 × 0·1, 2·35 × 0·001, 6·524 × $\frac{1}{100}$, 4·82 × $\frac{1}{1000}$, 14·21 × $\frac{1}{10000}$, 63·81 × 0·001.
5. Oblicz następujące iloczyny, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne: $\frac{7}{4}$ × 2·13, $\frac{15}{16}$ × 0·32, 0·01 × $\frac{6}{25}$.
6. Oblicz: 2·7 × 3·4 × 0·5, 0·2 × 0·3 × 0·5, 0·273 × 0·9 × 5, 60·8 × 4·6 × 0·9, 84 × 0·08 × 0·2.
7. Oblicz: *a)* $0{\cdot}1^2$, $0{\cdot}01^2$, $2{\cdot}4^2$, $1{\cdot}02^2$, $0{\cdot}054^2$;
b) $0{\cdot}1^3$, $0{\cdot}2^3$, $0{\cdot}4^3$, $2{\cdot}1^3$, $0{\cdot}01^3$, $0{\cdot}21^3$.
8. Zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne *a) km*, *b) kg*, *c)* m^2, oblicz następujące iloczyny:
a) 13 *km* 420 *m* × 2·4, 1 *km* 610 *m* × 5·4, 12 *m* 3 *dm* × 4;
b) 5 *kg* 410 *g* × 5, 27 *kg* 350 *g* × 0·2, 2 *kg* 5 *dkg* × 0·08;
c) 7 m^2 14 dm^2 × 0·6, 12 m^2 4 dm^2 5 cm^2 × 1·6.
9. Oblicz następujące wyrażenia:
a) (2·3 + 4·5) × (0·3 + 3·6), 3·2 × (2·5 × 0·4) — 0·7;
b) 1·3 × (25·4 — 8·4), (12·4 + 1·06) × (41·2 — 0·08);
c) 14·37 — (2·54 × 3) + (5·19 × 5), (5·18 × 2) + (6·91 × 0·3) — (5·14 × 0·2).
10. Jaś otrzymywał od ojca przez cały rok po 4·6 *zł* miesięcznie, a wydawał po 2·9 *zł*; ile zaoszczędził przez cały rok?
11. Ile kosztuje 8·4 tonny węgla po 92·5 *zł* za tonnę?
12. Jaka jest odległość między dwoma miastami, która na mapie w skali 1 : 200000 wynosi 13·5 *cm*?

13. Szerokość prostokąta wynosi 9·4 *m* i jest o 4·8 *m* krótsza od jego długości; oblicz obwód i pole tego prostokąta!
14. Atlas kosztuje 21·5 *zł*. Profesor, otrzymawszy zniżkę 80 *gr* na każdym atlasie, zebrał od 43 uczniów w klasie pieniądze; po ile musieli składać uczniowie i wiele pieniędzy zebrał profesor?
15. Ile obrotów wykona koło lokomotywy w ciągu jednej godziny, jeśli w ciągu sekundy wykona 1·4 obrotu?
16. Piotruś zaoszczędzał przez rok szkolny po 7·5 *zł* miesięcznie. W czasie wakacyj wydał w lipcu 21·4 *zł*, w sierpniu zaś 38·8 *zł*; ile mu zostało?
17. Ile waży beczka o pojemności 225 *l* pełna wina, jeśli 1 *l* wina waży 0·994 *kg*, beczka zaś próżna waży 33·48 *kg*?
18. Sprawdź, że:
a) (3·18 + 0·41) × 1·2 = (3·18 × 1·2) + (0·41 × 1·2);
b) 0·4 × (53·2 — 12·41) = (0·4 × 53·2) — (0·4 × 12·41).
19. Oblicz w prosty sposób:
a) (25·41 × 30) + (25·41 × 70);
b) (16·13 × 51) — (16·13 × 41);
c) (3·24 × 0·18) — (3·24 × 0·08).
20. O ile wzrośnie pole prostokąta o podstawie 3·14 *m*, jeśli wysokość zwiększymy o 0·65 *m*?
21. Województwo warszawskie miało w roku 1927 obsianych: 116.000 *ha* pszenicą, 584.000 *ha* żytem, 106.000 *ha* jęczmieniem, 263.000 *ha* owsem, 276.000 *ha* ziemniakami i 40.000 *ha* burakami. Oblicz w tonnach całkowity zbiór tych ziemiopłodów, wiedząc, że na 1 *ha* przypadał odpowiednio zbiór: 14·8 *q* pszenicy, 13·1 *q* żyta, 15·5 *q* jęczmienia, 14·9 *q* owsa, 139 *q* ziemniaków, 147 *q* buraków.
22. Ile zapłacono za zużycie 47 m^3 gazu, jeżeli 1 m^3 gazu kosztuje 0·35 *zł*, przyczem dopłaca się jeszcze $\frac{1}{10}$ ceny gazu, a nadto 2·20 *zł* za najem gazomierza?
23. Pokój o wymiarach 8·4 *m*, 6·5 *m* i 4·2 *m* (wysokość) wytapetowano tapetą w cenie 2·6 *zł* za 1 m^2. Ile to kosztowało, jeśli należy jeszcze odjąć 8·5 m^2 na okna i drzwi?
24. Kula żelazna, zanurzona w naczyniu pełne wody słonej, wyparła z niego 1·3 *kg* wody. Ile waży kula, jeśli przy jednakowej objętości żelazo waży 7·5 razy tyle,

ile woda słodka, a woda słodka 0·74 razy tyle, ile woda słona?

25. Ciężar popiołu, pochodzącego z drzewa dębowego, wynosi 0·029 ciężaru tego drzewa, a ciężar węglanu potasu, zawartego w tym popiele, wynosi 0·0625 ciężaru popiołu; ile węglanu potasu otrzymamy z 125 *kg* drzewa?
26. Dwa pociągi wyruszyły równocześnie z tej samej stacji i jechały jeden z prędkością 41·75 *km*, a drugi z prędkością 39·2 *km* na godzinę; jaka będzie odległość tych pociągów od siebie po upływie 3·5 godziny, jeśli jechały w kierunkach przeciwnych?
27. 1 *l* mleka czystego waży 1·03 *kg*. Kupiono 15 *l* mleka i przekonano się, że waży 15·42 *kg*; czy kupione mleko było czyste? Jeśli nie, to ile zawierało wody?

Iloraz liczb dziesiętnych.

Iloraz liczby dziesiętnej przez całkowitą.

Mamy obliczyć iloraz liczby dziesiętnej przez liczbę całkowitą, np.:

```
86·88 : 12
86·88 : 12 = 7·24
84
 28
 24
  48
  48
  00
```

Dzielenie wykonujemy w następujący sposób:

Dzielimy najpierw część całkowitą; otrzymujemy na iloraz **7**, a na resztę 2 całe.

Ponieważ 2 całe jest 20 dziesiątych, a w dzielnej mamy jeszcze 8 dziesiątych, więc razem mamy 28 dziesiątych, które należy podzielić przez 12. Jako wynik dzielenia otrzymamy **2** dziesiąte i resztę 4 dziesiąte.

Ponieważ 4 dziesiąte jest 40 setnych, a w dzielnej mamy jeszcze 8 setnych, więc razem mamy 48 setnych, które należy podzielić przez 12. Jako wynik dzielenia otrzymamy **4** setne bez reszty.

Widzimy zatem, że, chcąc obliczyć iloraz liczby dziesiętnej przez całkowitą, dzielimy najpierw część całkowitą dzielnej, po otrzymanym ilorazie częściowym dajemy kropkę, a do reszty dopisujemy pierwszą cyfrę dziesiętną dzielnej. Następnie postępujemy tak, jak przy dzieleniu liczb całkowitych.

Uwaga 1. Jeżeli w dzielnej zabraknie cyfr, to do reszty dopisujemy zero; wyobrażamy bowiem sobie, że po ostatniej cyfrze dziesiętnej stoją zera.

Np.:

```
44·1 : 36 = 1·225
36
 81
 72
  90
  72
  180
  180
  000
```

Uwaga 2. Jeżeli dzielnik jest liczbą większą od dzielnej, wówczas jako część całkowitą ilorazu piszemy 0, a następnie wykonujemy dzielenie jak poprzednio.

Np.:

```
3·2 : 25 = 0·128;        7 : 8 = 0·875
32                       70
25                       64
 70                       60
 50                       56
 200                       40
 200                       40
 000                       00
```

Zadania.

1. Oblicz następujące ilorazy:

a)	16·38 : 2,	37·26 : 18,	27·44 : 35,	16·8 : 12;
b)	2·58 : 3,	0·275 : 44,	9·1 : 65,	6·37 : 40;
c)	0·01 : 5,	0·03 : 8,	0·0015 : 6,	0·12 : 48;
d)	3·425 : 137,	9·27 : 1236,	0·3175 : 254,	35·76 : 2235.

