S. BANACH, W. SIERPIŃSKI, W. STOŻEK

ARYTMETYKA I GEOMETRJA

DLA KLASY III SZKÓŁ ŚREDNICH

K S I Ą Ż N I C A - A T L A S
ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE
TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ., SP. AKC.
LWÓW—WARSZAWA
1931

2319

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

Wielkości proporcjonalne.

Tabele i przedstawienia graficzne.

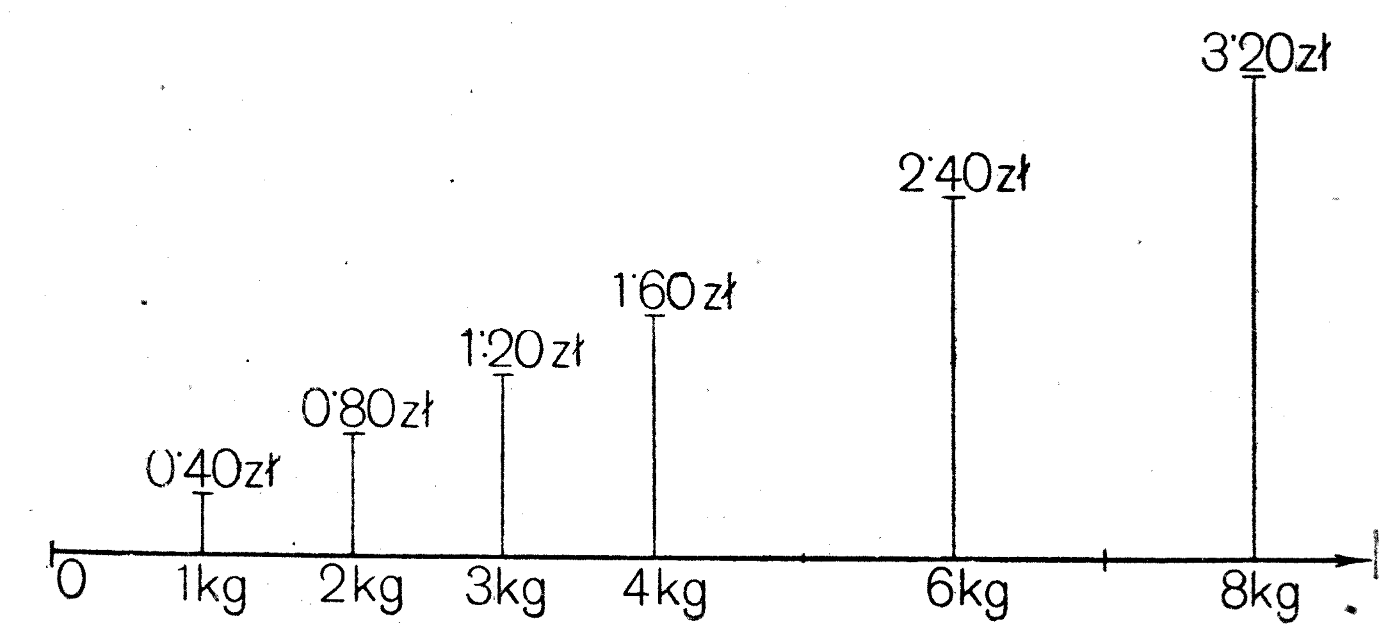
1. Tabelka (rys. 1) wskazuje nam ceny różnych ilości soli. Liczby stojące w pierwszym wierszu wskazują ilość soli w *kg*, liczby poniżej stojące odpowiednią cenę soli w *zł*.

A więc 1 *kg* kosztuje 0·40, 3 *kg* — 1·20 *zł* i t. d.

Ilość soli w *kg*	1	2	3	4	6	8
Cena soli w *zł*	0·40	0·80	1·20	1·60	2·40	3·20

Rys. 1.

Moglibyśmy jeszcze w inny sposób przedstawić ceny rozmaitych ilości soli. Na prostej poziomej zaznaczamy (licząc od pewnego punktu 0) odcinki 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm* i t. d. W punktach zaznaczonych kreślimy odcinki prostopadłe o długościach 0·40 *cm*, 0·80 *cm*, 1·20 *cm* i t. d. Odcinki te wskazują nam cenę soli, w ten sposób, że 1 *cm* odcinka odpowiada 1 *zł*. A więc odcinek o długości 1·40 *cm* wskazuje, że odpowiednia ilość soli kosztuje 1·40 *zł* i t. d.



Rys. 2.

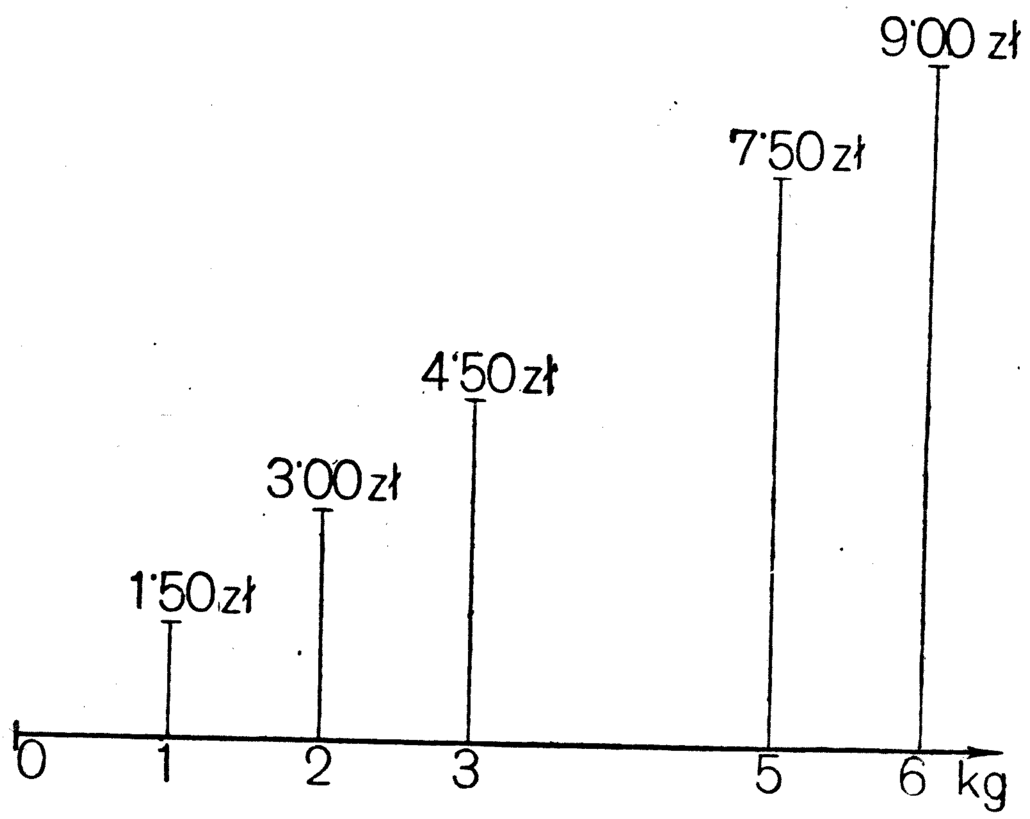
Sposób powyższy przedstawienia nazywa się wykreślnym lub graficznym. Prostą poziomą w powyższym przykładzie nazywamy **osią kilogramów**.

2. Tabelka (rys. 3) przedstawia nam cenę rozmaitej ilości cukru.

Ilość cukru w *kg*	1	2	3	5	6
Cena cukru w *zł*	1·50	3·00	4·50	7·50	9·00

Rys. 3.

Na rys. 4 przedstawioną mamy tabelkę powyższą graficznie. Na 1 *cm* osi poziomej wypada 1 *kg*, zaś na $\frac{1}{2}$ *cm* w odcinkach prostopadłych wypada 1 *zł*, t. zn., że np. 3·00 *zł* zaznaczone są odcinkiem o długości 1·5 *cm*.

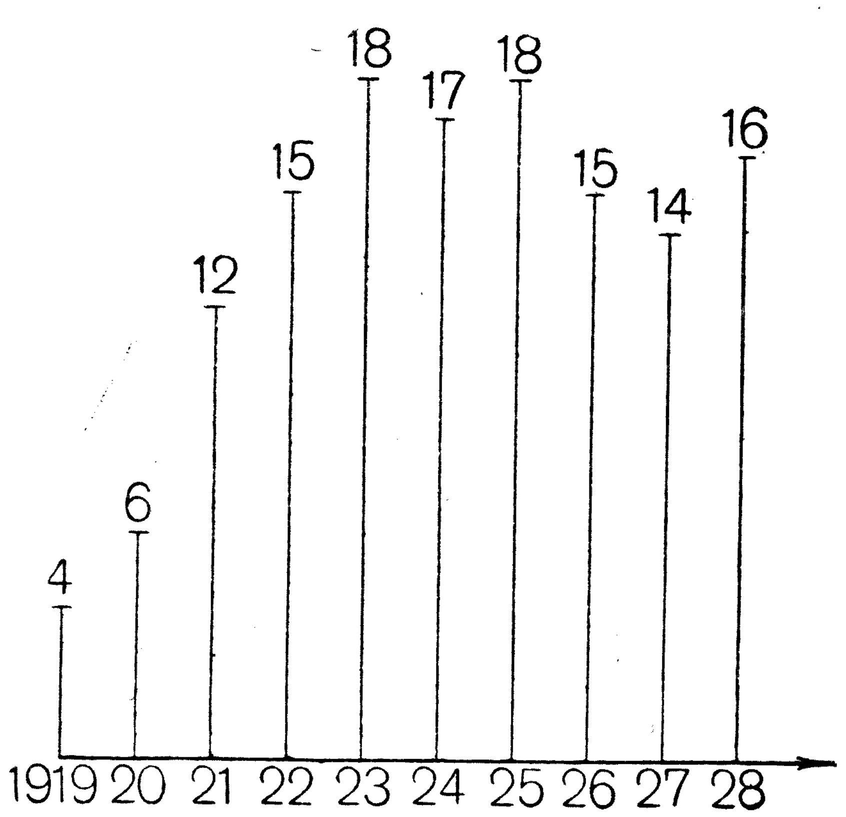


Rys. 4.

3. Tabelka (rys. 5) przedstawia nam przyrost ludności w Polsce, przypadający na każdy tysiąc mieszkańców w latach 1919—1928.

Rok	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928
Przyrost . . .	4	6	12	15	18	17	18	15	14	16

Rys. 5.



Rys. 6.

Na rys. 6 przedstawioną mamy powyższą tabelkę graficznie.

Na osi poziomej co $\frac{1}{2}$ *cm* zaznaczono 1 rok, zaś na odcinkach prostopadłych $\frac{1}{4}$ *cm* oznacza przyrost ludności o 1 człowieka.

Zadania.

1. 1 *kg* towaru kosztuje 20 *zł*. Ile kosztuje: 2 *kg*, 3 *kg*, 4 *kg*, 5 *kg*, 6 *kg*? Sporządź tabelkę i przedstaw ją graficznie, zaznaczając na osi poziomej co 1 *cm* jeden kilogram, na odcinkach zaś prostopadłych przyjmij 20 *zł* na 1 *cm*!

2. Ile wynosi: *a)* obwód, *b)* pole kwadratu, jeśli jego bok ma: 1 *cm*, $1\frac{1}{2}$ *cm*, 2 *cm*, $2\frac{1}{2}$ *cm*, 3 *cm*. Sporządź tabelkę i przedstaw ją graficznie!
3. Niżej podana tabelka daje cenę III kl. pociągu osobowego w zależności od liczby *km*; przedstaw ją graficznie!

Km	1—5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Zł	0·40	0·40	0·60	0·60	0·60	0·80	0·80	0·80	1	1	1	1·20	1·20

4. Sporządź tabelkę, w której w pierwszym wierszu są liczby od 1 do 9, w drugim zaś odpowiednio iloczyny tych liczb przez $\frac{1}{2}$. Przedstaw tę tabelkę graficznie!
5. Komunikacja lotnicza w Polsce zaznaczona jest tabelką, w której podana jest liczba zaokrąglona lotów w odnośnym roku.

Rok	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928
Liczba lotów . .	250	600	800	1500	2700	2900	3400	3900

Przedstaw ją graficznie, przyjmując na osi poziomej 1 rok na 1 *cm*, zaś w odcinkach prostopadłych 100 lotów na 2 *mm*.

Wielkości wprost proporcjonalne.

Określenia.

1. Cena, jaką płacimy za sól, zależy od jej ilości, t. j. od wagi. Tabelka (rys. 7) wskazuje nam ceny różnych ilości *kg* soli.

Ilość soli w *kg*	1	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Cena soli w *zł*	0·40	0·80	1·20	0·20	0·10	0·05

Rys. 7.

Za 2 *kg* soli zapłacimy 2 razy więcej niż za 1 *kg*; za 3 *kg* trzy razy więcej niż za 1 *kg* i t. d. Podobnie za $\frac{1}{2}$ *kg* soli zapłacimy połowę ceny 1 *kg* soli, za $\frac{1}{3}$ *kg* zapłacimy $\frac{1}{3}$ ceny 1 *kg* i t. d.

Podobnie zachowuje się cena i waga wielu innych towarów (np. kawy, herbaty i t. p.). Za dwa razy większą ilość kawy (herbaty) musimy zapłacić dwa razy więcej, za trzy razy większą ilość trzy razy więcej i t. d. Mówimy, że cena i waga takich towarów są do siebie wprost proporcjonalne.

Uwaga 1. Nie zawsze cena i waga towaru są do siebie wprost proporcjonalne. Np. cena diamentu zmienia się w ten sposób z jego wagą, że diament dwa razy cięższy kosztuje 4 razy więcej, 3 razy cięższy 9 razy więcej i t. d. A więc cena diamentu nie jest proporcjonalna do jego wagi.

Uwaga 2. Mleko sprzedajemy na litry. Za 2 *l* mleka należy 2 razy więcej zapłacić niż za 1 *l*, za 3 *l* mleka 3 razy więcej niż za 1 *l* i t. d. Mówimy, że cena mleka jest wprost proporcjonalna do liczby litrów.

Podobnie cena sukna (z pewnego zwoju) jest wprost proporcjonalna do liczby metrów tego sukna.

Uwaga 3. Jeżeli 3 *kg* soli kosztuje 1·20 *zł*, to 1 *kg* kosztuje *zł*:

$$1{\cdot}20 : 3 = 0{\cdot}40.$$

Widzimy stąd, że dzieląc cenę soli przez liczbę *kg* otrzymamy cenę 1 *kg* soli. Zatem, dzieląc w tabelce (rys. 1) liczbę dolną przez odpowiednią górną, otrzymamy zawsze na wynik 0·40. A więc:

$$0{\cdot}40 : 1 = 0{\cdot}80 : 2 = 1{\cdot}20 : 3 = 0{\cdot}20 : \tfrac{1}{2} = 0{\cdot}10 : \tfrac{1}{4} = 0{\cdot}05 : \tfrac{1}{8} = 0{\cdot}40.$$

Jeżeli mamy taką tabelkę liczb jak rys. 1, mającą tę własność, że iloraz liczb odpowiednich jest zawsze ten sam, to mówimy, że liczby jednego wiersza są wprost proporcjonalne do liczb drugiego wiersza.

Przykłady takich tabelek podają nam rys. 8 i rys. 9.

1	2	3	4
5	10	15	20

Rys. 8.

3	6	9	24
4	8	12	32

Rys. 9.

W powyższych tabelkach liczbom dwa razy większym odpowiadają liczby dwa razy większe, liczbom trzy razy większym liczby trzy razy większe i t. d.

2. Jeżeli płaca robotnika wynosi dziennie np. 3 *zł*, to jego zarobek zależy od liczby dni roboczych. W czasie dwa razy większym dwa razy więcej zarobi, w czasie trzy razy większym trzy razy więcej i t. d.

Mówimy i tutaj, że zarobek robotnika jest wprost proporcjonalny do liczby dni roboczych.

3. Jeżeli samolot przelatuje przeciętnie w 1 sek. np. 40 *m*, to droga jaką przeleci, zależy od czasu. W czasie dwa razy dłuższym przeleci dwa razy większą drogę, w czasie trzy razy dłuższym trzy razy większą drogę i t. d.