2. Oblicz następujące ilorazy: 1 : 2, 1 : 4, 1 : 5, 1 : 8, 1 : 16.
3. Podziel następujące liczby: 6·23, 17·516, 0·02, 3 przez *a)* 10, *b)* 100, *c)* 1000 i przekonaj się, że otrzymasz iloraz, przesuwając kropkę odpowiednio o jedno, dwa, trzy miejsca na lewo!
4. Oblicz następujące wyrażenia:
   a) (3·7 + 2·9) : 4, (6·5 — 2·1) : 8, (7·3 + 2·3) : 6;
   b) (4·3 : 5) . 2, 5·7 : (4·3 — 2·3);
   c) (2·6 : 2) — (6·96 : 12) + (8·4 : 7);
   d) (4·7 : 2) + (2·91 : 3) — (0·5 : 5) + (2·7 : 30).
5. Przedstaw następujące ilorazy w postaci ułamka:
   3·71 : 725, 0·153 : 628, 37 : 27.
6. Jaka będzie na mapie w skali 1 : 80000 odległość między dwoma miastami, wynosząca 7·6 kilometra?
7. Oblicz następujące ilorazy, zamieniając liczby mianowane na liczby dziesiętne *a)* *km*, *b)* m^2, *c)* m^3:
   a) 25 *km* 400 *m* : 8, 12 *km* 300 *m* : 25;
   b) 15 m^2 57 dm^2 : 12, 116 m^2 20 dm^2 : 2;
   c) 248 m^3 700 dm^3 : 132, 2 m^3 500 dm^3 : 25.
8. Oblicz następujące ilorazy, wyrażając dzielną i dzielnik jako liczby dziesiętne *a)* *m*, *b)* *t*:
   a) 3 *m* : 5 *m*, 2 *m* 4 *dm* : 15 *m*, 4 *m* 5 *dm* 8 *cm* : 8 *m*, 12 *m* 3 *dm* 6 *cm* : 24 *m*;
   b) 13 *t* 5 *q* : 4 *t*, 80 *t* 1 *q* : 9 *t*, 5 *q* 430 *kg* : 18 *t*.
9. Średnia kilku liczb, np. pięciu liczb, jest to ich suma podzielona przez 5. Oblicz średnią następujących liczb:
   a) 1·2, 3·4; *b)* 2·71, 3·14, 2·91; *c)* 1·18, 1·16, 1·19, 1·187;
   d) 3·128, 3·1279, 3·126, 3·1278, 3·127.

Iloraz liczby dziesiętnej przez dziesiętną.

Iloraz dwóch liczb dziesiętnych możemy zawsze przedstawić w postaci ilorazu liczby dziesiętnej przez liczbę całkowitą.

Np.: 1·05 : 2·8.

Wiemy, że iloraz się nie zmieni, jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy przez tę samą liczbę.

Pomnóżmy dzielną i dzielnik przez 10. Wystarczy w tym celu przesunąć kropkę o jedno miejsce na prawo.

Mamy więc:

1·05 : 2·8 = 10·5 : 28.

W nowym ilorazie dzielnik jest już liczbą całkowitą. Podobnie, mając obliczyć iloraz:

3·25 : 0·125,

mnożymy dzielną i dzielnik przez 1000, t. zn. przesuwamy kropkę o trzy miejsca na prawo. Otrzymamy:

3·25 : 0·125 = 3250 : 125.

Zatem: aby zamienić dany iloraz na iloraz, w którym dzielnik jest liczbą całkowitą, przesuwamy w dzielnej i w dzielniku kropkę o tyle miejsc na prawo, ile dzielnik posiada miejsc dziesiętnych.

Zadania.

1. Oblicz następujące ilorazy:
   a) 2·7 : 1·2, 36·54 : 4·5, 7·2 : 2·5, 2·8 : 11·2;
   b) 5·6 : 0·35, 0·231 : 0·22, 0·003 : 9·6, 0·102 : 0·34;
   c) 2295·06 : 5·8, 176·244 : 0·38, 7·0567 : 1·19, 3·84 : 2·56.
2. Podziel następujące liczby: 3·71, 23·573, 0·041, 0·2 przez *a)* 0·1, *b)* 0·01, *c)* 0·001 i przekonaj się, że otrzymasz iloraz, przesuwając kropkę odpowiednio o jedno, dwa, trzy miejsca na prawo!
3. Oblicz:
   a) 3·45 : 100, 17·51 : 1000, 1272·7 : 10, 0·1 : 10, 0·01 : 100, 0·001 : 1000;
   b) 2·34 : 0·1, 0·45 : 0·01, 18·12 : 0·001, 0·02 : 0·0001, 47 : 0·01, 1 : 0·001.
4. Przedstaw następujące ilorazy w postaci ułamka:
   0·53 : 0·2, 5·7 : 0·5, 15·7 : 3·51, 0·083 : 0·0005.
5. Oblicz:
   a) 2 *m* 7 *cm* : 0·3, 3 *km* 240 *m* : 1·8, 1 *m* 2 *dm* 6 *cm* : 0·24;
   b) 5 *q* 67 *kg* : 2·1, 4 *t* 5 *q* 76 *kg* : 0·11, 7 *kg* : 0·056.
   Zamień liczby mianowane na dziesiętne.
6. Przez jaką liczbę należy pomnożyć: *a)* 3·7, *b)* 75·6, *c)* 0·803, *d)* 0·00025, aby otrzymać: *a)* 0·0037, *b)* 0·756, *c)* 80·3, *d)* 2·5?
7. Oblicz: 0·00003 : 0·002, 0·00007 : 0·000005, 3 : 0·000016.

Wartość przybliżona ilorazu.

Nie zawsze zależy nam na dokładnem obliczeniu ilorazu. Np. mamy rozdzielić 3·45 *zł* (t. j. 3 *zł* 45 *gr*) równo między 8 chłopców; ile otrzyma każdy?

Należy w tym celu obliczyć iloraz 3·45 *zł* : 8.

Wykonujemy dzielenie:

```
3·45 : 8 = 0·43125
 34
 32
 ──
  25
  24
  ──
   10
    8
   ──
    20
    16
    ──
     40
     40
     ──
     00
```

Należałoby więc dać każdemu chłopcu 0·43125 *zł*. Oczywiście jest to niemożliwe, bo nie istnieją monety mniejsze od 0·01 *zł*, t. j. od 1 grosza. Kwotę więc rozdzielimy, dając każdemu po 0·43 *zł*. Dajemy wprawdzie za mało, lecz zabrakłoby nam pieniędzy, gdybyśmy chcieli dać każdemu po 0·44 *zł*.

Widzimy stąd, że w tym wypadku znajomość w ilorazie cyfr: tysięcznych, dziesięciotysięcznych i dalszych jest dla nas bez znaczenia. Wystarczyło więc wykonać dzielenie aż do otrzymania cyfry setnych w ilorazie. Wykonując tak dzielenie, otrzymamy:

```
3·45 : 8 = 0·43
 34
 32
 ──
  25
  24
  ──
   1
```

A zatem otrzymaliśmy na iloraz 0·43 i na resztę 1 setną.

Liczbę 0·43 nazywamy *wartością przybliżoną naszego ilorazu z dokładnością na dwa miejsca dziesiętne przez niedomiar.*

Mówimy również, że 0·43 przedstawia nam iloraz z dokładnością na dwa miejsca dziesiętne.

Liczbę 0·44 nazywamy *wartością przybliżoną naszego ilorazu z dokładnością na dwa miejsca dziesiętne przez nadmiar.*

Obie wartości przybliżone różnią się od ilorazu szukanego o mniej niż 0·01.

Aby otrzymać przybliżoną wartość ilorazu z dokładnością na kilka miejsc dziesiętnych, np. na trzy, wykonujemy dzielenie, aż do otrzymania cyfry tysięcznych. Otrzymany częściowy iloraz jest wartością przybliżoną z dokładnością na trzy miejsca dziesiętne przez niedomiar.

Np. mamy obliczyć iloraz 2·7 : 16 z dokładnością na trzy miejsca dziesiętne. Wykonujemy dzielenie aż do otrzymania cyfry tysięcznych.

```
2·7 : 16 = 0·168
27
16
───
110
 96
───
 140
 128
 ───
  12
```

Zatem 0·168 jest szukaną wartością przybliżoną przez niedomiar.

Zwiększając o jedność ostatnią cyfrę wartości przybliżonej przez niedomiar, otrzymujemy wartość przybliżoną przez nadmiar. A więc 0·169 jest wartością przybliżoną przez nadmiar z dokładnością na trzy miejsca dziesiętne.

Wartość dokładna ilorazu jest zawarta pomiędzy liczbami 0·168 i 0·169.

Zadania.

1. Oblicz następujące ilorazy z dokładnością na *a)* jedno, *b)* dwa, *c)* trzy miejsca dziesiętne:
   a) 32 : 7, 3·5 : 1·4, 2·56 : 1·23, 0·071 : 0·003;
   b) 1·3 : 0·6, 1 : 3, 12·129 : 8·34, 325·12 : 49·85;
   c) 12 : 17, 0·3 : 0·26, 0·1235 : 0·386, 5·38 : 2·84.
2. Oblicz z dokładnością na pięć miejsc dziesiętnych: 1 : 3, 1 : 7, 1 : 6, 1 : 9.

3. Oblicz następujące ilorazy z dokładnością na trzy miejsca dziesiętne i porównaj: 22 : 7, 355 : 113.
4. Oblicz następujące ilorazy z taką dokładnością, abyś wynik otrzymał z błędem mniejszym od: *a)* 1 *gr*, *b)* 1 *cm*, *c)* 1 cm^3:

   a) 12 *zł* : 7, 51·34 *zł* : 1·34; *b)* 35 *m* : 1·2, 1·26 *km* : 17; *c)* 1·5 dm^3 : 11, 2·36 m^3 : 7.
5. Morga polska równa się 55·987 *a*, morga zaś pruska 25·532 *a*; wyraź morgę polską w morgach pruskich i naodwrót (z dokł. na 3 miejsca dziesiętne).
6. Polskie miary objętości są: korzec = 4 ćwierci = 32 garnce = 128 kwart czyli litrów; wyraź 1 *l* w garncach, w ćwierciach, w korcach (z dokł. na 2 m. dzies.).
7. Poszczególne kraje mają następujące monety: Czechosłowacja — Korona = 0·27 *zł*, Danja — Korona = 2·39 *zł*, Francja — Frank = 0·33 *zł*, Gdańsk — Gulden = 1·72 *zł*, Holandja — Gulden = 3·58 *zł*, Litwa — Lit = 0·89 *zł*, Niemcy — Marka = 2·12 *zł*, Rumunja — Lei = 0·053 *zł*, Szwajcarja — Frank = 1·72 *zł*, Wielka Brytanja — Funt szterling = 43·50 *zł*, Włochy — Lira = 0·47 *zł*, Z. S. R. R. — Czerwoniec = 45 *zł*, Stany Zjednoczone — Dolar = 8·88 *zł*.

   a) Oblicz, ile otrzymasz za 1000 *zł* w walucie powyższych krajów (z dokł. na 2 m. dzies.).

   b) Wyraź wartość wszystkich walut w dolarach (z dokł. na 2 m. dzies.).
8. Sążeń polski ma 3 łokcie = 6 stóp = 72 cali = 1·728 *m*; wyraź *cm* w calach, *dm* w stopach, *m* w łokciach, *m* w sążniach (z dokł. na 3 m. dzies.).
9. Polskie miary ciężaru są: centnar = 100 funtów = 1600 uncyj = 3200 łutów; wiedząc, że centnar = 40·55 *kg*, wyraź funt, uncję i łut w *g*, a następnie 1 *g* w łutach, uncjach, funtach (z dokł. na 3 m. dzies.).

Zamiana ułamka na liczbę dziesiętną.

Aby ułamek zamienić na liczbę dziesiętną, przedstawiamy go w postaci ilorazu dokładnego i obliczamy następnie ten iloraz.

Np.: $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{\cdot}375$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 00 \end{array}$$

Podobnie: $\frac{5}{4} = 5 : 4 = 1{\cdot}25$.

Nie każdy jednak ułamek można zamienić na liczbę dziesiętną. Weźmy pod uwagę np. ułamek $\frac{1}{3}$. Obliczmy iloraz 1 : 3.

$1 : 3 = 0{\cdot}33\ldots$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array}$$

Widzimy, że dzielenie nigdy się nie skończy.

Ułamek $\frac{1}{3}$ nie da się więc zamienić na liczbę dziesiętną.

Aby przekonać się, czy dany ułamek da się zamienić na liczbę dziesiętną, sprowadzamy go najpierw do postaci nieprzywiedlnej. Jeżeli teraz mianownik jest iloczynem samych dwójek i piątek, to ułamek da się zamienić na liczbę dziesiętną. Jeżeli oprócz dwójek i piątek występują inne czynniki, to ułamek nie da się przedstawić w postaci liczby dziesiętnej.

Np. ułamek: $\frac{7}{20} = \frac{7}{2.2.5}$ da się zamienić na liczbę dziesiętną.

Ułamek $\frac{7}{60} = \frac{7}{2.2.3.5}$ nie da się zamienić na liczbę dziesiętną, gdyż w mianowniku występuje czynnik 3.

Zadania.

1. Przedstaw następujące ułamki w postaci ilorazu dokładnego i zamień je na liczby dziesiętne:

   a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$; *b)* $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{40}$.
2. Przedstaw następujące liczby mieszane w postaci liczb dziesiętnych: $2\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, $7\frac{8}{25}$, $4\frac{1}{5}$, $5\frac{3}{16}$.

3. Zamień na liczby dziesiętne te z pośród następujących ułamków, które można:

a) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{21}{48}$, $\frac{4}{24}$; *b)* $\frac{231}{840}$, $\frac{153}{225}$, $\frac{81}{165}$, $\frac{315}{2475}$.

4. Oblicz następujące ilorazy, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne:

a) $\frac{3}{5} : 0{\cdot}15$, $2{\cdot}7 : \frac{3}{4}$, $\frac{7}{8} : 0{\cdot}42$;
b) $3\frac{1}{4} : 0{\cdot}065$, $0{\cdot}009 : 7\frac{3}{15}$, $1{\cdot}52 : 2\frac{3}{8}$.

5. Przedstaw następujące ułamki w postaci ilorazów dokładnych i oblicz je z dokładnością na *a)* jedno, *b)* dwa, *c)* trzy miejsca dziesiętne:

a) $\frac{15}{13}$, $\frac{210}{51}$, $\frac{36}{17}$, $\frac{355}{112}$; *b)* $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{53}{21}$, $\frac{7}{18}$; *c)* $\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{7}$, $\frac{22}{17}$, $\frac{5}{11}$.

6. Zamień odwrotności liczb całkowitych od 1 do 15 na ułamki dziesiętne z dokładnością na trzy miejsca dziesiętne.

Iloraz w postaci ułamka.

Umówiono się znak dzielenia zastępować kreską ułamkową nawet w przypadku, gdy dzielna i dzielnik nie są liczbami całkowitemi.

Zatem wyrażenie:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} \quad \text{oznacza} \quad \frac{2}{3} : \frac{4}{5}.$$

Podobnie:

$$\frac{0{\cdot}2}{\frac{3}{5}} = 0{\cdot}2 : \frac{3}{5}.$$

Uwaga. Kreska, która zastępuje znak dzielenia, jest dłuższa od kresek ułamkowych, jeśli dzielna wzgl. dzielnik są ułamkami.

Zadania.

1. Oblicz:

a) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$, $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{7}}$, $\dfrac{1\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}$, $\dfrac{2\frac{3}{7}}{1\frac{2}{5}}$; *b)* $\dfrac{0{\cdot}3}{0{\cdot}5}$, $\dfrac{2{\cdot}7}{1{\cdot}8}$, $\dfrac{0{\cdot}06}{0{\cdot}15}$, $\dfrac{0{\cdot}001}{0{\cdot}025}$;

c) $\dfrac{0{\cdot}3}{\frac{2}{5}}$, $\dfrac{10{\cdot}5}{1\frac{3}{5}}$, $\dfrac{2\frac{3}{5}}{0{\cdot}13}$, $\dfrac{\frac{3}{7}}{0{\cdot}5}$.

2. Oblicz:

a) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$, $\dfrac{1\frac{2}{3}\times 3\frac{2}{5}}{\frac{2}{7}+\frac{3}{5}}$, $\dfrac{0{\cdot}5-\frac{1}{3}}{1{\cdot}3+\frac{7}{10}}$;

b) $\dfrac{0{\cdot}2+\frac{1}{3}}{0{\cdot}5\times\frac{3}{5}}$, $\dfrac{(1\frac{1}{3}+2\frac{1}{5})\,.\,1{\cdot}3}{(2\times\frac{3}{4})+0{\cdot}7}$.

Wykonaj najpierw naznaczone działania nad kreską, następnie pod kreską.

3. Oblicz następujące wyrażenia:

$\dfrac{ab}{2}$, $\dfrac{a+b}{a-b}$, $\dfrac{ab}{a+b}$, $\dfrac{a-b}{ab}$, przyjmując: $a=\frac{3}{5}$, $b=0{\cdot}2$.

Ćwiczenia.

1. Jeżeli do pewnej liczby dodamy jej iloczyn przez 3·5, otrzymamy na wynik 1·125. Jaka to jest liczba?
2. Jeżeli od pewnej liczby odejmiemy $\frac{3}{5}$ tej liczby, otrzymamy na wynik 7·416. Jaka to jest liczba?
3. Jeśli pewną liczbę pomnożysz przez 2·3, a następnie przez $\frac{4}{5}$, to otrzymasz 4·968. Jaka to jest liczba?
4. Jeżeli $\frac{2}{5}$ *kg* towaru kosztuje 1·4 *zł*, to ile kosztuje 3·5 *kg* tego towaru?
5. Za 3·4 *l* wina zapłacono 15·3 *zł*; ile kosztuje 1 *l* wina? Ile kosztuje 5·5 *l* wina?
6. Kupiec zapłacił za 14·5 *kg* towaru 33·35 *zł*; po ile sprzedawał 1 *kg* tego towaru, jeśli ogółem zarobił 4·35 *zł*?
7. Beczka zawiera 125 *l* wina; ile flaszek o pojemności 0·7 *l* napełnimy winem?
8. 1 *l* oliwy waży 0·91 *kg*; jaką objętość ma 3·5 *kg* oliwy?
9. 1 *kg* nafty ma objętość 1·25 *l*; ile waży 9·6 *l* nafty?
10. Wyraź we włókach obszar o powierzchni 54·25 *ha*, wiedząc, że jedna włóka ma 16·8 *ha*.
11. Kula karabinowa przebiega 100 *m* w 0·2 sekundy. W jakim czasie przebiegnie $2\frac{3}{4}$ *km*?
12. Zmieszano 12·5 *l* wina po 4·25 *zł* za litr z 9·75 *l* wina po 5·6 *zł* za litr; ile kosztuje 1 *l* tej mieszaniny?
13. Pole prostokąta ma 3·15 dm^2, a jeden bok 2·7 *dm*; ile wynosi drugi bok?
14. W r. 1927 w Polsce 1.211 rybaków złowiło 1.787 tonn ryb; jaki roczny połów wypada przeciętnie na 1 rybaka?
15. W Polsce w r. 1927 obsiano żytem 4,889.000 *ha*, z czego zebrano 56,730.000 *q* żyta. Jaki był zbiór z 1 *ha*?
16. W Polsce skonsumowano w r. 1925 około 6.000 *t* kawy; ile wypada przeciętnie na 1 osobę, jeśli liczba mieszkańców wynosiła około 28,500.000?