Mówimy, że droga, jaką samolot przelatuje, jest wprost proporcjonalna do czasu zużytego na jej przebycie.

4. Podobnie mówimy, że obwód kwadratu jest wprost proporcjonalny do długości boku (bo ile razy bok zwiększymy, tyle razy zwiększymy obwód).

W przykładach 1, 2, 3, 4 występowały dwie wielkości od siebie zależne: 1) cena soli zależy od liczby *kg* soli, 2) zarobek robotnika zależy od liczby dni roboczych, 3) droga samolotu zależy od czasu lotu, 4) obwód kwadratu zależy od długości boku.

Wielkości, występujące w każdym z powyższych przykładów, nazwaliśmy wprost proporcjonalnemi.

Aby się przekonać, czy dwie wielkości zależne od siebie są wprost proporcjonalne, należy zbadać:

1) czy zwiększając jedną, tem samem zwiększamy drugą;

2) czy zwiększając jedną 2, 3, ... razy, zwiększamy tem samem drugą odpowiednio 2, 3, ... razy.

Pomocną jest rzeczą w tym celu sporządzić tabelkę i zbadać, czy liczby jednego wiersza są wprost proporcjonalne do liczb drugiego wiersza, innemi słowy, czy iloraz odpowiednich liczb jest zawsze ten sam.

Uwaga. Jeżeli 1 *kg* towaru kosztuje 40 *gr*,

to 3 *kg* kosztują 1·20 *zł*
a 5 „ „ 2 „

Wiemy, że liczba *kg* jest wprost proporcjonalna do ceny; ile razy zatem 5 *kg* jest większe od 3 *kg*, tyle razy 2 *zł* jest większe od 1·20 *zł*.

Aby się przekonać, ile razy 5 *kg* jest większe od 3 *kg*, należy utworzyć iloraz:

$$5 : 3.$$

Aby się przekonać, ile razy 2 *zł* są większe od 1·20 *zł*, należy utworzyć iloraz:

$$2 : 1{\cdot}20$$

W obu wypadkach ilorazy muszą być sobie równe.

Zatem: $$5 : 3 = 2 : 1{\cdot}20$$

Otrzymaliśmy równość dwóch ilorazów, którą nazywamy p r o p o r c j ą.

Widzimy stąd, że, jeżeli weźmiemy dwie ilości towaru, to iloraz ich ciężarów równa się ilorazowi odpowiadających im cen.

Podobnie, jeśli 1 *m* sukna kosztuje 30 *zł*, to

7 *m* kosztuje 210 *zł*

a 9 „ „ 270 „

Zatem: $$7 : 9 = 210 : 270.$$

Z a d a n i a.

1. W następujących zadaniach sporządź odpowiednie tabelki i przekonaj się, że liczby jednego wiersza są wprost proporcjonalne do liczb drugiego wiersza. Wskaż następnie w każdem zadaniu te wielkości, których proporcjonalność wynika z tabelki. Sporządź wkońcu wykres w odpowiedniej skali!
   a) Kula karabinowa przebiega w 1 sek. 600 *m*; ile przebiega w 2, 3, 4, 7, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{15}$ sek.?
   b) 1 cm^3 złota waży 19·3 *g*; ile waży 2 cm^3, 5 cm^3, 10 cm^3 1 dm^3, $\frac{1}{2}$ cm^3, $\frac{1}{4}$ cm^3, $\frac{3}{4}$ cm^3?
   c) Pociąg jedzie z prędkością 60 *km* na godzinę; jaką drogę zrobi w 2, 3, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ godziny?
   d) 1 *l* wina kosztuje 6 *zł*; ile kosztuje: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ *l* wina?
   e) Parowiec w 1 sek. przepływa średnio 13 *m*; ile przepływa w 2, 3, 4, 5, 6, 7 godzinach?
2. Narysuj trójkąty równoboczne o boku 1 *cm*, 2 *cm*, 4 *cm*, 6 *cm* i mierząc ich wysokości przekonaj się, że wysokości są wprost proporcjonalne do boków.
3. Czy obwód koła jest wprost proporcjonalny do promienia?
4. Czy pole kwadratu jest wprost proporcjonalne do długości boku?

5. Prostokąt ma podstawę 3 *cm*; czy jego pole jest wprost proporcjonalne do wysokości?
6. Kamień wolno puszczony w pierwszej sek. przebiega 5 *m*, w dwóch pierwszych sek. 20 *m*, w trzech pierwszych sek. 45 *m*, w czterech pierwszych sek. 80 *m*; czy możemy powiedzieć, że droga jaką kamień przebiega jest wprost proporcjonalna do czasu?
7. Mnożna wynosi 5; czy wartość iloczynu jest wprost proporcjonalna do mnożnika?
8. Dzielnik wynosi 3; czy wartość ilorazu jest wprost proporcjonalna do dzielnej?
9. Czy wartość ułamka o mianowniku 4 jest wprost proporcjonalna do licznika?
10. Płytka metalowa kwadratowa o boku 1 *cm*, kosztuje 10 *gr*; ile kosztuje płytka kwadratowa o boku 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*? Czy cena płytki jest wprost proporcjonalna do długości boku?
11. Jaką liczbę trzeba wstawić w miejsce litery *x*, aby zachodziły proporcje:

a)	$x : 6 = 12 : 24$,	$x : 15 = 7 : 92$,	$x : 3 = 5 : 18$,
b)	$4 : x = 28 : 44$,	$9 : x = 45 : 10$,	$7 : x = 4 : 13$,
c)	$2 : 5 = x : 2{\cdot}5$,	$2 : \frac{3}{4} = x : 15$,	$9 : \frac{5}{7} = x : \frac{7}{3}$,
d)	$3 : 7 = 2 : x$,	$4{\cdot}5 : 6 = 7 : x$,	$7 : \frac{5}{2} = \frac{2}{3} : x$.

Rozwiązuj w następujący sposób:

a) jeślі $x : \frac{2}{3} = 4 : \frac{5}{6}$, to $x : \frac{2}{3} = 4 . \frac{6}{5} = \frac{24}{5}$.

Szukana liczba jest dzielną, a zatem:

$$x = \frac{24}{5} . \frac{2}{3} = \frac{16}{5}.$$

b) jeśli $\frac{3}{4} : x = 2 : \frac{4}{7}$, to $\frac{3}{4} : x = 2 . \frac{7}{4} = \frac{7}{2}$.

Szukana liczba jest dzielnikiem, a zatem:

$$x = \frac{3}{4} : \frac{7}{2} = \frac{3}{14}.$$

Reguła trzech prosta.

(Dla wielkości wprost proporcjonalnych).

Sztuka sukna 15 *m* długa kosztuje 300 zł.; ile kosztują 4 *m* tego sukna?

Zadanie to rozwiążemy dwoma sposobami:

1. Jeśli 15 *m* kosztuje 300 *zł*,
to 1 *m* kosztuje 300 *zł* : 15 = 20 *zł*,
a zatem 4 *m* kosztują 20 *zł* . 4 = 80 *zł*.

2. Oznaczając przez x liczbę *zł*, które trzeba zapłacić za 4 *m* sukna, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

15 *m* kosztuje 300 *zł*
4 *m* kosztuje x *zł*

Ponieważ 15 *m* jest tyle razy większe od 4 *m*, ile razy 300 *zł* jest większe od x *zł*, zatem mamy proporcję:

$$15 : 4 = 300 : x,$$

czyli

$$300 : x = \tfrac{15}{4}.$$

Ponieważ szukamy dzielnika, więc

$$x = 300 : \tfrac{15}{4} = 300 \cdot \tfrac{4}{15} = 80.$$

4 *m* sukna kosztują więc 80 *zł*.

Każdy sposób rozwiązywania zadań, dotyczących wielkości wprost proporcjonalnych (przyczem trzy wielkości są dane, a poszukuje się czwartej) nazywamy **regułą trzech prostą**.

Pierwszy sposób nazywamy sposobem **sprowadzenia do jedności**.

Uwaga. Rozwiążmy sposobem sprowadzenia do jedności następujące zadanie:

Jeśli 3 jaja kosztują 60 *gr*, to ile jaj otrzymamy za 40 *gr*?

Ponieważ za 60 *gr* otrzymujemy 3 jaja
więc za 1 *gr* otrzymamy $\frac{3}{60}$ jaja
a za 40 *gr* otrzymamy $\frac{3}{60}$ jaja . 40 = 2 jaja.

W tem zadaniu sposób sprowadzenia do jedności ma tę niedogodność, że zmusza nas do rozważania części przedmiotów, które są praktycznie niepodzielne. Łatwo się przekonać, że ta trudność zniknie, jeżeli rozwiązywać będziemy to zadanie drugim sposobem.

Zadania.

1. 18 *kg* kawy kosztuje 648 *zł*; ile kosztuje: *a)* 5 *kg*, *b)* 9 *kg*, *c)* $2\frac{1}{2}$ *kg*, *d)* $\frac{3}{4}$ *kg*?
2. 5 *l* wina kosztuje 30 *zł*; ile kosztuje: *a)* 7 *l*, *b)* 4·75 *l*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *l*?

3. Za 4 *m* sukna zapłacono 72 *zł*; ile należy zapłacić za: *a)* $1\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 3·2 *m*, *c)* 6·5 *m*?
4. Za 5 cytryn zapłacono 75 *gr*; ile cytryn można kupić za: *a)* $1\frac{1}{2}$ *zł*, *b)* 1 *zł* 20 *gr*, *c)* 1·05 *zł*?
5. Za 3 *kg* soli zapłacono 1 *zł* 20 *gr*; ile *kg* soli można kupić za: *a)* 4 *zł* 40 *gr*, *b)* 3 *zł*, *c)* 4·7 *zł*?
6. *a)* 12 *l* mleka kosztuje 4·80 *zł*; ile kosztuje 8 *l* mleka?
   Rozwiązanie: 4 *l* mleka kosztuje 4·80 *zł* : 3 = 1·60 *zł*, więc 8 *l* mleka kosztuje 1·60 *zł* . 2 = 3·20 *zł*.
   b) 9 *kg* towaru kosztuje 2·70 *zł*; ile kosztuje 15 *kg* tego towaru?
   Rozwiązanie: 3 *kg* kosztuje 2·70 *zł* : 3 = 0·90 *zł*, więc 15 *kg* kosztuje 0·90 *zł* . 5 = 4·50 *zł*.
   Rozwiąż w powyższy sposób następujące zadania:
   c) 24 *kg* towaru kosztuje 12 *zł*; ile kosztuje 16 *kg*?
   d) 18 *kg* towaru kosztuje 27 *zł*; ile kosztuje 24 *kg*?
   e) 28 *kg* towaru kosztuje 33·60 *zł*; ile kosztuje 21 *kg*?
   f) 14 *kg* towaru kosztuje 350 *zł*; ile kosztuje 105 *kg*?
   g) 45 robotnikom wypłacono 270 *zł*; jaką kwotę należy wypłacić 30 robotnikom?
   h) 12 arkuszy papieru kosztuje 42 *gr*; ile kosztuje 16 arkuszy? ile arkuszy można kupić za 35 *gr*, a ile za 1·12 *zł*?
7. Na wyżywienie 8 osób zakupiono 30 *kg* mąki i 40 *kg* mięsa; ile potrzeba *kg* mąki i ile *kg* mięsa na wyżywienie 15 osób przez ten sam przeciąg czasu?
8. 5 górników wydobywa dziennie 9 tonn węgla; ile tonn węgla wydobędzie w jednym dniu 9 górników?
9. Ile zarobi w ciągu 5 tygodni robotnik, który zarabia w ciągu 7 tygodni 364 *zł*?
10. 18 robotników zarobiło w pewnym czasie 1314 *zł*; ilu robotników zarobiłoby w tymże czasie 2044 *zł*?
11. Na towarze kupionym za 3000 *zł* zyskał kupiec 450 *zł*; ile *zł* zyskał na towarze kupionym za 250 *zł*?
12. Kupiec sprzedał towaru za 160 *zł* i zarobił 45 *zł*; za ile musiałby sprzedać tego towaru, żeby zarobić 261 *zł*?
13. Pociąg przebył 350 *km* w 7 godz.; jaką drogę zrobi w 12 godz., jadąc z tą samą prędkością? Ile czasu zużyje na przebycie 1000 *km*?
14. 4° Reaumur'a wynoszą tyle, co 5° Celsjusza; ile stopni C

wynoszą: 5°, 8°, 17°, 35°, 62°, 73·6° R. Ile stopni R wynoszą: 9°, 12°, 15°, 19·5°, 72° C?

15. Za 50 dolarów zapłacono 444 *zł* 25 *gr*; ile dolarów zakupiono za 53 *zł* 13 *gr*? Ile zapłacono za 14 dolarów?
16. 100 franków francuskich kosztuje 34 *zł* 86 *gr*; zamień na franki 732 *zł* 6 *gr*! Zamień na złote 75 franków!
17. 25 *m* drutu waży 3·85 *kg*; jak długi jest drut o wadze 12·782 *kg*?
18. Wahadło robi w 5 sekundach 12 wahnień; ile wahnień robi na minutę? Ile czasu potrzebuje na wykonanie 100 wahnień?
19. Koło robi w 2 godz. 32 min. 7296 obrotów; ile obrotów zrobi w 4 godz. 15 min.? W jakim czasie zrobi 1000 obrotów?
20. Przednie koło robi 60 obrotów, gdy równocześnie tylne robi 45 obrotów; ile obrotów wykona przednie koło, gdy tylne zrobi 81 obrotów, a ile wykona tylne koło, gdy przednie zrobi 96 obrotów?
21. Następujące tabelki uzupełnij liczbami tak, aby tabelki te przedstawiały nam liczby wprost proporcjonalne (t. zn. iloraz liczb odpowiednich ma być w tabelce ten sam).

2	$2\frac{1}{2}$
4	

3	
5	$\frac{2}{3}$

	$\frac{3}{4}$
11	$2\frac{1}{2}$

0·4	$\frac{2}{7}$
	2·5

22. Odległość miejscowości A od B wynosi 9 *km*, na mapie zaś odległość ta wynosi 12 *cm*. Jaka jest odległość miejscowości C od D, jeśli na tej samej mapie odczytana wynosi 15 *cm*? W jakiej skali mapa jest zrobiona?
23. Pociąg przebiega w 20 min. 24 *km*; w jakim czasie przebiegnie 90 *km*? Jaką drogę przebiegnie w $1\frac{1}{4}$ godz.?
24. Oświetlenie sali 5 żarówkami kosztuje dziennie 1 *zł* 20 *gr*; ile kosztowałoby dziennie oświetlenie sali 8 żarówkami?
25. Światło przebiega drogę od słońca do ziemi, wynoszącą 150,000.000 *km* w 8 min. 18 sek.; jak odległa jest od ziemi gwiazda, z której światło dochodzi do ziemi po 4 latach?
26. Głos przebiega w 3 sek. 1 *km*; w jakiej odległości od nas uderzył piorun, gdy huk usłyszeliśmy po upływie 17 sek. od ujrzenia błyskawicy?
27. Za naprawę 100 *m* drogi żąda przedsiębiorca 240 *zł*; ile trzeba zapłacić za naprawę 1870 *m* drogi?

28. Potrzeba 10.000 *kg* (t. j. jednego wagonu) blendy smolistej dla wydobycia 40 *mg* radu; ile blendy potrzeba na 1 *g* radu?
29. 5 cm^3 lodu o temperaturze 0° C waży 4·584 *g*; ile waży bryła lodu o objętości 1 m^3 53 cm^3?
30. W wycieczkach górskich liczy się przeciętnie na 1 godz. czasu 275 *m* drogi w górę; ile czasu potrzeba na wejście na szczyt o wysokości (licząc od podstawy): *a)* 1100 *m*, *b)* 412·5 *m* czyli 275 *m* + $\frac{275}{2}$ *m*, *c)* 962·5 *m*, *d)* 1375 *m*?
31. Na długości 6 *km* droga wzniosła się o 102 *m*; o ile się wznosi przeciętnie na długości: *a)* $1\frac{1}{2}$ *km*, *b)* 5 *km*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *km*?
32. Na przestrzeni 342 *km* lokomotywa ciągnąca pociąg towarowy zużyła 5 tonn węgla; ile tonn zużywa przeciętnie na 100 *km*?
33. 15 *m* sukna kosztuje 300 *zł*; ile kosztują 4 *m* sukna?