17. Kupiec sprzedał 5 *l* wina jednego gatunku za 24·80 *zł*, drugiego zaś gatunku 8 *l* za 38 *zł*; które wino jest droższe i jaka byłaby różnica cen przy sprzedaży 12·5 *l*?
18. Przekonano się, że bambus w ciągu 1 sek. wzrasta o 0·0000072 *m*; oblicz w dniach wiek bambusa o wysokości 3·25 *m*.
19. Za 2·5 *kg* mięsa zapłacono 5·5 *zł*; po odrzuceniu kości przekonano się, że mięso waży $\frac{4}{5}$ *kg* pierwotnego ciężaru. Ile kosztuje 1 *kg* mięsa bez kości?
20. Uczeń chciał kupić zeszyty dla całej klasy po 0·30 *zł* sztuka, przekonał się jednak, że brakuje mu 0·60 *zł*; kupił wobec tego zeszyty po 0·25 *zł* i zostało mu 0·75 *zł* Ilu było uczniów w klasie? Ile pieniędzy miał uczeń?
21. Koło automobilu ma obwód 3·25 *m*; ile razy obróci się ono na drodze 100 *km*?
22. W Anglji urządzano w r. 1829 próbę biegu 3 lokomotyw. Pierwsza przyjechała do mety po 520 sekundach, jadąc z prędkością 22·5 *km* na godzinę, druga jechała z prędkością 12·58 *km* na godzinę, a trzecia z prędkością 8·66 *km* na godzinę. W jakim czasie przebyła druga lokomotywa, a w jakim trzecia, przepisaną drogę?
23. Goniec przebiegł 100 *m* w czasie 10·8 sek.; porównaj drogi w 1 sekundzie, przebyte przez gońca i przez pociąg, biegnący z szybkością 40 *km* na godzinę.
24. Zegarek spaźnia się o 0·6 minuty na godzinę; w południe o godz. 12 wskazywał dokładny czas. Jaka będzie prawdziwa godzina na drugi dzień, gdy zegarek wskazywać będzie godzinę 12?
25. Chcąc zbadać podziałkę na taśmie mierniczej, zmierzono pewną długość tą taśmą i znaleziono 13·5 *m*. Mierząc dokładną taśmą, otrzymano 13·77 *m*. O ile metr jest za długi na badanej taśmie?
26. Jeden kupujący kupił $\frac{5}{7}$ sztuki płótna, drugi połowę reszty i zapłacił o 68·4 *zł* mniej, niż pierwszy. Ile *m* każdy kupił i ile zapłacił, jeżeli 1 *m* płótna kosztował 5·70 *zł*?
27. Odległość dwóch miast na globusie wynosi 0·035 *m*; jaka jest odległość tych miast, jeżeli obwód równika ziemi ma 40070 *km*, obwód zaś równika na globusie 1·35 *m*?
28. Naczynie puste waży 2·125 *kg*; jeśli $\frac{3}{5}$ pojemności napełnimy wodą, wówczas waży 9·625 *kg*. Jaka jest pojemność naczynia?

29. Naczynie puste waży 1·25 *kg*; napełnione wodą 4·35 *kg*, a napełnione mlekiem 4·443 *kg*. Ile waży 1 *l* mleka?
30. Flaszka napełniona wodą waży 1·2 *kg*, napełniona zaś benzyną 0·99 *kg*; jaki jest ciężar i jaka pojemność flaszki, jeżeli 1 *l* benzyny waży 0·7 *kg*?
31. Zakupiono 62·54 tonn węgla. Jeden piec spalał przeciętnie 0·3 tonny dziennie, drugi 0·15 tonny, a trzeci mały piecyk 0·07 tonny dziennie. Palono przez 9 tygodni, przyczem jednak w ostatnim tygodniu nie palono w największym piecu. Na jak długo wystarczy pozostały zapas węgla w piwnicy, jeżeli nadal ma się palić we wszystkich piecach?
32. Aleję długości 256·5 *m* obsadzono po obu stronach drzewami w odległości 6·75 *m*. Oblicz liczbę potrzebnych drzew i ich cenę, wiedząc, że 1 drzewo kosztuje 3·5 *zł* i że posadzono drzewa u obu wejść do alei (na 4 rogach).

Obliczanie pól wielokątów.

Pole prostokąta.

Na stronie 98 przekonaliśmy się, że pole prostokąta np. w cm^2, równa się iloczynowi liczb, podających w cm długości przylegających boków, przyczem obojętną jest rzeczą, czy te długości wyrażają się w liczbach całkowitych, czy też ułamkowych.

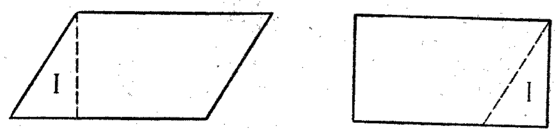
Zadania.

1. Z 16 równych kwadratów ułóż kilka figur równoważnych!
2. Zamień kwadrat na równoważny mu prostokąt o podstawie dwa razy większej!
3. Zamień prostokąt na równoważny mu prostokąt o podstawie dwa razy większej!
4. Ile wynosi pole kwadratu, którego bok równa się: *a)* $\frac{3}{4}$ *dm*, *b)* $8\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 3·4 *km*, *d)* 3 *m* 2 *dm*?
5. Metr kwadratowy placu kosztuje 100 *zł*. Ile trzeba zapłacić za plac kształtu prostokąta, na którym mógłby stanąć dom mieszkalny o długości 16·5 *m*, a szerokości $7\frac{3}{4}$ *m*, mający nadto dookoła podwórze o szerokości 2·6 *m*? Zrób rysunek w skali 1 : 200!
6. Ogród kształtu prostokąta ma 660 m^2. Jego długość równa się $17\frac{1}{2}$ *m*. Ile wynosi szerokość? (Rysunek w skali 1 : 300).
7. Podłogę sali o długości 9 *m*, szerokości zaś 6·25 *m* wyłożono deseczkami kwadratowemi o boku 2·5 *dm*; ile deseczek zużyto na pokrycie całej podłogi?
8. Narysuj z czterech odcinków o długościach 5 *cm*, 5 *cm*, 4 *cm*, 4 *cm* równoległobok o możliwie wielkiem polu. Co to za równoległobok?

9. Podwórze szkolne ma kształt prostokąta o bokach 25·5 *m* i 15 *m*. Na niem zbudowano dookoła chodnik szerokości 1·5 *m*. Oblicz pole chodnika i pole podwórza bez chodnika. Rysunek w skali 1 : 500.
10. Na kartonie w kształcie prostokąta nalepiono prostokąt o bokach 3 *dm* i 2 *dm* tak, że szerokość paska wolnego wynosiła 1·5 *cm*. Oblicz pole kartonu. Rysunek w skali 1 : 5.
11. Podwórze prostokątne ma obwód 154·5 *m*, szerokość zaś 28·75 *m*; jakie jest jego pole?
12. Ścianę o wymiarach 6·5 *m* i 3·8 *m* pokryto tapetami o szerokości 25 *cm*; ile *m* tapet zużyto?
13. Kwadrat o boku 0·25 *m* podzielono na dwa prostokąty, z których jeden ma pole 225 cm^2. Podaj wymiary obu prostokątów. Rysunek w skali 1 : 5!

Pole równoległoboku.

Z rys. 94 przekonujemy się, że pole równoległoboku równe jest polu prostokąta, mającego tę samą podstawę i tę samą wysokość, co dany równoległobok. Aby więc obliczyć pole równoległoboku, np. w cm^2, należy utworzyć iloczyn liczb, wyrażających w *cm* długości podstawy i wysokości.

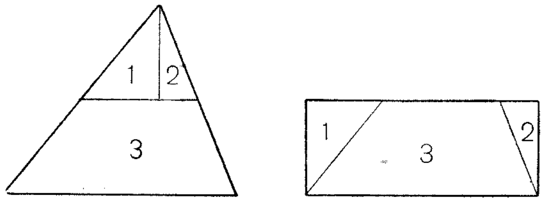


Rys. 94.

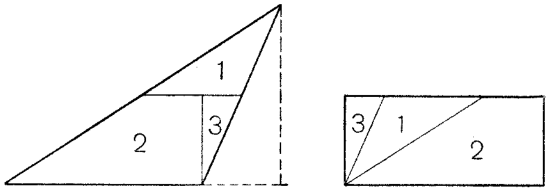
Zadania.

1. Z sześciu równych równoległoboków ułóż kilka figur równoważnych.
2. Zamień dowolnie obrany równoległobok na równoważny mu prostokąt.
3. Oblicz pole równoległoboku, którego podstawa równa się: *a)* $\frac{4}{5}$ *dm*, *b)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 8·56 *m*, *d)* 4·256 *km*; wysokość zaś: *a)* $\frac{3}{4}$ *dm*, *b)* $2\frac{1}{4}$ *cm*, *c)* 5·8 *m*, *d)* 6·384 *km*.
4. Oblicz podstawę równoległoboku, którego pole wynosi: *a)* 28·62 km^2, *b)* 60 cm^2, *c)* $8\frac{4}{3}$ cm^2, *d)* 45·54 m^2, wysokość zaś: *a)* 7·2 *km*, *b)* 1·2 *cm*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *d)* 7·2 *m*.

Pole trójkąta.



Rys. 95.



Rys. 96.

Z rys. 95 i rys. 96 przekonujemy się, że pole trójkąta równe jest polu prostokąta o tej samej podstawie, a wysokości 2 razy mniejszej. Aby więc obliczyć pole trójkąta, np. w cm^2, należy utworzyć połowę iloczynu liczb, wyrażających w *cm* długości podstawy i wysokości.

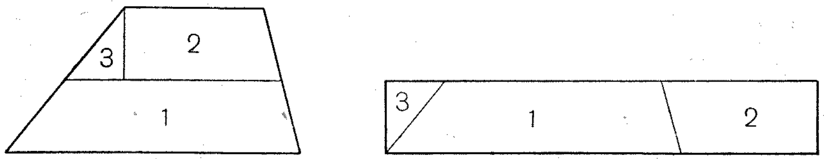
Zadania.

1. Zamień trójkąt o bokach 7 *cm*, 8 *cm*, 10 *cm* na równoważny mu prostokąt!
2. Zamień dany trójkąt na równoważny mu trójkąt równoramienny o tej samej podstawie!
3. Ile wynosi pole trójkąta, którego podstawa równa się: *a)* 5 *cm*, *b)* 9 *cm*, *c)* $2\frac{2}{3}$ *cm*, *d)* 3·45 *m*, wysokość zaś: *a)* 6 *cm*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* $1\frac{1}{4}$ *cm*, *d)* 2·8 *cm*?
4. Ile wynosi pole trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne równają się: *a)* 5 *cm* i 8 *cm*, *b)* 4·3 *cm* i 2·7 *cm*, *c)* 2·3 *cm* i $5\frac{1}{2}$ *cm*, *d)* 5·78 *m* i 2·49 *m*?
5. Narysuj kilka trójkątów i oblicz ich pola; wymiary odczytaj z rysunku.
6. Oblicz pole trójkąta o bokach 135 *m*, 187 *m*, 156 *m*; wysokość odczytaj z planu w skali 1 : 2.000.
7. Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku: *a)* 1 *dm*, *b)* 7 *cm*, *c)* 1 *m*; wysokość w *a)* i *b)* odczytaj z rysunku, w *c)* z planu w skali 1 : 20.
8. Oblicz pole trójkąta równoramiennego o podstawie 3 *m*; kąt przy podstawie wynosi 70°. Wysokość odczytaj z planu w skali 1 : 100.

9. Pole trójkąta jest zawsze mniejsze, niż połowa iloczynu dwóch przyległych boków z wyjątkiem wypadku, gdy trójkąt jest prostokątny, a te boki są przyprostokątnemi. Dlaczego?
10. Zamień kwadrat na trójkąt o tem samem polu, a o podstawie 3 razy mniejszej!
11. Pole kształtu trójkąta o podstawie równej 150 *m* kosztuje 36000 *zł*. Ile wynosi wysokość tego trójkąta, jeśli metr kwadratowy kosztuje 4 *zł*? Rysunek w skali 1 : 5000.

Pole trapezu.

Na rys. 97 mamy trapez rozcięty na 3 części, z których obok zbudowany jest prostokąt. (Prosta pozioma jest poprowadzona w połowie wysokości równolegle do podstaw trapezu).

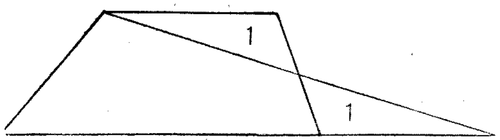


Rys. 97.

W prostokącie otrzymanym podstawa jest sumą podstaw trapezu, wysokość zaś dwa razy mniejsza, niż w trapezie.

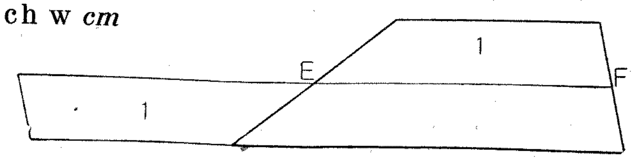
Zatem trapez ma pole równe polu prostokąta, którego podstawa jest równa sumie obu podstaw trapezu, a wysokość jest dwa razy mniejsza, niż w trapezie.

Na rys. 98 i 99 mamy trapez zamieniony na trójkąt wzgl. równoległobok o tem samem polu.



Rys. 98.

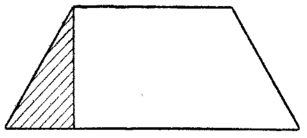
Aby więc obliczyć pole trapezu, np. w cm^2, należy utworzyć połowę iloczynu liczb, wyrażających w *cm* długość sumy obu podstaw i długość wysokości.



Rys. 99.

Zadania.

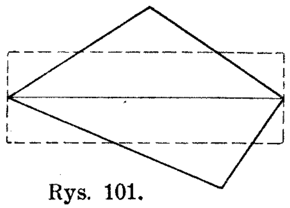
1. Zamień dowolnie obrany trapez na równoważny mu: *a)* prostokąt, *b)* trójkąt, *c)* równoległobok.
2. Oblicz pole trapezu, którego boki równoległe mają: *a)* 10 *cm* i 6 *cm*, *b)* $8\frac{1}{3}$ *cm* i $5\frac{8}{4}$ *cm*, *c)* 11·25 *dm* i 8·34 *dm*, wysokość zaś wynosi: *a)* 4 *cm*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 7·2 *dm*.
3. Pole trapezu wynosi: 180 cm^2, przyczem boki równoległe mają 20 *cm* i 16 *cm*. Ile wynosi wysokość?
4. Pole kształtu trapezu ma 1 *ha* 71 *a* 70 m^2; wysokość tego trapezu wynosi 85 *m*, a jeden z boków równoległych 112 *m*. Ile wynosi drugi bok równoległy?
5. W trapezie równoramiennym boki równoległe mają 10 *cm* i 5 *cm*, wysokość zaś 4 *cm*. Ile wynosi pole trójkąta zacieniowanego (rys. 100)?



Rys. 100.

6. Jak zmieni się pole trapezu, jeżeli boki równoległe skrócimy o połowę, a wysokość powiększymy cztery razy?
7. Trapez, w którym jeden z boków równoległych jest dwa razy dłuższy od drugiego, ma wysokość 48 *m*, pole zaś 18·72 *a*. Obliczyć długość każdego z boków równoległych. Zrób rysunek w odpowiedniej skali.
8. Pole w kształcie trapezu oceniono na 4.988 *zł*, licząc po 40 *zł* za ar. Ile wynosi wysokość tego trapezu, jeśli boki równoległe mają 135 *m* i 155 *m*?

Pole czworokąta.

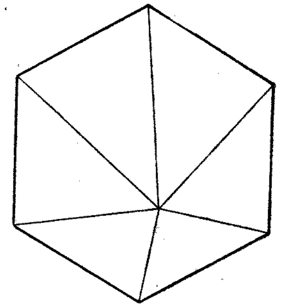


Rys. 101.

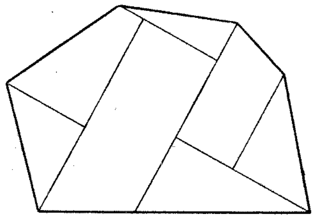
Aby zamienić czworokąt na prostokąt o tem samem polu, wystarczy czworokąt podzielić na dwa trójkąty, mające wspólną podstawę i zastąpić każdy z nich przez równoważny prostokąt (rys. 101).

Pole wielokąta.

Chcąc obliczyć pole wielokąta, dzielimy go zazwyczaj na trójkąty i obliczamy sumę pól otrzymanych trójkątów (rys. 102).



Rys. 102.

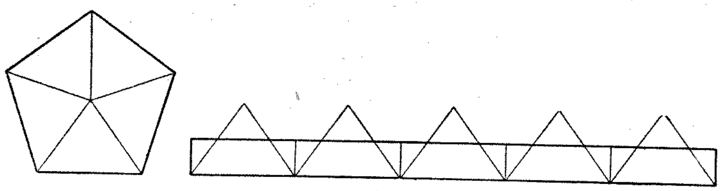


Rys. 103.

W niektórych wypadkach dzielimy wielokąt na trójkąty prostokątne i trapezy (rys. 103).

Pole wielokątów foremnych.

Jeżeli ze środka wielokąta foremnego poprowadzimy odcinki do wszystkich wierzchołków, wówczas wielokąt rozpada się na tyle równych trójkątów, ile jest boków. Pole więc wielokąta otrzymamy, mnożąc pole jednego trójkąta przez liczbę boków wielokąta. Na rys. 104 mamy pięciokąt foremny, a obok 5 równych trójkątów, na które podzieliliśmy pięciokąt.