Rozwiążemy to zadanie w następujący sposób:

Zapiszmy je

$$\begin{array}{l} 15\ m\ —\ 300\ zł \\ \underline{\ 4\ m\ —\ \ \ x\ zł} \end{array}$$

Szukaną liczbę *zł* oznaczyliśmy literą *x*. Ponieważ liczba *m* i liczba *zł* są wielkościami wprost proporcjonalnemi, więc ilorazy odpowiadających sobie liczb muszą być sobie równe. Liczbie 15 odpowiada liczba 300, liczbie zaś 4 odpowiada szukana liczba *x*.

Mamy zatem:

$$x : 4 = 300 : 15$$

czyli

$$x : 4 = 20.$$

Ponieważ szukana liczba jest dzielną, więc

$$x = 20 \,.\, 4 = 80.$$

4 *m* sukna kosztują zatem 80 *zł*.

Oblicz w podobny sposób, ile kosztuje: *a)* 9 *m*, *b)* 17 *m*, *c)* 40 *m*, *d)* $18\frac{1}{2}$ *m*.

34. 1000 *l* benzyny kosztuje 760 *zł*; ile kosztuje 635 *l* benzyny?

Rozwiążemy to zadanie t. zw. metodą włoską czyli kupiecką.

Rozwiązanie:

500 *l* benzyny kosztuje	760 *zł* : 2 =	380 *zł*	
100 *l* „ „	760 *zł* : 10 =	76 *zł*	
10 *l* „ „	76 *zł* : 10 =	7 *zł*	60 *gr*
20 *l* „ „	7 *zł* 60 *gr* . 2 =	15 *zł*	20 *gr*
5 *l* „ „	380 *zł* : 100 =	3 *zł*	80 *gr*
Razem 635 *l* benzyny kosztuje		482 *zł*	60 *gr*

Oblicz w podobny sposób, ile kosztuje: *a)* 735 *l*, *b)* 245 *l*, *c)* 821 *l*, *d)* 57 *l*?

35. 7 *l* mleka daje 1·05 *l* masła; ile *l* masła otrzymamy z $24\frac{3}{5}$ *l* mleka?

Rozwiążemy to zadanie metodą włoską.

21 *l* mleka daje masła	1·05 *l* . 3 = 3·15 *l*
1 *l* „ „ „	1·05 *l* : 7 = 0·15 *l*
2 *l* „ „ „	0·15 *l* . 2 = 0·30 *l*
$\frac{1}{5}$ *l* „ „ „	0·15 *l* : 5 = 0·03 *l*
$\frac{2}{5}$ *l* „ „ „	0·03 *l* . 2 = 0·06 *l*
Razem $24\frac{3}{5}$ *l* mleka daje masła	3·69 *l*

Oblicz w ten sposób, ile *l* masła otrzymasz z: *a)* $15\frac{3}{4}$ *l* mleka, *b)* $22\frac{1}{2}$ *l* mleka, *c)* $33\frac{3}{5}$ *l* mleka?

36. Za przewóz $\frac{3}{2}$ *t* towaru zapłacił kupiec 150 *zł* 30 *gr*; ile zapłaci za przewóz 5 *t* towaru? Oblicz metodą włoską!

37. Pewien kapitał przynosi w 8 miesiącach 1680 *zł* dochodu; jaki dochód przyniesie w: *a)* 20 miesiącach, *b)* $2\frac{1}{2}$ lat, *c)* $1\frac{1}{2}$ roku? Oblicz metodą włoską!

38. 1 m^2 blachy waży 20 *kg*; jakie pole ma blacha, której ciężar wynosi: *a)* 115 *kg*, *b)* 85 *kg*, *c)* 162 *kg*? Oblicz metodą włoską!

39. W głębokości 350 *m* jest temperatura 33° C, a w głębokości 25 *m* — 8° C; w jakiej głębokości jest temperatura 21° C, jeśli przyjmiemy, że (począwszy od 25 *m*) przyrost temperatury jest wprost proporcjonalny do przyrostu głębokości?

40. Obwód koła podzielono na 360 równych części tak zwanych stopni łukowych, każdy stopień na 60 minut łukowych, każdą minutę na 60 sekund łukowych; jak długi jest łuk 12° 30′ 15″, jeśli obwód tego koła ma 180 *m*?

Wielkości odwrotnie proporcjonalne.

Określenia.

1. Ile *m* płótna kupimy za 60 *zł*? Odpowiedź zależeć będzie od tego, ile kosztuje 1 *m*.

Jeżeli 1 *m* kosztuje 1 *zł*, to kupimy 60 *m*; gdyby 1 *m* kosztował dwa razy więcej t. j. 2 *zł*, to kupilibyśmy dwa razy mniej t. j. 30 *m* płótna; gdyby 1 *m* kosztował trzy razy więcej (niż w pierwszym przypadku) t. j. 3 *zł*, to kupilibyśmy trzy razy mniej (niż w pierwszym przypadku) t. j. 20 *m* i t. d. Wyniki zaznaczone mamy w tabelce.

Cena 1 *m* płótna w *zł*. . . .	1	2	3	4	5	6
Liczba *m* kupiona za 60 *zł* . .	60	30	20	15	12	10

Rys. 10.

Podobnie rzecz przedstawia się z innemi towarami. Jeżeli cena 1 *kg* jakiegoś towaru jest 2, 3,... razy większa niż drugiego, to za tę samą kwotę pieniędzy (np. za 60 zł) kupimy 2, 3... razy mniej pierwszego towaru, niż drugiego.

Mówimy, że liczba *kg* towaru, jaką możemy kupić za pewną kwotę, jest odwrotnie proporcjonalna do ceny 1 *kg* tego towaru.

Uwaga. Jeżeli 1 *m* płótna kosztuje 3 *zł*, to 20 *m* kosztuje:

$$3\ zł \,.\, 20 = 60\ zł.$$

Mnożąc więc cenę 1 *m* przez liczbę *m*, otrzymujemy kwotę wydaną. Wynika stąd, że mnożąc przez siebie liczby odpowiednie w tabelce (rys. 10), otrzymamy 60. Zatem:

$$1 \,.\, 60 = 2 \,.\, 30 = 3 \,.\, 20 = 4 \,.\, 15 = 5 \,.\, 12 = 6 \,.\, 10 = 60.$$

Jeżeli iloczyn liczb odpowiednich w pewnej tabelce jest zawsze ten sam (jak w tab. rys. 10), wówczas mówimy, że liczby jednego wiersza są odwrotnie proporcjonalne do liczb drugiego wiersza.

Przykłady takich tabelek podają nam rys. 11 i rys. 12.

1	2	3	4
2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

Rys. 11.

3	2	9	6
6	9	2	3

Rys. 12.

W tabelkach powyższych liczbom 2, 3 razy większym odpowiadają liczby 2, 3 razy mniejsze.

2. Jeżeli 1 robotnik wystawi mur w 12 dniach, to 2 robotników wykona tę pracę w czasie 2 razy krótszym t. j. w 6 dniach, 3 robotników w czasie 3 razy krótszym t. j. w 4 dniach, 6 robotników — w 2 dniach, 12 robotników — w 1 dniu. Widzimy zatem, że czas potrzebny na wykonanie pewnej pracy zależy od liczby robotników w ten sposób, że 2, 3, 4 razy więcej robotników wykona tę samą pracę w czasie odpowiednio 2, 3, 4 razy krótszym.

Mówimy, że czas potrzebny do wykończenia pewnej pracy, jest odwrotnie proporcjonalny do liczby robotników.

3. Na tabelce zaznaczone mamy czasy zużyte na przebycie 60 *m* drogi, przy odpowiednich prędkościach.

Prędkość t. j. droga przebyta w 1 sek. podana w *m*	Pociąg osobowy 10	Pociąg pośp. 20	Samochód 30	Samolot 40	Kula karabinowa 600
Czas zużyty na przebycie 60 *m* podany w sek.	6	3	2	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Z tabelki powyższej widzimy, że pociąg pośpieszny, jadący z prędkością dwa razy większą niż pociąg osobowy, przebywa tę samą drogę w czasie dwa razy krótszym; samochód, jadący z szybkością trzy razy większą niż pociąg osobowy, przebywa tę drogę w czasie trzy razy krótszym i t. d.

Czas potrzebny na przebycie pewnej drogi jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do prędkości.

W przykładach 1., 2., 3. występowały dwie wielkości od siebie zależne: 1) liczba *m* płótna (jaką możemy kupić za pewną kwotę pieniędzy np. za 60 *zł*) zależy od ceny 1 *m* płótna; 2) czas potrzebny do wykonania pewnej pracy zależy od liczby robotników; 3) czas potrzebny na przebycie pewnej drogi zależy od prędkości.

Wielkości występujące w każdym z powyższych przykładów nazwaliśmy o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n e m i.

Aby się przekonać, czy dwie wielkości zależne od siebie są odwrotnie proporcjonalne, należy zbadać:

1) czy zwiększając jedną, tem samem zmniejszamy drugą;

2) czy zwiększając jedną 2, 3... razy tem samem zmniejszamy drugą odpowiednio 2, 3... razy.

Pomocną jest rzeczą w tym celu sporządzić tabelkę i zbadać, czy liczby jednego wiersza są odwrotnie proporcjonalne do liczb drugiego wiersza, innemi słowy, czy iloczyn odpowiednich liczb jest zawsze ten sam.

Uwaga. Za 60 *zł* można kupić:

30 *kg* towaru po 2 *zł* za 1 *kg*
lub 12 *kg* towaru po 5 *zł* za 1 *kg*.

Występują tu wielkości odwrotnie proporcjonalne; ile razy zatem 30 *kg* jest większe od 12 *kg*, tyle razy 2 *zł* jest mniejsze od 5 *zł*.

Aby się przekonać, ile razy 30 *kg* jest większe od 12 *kg*, należy utworzyć iloraz:

$$30:12.$$

Aby się przekonać, ile razy 2 *zł* jest mniejsze od 5 *zł* należy utworzyć iloraz:

$$5:2.$$

W obu wypadkach ilorazy muszą być sobie równe. Zatem:

$$30:12=5:2.$$

Nazwijmy odwrotnością ilorazu nowy iloraz, który powstał przez przestawienie dzielnej z dzielnikiem.

A więc $5:2$ jest odwrotnością ilorazu $2:5$.

Jeśli za tę samą kwotę kupimy 2 gatunki towaru, to iloraz ich ciężarów równa się odwrotności ilorazu odpowiadających cen za 1 *kg* towaru.

Podobnie, jeśli pewną pracę

16 robotników wykona w 6 dniach,
to 12 robotników wykona w 8 dniach.

Zatem $16:12=8:6.$

Zadania.

1. W następujących zadaniach sporządź odpowiednie tabelki i przekonaj się, że liczby jednego wiersza są odwrotnie proporcjonalne do liczb drugiego wiersza. Wskaż następnie w każdem zadaniu te wielkości, których proporcjonalność wynika z tabelki. Sporządź wkońcu wykres graficzny w odpowiedniej skali!

a) Jeżeli 30 robotników wykonuje pewną pracę w 1 dniu, to ilu robotników wykona tę pracę w: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 5, *d)* 6, *e)* 10, *f)* 15 dniach?

b) Jeżeli pewien odcinek podzielimy na 12 równych części, to taka część wynosi 1 *cm*; jaka jest długość części, jeśli dany odcinek podzielimy na: *a)* 3, *b)* 4, *c)* 6, *d)* 24, *e)* 120 równych części?

c) Jeśli koło na pewnej drodze zrobiło 100 obrotów, to ile obrotów na tej samej drodze wykona koło o obwodzie: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4 razy mniejszym, *e)* 2, *f)* 4, *g)* 25 razy większym?

d) Wiedząc, że w 1 sekundzie człowiek pływający robi drogę 1 *m*, w chodzie 1·5 *m*, wioślarz 2 *m*, człowiek w biegu 3 *m*, na rowerze 6 *m*, oblicz kolejno czasy, potrzebne na przebycie drogi 60 *m*!

2. Narysuj prostokąty o polu 6 cm^2 i o podstawie: 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm*; przekonaj się, że wysokości są odwrotnie proporcjonalne do podstawy!
3. Narysuj trójkąty o polu 4 cm^2 i o wysokości: 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*; przekonaj się, że podstawy są odwrotnie proporcjonalne do wysokości!
4. Jeden robotnik wykona pewną pracę w tygodniu, pracując dziennie 6 godzin; ile godzin dziennie musi pracować: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 5, *e)* 6 robotników, aby tę pracę również w tygodniu wykonać? Przekonaj się, że liczba robotników jest odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennej pracy!
5. Iloczyn wynosi 30; czy mnożna jest odwrotnie proporcjonalna do mnożnika?
6. Dzielna wynosi 60; czy wartość ilorazu jest odwrotnie proporcjonalna do dzielnika?
7. Czy wartość ułamka o liczniku 6 jest odwrotnie proporcjonalna do mianownika?

Reguła trzech prosta.

(Dla wielkości odwrotnie proporcjonalnych).

Pewną pracę wykonało 20 robotników w 18 dniach; w ilu dniach wykona tę pracę 12 robotników?

Zadanie to rozwiążemy dwoma sposobami:

1. 20 robotników potrzebuje 18 dni,
 1 robotnik potrzebuje 20 razy więcej dni, t. j. 360 dni,
 12 robotników potrzebuje 12 razy mniej dni, t. j. 30 dni.

A więc 12 robotników wykona powyższą pracę w 30 dniach.

2. Oznaczając przez x liczbę dni, w których 12 robotników wykona pracę, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

Pewną pracę wykona:

20 robotników w 18 dniach
12 robotników w x dniach.

Ponieważ liczba 20 robotników jest tyle razy większa od liczby 12 robotników, ile razy liczba x jest mniejsza od liczby 18, zatem mamy proporcję:

$$20 : 12 = x : 18$$

czyli

$$x : 18 = \tfrac{20}{12}.$$

Ponieważ szukamy dzielnej więc:

$$x = \tfrac{20}{12} \,.\, 18 = 30.$$

A więc 12 robotników wykona pracę w 30 dniach.

Zadania.

1. 12 robotników wykona pewną pracę w $2\frac{1}{2}$ dniach; w ilu dniach wykona tę samą pracę 15 robotników?
2. 30 robotników wykona pewną pracę w 16 godzinach; ilu robotników wykona tę samą pracę w 12 godzinach?
3. Pewien zapas żywności wystarczy dla 6 ludzi na 10 dni; na ile dni starczy tenże zapas dla 4 ludzi?
4. Pewien zapas żywności wystarczy dla 16 ludzi na 35 dni; dla ilu ludzi wystarczy ten zapas na 28 dni?
5. Pociąg, jadący z prędkością 50 *km* na godzinę, przebywa pewną drogę w $7\frac{1}{2}$ godzinach; z jaką prędkością musiałby jechać pociąg, aby tę samą drogę przebyć w 6 godzinach?
6. Dla przebycia pewnej drogi musi piechur zrobić 1440 kroków, każdy o długości $\frac{3}{4}$ *m*; ile kroków musiałby zrobić piechur, gdyby długość każdego kroku wynosiła 80 *cm*?
7. Kupiono 1000 dolarów, płacąc 8 *zł* 92 *gr* za 1-go dolara; ileby kupiono dolarów za tę samą kwotę, gdyby 1 dolar kosztował 9 *zł*?

8. Zarządca majątku otrzymał pewną kwotę pieniędzy, by wypłacił tygodniowy (t. j. 6 dniowy) zarobek 72 robotnikom. Pokazało się jednak, że było zatrudnionych 108 robotników; iludniowy zarobek może im zarządca wypłacić?
9. Posłaniec odbywa drogę z miejscowości *A* do *B* w 6 godzinach, idąc z prędkością $4\frac{1}{2}$ *km* na 1 godzinę; ile *km* musi robić w 1 godzinie, skoro ma przebyć tę drogę w 5 godzinach?
10. Stefek, chcąc sobie sprawić rakietę tennisową, musiałby składać na ten cel przez 3 miesiące po 40 *gr* dziennie; po ile musi składać, jeżeli chce kupić rakietę po 2 miesiącach?
11. Gdy rurą wpływa 21 *l* wody na minutę, to zbiornik napełni się w 12 godzinach; ile musiałoby wpływać wody na minutę, by zbiornik napełnił się w 9 godzinach? W jakim czasie napełniłby się zbiornik, gdyby rurą wpływało 36 *l* wody na minutę?
12. Przednie koło u wozu ma 3 *m* obwodu, tylne zaś $3\frac{3}{4}$ *m*; ile obrotów zrobiło w czasie jazdy tylne koło, gdy przednie zrobiło 460 obrotów?
13. Pewną sumę podzielono równo między 7 osób, przyczem każda otrzymała 30 *zł*; ile otrzymałaby każda osoba, gdyby tę sumę podzielono równo między 15 osób? Między ile osób należałoby podzielić tę sumę, chcąc, aby każda otrzymała po 21 *zł*?
14. Pewien odcinek podzielono na 12 równych części, o długości 8 *cm*; na ile równych części należałoby podzielić ten odcinek, aby każda część miała długość 6 *cm*? Jakiej długości byłaby każda część, gdyby odcinek nasz podzielono na 64 równych części?
15. 20 robotników wykona pewną pracę w 18 dniach; w ilu dniach wykona tę samą pracę 15 robotników?
Rozwiązanie: 5 robotników wykona tę pracę w czasie: 18 dni . 4 = 72 dni. Zatem 15 robotników wykona tę pracę w czasie 3 razy krótszym, t. j. 72 dni : 3 = 24 dni.
Rozwiąż w podobny sposób następujące zadania:
a) 9 robotników wykona pewną pracę w 24 dniach; w ilu dniach wykona tę pracę 12 robotników?
b) Zadania: 1, 2, 3 i 4 str. 19.

c) Książka ma 245 stron, a na każdej 40 wierszy; ile wierszy należałoby pomieścić na każdej stronie, aby ta książka miała 280 stron?
16. Kąt 42^0 mieści się w pewnym kącie 6 razy; ile razy mieści się w tym kącie kąt 36^0?
17. Dwa prostokąty mają równe pola; jeden z tych prostokątów ma podstawę 8 *cm*, wysokość 4 *cm*, drugi zaś ma podstawę: *a)* 6 *cm*, *b)* 10 *cm*, *c)* $7\frac{1}{2}$ *cm*. Jaka jest wysokość drugiego prostokąta? Rysunek!
18. Na pokrycie mebli potrzeba 24·5 *m* materji, szerokiej na 2 *m*; ile *m* materji potrzeba, jeśli jej szerokość wynosi 1·8 *m*?
19. 20 robotników ukończy pewną pracę w 18 dniach; w ilu dniach ukończyłoby tę pracę 12 robotników?
Rozwiążemy to zadanie w następujący sposób:
Zapiszmy je

20 robotników — 18 dni
12 „ — *x* „

Szukaną liczbę dni oznaczyliśmy literą *x*. Ponieważ liczba robotników i liczba dni pracy są wielkościami odwrotnie proporcjonalnemi, więc iloczyny odpowiadających sobie liczb muszą być sobie równe. Liczbie 20 odpowiada liczba 18, liczbie zaś 12 odpowiada szukana liczba *x*.
Mamy zatem:

$$x \cdot 12 = 18 \cdot 20,$$

więc $$x \cdot 12 = 360.$$

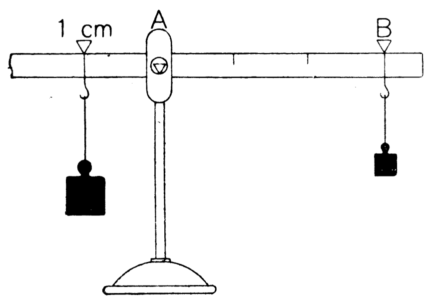
Ponieważ szukana liczba jest mnożną, więc

$$x = 360 : 12 = 30.$$

Widzimy, że 12 robotników wykona pracę w 30 dniach.
Oblicz w podobny sposób, w ilu dniach ukończyłoby pracę: *a)* 5 robotników, *b)* 8 rob., *c)* 10 rob., *d)* 18 rob., *e)* 24 rob.
20. Z pewnej ilości wełny można otrzymać 72 *m* sukna $1\frac{3}{4}$ *m* szerokiego; *a)* ile *m* sukna, szerokiego na $2\frac{1}{4}$ *m*, można otrzymać z tej samej ilości wełny? *b)* jak szerokie będzie sukno, jeśli jego długość wyniesie 63 *m*?
21. Na pokrycie dachu zużyto 3500 dachówek, przyczem pole dachówki wynosiło 3·6 dm^2; ile dachówek zużytoby na pokrycie tego dachu, jeśliby pole dachówki wynosiło 4 dm^2?

22. Dwa trójkąty mają równe pola; jeden z nich ma podstawę 6 *cm*, wysokość 4 *cm*; drugi zaś ma:
   a) podstawę: *a)* 8 *cm*, *b)* 6 *cm*, *c)* 3 *cm*; jaka jest wysokość drugiego trójkąta?
   b) wysokość: *a)* 2 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* 3 *cm*; jaka jest podstawa drugiego trójkąta? Rysunek!

23. Na rys. 13 mamy dźwignię, t. j. belkę sztywną, która może obracać się około punktu *A*. Po lewej stronie belki zawieszono ciężar 1 *kg* w odległości 1 *cm* od punktu *A*. Ciężar ten możemy zrównoważyć, wieszając w dowolnym punkcie *B* (po prawej stronie) odpowiedni ciężarek. Doświadczenie uczy, że: *a)* wielkość tego ciężarka jest odwrotnie proporcjonalna do odległości *AB*; *b)* ciężarek ten równa się 1 *kg*, jeśli *AB* ma 1 *cm*.



Rys. 13.

   a) Jaki ciężarek należy powiesić, jeśli *AB* ma długość: 2 *cm*, $2\frac{1}{2}$ *cm*, $3\frac{3}{4}$ *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, $\frac{1}{2}$ *cm*, $\frac{3}{4}$ *cm*?
   b) Ile wynosi *AB*, jeśli ciężarek ma: 1 *kg*, $\frac{1}{2}$ *kg*, $\frac{3}{4}$ *kg*, 200 *g*, 2 *kg*?
   Do zadań *a)* i *b)* sporządź tabelkę i wykres w odpowiedniej skali!

Wielkości zależne od kilku innych.

Zadanie: 16 robotników wykonało pewną pracę w 15 dniach, pracując po 9 godzin dziennie; w ilu dniach wykonałoby tę pracę 12 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie?

Rozwiązanie: Przyjmujemy najpierw stałą liczbę godzin dziennej pracy, a mianowicie 9 godzin pracy.

Rozumujemy:

jeśli 16 robotników wykona pracę w 15 dniach,
to 1 robotnik wykona pracę w 15 . 16 dniach,
a 12 robotników wykona pracę w $\frac{15 \cdot 16}{12}$ dniach.

Przyjmujemy teraz stałą liczbę robotników, a mianowicie 12 robotników i rozumujemy:

jeśli przy 9-godzinnej dziennie pracy potrzeba $\frac{15 \cdot 16}{12}$ dni,
to przy 1-godzinnej dziennie pracy potrzeba $\frac{15 \cdot 16 \cdot 9}{12}$ dni,
a przy 8-godzinnej dziennie pracy potrzeba $\frac{15 \cdot 16 \cdot 9}{12 \cdot 8}$ dni,
t. j. $22\frac{1}{2}$ dnia.

Zatem 12 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, potrzebuje $22\frac{1}{2}$ dnia na wykonanie zadanej pracy.

Wynik ten otrzymaliśmy rozwiązując 2 zadania z reguły trzech prostej. Ten sposób rozwiązywania nazywamy **reguła trzech złożoną**.

Zwyczajnie układa się następujący schemat rozwiązywania:

$$\begin{array}{rcl}
16 \text{ rob.} & — & 9 \text{ godz.} — 15 \text{ dn.} \\
1 \text{ rob.} & — & 9 \text{ godz.} — 15 \cdot 16 \text{ dn.} \\
12 \text{ rob.} & — & 9 \text{ godz.} — \frac{15 \cdot 16}{12} \text{ dn.} \\
12 \text{ rob.} & — & 1 \text{ godz.} — \frac{15 \cdot 16 \cdot 9}{12} \text{ dn.} \\
12 \text{ rob.} & — & 8 \text{ godz.} — \frac{15 \cdot 16 \cdot 9}{12 \cdot 8} \text{ dn.}
\end{array}$$

W zadaniu powyższem występowały następujące wielkości: liczba robotników, liczba dni pracy i liczba godzin pracy dziennej. Liczba dni potrzebna do wykonania pewnej pracy zależy od liczby robotników i liczby godzin dziennej pracy.

Przy tej samej liczbie godzin dziennej pracy, dwa, trzy... razy więcej robotników wykona pracę w dwa, trzy... razy mniejszej liczbie dni. Ta sama liczba robotników pracując dwa, trzy... razy więcej godzin na dzień wykona pracę w dwa, trzy... razy mniejszej liczbie dni.

Mówimy, że liczba dni pracy jest odwrotnie proporcjonalna do liczby robotników i odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennej pracy.

Podamy teraz inne przykłady, w których jedna wielkość zależy od kilku innych wielkości:

1. Pole prostokąta zależne jest od długości podstawy i długości wysokości. Jeżeli podstawę kilka razy powiększymy nie zmieniając wysokości, to tyleż razy powiększy się

pole. Jeżeli kilka razy powiększymy wysokość nie zmieniając podstawy, to tyleż razy powiększy się pole.

Pole prostokąta zależy zatem w ten sposób od podstawy i wysokości, że jest wprost proporcjonalne do długości podstawy (przy tej samej wysokości) i wprost proporcjonalne do długości wysokości (przy tej samej podstawie).

2. Liczba dni marszu zależy od długości drogi i od liczby godzin dziennego marszu. Liczba dni marszu jest wprost proporcjonalna do długości drogi przy tej samej liczbie godzin dziennego marszu, a odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennego marszu przy tej samej długości drogi.

Zadania.

1. 18 robotników zarabia w 5 dniach 630 *zł*; ile zarobi 27 robotników w 6 dniach?
2. 7 robotników zarabia w 13 dniach 638 *zł* 82 *gr*; ilu robotników zarobi 1053 *zł* w 15 dniach?
3. 5 robotników zarabia w 7 dniach 254 *zł* 10 *gr*; w ilu dniach 11 robotników zarobi 638 *zł* 88 *gr*?
4. Piechur, idący przez 12 dni po 5 godzin dziennie, przechodzi 270 *km*; ile *km* przejdzie, idąc przez 16 dni po $5\frac{1}{2}$ godz. dziennie?
5. 15 robotników, pracujących po 9 godzin dziennie, wykopałoby w 4 dniach rów 100 *m* długi; w ilu dniach wykopie 9 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, rów długości 120 *m*?
6. Wykopanie rowu 15 *m* długości, 2 *m* szerokości i $\frac{3}{4}$ *m* głębokości kosztuje 135 *zł*; jakiej długości jest rów, którego wykopanie kosztuje 270 *zł*, a który ma $2\frac{1}{4}$ *m* szerokości i 80 *cm* głębokości?
7. Zapas chleba starczy dla 324 ludzi na 17 dni, jeżeli wydziela się dziennie po $\frac{3}{4}$ *kg* na osobę; na ile dni wystarczy ten zapas chleba dla 306 ludzi, otrzymujących dziennie $\frac{1}{2}$ *kg* na osobę?
8. 316 latarń, palących się po 7 godzin dziennie, zużywa w 24 dniach 7963·2 m^3 gazu; ile latarń, palących się po 9 godzin dziennie, zużyje w ciągu 27 dni 15199·65 m^3 gazu?
9. Koło o obwodzie 3 *m* przejechało w 10 minut 6 *km*; w ilu minutach przejedzie 8 *km* koło o obwodzie $2\frac{1}{2}$ *m*, jeśli w minucie obraca się tyle razy co poprzednie?

10. Za $10\frac{1}{2}$ *m* sukna o szerokości $1\frac{1}{4}$ *m* zapłacono 120 *zł* 60 *gr*; ile zapłaconoby za $3\frac{1}{2}$ *m* tego sukna o szerokości $1\frac{1}{2}$ *m*?
11. Chodnik 100 *m* długości, $4\frac{1}{2}$ *m* szerokości ułożono z 3600 płyt; jakiej długości chodnik możnaby ułożyć z 5400 takich płyt, jeżeliby szerokość jego miała wynosić 6 *m*?
12. Zrobiono zapas siana na 40 tygodni dla 36 koni, licząc po $12\frac{1}{2}$ *kg* dziennie na konia; na jak długo wystarczyłby ten zapas siana dla 30 koni, jeśli dziennie wydawać się będzie 10 *kg* na konia?
13. Z 12 *kg* przędzy otrzymuje się 130 *m* płótna, 0·75 *m* szerokiego; ile *m* płótna, szerokiego na 1·25 *m*, otrzymamy z 18 *kg* przędzy?
14. 7 monterów potrzebuje 6 dni na założenie przewodu elektrycznego 273 *m* długiego; w jakim czasie 5 monterów założy przewód 325 *m* długi?
15. Aby wypompować wodę z kopalni potrzeba 20 pomp, pracujących przez 12 dni po 15 godzin dziennie. Po upływie 5 dni 4 pompy popsuły się, a pozostałe pompowały po 18 godzin dziennie; w jakim czasie wypompowano wodę?
16. 8 robotników zgodziło się wybrukować podwórze w 13 dniach; po 5 dniach, pracując 8 godzin dziennie, wykonali trzecią część pracy. Ile godzin przez pozostałe dni muszą dziennie pracować, aby na czas pracę wykończyć?
17. Dwóch robotników wykonało pewną pracę w 10 godzinach; jeden z robotników wykonałby sam tę pracę w 15 godzinach. W jakim czasie drugi robotnik wykonałby tę pracę?
18. Puszczając wodę jednym kurkiem można napełnić basen w 2 godzinach, drugim zaś w 4 godzinach; jaki ułamek basenu napełni się wodą, jeżeli oba kurki będą równocześnie otwarte przez $\frac{3}{4}$ godziny?

Procenty.

Jednym **procentem** jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{100}$ tej wielkości.

Dwa, trzy, pięć, półtora procent jakiejś wielkości są to odpowiednio $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{1·5}{100}$ tej wielkości.

$$\text{Np. 5 procent} \quad 60 = \frac{5}{100} \text{ z } 60 = 60 \cdot \frac{5}{100} = 3,$$

$$\tfrac{1}{2} \text{ procent } 1000 = \frac{0{\cdot}5}{100} \text{ z } 1000 = 1000 \cdot \frac{0{\cdot}5}{100} = 5.$$

$$100 \text{ procent } \quad 12 = \frac{100}{100} \text{ z } 12 = 12 \cdot \frac{100}{100} = 12.$$

Wyraz procent oznaczamy: %, a więc 7% oznacza siedem procent, $\frac{1}{2}$% oznacza pół procentu.

Przykłady.

1. Wino zawiera 15% alkoholu to znaczy, że w 100 *l* wina zawartych jest 15 *l* alkoholu.

2. W lasach Polski jest 60% sosny, to znaczy, że przeciętnie na 100 morgów lasu jest w tem 60 morgów sosny.

3. Polska produkuje 14·4% światowej produkcji ziemniaków, to znaczy, że ze zbiorów całego świata na 100 *q* ziemniaków wypada 14·4 *q* ziemniaków, pochodzących z Polski.

4. Księgarz, zakupując hurtownie książki, otrzymuje 30% opustu, czyli rabatu, to znaczy, że za towar wartości 100 *zł* płaci o 30 *zł* mniej, t. j. płaci 70 *zł*.

Zadania.