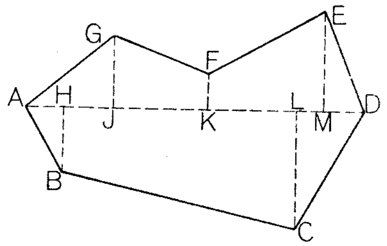
Rys. 104.

Zamieńmy każdy trójkąt na prostokąt o tej samej podstawie. Przekonamy się w ten sposób, że pole wielokąta foremnego równa się polu prostokąta, którego podstawa równa jest obwodowi wielokąta, wysokość zaś połowie odległości środka wielokąta od któregokolwiek boku!

Zadania.

1. Zamień deltoid na równoważny mu prostokąt.
2. Zamień sześciokąt foremny na prostokąt o podstawie równej bokowi tego sześciokąta!

3. Oblicz pole sześciokąta umiarowego, w którym bok równa się 10 *m*; odległość boku od środka odczytaj z planu tego sześciokąta w skali 1 : 250.
4. Oblicz pole wielokąta (rys. 105), wiedząc, że $AH = 5$ *m*, $HI = 6·5$ *m*, $IK = 12·2$ *m*, $KL = 11·8$ *m*, $LM = 3·9$ *m*, $MD = 5·5$ *m*, $HB = 8·8$ *m*, $IG = 9·4$ *m*, $KF = 4·7$ *m*, $LC = 15·2$ *m*, $ME = 13·1$ *m*.



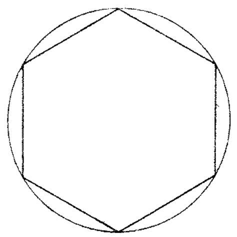
Rys. 105.

5. Oblicz pole czworokąta, w którym jedna przekątna wynosi 168·7 *m*, wysokości zaś trójkątów, na które został podzielony czworokąt, wynoszą 75·5 *m* i 98·4 *m*.
6. Narysuj dowolny wielokąt i przy pomocy podziałki pomierz te wielkości, które będą potrzebne do obliczenia pola tego wielokąta; oblicz to pole.
7. W odpowiedniej skali narysuj plan wielokąta, obranego w terenie, a następnie oblicz jego pole, jak w zadaniu 6.

Obwód i pole koła.

Obwód koła.

Aby zmierzyć obwód koła, należy ułożyć nitkę tak, aby przylegała wszędzie do okręgu koła, a następnie zmierzyć długość nitki, potrzebnej do owinięcia całego okręgu.



Rys. 106.

Wpiszmy w dane koło sześciokąt umiarowy (rys. 106). Oczywiście, obwód koła jest większy od obwodu wpisanego sześciokąta (gdyż każdy bok jest mniejszy od łuku na nim opartego).

Ponieważ bok sześciokąta umiarowego, wpisanego w koło, jest równy promieniowi tego koła, zatem obwód koła jest większy od 6 promieni, t. j. od 3 średnic.

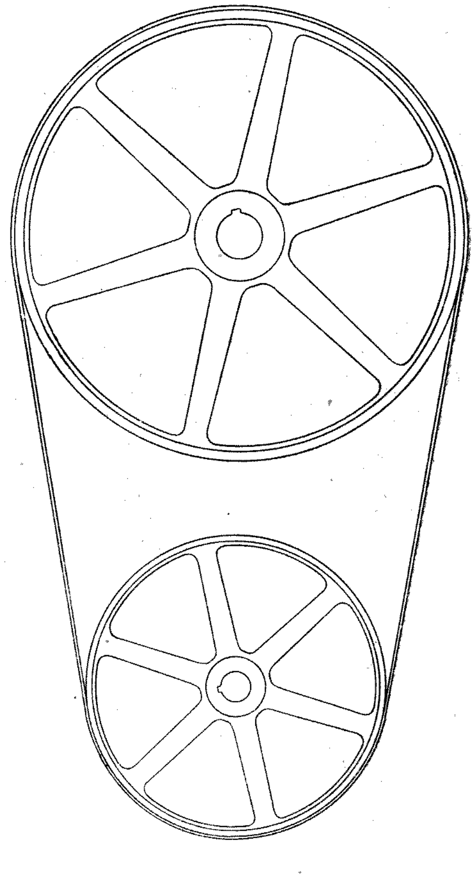
Liczbę, wskazującą, ile razy obwód koła jest większy od średnicy, nazywamy liczbą „pi“ i oznaczamy literą grecką π.

Jako wartości przybliżonych liczby π używamy bądź ułamka $\frac{22}{7}$, bądź też liczby dziesiętnej 3·14.

Aby zatem obliczyć obwód koła, np. w *cm*, należy pomnożyć przez π liczbę, wyrażającą w *cm* długość średnicy.

Zadania.

1. Oblicz obwód koła, którego promień równa się 12 *cm*, biorąc na π raz wartość $\frac{22}{7}$, drugi raz 3·14. Porównaj wyniki.
2. Ile razy zwiększy się obwód koła, jeżeli średnica zwiększy się 2, 3, 4, ... razy?
3. Obwód koła równa się 14 *cm*; ile wynosi promień?
4. Oblicz różnicę między obwodem koła o promieniu 5 *cm*, a obwodem sześciokąta umiarowego, wpisanego w to koło.
5. Koło u wozu ma promień 7 *dm*; oblicz drogę, jaką wóz odbył, jeśli koło wykonało 2.400 obrotów.
6. Koń, zaprzężony w kieracie do dyszla o długości 2·75 *m*, wykonuje przeciętnie 180 obrotów w godzinie; jaką drogę zrobił w ciągu 4 godzin?
7. Promień koła równika ziemskiego równa się 6.370 *km*. Ile czasu potrzebuje pociąg, jadący z prędkością 60 *km* na godzinę, aby objechać równik?



Rys. 107.

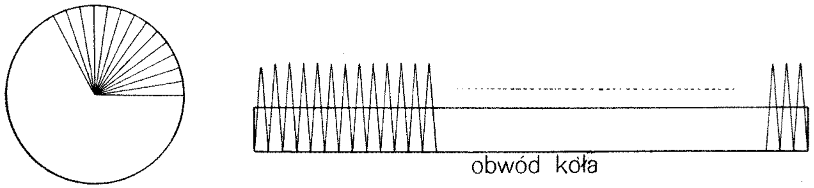
8. Dwa koła, jedno o promieniu 2 *cm*, drugie o promieniu

3 *cm*, połączono pasem, jak na rys. 107. Ile obrotów wykonało większe koło, jeśli mniejsze wykonało 240 obrotów?

9. Dookoła placu w kształcie koła o promieniu 19 *m* zrobiono chodnik szerokości 2 *m*; ile kosztowało ogrodzenie z obu stron tego chodnika, jeśli 1 *m* kosztował 3 *zł* 40 *gr*, przyczem 16 *m* należy odliczyć na wejścia? Rysunek w skali 1 : 400.
10. Jako wartość liczby π przyjmowali: *a)* Babilończycy liczbę 3, *b)* Egipcjanie liczbę $(\frac{16}{9})^2$, *c)* Hindusi liczbę $\frac{62832}{20000}$, *d)* Chińczycy $\frac{157}{50}$, *e)* Ptolomeusz liczbę $3\frac{17}{120}$, *f)* Archimedes liczbę $\frac{22}{7}$, *g)* A. Metius $\frac{355}{113}$.
Zamień wszystkie te ułamki na liczby dziesiętne z dokładnością na 3 miejsca dziesiętne i porównaj z liczbą 3·141, przedstawiającą liczbę π z dokładnością na 3 miejsca dziesiętne.

Pole koła.

Aby obliczyć pole koła, dzielimy je zapomocą promieni (rys. 108) na tyle równych wycinków, aby łuk każdego



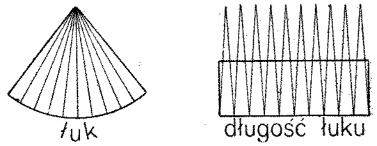
Rys. 108.

wycinka niewiele różnił się od cięciwy, łączącej końce tego łuku. Takie wycinki w przybliżeniu możemy uważać za trójkąty. Narysujmy wszystkie te trójkąty obok siebie i zastąpmy każdy przez równoważny mu prostokąt o tej samej podstawie. Otrzymamy w ten sposób prostokąt, w którym w przybliżeniu podstawa równa się obwodowi koła, a wysokość połowie promienia koła.

Pole tego prostokąta równa się w przybliżeniu polu koła i błąd będzie tem mniejszy, im na więcej wycinków podzielimy dane koło. W ten sposób przekonano się, że pole koła równa się polu prostokąta, w którym podstawa równa się obwodowi koła, wysokość zaś połowie promienia koła.

Pole wycinka.

Chcąc obliczyć pole wycinka, postępujemy podobnie, jak przy obliczaniu pola koła. Dzielimy dany wycinek na drobne wycinki, które w przybliżeniu możemy uważać za trójkąty. Zastępując każdy z tych trójkątów przez równoważny prostokąt (rys. 109), otrzymujemy prostokąt, w którym w przybliżeniu podstawa równa się łukowi danego wycinka, wysokość zaś połowie promienia wycinka. Pole tego prostokąta równa się w przybliżeniu polu danego wycinka. W ten sposób przekonano się, że pole wycinka równa się polu prostokąta, w którym podstawa równa się łukowi danego wycinka, wysokość zaś połowie promienia wycinka. Pole wycinka oblicza się zatem podobnie, jak pole trójkąta, przyjmując zamiast podstawy trójkąta łuk wycinka, a zamiast wysokości trójkąta promień wycinka.