1. Oblicz: 3% z 100, 15% z 20, $7\frac{1}{2}$% z 1000, 200% z $2\frac{1}{2}$, 1% z 700, 6% z 15000, 50% z 72, $\frac{1}{10}$% z 10000, 8% z 25, 10% z 40, 5% z 0·125, 100% z 7·23.
2. Ile to jest: 8% z 1 *m*, 4% z 1 *kg*, 12% z 1 *km*, 2% z 1 dm^2, $3\frac{1}{2}$% z 1 m^3, 75% z 1 *l*?
3. Ile to jest: 1%, 3%, $1\frac{1}{2}$%, 8%, 11%, $5\frac{1}{2}$% kwoty 300 *zł*?
4. Dlaczego: *a)* np. 5% liczby jest proporcjonalny do tej liczby, *b)* procent liczby np. 600 jest proporcjonalny do procentu? Sporządź tabelkę!
5. Jakim ułamkiem danej wielkości jest: 5%, 15%, 75%, $\frac{1}{2}$%, $\frac{1}{10}$% tej wielkości?
6. Jakim procentem danej liczby jest 10% z 10% tej liczby, 20% z 20%, 8% z 25%, 25% z 8%?
7. Wyraź procentem następujące ułamki danej wielkości: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{50}$, $\frac{13}{25}$, $1\frac{1}{2}$!

8. Wypełnij kratki liczbami dziesiętnemi, które otrzymasz, obliczając procent wskazany przez kolumnę z liczby wskazanej przez wiersz! (A więc w miejsce litery *a* należy wpisać 3% z 4).

	1%	2%	3%	4%
1	0·01	0·02		
2	0·02			
3				
4			*a*	

Przy pomocy powyższej tabelki oblicz:
a) 7% z 80, 7% z 800, 7% z 8000;
b) 4% z 30, 4% z 300, 4% z 30000;
c) 3% z 17, 5% z 45, 9% z 63, 8% z 16·5, 7% z 530, 9% z 2150.

Uwaga. Np. 5% z 265 = (5% z 200) + (5% z 60) + + (5% z 5).

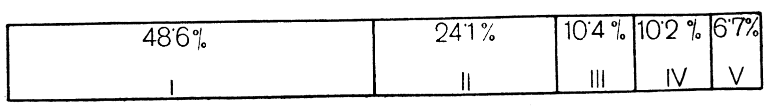
9. Na towarze, kupionym za 7250 *zł*, kupiec zarobił 6%; ile *zł* zarobił i za ile sprzedał towar?
10. Na towarze, kupionym za 5200 *zł*, kupiec stracił $1\frac{1}{2}$%; ile kupiec stracił i za ile sprzedał towar?
11. W klasie liczącej 35 uczniów, 80% przeszło do następnej klasy; ilu uczniów przeszło?
12. W bitwie, w której brało udział 1500 żołnierzy, zginęło 11%; ilu żołnierzy pozostało przy życiu?
13. Czynsz pewnej dzierżawy, wynoszący 2800 *zł* rocznie, podniesiono o 6%; ile wynosi zwiększony czynsz?
14. Za bilet 3-ciej klasy zapłacono 18 *zł* 30 *gr*, bilet zaś 2-giej klasy jest o 50% droższy; ile kosztuje bilet 2-giej klasy?
15. Cenę za towar, który kosztował 7 *zł* 50 *gr*, podniesiono o 8%; ile kosztował towar po podrożeniu?
16. Kupiec zakupił 1250 *l* wina za 8125 *zł*; po czemu winien sprzedawać 1 *l*, aby zarobić 7%?
17. Książka kosztuje 15 *zł*, z czego autor otrzymuje 11%, księgarz 30%, wydawca 40%, a reszta pokrywa koszta druku książki; ile kosztuje przeciętnie druk jednej książki? Ile księgarz zarobił na książce, przy sprzedaży której dał 12% opustu?
18. Przedsiębiorstwo przyniosło 285000 *zł* dochodu brutto; koszta produkcji wynosiły 62%, administracji 11%, podatki 13%. Jaki był czysty dochód?
19. Szynka zawiera 28% wody, 25% białka, 36% tłuszczu,

a resztę stanowią sole; oblicz ile każdej z tych substancyj zawiera się w $1\frac{1}{2}$ *kg* szynki?

20. Mięso wołowe traci wskutek gotowania 15% swego ciężaru; ile waży po ugotowaniu $\frac{3}{4}$ *kg* mięsa wołowego?
21. Las, którego stan drzewny wynosi 5868 m^3 posiada roczny przyrost $2\frac{1}{3}\%$; jeśli 1 m^3 drzewa kosztuje 18 *zł*, jaka jest wartość tego lasu po upływie roku?
22. Towar waży brutto (z opakowaniem): *a)* 18·5 *kg*, *b)* 5·6 *kg*, *c)* 4·6 *kg*, tara (opakowanie) zaś wynosi; *a)* 8%, *b)* $12\frac{1}{2}\%$, *c)* $8\frac{3}{4}\%$ tego ciężaru; ile waży towar netto (bez opakowania)?

23) Sprzedano majątek ziemski za: *a)* 650.000 *zł*, *b)* 440.000 *zł*, *c)* 300.000 *zł*; pośrednik, przy pomocy którego ta sprzedaż doszła do skutku, zastrzegł sobie: *a)* 1·4%, *b)* 1·2%, *c)* 1% ceny kupna czyli tak zwaną prowizję; ile otrzymał prowizji?

24. Ktoś ubezpieczył dom od ognia na: *a)* 60.000 *zł*, *b)* 20.000 *zł*, *c)* 16.000 *zł* i płacił zato rocznie: *a)* 1·6%, *b)* 3%, *c)* $\frac{1}{2}\%$ tej kwoty, czyli tak zwaną premję; ile wynosiła premja?
25. Kupiec przy sprzedaży towaru za 1250 *zł* dał 20% opustu; z kwoty, jaka stąd wynikła, dał dalszych 3% opustu, ponieważ towar był płacony gotówką. Ile otrzymał za towar?
26. Jednem „pro mille" jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{1000}$ tej wielkości i oznaczamy: ‰. Pro mille z jakiejś wielkości np. 5‰ z 60.000 oznacza $\frac{5}{1000}$ z $60.000 = 300$.
    Oblicz: *a)* 6‰ z 1020 *zł*, *b)* 4‰ z 15.400 *zł*, *c)* 1‰ z 1 *kg*, *d)* 4‰ z 1 dm^2, *e)* 5‰ z 1 dm^3?
27. Miasto miało 100.000 ludności. Przyrost ludności w ciągu dwóch lat wynosił kolejno: 6‰ i 5‰; jaka była ludność tego miasta po upływie tych dwóch lat?
28. W Polsce jest 48·6% pola ornego, 24·1% lasów, 10·4% nieużytków, 10·2% łąk, 6·7% pastwisk. Przyjmując, że



Rys. 14.

pole prostokąta o podstawie 1 *dm* i o wysokości 1 *cm* (rys. 14) jest obrazem powierzchni całej Polski, podzielono

ten prostokąt na prostokąty I, II, III, IV i V, które odpowiednio obrazują użycie ziemi w Polsce;

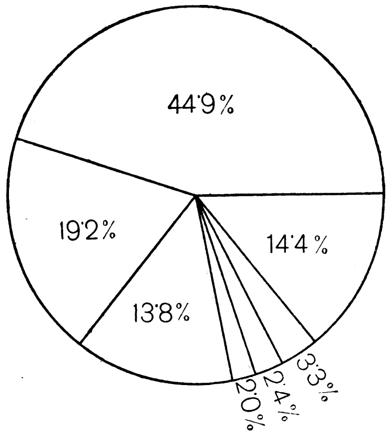
a) jakie podstawy musiano obrać w tych prostokątach?

b) przyjmując powierzchnię Polski 388.390 km^2, oblicz powierzchnie: pola ornego, łąk, pastwisk, lasów i nieużytków!

29. Przedstaw, jak wyżej, rodzaj lasu w Polsce, wiedząc, że ogólnej powierzchni lasu stanowi: sosna 60%, świerk 12%, olcha 6%, dąb 5%, jodła 3%, brzoza 3%, buk 3%, inne gatunki 8%!
30. Zbiór lnu w r. 1928 wyraża się następującemi procentami całkowitej produkcji światowej: Z. S. R. R. 58·6%, Polska 9%, Francja 6·4%, Litwa 6%, Belgja 3·7%, Łotwa 2·5%, Holandja 2·4%, Niemcy 2·2%, inne kraje 9·2%;
    a) wiedząc, że światowa produkcja wynosiła 5,800.000 *q*, oblicz produkcję poszczególnych krajów!
    b) przedstaw to obrazowo, jak w zadaniu 28!
31. Długość linij kolejowych na świecie wynosi 1,229.800 *km*, z czego na Europę przypada 31·8%, na Amerykę Północną 40·5%, Południową 7·3%, na Australję 3·9%, na Azję 11·7%, a na Afrykę 4·8%. Przyjmując odcinek 1 *dm* jako obraz długości wszystkich linij kolejowych na świecie, zaznacz na nim kolejno obrazy linij poszczególnych części świata i oblicz ich długości!
32. W roku 1929 zatrudnionych było w Polsce robotników: w górnictwie 19·4%, w hutnictwie 8·3%, w przemyśle włókienniczym 20%, metalowym 12·4%, mineralnym 9·3%, drzewnym 7·5%, spożywczym 6·8%, budowlanym 5·9%, chemicznym 4·8%, innym 5·6%;
    a) wiedząc, że razem robotników było 797.300, oblicz liczbę robotników, zajętych w poszczególnych gałęziach przemysłu!
    b) przedstaw to obrazowo, jak w zadaniu 28!
33. W r. 1928 wyprodukowano na całym świecie 442,900.000 *q* żyta, z czego przypada na: Z. S. R. R. 44·9%, Niemcy 19·2%, Polskę 13·8%, Czechosłowację 3·3%, Stany Zjednoczone 2·4%, Francję 2% i inne kraje 14·4%;
    a) oblicz produkcję w poszczególnych krajach!

b) jeżeli powierzchnia koła przedstawia nam produkcję światową, to produkcję poszczególnych krajów przedstawiają odpowiednie wycinki rys. 15.

Np. wycinek, dający obraz produkcji Z. S. R. R. ma kąt 44·9% z 360°. Jakim kątom odpowiadają inne wycinki?



Rys. 15.

34. Powierzchnia lądów wynosi 148,900.000 km^2, z czego przypada na: Europę 6·7%, Azję 29·7%, Afrykę 19·9%, Amerykę 28·2%, Australję 6%, Antarktydę 9·5%;
    a) oblicz powierzchnię poszczególnych lądów!
    b) przedstaw je obrazowo, jak w zadaniu 33!
35. W r. 1930 wywieziono z Polski towaru za 2.433,000.000 *zł*, z której to kwoty przypada na: Niemcy 25·7%, na Anglję 12·1%, Austrję 9·3%, Czechosłowację 8·9%, Z. S. R. R. 5·3%, Szwajcarję 4·6%, Holandję 3·4%, Francję 3·1%, a reszta na inne kraje;
    a) oblicz wartość wywiezionego towaru do poszczególnych krajów!
    b) przedstaw obrazowo jak w zadaniu 33!
36. Powietrze zawiera objętościowo 20·99% tlenu i 78·30% azotu; ile tlenu i azotu znajduje się w pokoju o wymiarach 4 *m*, 6 *m*, 3 *m*?

Obliczanie liczby, której procent jest znany.

Przykład 1.

Jakiej kwoty 5% równa się 65 *zł*?

Rozwiązanie:

a) 5% t. j. 5 setnych szukanej kwoty wynosi 65 *zł*, a więc 1 setna szukanej kwoty wynosi 65 *zł* : 5 = 13 *zł*.

Zatem szukana kwota wynosi 100 razy więcej t. j.

13 *zł* . 100 = 1300 *zł*.

b) Oznaczając przez *x zł* szukaną kwotę, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

jeśli od 100 *zł* mamy 5 *zł*
to „ *x zł* „ 65 *zł*.

Ponieważ występują tu wielkości wprost proporcjonalne, zatem:

$$x : 100 = 65 : 5 = 13.$$

Stąd $x = 13 \,.\, 100 = 1300.$

Szukana kwota wynosi zatem 1300 *zł*.

Przykład 2.

Jakiej kwoty $7\frac{3}{4}$% równa się 186 *zł*?

Rozwiązanie:

a) $7\frac{3}{4}$% t. j. $7\frac{3}{4}$ setnych szukanej kwoty wynosi 186 *zł*, a więc 1 setna szukanej kwoty wynosi 186 *zł* : $7\frac{3}{4}$ = 24 *zł*.

Szukana kwota wynosi zatem 100 razy więcej t. j.

24 *zł* . 100 = 2400 *zł*.

b) Podobnie jak w przykładzie 1 mamy:

100 *zł* — $7\frac{3}{4}$ *zł*
x zł — 186 *zł*.

A więc $x : 100 = 186 : 7\frac{3}{4} = 24.$

Stąd $x = 24 \,.\, 100 = 2400.$

Szukana kwota wynosi zatem 2400 *zł*.

Zadania.

1. Oblicz liczbę, której:
   a) 8% wynosi 16, *b)* 12% wynosi 20, *c)* 5·5% wynosi 45, *d)* 15% wynosi 105·5, *e)* $6\frac{1}{2}$% wynosi 1170, *f)* $3\frac{1}{2}$% wynosi 63, *g)* 4·5% wynosi 81.
2. Oblicz liczbę, której:
   a) 12% wynosi 6, *b)* 7% wynosi 2·1, *c)* 16% wynosi 0·4, *d)* $4\frac{1}{2}$% wynosi 1·8, *e)* 6% wynosi $1\frac{1}{2}$.
3. Oblicz liczbę, której:
   a) 100% wynosi 100, *b)* 18% wynosi 18, *c)* 1% wynosi 100, *d)* 12% wynosi 1, *e)* 100% wynosi 1.

4. Oblicz liczbę, której:
a) 120% wynosi 18, *b)* 130% wynosi 285, *c)* 145% wynosi 2840, *d)* $110\frac{1}{2}$% wynosi 48, *e)* 102·5% wynosi 648.
5. Ile kosztował towar, na którym kupiec, zarabiając 12%, zyskał 210 *zł*? Za ile sprzedał ten towar?
6. Kupiec sprzedał towar ze stratą $5\frac{1}{2}$%, wynoszącą 88 *zł*; za ile kupił i za ile sprzedał towar?
7. Spłacono 70% długu, co wyniosło 2730 *zł*; jaki był dług?
8. Księgarz daje 8% rabatu; jaka jest cena sprzedażna książek, od których rabat wynosi 32 *zł* 48 *gr*?
9. W pewnem mieście było 5170 mężczyzn, co wynosiło 47% ogółu mieszkańców; ile kobiet było w tem mieście?
10. *a)* Do następnej klasy przeszło 23 uczniów, co stanowiło 92% liczby uczniów w klasie; ilu uczniów było w klasie?
b) Do następnej klasy nie przeszło 3 uczniów, co stanowiło $6\frac{2}{3}$% liczby uczniów w klasie; ilu uczniów przeszło?
11. Jaka była w r. 1928 światowa produkcja: *a)* srebra, *b)* złota, jeśli: *a)* 21·8%, *b)* 52·7% tej produkcji wynosiło: *a)* 1746·4 *t*, *b)* 322·1 *t*?
12. W pewnym powiecie jest 82% urodzajnej ziemi i 1125 km^2 nieurodzajnej; jaki procent jest ziemi nieurodzajnej i jak wielki jest ten powiat?
13. W r. 1929 było w szkołach średnich 62% chłopców, dziewcząt zaś 78.000; ilu było wszystkich uczni?
14. 81% światowej produkcji siarki przypada na Stany Zjednoczone. Inne kraje produkują razem rocznie 471.000 *t*. Ile wynosi roczna produkcja Stanów Zjednoczonych?
15. Ludność Krakowa z początkiem r. 1931 wynosiła 212·000 t. j. 233% liczby mieszkańców z r. 1900; jaka była w r. 1900 ludność Krakowa?
16. Sprzedano dom za 155.000 *zł*, t. j. za kwotę, która wynosiła 128% kosztów budowy tego domu; ile na tej sprzedaży zarobiono?

Obliczanie procentu.

Przykład.

Jakim procentem kwoty 25 *zł* jest 3 *zł*?

Rozwiązanie:

a) 1% t. j. $\frac{1}{100}$ z 25 *zł* wynosi $\frac{25}{100}$ *zł*; 3 *zł* zawiera tych setnych części:

$$3\ zł : \frac{25}{100}\ zł = 12.$$

Zatem: 12 setnych z 25 *zł*, czyli 12% kwoty 25 *zł* = 3 *zł*.

b) Oznaczając przez x szukany procent, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

jeśli od 25 *zł* mamy 3 *zł*,
to od 100 *zł* mamy x *zł*.

Ponieważ występują tu wielkości wprost proporcjonalne, zatem:

$$x : 3 = 100 : 25 = 4.$$

Stąd $$x = 12.$$

Szukany procent wynosi więc 12%.

Zadania.

1. Jaki procent:

a) liczby 84 wynosi 63		*d)* liczby 75 wynosi 3	
b) „ 120 „ 6		*e)* „ 250 „ 24.	
c) „ 70 „ 14			

2. Jaki procent:

a) liczby 3 wynosi 21	*d)* liczby 40 wynosi 600
b) „ 15 „ 25	*e)* „ $\frac{1}{2}$ „ 10
c) „ 120 „ 270	*f)* „ 12·6 „ 84.

3. Jaki procent:

a) liczby 100 wynosi 1	*d)* liczby 16 wynosi 1
b) „ 31 „ 31	*e)* „ 1 „ 13.
c) „ 100 „ 100	

4. Kupiec zapłacił za towar 7200 *zł*, a sprzedał go za 7700 *zł*; jaki % ceny kupna zyskał kupiec?
5. Kupiono towar za 364 *zł*, a sprzedano go za 336 *zł*; jaki procent ceny kupna stracono?
6. Kupiono towar za 824 *zł* i sprzedano go z zarobkiem wynoszącym 123 *zł*; jaki % ceny kupna zarobiono?
7. W szkole była w poszczególnych klasach następująca liczba uczniów: I 58, II 52, III 48, IV 45, V 40, VI 39, VII 36, VIII 32, z czego przeszło do następnych klas (względnie zdało maturę): w I 54, II 47, III 45, IV 41, V 38, VI 39, VII 34, VIII 30; oblicz dla każdej klasy % promowanych!
8. W pewnem mieście było 8500 mężczyzn i 9100 kobiet; jaki % mężczyzn, a jaki kobiet był w tem mieście?

9. Światowa produkcja ołowiu w r. 1928 wynosiła 1,846.000 *t*, z czego na Polskę przypada 36.000 *t*; jaki to jest % światowej produkcji?
10. Długość linij kolejowych na świecie wynosi: w Europie 390.000 *km*, w Ameryce Płn. 500.000 *km*, w Ameryce Płd. 90.000 *km*, w Australji 50.000 *km*, w Azji 140.000 *km*, w Afryce 60.000 *km*; jaki % całej długości linij kolejowych przypada na poszczególne części świata?
11. W Polsce na ogólną liczbę mieszkańców 31,100.000 jest wyznania: rzymsko-katolickiego 19,900.000, prawosławnego 3,850.000, grecko-katol. 3,390.000, mojżeszowego 3,000.000, ewangelickiego 840.000, innych 120.000; oblicz, jaki % ogólnej liczby mieszkańców przypada na poszczególne wyznania i przedstaw wyniki geometrycznie zapomocą wycinków tego samego koła!
12. Z Polski w r. 1928 wysłano 73,000.000 listów zagranicę, w czem do Austrji, Czechosłowacji, Francji i Stanów Zjednoczonych po 6,570.000, do Gdańska 3,650.000, do Niemiec 19,700.000, do W. Brytanji 1,460.000, do Z. S. R. R. 4,380.000, do Kanady 2,920.000, a do innych krajów resztę; oblicz, jaki % ogólnej liczby listów przypada na poszczególne kraje!
13. W r. szk. 1929/30 było w Polsce 3,700.000 uczniów szkół powszechnych, 205.000 uczniów szkół średnich, 95.000 uczniów szkół przemysłowych, 85.000 uczniów szkół zawodowych i 45.000 uczniów szkół wyższych; wyraź to w procentach ogólnej liczby uczącej się młodzieży!
14. Ludność Polski wynosiła okrągło:

w roku	1923 . . .	28,160.000 osób
„	1924 . . .	28,600.000 „
„	1925 . . .	29,030.000 „
„	1926 . . .	29,520.000 „
„	1927 . . .	29,860.000 „
„	1928 . . .	30,220.000 „

Oblicz: *a)* dla każdego z lat 1924—1928 procentowy przyrost ludności; *b)* procentowy przyrost ludności za pięciolecie 1923—1928.

15. Ludność Warszawy z początkiem roku 1931 wynosiła 1,115.000 osób; jaki to jest % ludności Polski (31,100.000) z tego roku?

16. Ludność Lwowa w r. 1900 wynosiła 160.000 osób, w r. 1925 zaś 235.000 osób; oblicz procentowy przyrost ludności Lwowa za pierwszą ćwierć wieku XX. Ile wyniosłaby ludność Lwowa w r. 1950, gdyby w drugiej ćwierci wieku XX procentowy przyrost ludności był ten sam, co w pierwszej?
17. Dorzecze Dniestru posiada dróg wodnych 940 *km*, Dźwiny 540 *km*, Niemna 2800 *km*, Prutu 220 *km*, Prypeci 3560 *km*, Warty 810 *km*, Wisły 5280 *km*; jaki % całej długości dróg wodnych w Polsce przypada na poszczególne dorzecza?

Procenty proste.

Kwotę, jaką dłużnik pożycza od kapitalisty, nazywamy kapitałem. Kapitalista za wypożyczenie pewnego kapitału na przeciąg pewnego czasu otrzymuje wynagrodzenie, zwane dochodem.

Wynagrodzenie, jakie kapitalista pobiera od każdych 100 *zł*, pożyczonych na jeden rok, nazywamy procentem rocznym lub stopą procentową. Jeżeli np. kapitalista od każdych 100 *zł* pożyczonych na jeden rok pobiera 6 *zł*, wówczas mówimy, że pobiera za pożyczkę 6% rocznie.

Przy pożyczkach występują zatem cztery wielkości: kapitał (pożyczony), stopa procentowa, czas (na który kapitał pożyczono) i dochód.

Gdy 3 z tych wielkości są dane, to czwartą możemy obliczyć.

Obliczanie dochodu.

Przykład: Obliczyć dochód od 7648 *zł*, danych na 8%, a wypożyczonych na 5 lat.

Rozwiązanie:

Ponieważ 100 *zł* za 1 rok przynosi 8 *zł*,

to 1 *zł* „ 1 „ „ $\frac{8}{100}$ *zł*,

a 7648 *zł* „ 1 „ „ $\frac{8 \cdot 7648}{100}$ *zł*.

Zatem 7648 *zł* „ 5 lat „ $\frac{8 \cdot 7648 \cdot 5}{100}$ *zł*.

Widzimy, że: dochód $= \frac{8 \cdot 7648 \cdot 5}{100}$ *zł* $= 3059{\cdot}20$ *zł*.

Możemy więc powiedzieć, że: dochód w *zł* obliczamy, dzieląc przez 100 iloczyn liczb wyrażających kapitał w *zł*, procent i czas w latach.

Jeśli zatem kapitał (liczbę *zł*) oznaczymy przez K, procent przez P, czas (liczbę lat) przez L, a dochód przez D, to możemy krótko zanotować, że:

$$D = \frac{K \, . \, P \, . \, L}{100} \tag{1}$$

Uwaga. Jeśli do kapitału doliczymy dochód, to otrzymamy tak zwaną wartość końcową kapitału; kapitał pożyczony nazywamy wartością początkową kapitału.

Np. kapitał 3000 *zł*, pożyczony na 4 lata na 5%, dał 600 *zł* dochodu.

Zatem 3000 *zł* jest wartością początkową kapitału, a 3000 *zł* + 600 *zł* = 3600 *zł* jest wartością końcową kapitału. Oznaczając przez W wartość końcową kapitału, możemy napisać:

$$W = K + D.$$

Zadania.

1. W następujących zadaniach oblicz dochód dwoma sposobami: regułą trzech i zapomocą wzoru (1).

Jaki dochód przynosi:

a)	kapitał	225 *zł*	oddany na	2 lata na 6%;
b)	„	2150 *zł*	„ „	3 lata i 4 miesiące na 6%;
c)	„	3265 *zł*	„ „	$4\frac{1}{2}$ miesiąca na 8%;
d)	„	6836 *zł*	„ „	$2\frac{1}{2}$ lat na $6\frac{3}{4}$%;
e)	„	27156 *zł*	„ „	$2\frac{3}{4}$ lat na 10%;
f)	„	5016 *zł*	„ „	1 miesiąc na $4\frac{1}{2}$%;
g)	„	672 *zł*	„ „	5 miesięcy na $6\frac{1}{2}$%;
h)	„	12600 *zł*	„ „	10 miesięcy na $9\frac{3}{4}$%;
i)	„	1000 *dol.*	„ „	$\frac{1}{2}$ roku na 10%;
j)	„	6824 *zł*	„	od 14/VII do 19/VIII na $7\frac{1}{2}$%;
k)	„	3580 *zł*	„	od 10/IV do 21/VI na $8\frac{1}{2}$%.

Uwaga. W zadaniach z procentu przyjmuje się, że rok ma 360 dni, czyli 12 miesięcy po 30 dni. Czas należy wyrażać w ułamkach lat. Np. 7 miesięcy = $\frac{7}{12}$ roku, 8 dni = $\frac{8}{360}$ r. i t. p.

2. Oblicz w zadaniu (1) wartość końcową kapitału, posługując się wzorem $W = K + D$!

3. Jaka jest wartość końcowa kapitału 380 *zł*, oddanego na 1 rok na 5%?

Ponieważ dochód wynosi 380 *zł* . $\frac{5}{100}$, a kapitał 380 *zł* = = 380 *zł* . $\frac{100}{100}$, więc wartość końcowa kapitału równa się:

380 *zł* $\frac{100}{100}$ + 380 *zł* . $\frac{5}{100}$ = 380 *zł* . $\frac{105}{100}$ = 399 *zł*,

czyli 105% kapitału 380 *zł*.

Oblicz w ten sposób wartość końcową kapitału: *a)* 495 *zł*, *b)* 3290 *zł*, *c)* 11.850 *zł*, oddanego na 1 rok na: *a)* 8%, *b)* 10·5%, *c)* $6\frac{3}{4}$%.

4. O kupno domu ubiega się dwóch kupców. Jeden daje gotówką 632.000 *zł*, drugi zaś 400.000 *zł* gotówką, a 250.000 *zł* po upływie roku; który z kupców daje lepsze warunki, jeżeli kapitał można umieścić na 9%? (Objaśnienie: porównaj warunki po upływie roku!).

5. Kapitał *a)* 870 *zł*, *b)* 2745 *zł* przynosi przy danym procencie i czasie procentowania: *a)* 15 *zł*, *b)* 247 *zł* 5 *gr* dochodu; jaki dochód w tych samych warunkach przyniesie kapitał: *a)* 609 *zł*, *b)* 3164 *zł*?

6. Kapitał: *a)* 8250 *zł*, *b)* 1247 *zł* przynosi przy danym procencie i czasie procentowania dochód: *a)* 680 *zł*, *b)* 87 *zł* 29 *gr*; jaki kapitał w tych samych warunkach przyniesie *a)* 510 *zł*, *b)* 143 *zł* 57 *gr* dochodu?

7. Pewien kapitał oddany na umówiony procent przyniósł po 5 latach 2512 *zł* dochodu; *a)* jaki dochód przyniesie ten kapitał po $3\frac{1}{2}$ latach, *b)* w ilu latach przyniesie 4521 *zł* 60 *gr* dochodu?

8. Kapitał 500 *zł* oddano na 12%. Po roku doliczono do tego kapitału dochód i znowu pożyczono na 1 rok na tych samych warunkach; jaka była wartość końcowa kapitału?

9. Kapitał 1000 *zł* oddano na 10%. Po roku doliczono do tego kapitału dochód i znowu pożyczono na rok na tych samych warunkach; jaki będzie dochód po 2 latach?

Porządek wykonywania działań.

Jeżeli mamy obliczyć wartość jakiegoś wyrażenia, jak np.

$$8 + 4 \, . \, 5,$$

to nie jest rzeczą obojętną, w jakim porządku będziemy wykonywali naznaczone działania. Jeżeli najpierw wykonamy dodawanie, a potem mnożenie, to rachunek przedstawi się następująco:

$$8 + 4 = 12, \qquad 12 \cdot 5 = \mathbf{60}.$$

Wykonajmy teraz najpierw mnożenie, a potem dodawanie; a więc:

$$4 \cdot 5 = 20, \qquad 8 + 20 = \mathbf{28}.$$

Widzimy, że tym razem otrzymaliśmy inny wynik, niż poprzednio.

Podamy teraz reguły, w jakim porządku należy działania wykonywać.

1. Jeżeli w wyrażeniu występują tylko znaki dodawania i odejmowania, to wartość takiego wyrażenia obliczamy, wykonując pokolei naznaczone działania.

Np. $16 - 5 - 3 + 7 - 2.$

Obliczamy: $16 - 5 = 11, \quad 11 - 3 = 8, \quad 8 + 7 = 15, \quad 15 - 2 = 13.$

A więc wartość naszego wyrażenia jest 13.

Zadania.

1. Oblicz wartość następujących wyrażeń:

a) $16 - 5 + 3 - 1$, *b)* $8 - 2 - 3 + 5 - 4$, *c)* $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{16}$,
d) $5 - 4 - 1 + 3$, *c)* $7 - 1 + 8 - 8$, *f)* $2 - 1{\cdot}7 + \frac{2}{5} - \frac{1}{8}$.

2. Jeżeli w wyrażeniu (oprócz dodawania i odejmowania) występuje mnożenie, to wykonujemy najpierw wszystkie naznaczone mnożenia, a potem pokolei dodawania i odejmowania.

Np. *a)* $3 + 4 \cdot 5.$

Obliczamy: $4 \cdot 5 = 20$; otrzymujemy więc wyrażenie $3 + 20$; wartością jego jest 23.

b) $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4.$

Obliczamy: $3 \cdot 5 = 15, \quad 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12, \quad 5 \cdot 4 = 20.$

Wstawiając zamiast iloczynów ich wartości, otrzymujemy wyrażenie:

$$15 - 12 + 20.$$

Po obliczeniu otrzymujemy jako wartość tego wyrażenia: 23.

c) $10 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 10 - 6 + 10 = 14.$

Zadania.

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $3 \cdot 4 - 2, \quad 8 + 2 \cdot 3, \quad \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}, \quad 2{\cdot}1 + \frac{1}{3} \cdot 4;$
b) $3{\cdot}5 - 2{\cdot}1 \cdot 1{\cdot}3, \quad \frac{3}{4} - 0{\cdot}3 \cdot \frac{1}{8}, \quad 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4};$
c) $30 - 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad 2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5, \quad 3{\cdot}6 - 2 \cdot 1{\cdot}3 \cdot 0{\cdot}4;$
d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}, \quad 4{\cdot}5 - 1{\cdot}2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}.$

2. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5, \quad 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 3, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2};$
b) $4 \cdot 7 - 3 \cdot 0{\cdot}2 + 5 \cdot \frac{1}{2}, \quad 18 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7, \quad 4 \cdot 2 - 3 + 2{\cdot}5 \cdot 2;$
c) $5 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 6 - 7 \cdot 2, \quad 20 + 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 + 3;$
d) $80 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 - 8, \quad \frac{15}{2} - \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{8} \cdot 5 + \frac{3}{8};$
e) $40 \cdot 2{\cdot}3 + 18 - 4{\cdot}7 \cdot 5 - 1{\cdot}2 \cdot 3,$
$\frac{11}{3} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + 5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}.$

3. Jeżeli w wyrażeniu występują dzielenia, naznaczone kreskami ułamkowemi (przyczem liczniki i mianowniki są liczbami naturalnemi), to wykonuje się najpierw mnożenia, potem dzielenia, a w końcu pokolei dodawania i odejmowania.