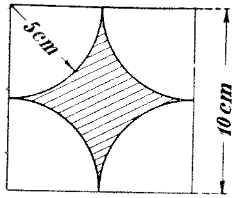


Ryc. 109.

Zadania.

1. Ile wynosi pole koła o promieniu: *a)* 8 *cm*, *b)* $3\frac{4}{5}$ *m*, *c)* 3·84 *m*, *d)* $17\frac{11}{15}$ *dm*?
2. Dwa koła o tym samym środku mają promienie 4 *m* i 5 *m*; oblicz pole, zawarte pomiędzy temi kołami.
3. Dane są dwa koła, z których jedno ma promień 10 razy większy, niż drugie; ile razy pole pierwszego koła jest większe od pola drugiego koła?
4. Koń przywiązany jest do palika na łące, na sznurze o długości 8 *m*; ile wynosi pole, na którem koń może się paść?
5. Ile wozów piasku trzeba zużyć do wysypania areny cyrkowej, mającej kształt koła o promieniu 10 *m*, jeżeli jeden wóz wystarcza na wysypanie 75 m^2?
6. Obwód koła równa się 106·4 *m*; ile wynosi pole?

7. Środek prostokąta o bokach 8 *cm* i 6 *cm* jest równocześnie środkiem koła o promieniu 2 *cm*; oblicz pole figury, otrzymanej po wycięciu tego koła z prostokąta.
8. Z kwadratu o boku 10 *cm* wycięto cztery ćwiartki koła o promieniu 5 *cm*, jak na rys. 110. Oblicz pole w ten sposób otrzymanej figury.



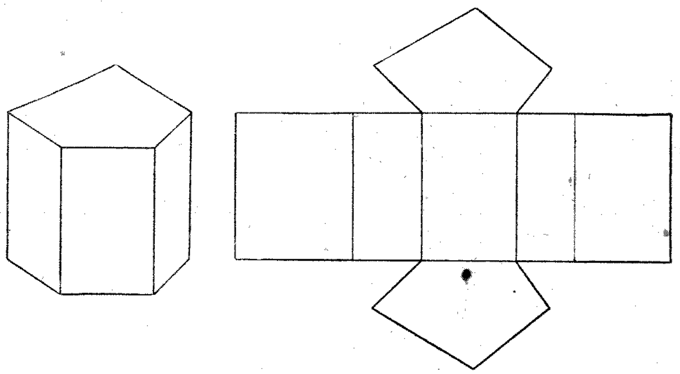
Rys. 110.

9. Ogród ma 53 *m* długości, a 37 *m* szerokości, przyczem ścieżki zajmują 420 m^2. W środku ogrodu znajduje się basen, którego promień wynosi 8 *m*. Oblicz pole uprawnej części ogrodu! Rysunek w skali 1 : 1000.
10. Łuk wycinka koła ma długość *a)* 0·75 *m*, *b)* $\frac{4}{5}$ *m*, *c)* $2\frac{3}{4}$ *m*, koło zaś ma promień *a)* 1·2 *m*, *b)* $\frac{9}{11}$ *m*, *c)* $1\frac{8}{9}$ *m*; oblicz pole wycinka.
11. Pole wycinka koła wynosi *a)* 66 cm^2, *b)* $8\frac{4}{9}$ m^2, *c)* 18·64 dm^2, długość zaś łuku *a)* 12 *cm*, *b)* 4 *m*, *c)* 4·2 *dm*; oblicz promień koła, do którego wycinek należy.

Pole powierzchni niektórych brył.

Graniastosłup prosty.

Jeżeli mamy bryłę ograniczoną samemi wielokątami, wówczas, oczywiście, pole powierzchni tej bryły równa się sumie pól poszczególnych wielokątów. Przy graniastosłupie prostym rachunek ten można łatwiej przeprowadzić. Na rys. 111 mamy graniastosłup prosty pięciokątny i jego siatkę.



Rys. 111.

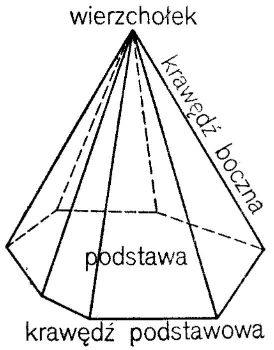
Siatka pobocznicy jest prostokątem, którego podstawa równa się obwodowi podstawy graniastosłupa, wysokość zaś wysokości graniastosłupa; całkowite pole powierzchni graniastosłupa otrzymamy, dodając do pola pobocznicy podwójne pole podstawy.

Zadania.

1. Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi *a)* 8 *cm*, *b)* $3\frac{1}{2}$ *m*, *c)* 5·63 *dm*, *d)* $12\frac{1}{5}$ *m*. Oblicz pole pobocznicy. (Siatka).
2. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego, którego

podstawa jest trójkątem o boku 6 *cm* i wysokości 5 *cm*; wysokość graniastosłupa równa się 25 *cm*.

3. Oblicz pole powierzchni pudełka zapałek o krawędziach 8 *cm*, 5 *cm*, 2 *cm*.
4. Ile kosztuje obicie czterech ścian sali, mającej kształt prostopadłościanu o bokach 10 *m*, 6 *m*, 4·5 *m* (wysokość) materją, której sztuka, mająca 25 *m* długości, a 80 *cm* szerokości, kosztuje 75 *zł* (przyczem odlicz na drzwi i okna 24 m^2).
5. Podłoga klasy o wysokości 4 *m* jest kwadratem o boku 8 *m*; w klasie znajdują się trzy okna szerokości 1·5 *m* i wysokości 1·8 *m*, oraz drzwi szerokości tej samej co okna, a o wysokości 2·25 *m*. Ile czasu trzeba zużyć na wybielenie ścian i powały klasy, jeżeli na wybielenie 1 m^2 trzeba zużyć 5 minut (siatka w skali 1 : 100)?
6. Graniastosłup prosty o wysokości $3\frac{1}{2}$ *m* ma za podstawę sześciokąt umiarowy o boku 2 *m*; oblicz pole powierzchni graniastosłupa. (Narysuj siatkę w skali 1 : 50 i na planie zmierz te wielkości, które będą potrzebne do obliczenia pola sześciokąta).
7. Oblicz ciężar pudełka o wymiarach 4·5 *cm*, 6 *cm*, 8 *cm*, wiedząc, że jest zrobione z blachy, której 1 cm^2 waży 0·52 *g*.
8. Narysuj siatkę sześcianu, którego pole powierzchni wynosi 54 cm^2.
9. Podaj wymiary prostopadłościanu, którego pole powierzchni wynosi 128 cm^2, przyczem podstawą jest kwadrat o boku 4 *cm*. Narysuj siatkę.

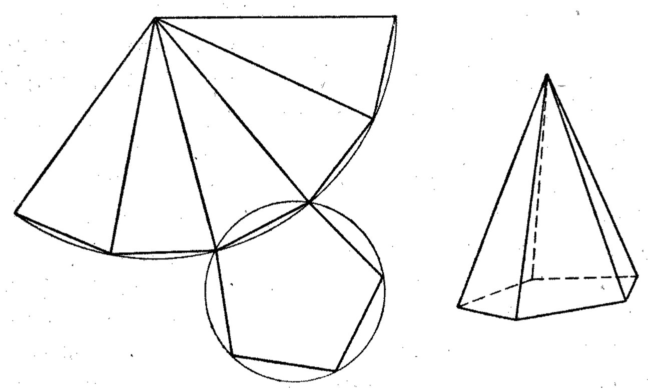


Rys. 112.

Ostrosłup foremny.

Rys. 112 przedstawia bryłę zwaną ostrosłupem. Bryła ta ograniczona jest wielokątem i trójkątami o wspólnym wierzchołku. Wielokąt nazywamy p o d s t a w ą ostrosłupa, a wspólny wierzchołek trójkątów w i e r z c h o ł k i e m ostrosłupa. Trójkąty, których wierzchołki schodzą się w wierzchołku ostrosłupa, tworzą powierzchnię zwaną p o b o c z n i c ą ostrosłupa. Boki tych trójkątów, zbiegające się u wierzchołka ostrosłupa, nazywamy krawędziami b o c z n e m i, boki zaś podstawy krawędziami p o d s t a w o w e m i.

Jeżeli w ostrosłupie podstawa jest wielokątem foremnym, pozostałe zaś ściany są równemi trójkątami równoramiennemi, wówczas ostrosłup nazywamy f o r e m n y m.



Rys. 113.

Rys. 113 przedstawia ostrosłup foremny, którego podstawa jest pięciokątem foremnym. Obok mamy siatkę tego ostrosłupa. Siatka pobocznicy składa się z pięciu równych trójkątów równoramiennych.

Siatkę pobocznicy możemy narysować w następujący sposób. Kreślimy koło o promieniu równym krawędzi bocznej i odcinamy kolejno 5 razy z dowolnego punktu okręgu cięciwy równe bokowi podstawy. Łącząc końce cięciw ze środkiem koła, otrzymujemy siatkę pobocznicy. Aby obliczyć pole powierzchni ostrosłupa foremnego, należy obliczyć pole jego siatki, t. j. do pola pobocznicy dodać pole podstawy.