Np. *a)* $4 - \frac{15}{5}$

obliczamy: $\frac{15}{5} = 3, \quad 4 - 3 = 1;$

b) $2 \cdot 5 - \frac{8}{4} + 8 \cdot \frac{5}{2} = 10 - \frac{8}{4} + \frac{40}{2} = 10 - 2 + 20 = 28.$

Zadania.

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $\frac{8}{4} - 2, \quad 6 + \frac{12}{3}, \quad 8 - 5 + \frac{4}{2}, \quad 2 \cdot \frac{3}{2} - 1;$
b) $2 \cdot 5 - 3 \cdot \frac{4}{2}, \quad 4 \cdot \frac{6}{12} + \frac{24}{3}, \quad 2 \cdot 6 \cdot \frac{8}{3} - 3 \cdot 10 \cdot \frac{2}{5};$
c) $2 \cdot 3 + \frac{8}{4} - 2 \cdot \frac{10}{5}, \quad 5 \cdot \frac{8}{4} + 4 \cdot \frac{12}{3} - 2 \cdot \frac{10}{5};$
d) $5 - \frac{4}{2} + 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 4, \quad 5 \cdot 3 - 4 \cdot \frac{6}{8} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{10} - 3.$

2. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $100 - 8 - 2 \cdot \frac{16}{4} + 5 \cdot 3, \quad 8 \cdot 5 \cdot \frac{6}{10} - 3 \cdot 6 + \frac{5}{2} - 2;$
b) $\frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{4}{6} - \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{7}{3}, \quad 15 - \frac{7}{2} - 2 \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot 7;$
c) $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + 4, \quad 5 + 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 5 + \frac{7}{2} - \frac{8}{3};$
d) $\frac{3}{4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + 7 \cdot 2 - 4, \quad \frac{0{\cdot}8}{2} + \frac{7}{2} - 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{2}.$

4. Jeżeli w wyrażeniu występuje potęgowanie, to najpierw obliczamy potęgi, następnie wykonujemy mnożenia, potem dzielenia, a wreszcie pokolei dodawania i odejmowania.

Np. *a)* $8 + 3^2 = 8 + 9 = 17;$
b) $4 + 2 \cdot 5^2 = 4 + 2 \cdot 25 = 4 + 50 = 54;$

c) $2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 5 + 4^2 \cdot 3 = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 + 16 \cdot 3 =$
$= 18 - 15 + 48 = 51;$

d) $\frac{18}{3^2} + 3^2 \cdot 2 = \frac{18}{9} + 9 \cdot 2 = 2 + 18 = 20.$

Przy obliczaniu więc wartości wyrażeń należy pamiętać następującą kolejność działań:

I. Potęgowanie.
II. Mnożenie.
III. Dzielenie.
IV. Dodawanie i odejmowanie pokolei.

Gdybyśmy inaczej obliczali wartości wyrażeń, to moglibyśmy otrzymać wyniki błędne.

Uwaga. Wartości ułamków jak np.

$$\frac{3 + 4 \cdot 5}{2 + 3 \cdot 5}$$

obliczamy, obliczając osobno wartość wyrażenia, które jest licznikiem i osobno wartość wyrażenia, które jest mianownikiem, a następnie dzieląc wyniki przez siebie.

Liczymy zatem:

$3 + 4 \cdot 5 = 3 + 20 = 23; \quad 2 + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = 17,$

a więc $\qquad \frac{3 + 4 \cdot 5}{2 + 3 \cdot 5} = \frac{23}{17}.$

Jeżeli takie ułamki występują we wyrażeniach, to najpierw obliczamy wartości tych ułamków, a następnie wykonujemy działania wedle reguły działań.

Np. $4 \cdot 5 + \frac{1 + 5 \cdot 7}{14 - 2} = 4 \cdot 5 + \frac{1 + 35}{12} = 4 \cdot 5 + \frac{36}{12} = 23.$

Zadania.

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $5^2 + 7, \quad 16 - 3^2, \quad 6^2 - 5, \quad 1 + 2^3, \quad 4^3 - 18;$
b) $5 + 3 \cdot 2^2, \quad 5 \cdot 2^3 - 8, \quad 30 - 4 \cdot 2^2, \quad 75 - 2 \cdot 3^3;$
c) $2^2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 8 \cdot 3^2, \quad 16 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2^3;$
d) $2 \cdot 7 - \frac{6}{3} + 4^2 \cdot 7, \quad 3^3 \cdot 5 - 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 7 + \frac{6}{2};$
e) $\frac{16}{2^2} + 4 \cdot 7, \quad \frac{15}{3} + 2 \cdot 4 + \frac{5^2}{3}, \quad 7^2 \cdot 5 + \frac{4^2}{2} - 4 \cdot 6;$

f) $\frac{125}{5^2} - 8 \cdot \frac{3}{5} + 3^2 \cdot \frac{40}{5} + 3,$
$\frac{3^2}{2^2} \cdot 8 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 3^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{7}{6} - 2 \cdot 5 + 4.$

2. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $100 - 3 \cdot \frac{4^2}{12} + 8 \cdot 6, \quad 45 + \frac{3}{4^2} - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 7;$
b) $40 \cdot 2^2 + 2 \cdot 10 - \frac{4}{5^2} - \frac{3^2}{2}, \quad \frac{12}{4} + 2^3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - \frac{2^4}{4};$
c) $5 \cdot 2 \cdot 10 - \frac{2^3}{4} - \frac{27}{3^2} + 5 \cdot 4, \quad 3 \cdot \frac{8}{2^2} + 4 \cdot 5 + 30 \cdot 2^2 - 3 \cdot 7;$
d) $2 \cdot 8 \cdot \frac{14}{2^4} + 5 - 7 \cdot 2 + \frac{24}{3}, \quad 18 + 3 \cdot 9 \cdot \frac{5}{3^3} + \frac{7}{2} - \frac{2^4}{3}.$

3. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $3 + \frac{5 - 1}{8 + 3}, \quad 2 + \frac{5 + 4}{8 - 3}, \quad 16 + \frac{2 \cdot 3 + 5}{4 - 1}, \quad 20 - \frac{7 + 4 \cdot 5}{9 + 6 \cdot 8};$
b) $5 + \frac{4 + 5 \cdot 7}{8 \cdot 3 + 2}, \quad \frac{6 \cdot 9 - 8}{40 - 2 \cdot 3} + 11, \quad 12 - \frac{4 \cdot 11 - 3 \cdot 7}{8 \cdot 15 - 6 \cdot 7};$
c) $\frac{4 + 2 \cdot 5}{8 - 3} \cdot 2, \quad 3 \cdot \frac{7 : 8 - 2 \cdot 3}{5 \cdot 6 - 14} + 1, \quad 18 - 2\,\frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{8 - 2 \cdot 3}.$

Nawiasy.

Obliczanie wartości wyrażeń, zawartych w nawiasach.

Jeżeli chcemy, aby działania wykonano w innym porządku, niż podaje reguła, wówczas używamy nawiasów.

Zwykle używa się następujących nawiasów:

$$(\ )\qquad [\ ]\qquad \{\ \}$$

Powyższe rodzaje nawiasów mogą być rozmaitej wielkości.

Nauczymy się teraz obliczać wartości wyrażeń, w których występują nawiasy. Rozróżniamy dwa przypadki.

1. W wyrażeniu:

$$3 \cdot (4 + 2) + 7 \cdot (5 - 3)$$

występują nawiasy, które nie zawierają wewnątrz innych nawiasów. Obliczamy wartości takich wyrażeń, obliczając najpierw wartości wyrażeń zawartych w nawiasach (opuszczając nawiasy), a następnie wykonując działania wedle reguły działań.

A więc:

$$3 \,.\, (4 + 2) + 7 \,.\, (5 - 3) = 3 \,.\, 6 + 7 \,.\, 2 = 18 + 14 = 32.$$

Podobnie:

$$(5 + 3) \,.\, (5 - 3) + 4 \,.\, (\tfrac{8}{2} + 1) = 8 \,.\, 2 + 4 \,.\, (4 + 1) =$$
$$= 8 \,.\, 2 + 4 \,.\, 5 = 16 + 20 = 36.$$

2. W wyrażeniu:

$$5 \,.\, (10 - 7) + [3 \,.\, 4 + 5 \,.\, (8 - 2)]$$

nawias graniasty zawiera nawias okrągły. Wartości takich wyrażeń (w których występują nawiasy, zawierające w swojem wnętrzu inne nawiasy) obliczamy, obliczając najpierw wartości wyrażeń, zawartych w tych nawiasach, w których wnętrzu nie ma już innych nawiasów.

Obliczymy więc najpierw wartości wyrażeń, zawartych w nawiasach:

$$(10 - 7) \text{ i } (8 - 2).$$

Otrzymamy zatem:

$$5 \,.\, 3 + [3 \,.\, 4 + 5 \,.\, 6].$$

Wartość tego wyrażenia obliczamy, jak w przypadku 1.

A więc:

$$5 \,.\, 3 + [3 \,.\, 4 + 5 \,.\, 6] = 5 \,.\, 3 + [12 + 30] = 5 \,.\, 3 + 42 =$$
$$= 15 + 42 = 57.$$

Podobnie:

$$11 + \{[8 + (6 - 2)] - 5\} = 11 + \{[8 + 4] - 5\} =$$
$$= 11 + \{12 - 5\} = 11 + 7 = 18.$$

Uwaga. Jeżeli chcemy w wyrażeniu zastąpić znak kreski ułamkowej znakiem dwóch kropek, należy uważać, aby porządek działań w myśl przyjętych reguł był zachowany, co zawsze da się zrobić przez użycie nawiasów.

Np. $\dfrac{3}{4 \,.\, 5} = 3 : (4 \,.\, 5)$, $\quad 2 + \dfrac{5 \,.\, 6}{8} = 2 + [(5 \,.\, 6) : 8]$.

Zadania.

1. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $2 + (3 + 5)$, $\quad 3 + (8 - 3)$, $\quad 5 - (2 + 1)$, $\quad 7 - (8 - 4)$;
b) $\frac{3}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{5}{2})$, $\quad 2 + (7 - \frac{9}{2})$, $\quad 7 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{4})$, $\quad 9 - (7 - \frac{2}{3})$;
c) $2{\cdot}4 + (3 + 1{\cdot}6)$, $\quad 5 + (8{\cdot}4 - 2{\cdot}3)$, $\quad 6{\cdot}4 - (2{\cdot}1 + 1{\cdot}4)$, $\quad 10 - (3{\cdot}2 - 0{\cdot}4)$.

2. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $5 \,.\, (4 + 6)$, $\quad (3 + 2) \,.\, 4$, $\quad 7 \,.\, (6 + 4)$, $\quad (7 + 5) \,.\, 12$;
b) $\frac{1}{2} \,.\, (4 + \frac{3}{5})$, $\quad (\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) \,.\, 6$, $\quad 0{\cdot}2 \,.\, (3 + 2{\cdot}5)$, $\quad (2{\cdot}4 + 1) \,.\, 3{\cdot}5$;
c) $3 \,.\, (8 - 2)$, $\quad (6 - 4) \,.\, 7$, $\quad \frac{1}{2} \,.\, (\frac{3}{4} - \frac{1}{8})$, $\quad (2{\cdot}1 - 1{\cdot}1) \,.\, 3$;
d) $6 \,.\, (4 - 2 + 3)$, $\quad (7 + 5 - 2) \,.\, 4$, $\quad \frac{2}{5} \,.\, (8 - 1 + \frac{1}{2})$.

3. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $2 \,.\, (4 + 3) + 5 \,.\, (8 - 2)$, $\quad 3 \,.\, (11 - 4) - 2 \,.\, (5 - 3)$;
b) $\frac{1}{2} \,.\, (2 + \frac{1}{3}) + \frac{3}{2} \,.\, (7 - \frac{1}{3})$, $\quad \frac{4}{5} \,.\, (\frac{1}{2} + 1) - \frac{1}{5} \,.\, (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$;
c) $2 \,.\, (1{\cdot}4 + 5) + 3 \,.\, (9 - 4{\cdot}5)$, $\quad 10 \,.\, (8{\cdot}4 + 2{\cdot}1) - 3 \,.\, (0{\cdot}4 - 0{\cdot}1)$.

4. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $(2 + 3) \,.\, (4 + 7)$, $\quad (9 - 2) \,.\, (8 + 3)$, $\quad (10 - 3) \,.\, (7 - 4)$;
b) $(\frac{1}{2} + 1) \,.\, (\frac{2}{3} + 2)$, $\quad (1\frac{1}{2} - 1) \,.\, (2 + \frac{1}{2})$, $\quad (3\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \,.\, (6 - \frac{2}{5})$;
c) $(3 + 1) \,.\, (5 - 2) + 2 \,.\, (5 \,.\, 7)$, $\quad (8 - 3) \,.\, (6 + 7) - 3 \,.\, (8 : 4)$;
d) $5 \,.\, (8 \,.\, 6) - (2 + 1) \,.\, (7 - 5)$, $\quad 10 \,.\, (12 : 4) - (4 - 1) \,.\, (5 - 3)$.

5. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $3 \,.\, 2 + [5 + 4 \,.\, (7 + 1)]$, $\quad 2 \,.\, (16 - 4) + [20 - 2 \,.\, (3 - 1)]$;
b) $35 \,.\, (4 - 1) - [8 - (4 + 1)]$, $\quad 15 \,.\, (3 + 7) - [11 - (5 - 1)]$;
c) $[17 + (3 + 1) \,.\, 2] \,.\, 4$, $\quad [15 - (7 - 5)] \,.\, 2 + 2 \,.\, (4 - 1)$;
d) $3 \,.\, (4 \,.\, 2) - [(2 + 4) : 3]$, $\quad [(7 + 1) : 2] : 3$.

6. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $18 - \{[10 - (4 + 1)] \,.\, 2 - 6\}$, $\quad \{[20 - (8 - 6)] \,.\, 3 - 5\} \,.\, 4$;
b) $\{[7 \,.\, (5 : 2)] \,.\, 4 - 1\} \,.\, 2$, $\quad 6 \,.\, (8 - 1) - \{[3 \,.\, (5 - 1) + 1] \,.\, 2 - 1\}$;
c) $\{20 - [15 - (8 + 4)]\} : 5$, $\quad \{[(2 + 1) \,.\, 3 + 4] \,.\, 5\} : 3$;
d) $[(4 \,.\, 7) : 3 - 2] \,.\, 5 - \{[14 - (7 + 5)] \,.\, 3 - 1\}$.

7. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $\dfrac{3 + (4 - 1 \,.\, 5)}{18 - (6 - 4) \,.\, 3}$; $\qquad$ *b)* $\dfrac{[4 + (7 + 2) \,.\, 3] \,.\, 4}{46 - [(18 - 5) \,.\, 3 - 1]}$;

c) $\dfrac{[17 - (4 - 1)] \,.\, 2 + 5}{12 - [(0{\cdot}2 + 0{\cdot}8) \,.\, 3 - 1]}$; $\qquad$ *d)* $\dfrac{11 - \{[(3 + 1) - 7] \,.\, 2 + 1\}}{[(6 - 4) \,.\, 5 + 1] \,.\, 3 - (2 \,.\, 5)}$;

e) $\dfrac{\{30 - [18 - (2 + 5)]\} \,.\, 4}{[18 + (6 + 1) \,.\, 3] \,.\, 15}$; $\qquad$ *f)* $\dfrac{[8 - (3 - 1)] \,.\, 2 - [5 - (3 + 1)]}{5 \,.\, [8 - (2 + 5)] - [(4 + 1) \,.\, 2 - 8]}$.

8. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $5 + \dfrac{3 \,.\, 7 + 1}{5 \,.\, 6 - 2} - (4 - 1)$, $\quad \dfrac{3 + (4 - 1) \,.\, 5}{2 \,.\, 5 - 1} + 18 - [9 - (5 + 1)]$;

b) $7 : 3 + \dfrac{4 - (3 - 1)}{5 - (4 - 2)}$; $\qquad 20 - \left[\dfrac{(5 + 1) \,.\, 4 - 2}{(7 - 2) \,.\, 3 + 5} + 2\right]$;

c) $16 + \dfrac{15 - [4 - (3 - 1)]}{4 + (6 - 2) \,.\, 3} - 3$, $\quad \dfrac{[(8 - 3) \,.\, 4 - 2] \,.\, 5 - 20}{[15 - (4 + 1)] \,.\, 2 + 1} - [(6 - 5) : 7)]$.