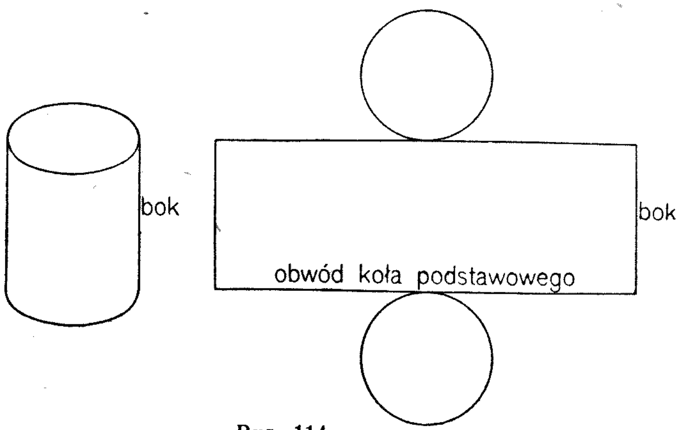
Zadania.

1. Oblicz liczbę krawędzi ostrosłupa, którego podstawa jest *a)* sześciokątem, *b)* ośmiokątem, *c)* piętnastokątem.
2. Sporządź model ostrosłupa foremnego o podstawie *a)* trójkątnej, *b)* czworokątnej.
3. Sporządź siatkę czworościanu foremnego, t. j. ostrosłupa, którego ściany boczne są przystającemi trójkątami równobocznemi.

4. Sporządź siatkę ostrosłupa foremnego o podstawie sześciokątnej.
5. Oblicz pole pobocznicy ostrosłupa foremnego, którego podstawa jest kwadratem o boku 18 *m*, przyczem wysokość ściany bocznej równa się 24 *m*. Narysuj siatkę w skali 1:600!
6. Oblicz całkowite pole powierzchni ostrosłupa foremnego, którego podstawa jest sześciokątem foremnym o boku 10 *cm*, a krawędź boczna ma 18 *cm*. (Narysuj siatkę w skali 1:4 i zapomocą miarki odczytaj wysokość ściany bocznej i odległość boku podstawy od środka).
7. Pole pobocznicy ostrosłupa foremnego, którego podstawa jest ośmiokątem foremnym, wynosi 200 cm^2; wysokość ściany bocznej równa się 10 *cm*. Ile wynosi krawędź podstawy tego ostrosłupa?
8. Oblicz pole powierzchni największej piramidy w Egipcie (kształtu ostrosłupa foremnego), która ma za podstawę kwadrat o boku 233 *m*, a której ściana boczna ma wysokość 186 *m*!
9. Na pokrycie 1 m^2 dachu potrzeba 40 dachówek; oblicz, ile potrzeba dachówek na pokrycie dachu w kształcie pobocznicy ostrosłupa foremnego, którego podstawa jest kwadratem o boku 8 *m*, a ściana boczna ma wysokość 12 *m*.

Walec obrotowy.

Rys. 114 przedstawia walec obrotowy. Obok narysowana jest jego siatka. Składa się ona z dwóch równych

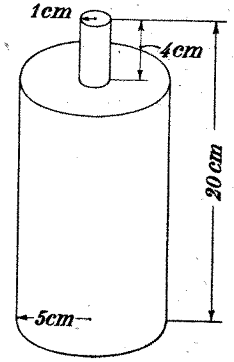


Rys. 114.

kół (podstaw walca) i z prostokąta (siatki pobocznicy walca). Jeżeli ten prostokąt zwiniemy, to otrzymamy pobocznicę walca. Zatem podstawa tego prostokąta równa się obwodowi koła podstawowego, wysokość zaś równa się bokowi walca. Aby obliczyć pole powierzchni walca, należy do pola pobocznicy dodać pola obu podstaw.

Zadania.

1. Sporządź model walca obrotowego o wysokości 9 *cm*, którego podstawa jest kołem o promieniu 3 *cm*.
2. Oblicz pole powierzchni walca obrotowego, którego podstawa jest kołem o promieniu *a)* 5 *cm*, *b)* $3\frac{3}{4}$ *dm*, *c)* 1·5 *m*, a którego wysokość równa się *a)* 10 *cm*, *b)* $8\frac{1}{5}$ *dm*, *c)* 1·25 *m*. Narysuj siatkę w skali: *a)* 1:2, *b)* 1:10, *c)* 1:50!
3. Oblicz cenę garnka aluminjowego w kształcie walca o wysokości 17 *cm*, którego podstawa jest kołem o promieniu 5 *cm*, jeżeli przeciętnie za 1 dm^2 pola płaci się 1 *zł* 20 *gr*!
4. Całkowite pole powierzchni walca obrotowego wynosi 1884 cm^2, promień zaś podstawy 10 *cm*. Ile wynosi pole pobocznicy i wysokość walca?
5. Walec o wysokości 2 *m*, którego podstawa ma promień 9 *dm*, toczył się po drodze i wykonał 45 obrotów. Jak wielkie pole opisał?
6. Oblicz pole pobocznicy naczynia, mającego kształt podany na załączonym rysunku; całkowita wysokość naczynia wynosi 20 *cm*, wysokość szyjki 4 *cm*, promień dna 5 *cm* i promień szyjki 1 *cm*. Narysuj siatkę tego naczynia w skali 1 : 5!

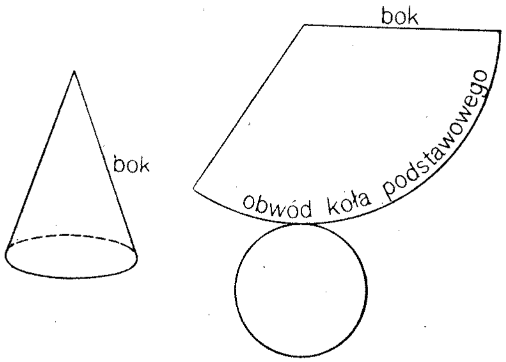


Rys. 115.

7. Oblicz pole zewnętrznej powierzchni rury walcowej długiej na 3·45 *m*, w której koło zewnętrzne ma promień 8 *cm*.

Stożek.

Rys. 116 przedstawia stożek obrotowy. Obok narysowana jest jego siatka. Składa się ona z koła (podstawy stożka) i z wycinka kołowego (siatki pobocznicy). Jeżeli ten wycinek zwiniemy, to otrzymamy pobocznicę. Zatem łuk tego wycinka równa się obwodowi koła podstawowego, promień zaś tego wycinka równa się bokowi stożka.



Rys. 116.

Aby więc obliczyć pole powierzchni stożka obrotowego, należy obliczyć pole jego siatki, t. j. do pola pobocznicy dodać pole podstawy.

Zadania.

1. Sporządź model stożka obrotowego.
2. Oblicz pole pobocznicy stożka obrotowego, którego promień podstawy ma 10 m, bok zaś 18 m!
3. Podstawa stożka obrotowego ma promień 6·8 cm, bok zaś równa się 10·8 cm; oblicz pole powierzchni stożka.
4. Pole pobocznicy stożka obrotowego równa się 270 cm^2, bok zaś 30 cm. Ile wynosi promień koła podstawowego?
5. Dach wieży jest kształtu pobocznicy stożka obrotowego, którego promień podstawy ma 3 m, a bok 7 m. Ile kosztuje pokrycie tego dachu blachą, jeżeli przeciętnie pokrycie 1 m^2 kosztuje 20 $zł$?
6. Koło o promieniu 4 cm podzielono na trzy wycinki równe. Jeśli taki wycinek przedstawia nam siatkę pobocznicy stożka, to: *a)* jaki jest obwód podstawy stożka, *b)* jak wielka jest pobocznica, *c)* jak wielkie jest pole powierzchni całego stożka? Rysunek!

SPIS RZECZY.

UŁAMEK JAKO CZĘŚĆ JEDNOŚCI.

WŁASNOŚCI LICZB CAŁKOWITYCH.

Podzielnik.

Cechy podzielności.

Liczby pierwsze.

Największy wspólny podzielnik.

Najmniejsza wspólna wielokrotność.

UŁAMEK JAKO ILORAZ DOKŁADNY.

Określenie i własności ułamka.

Dodawanie ułamków.

Odejmowanie ułamków.

LICZBY DZIESIĘTNE.

Ułamki dziesiętne.

Jednostki dziesiętne.

Liczby dziesiętne.

Dodawanie liczb dziesiętnych.

Odejmowanie liczb dziesiętnych.

SYMETRJA.

Symetrja osiowa.

Symetralna odcinka.

Symetralna kąta.

Trójkąt.

Symetrja środkowa.

PRZEGLĄD WIELOKĄTÓW. KOŁO.

Równoległobok.

Trapez.

Deltoid.

Suma kątów w czworokącie.

Wielokąty.

Koło.

Wielokąty foremne.

MNOŻENIE I DZIELENIE UŁAMKÓW.

Mnożenie ułamka przez liczbę całkowitą.

Iloraz ułamka przez liczbę całkowitą.

Mnożenie ułamka przez ułamek.

Własności iloczynu.

Iloraz ułamka przez ułamek.

Własności ilorazu.

ILOCZYN I ILORAZ LICZB DZIESIĘTNYCH.

Iloczyn liczb dziesiętnych.

Iloraz liczb dziesiętnych.

OBLICZANIE PÓL WIELOKĄTÓW.

OBWÓD I POLE KOŁA.

POLE POWIERZCHNI NIEKTÓRYCH BRYŁ.