Używanie nawiasów.

W poprzednim ustępie nauczyliśmy się obliczać wartości wyrażeń, w których występują nawiasy. Zajmiemy się teraz zadaniem:

Ktoś poda nam liczby i działania, jakie na tych liczbach mamy wykonać; jak zapisać to przy pomocy nawiasów?

Przykład 1.

Sumę liczb 2 i 3 odejmij od 8.

Rozwiązanie:

Piszemy sumę liczb 2 i 3 w nawiasie:

$$(2+3),$$

a następnie różnicę:

$$8-(2+3).$$

Przykład 2.

Sumę liczb 4 i 5 pomnóż przez 7.

Rozwiązanie:

Piszemy sumę liczb 4 i 5 w nawiasie:

$$(4+5),$$

a następnie iloczyn:

$$(4+5) \, . \, 7.$$

Przykład 3.

Sumę liczb 8 i 5 pomnóż przez różnicę liczb 7 i 4.

Rozwiązanie:

Piszemy sumę liczb 8 i 5 w nawiasie:

$$(8+5),$$

następnie różnicę liczb 7 i 4 w nawiasie:

$$(7-4),$$

wreszcie iloczyn:

$$(8+5) \, . \, (7-4).$$

Przykład 4.

Sumę liczb 2 i $3\frac{1}{4}$ odejmij od 8, a otrzymany wynik pomnóż przez 5.

Rozwiązanie:

Piszemy najpierw:

$$(2+3\tfrac{1}{4}),$$

a następnie:

$$[8-(2+3\tfrac{1}{4})],$$

wreszcie:

$$[8-(2+3\tfrac{1}{4})] \, . \, 5.$$

Uwaga. Do liczby 2 dodaj iloczyn liczb 3 i 4.

Rozwiązanie:

Piszemy najpierw iloczyn:

$$(3 \, . \, 4),$$

a następnie sumę:

$$2+(3 \, . \, 4).$$

Wyrażenie to napiszemy prościej, opuszczając nawias:

$$2+3 \, . \, 4.$$

Wiemy bowiem, że wartość wyrażenia oblicza się, wykonując najpierw mnożenia, a potem dodawania. W układaniu wyrażeń lepiej jest jednak na początku dawać i zbyteczne nawiasy. Zbyteczny bowiem nawias nie szkodzi, brak nawiasu potrzebnego jest natomiast błędem i zmienia wartość wyrażenia.

Zadania.

1. W następujących zadaniach zaznacz nawiasami porządek, w którym działania masz wykonać i oblicz wartości otrzymanych wyrażeń:
   a) do liczby 5 dodać sumę liczb 3 i 4;
   b) od liczby 8 odjąć sumę liczb 2 i 3;
   c) do liczby 6 dodać różnicę liczb 7 i 2;
   d) od liczby 10 odjąć różnicę liczb 6 i 4.
2. *a)* sumę liczb 3 i 7 pomnóż przez 4;
   b) pomnóż 5 przez sumę liczb 10 i 4;
   c) utwórz iloczyn sumy liczb 8 i 7 przez liczbę 9;
   d) różnicę liczb 10 i 8 pomnóż przez 4;
   e) podziel sumę liczb 11 i 4 przez liczbę 3;
   f) utwórz iloraz różnicy liczb 20 i 8 przez 5.
3. *a)* sumę liczb 2 i 3 pomnóż przez sumę liczb 4 i 1;
   b) sumę liczb 8 i 11 pomnóż przez różnicę liczb 10 i 3;
   c) różnicę liczb 6 i 2 pomnóż przez sumę liczb 2 i 7;
   d) utwórz iloczyn różnicy liczb 18 i 12 przez różnicę liczb 10 i 4.
4. *a)* do 8 dodaj sumę liczb 3 i 11, a wynik pomnóż przez 2;
   b) do 14 dodaj różnicę liczb 7 i 1, a wynik pomnóż przez 4;
   c) od 18 odejmij sumę liczb 3 i 5, a wynik pomnóż przez 11;
   d) od 24 odejmij różnicę liczb 13 i 9, a wynik podziel przez 5.

5. Jaką liczbę otrzymasz, jeśli do 5 dodasz 2, wynik pomnożysz przez 3 i wreszcie dodasz 6?
6. Jaki wynik otrzymasz, jeśli od 7 odejmiesz 4, wynik podzielisz przez 3 i wreszcie odejmiesz 1?
7. Dodaj do iloczynu liczby 5 przez sumę liczb 7 i 9 iloczyn liczby 4 przez różnicę liczb 10 i 8.
8. Do iloczynu liczby 7 przez sumę liczb 4 i 8 dodaj 9 i otrzymany wynik pomnóż przez 5.
9. Do ilorazu liczby 10 przez różnicę liczb 8 i 6 dodaj 4 i wynik pomnóż przez 11.
10. Pomnóż sumę liczb 5 i 7 przez różnicę liczb 10 i 6, do wyniku dodaj 3, a następnie wszystko podziel przez 4.
11. Od iloczynu sumy liczb 8 i 2 przez ich różnicę odejmij 5 i wynik pomnóż przez sumę liczb 2 i 3.
12. Do iloczynu sumy liczb 3 i 1 przez 2 dodaj 1, wynik pomnóż przez 4, dodaj znowu 1 i wynik pomnóż przez 5.
13. Od ilorazu sumy liczb 8 i 3 przez 5 odejmij 1, wynik pomnóż przez 2, a następnie podziel przez 3.
14. Od iloczynu różnicy liczb 8 i 5 przez 2 odejmij 1, wynik pomnóż przez 3, odejmij znowu 1 i wynik pomnóż przez 4.
15. Obierz jakąś liczbę, np. 17, dodaj do niej 11, wynik pomnóż przez 2 i od tego iloczynu odejmij 20. To, co otrzymasz pomnóż przez 5, następnie odejmij iloczyn obranej liczby (17) przez 10, a na wynik otrzymasz 10.
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
16. Obierz jakąś liczbę, np. 21, pomnóż ją przez 15, do wyniku dodaj 60 i to, co otrzymasz podziel przez 3. Pomnóż teraz obraną liczbę (21) przez 5 i wynik ten odejmij od poprzednio otrzymanej liczby. Ostateczny wynik będzie 20.
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
17. Obierz dowolną liczbę, np. 14, podziel ją przez 2, do wyniku dodaj 7, a to, co otrzymasz pomnóż przez 8, od wyniku odejmij 12, następnie podziel przez 4 i znowu odejmij 11. Otrzymasz na wynik obraną liczbę (14).
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
18. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 18, pomnóż ją przez 2, do wyniku dodaj 1, to, co otrzymasz pomnóż przez 5 i dodaj jeszcze 3; jeśli w wyniku odrzucisz cyfrę jednostek, otrzymasz obraną liczbę (18).
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!

19. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 23, dodaj do niej 2, wynik pomnóż przez 3, a od tego, co otrzymasz odejmij 4, pomnóż następnie przez 3 i dodaj wkońcu obraną liczbę (23); jeśli w wyniku odrzucisz cyfrę jednostek, otrzymasz obraną liczbę (23).
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
20. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 19, pomnóż ją przez 5, do wyniku dodaj 2, to, co otrzymasz, pomnóż przez 4, do wyniku dodaj 3, następnie pomnóż przez 5 i wkońcu dodaj 7; jeśli w wyniku odrzucisz cyfry jednostek i dziesiątek, otrzymasz obraną liczbę (19).
Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
21. Pamiętając o porządku, w jakim działania należy wykonywać, opuść w następujących wyrażeniach zbyteczne nawiasy:
a) $(2+3)+5$, $[(4-1)+3]+1$, $(5.4)+1$, $6+(4.3)$;
b) $1+(6:2)$, $(2.5)+(7-3).2$, $3.(2^2)+4$, $(3.2)^2+4$;
c) $(7-4)+(3+2)$, $(6+8)-(4+5)$, $2+(4.6):3$, $[2+(4.6)]:3$.
d) $\{[(5+2)+3]+1\}+2$,
$(18+5)-\{[(8-3)-(4-2)]+6\}$,
$\{[(4.6)+8]:8\}.3-1$.

Plan zadania.

Rozwiązując jakieś zadanie, nie zawsze wykonujemy odrazu działania konieczne do rozwiązania; czasami naznaczamy je tylko przy pomocy nawiasów, czyli tworzymy t. zw. plan zadania.

Przykład 1.

Z dwóch miast wyszli naprzeciw siebie równocześnie dwaj posłańcy. Jeden szedł z prędkością 6 *km* na godz., drugi z prędkością 7 *km* na godz.; spotkali się po 4 godzinach. Jaka jest odległość tych miast od siebie?

Rozwiązanie:

Pierwszy posłaniec przeszedł w 4 godzinach (6.4) *km*, drugi w tym samym czasie (7.4) *km*. Odległość więc obu miast wynosi w *km*:

$$(6.4)+(7.4).$$

Otrzymaliśmy więc plan zadania, wskazujący, jakie działania należy wykonać.

Przykład 2.

Ojciec zarabiał dziennie 12 *zł*, syn 8 *zł*, na utrzymanie zaś domu wydawano dziennie 10 *zł*; ile zaoszczędzono w ciągu 6 dni?

Rozwiązanie:

Dziennie oszczędzano *zł*:

$$(12 + 8 - 10),$$

zatem w ciągu 6 dni zaoszczędzono *zł*:

$$(12 + 8 - 10) \,.\, 6.$$

Zadania.

1. Balon wzniósł się na wysokość 3.600 *m*, potem opadł o 350 *m*, następnie wzniósł się o 450 *m* i znowu opadł o 640 *m*; na jakiej wysokości znajduje się balon?
2. Dwaj wspólnicy rozdzielili zysk 8540 *zł* w ten sposób, że pierwszy otrzymał 4935 *zł*, a drugi resztę; o ile więcej otrzymał pierwszy wspólnik, niż drugi?
3. Kupiec sprzedał w 3 dniach $163\frac{1}{2}$ *kg* herbaty. W pierwszym dniu sprzedał $57\frac{3}{4}$ *kg*, w drugim o $3\frac{1}{2}$ *kg* mniej, a w trzecim resztę; o ile więcej *kg* sprzedał w pierwszym dniu, niż w trzecim?
4. Właściciel trzech kamienic miał z jednej kamienicy dochód roczny 5600 *zł*, z drugiej o 1200 *zł* więcej, a z trzeciej o 5300 *zł* mniej niż z obu pierwszych; ile wynosił jego roczny dochód z tych trzech kamienic?
5. Kwotę 8316 *zł* rozdzielono między 4 osoby w ten sposób, że pierwsza otrzymała $\frac{2}{7}$ tej kwoty, druga $\frac{3}{11}$, trzecia $\frac{8}{27}$, a czwarta resztę; ile otrzymała czwarta osoba?
6. Kupiec miał 600 *zł* gotówki i sprzedał 35 *kg* towaru po 8 *zł* za 1 *kg*. Drugi zaś kupiec miał 400 *zł* gotówki i sprzedał jednego towaru 18 *kg* po 5 *zł* za 1 *kg*, a drugiego 20 *kg* po 6 *zł* za 1 *kg*; o ile pierwszy kupiec miał tego dnia więcej gotówki, niż drugi?
7. Ktoś posiadał narożną parcelę w kształcie prostokąta o wymiarach 26 *m* długości i 18 *m* szerokości. Wskutek regulacji miasta stracił 3 *m* na długości i 2 *m* na szerokości. Ile stracił pieniędzy, jeśli mógł przedtem sprzedać tę parcelę po 1000 *zł* za 1 *ar*, a miasto zapłaciło mu za zabrany grunt po 600 *zł* za 1 *ar*?

8. Kantor wymiany kupił 1500 dolarów po 8 *zł* 90 *gr*. Z tego sprzedał 450 dol. po 8 *zł* 95 *gr*, potem 620 dol. po 8 *zł* 93 *gr*, a gdy wkońcu sprzedał resztę, zysk z całej transakcji wyniósł 49 *zł* 70 *gr*; ile płacono mu za dolara, gdy sprzedawał resztę?
9. Do naczynia o pojemności 45 *l* rura dopływowa dostarcza $6\frac{1}{2}$ *l* wody w 1 minucie, rura zaś odpływowa odprowadza $2\frac{3}{4}$ *l* wody w 1 minucie; w jakim czasie napełni się to naczynie, jeśli obie rury będą równocześnie otwarte?
10. *a)* Z dwóch miast wyszły naprzeciw siebie dwa pociągi, jeden z prędkością 27 *km* na godzinę, drugi zaś z prędkością 45 *km* na godzinę. Po upływie $2\frac{1}{2}$ godziny pociągi te były odległe od siebie o 17 *km*. Jaka jest odległość obu miast?

    Plan zadania:

    W ciągu 1 godziny pociągi zbliżyły się do siebie o (27 *km* + 45 *km*), a zatem po upływie $2\frac{1}{2}$ godziny zrobiły drogę (27 *km* + 45 *km*) . $2\frac{1}{2}$. Ponieważ wówczas ich odległość wynosiła 17 *km*, więc odległość obu miast wynosiła:

    $$(27\ km + 45\ km) \,.\, 2\tfrac{1}{2} + 17\ km = 197\ km.$$

    b) Z Pilawy, odległej o 67 *km* od Warszawy, wyszedł pociąg towarowy w kierunku Lwowa, robiąc przeciętnie 35 *km* na godzinę, a w 2 godziny później w tymże kierunku pociąg pośpieszny z Warszawy, robiąc 60 *km* na godzinę. Ile czasu potrzebuje pociąg pośpieszny, aby dogonić pociąg towarowy?

    Odp.: $(67 + 35 \,.\, 2) : (60 - 35)$ godzin.

    c) Z dwóch miast odległych o 840 *km* wyszły naprzeciw siebie 2 pociągi. Jeden przebyłby całą drogę w 12 godzinach, drugi w 15 godzinach. Jaka będzie odległość między pociągami po upływie $4\frac{1}{2}$ godziny?

    Odp.: $840 - (840 : 12 + 840 : 15) \,.\, 4\frac{1}{2}$ kilometrów.

    d) Z Warszawy wyszedł do Skierniewic pociąg pośpieszny, robiący 55 *km* na godzinę, a jednocześnie ze Skierniewic do Warszawy wyszedł pociąg, robiący 45 *km* na godzinę. Obliczyć w jakiej odległości od Warszawy pociągi te spotkają się, jeśli odległość Skierniewic od Warszawy wynosi 60 *km*.

Odp.: $55 \, . \, [60 : (55 + 45)]$ kilometrów.

11. Kupiec otrzymał 3 paczki towaru: pierwsza ważyła 24·5 *kg*, druga o 2·4 *kg* mniej, a trzecia o 3·6 *kg* mniej, niż druga. Pierwsza paczka zawierała towar w cenie 15 *zł* za 1 *kg*, druga w cenie 10·5 *zł* za 1 *kg*, a trzecia w cenie 12·4 *zł* za 1 *kg*; ile kupiec zarobił, jeśli cały ten towar sprzedał za 980 *zł*?

12. Maszyna parowa, pracując przez 12 dni po 11 godzin dziennie, zużyła 840 *t* węgla. Wskutek ulepszenia konstrukcji maszyny zużyto w ciągu 36 godz. przy tej samej wydajności pracy 2·88 *t* węgla; ile wskutek ulepszenia konstrukcji maszyny zaoszczędzono pieniędzy w ciągu roku, jeżeli było 315 dni pracy (po 11 godz. dziennie), przyczem za 1 *t* węgla płacono 45 *zł*?

Liczby ogólne.

Określenie liczb ogólnych.

Przykłady:

1. Bok kwadratu ma 5 *cm*; oblicz obwód!
Obwód kwadratu wynosi w *cm*:

$$4 \, . \, 5.$$

Podobnie, jeżeli bok kwadratu ma 6 *cm*, 7 *cm*, 8 *cm* i t. d., wówczas obwód wynosi w *cm* odpowiednio:

$$4 \, . \, 6, \quad 4 \, . \, 7, \quad 4 \, . \, 8 \text{ i t. d.}$$

Gdybyśmy przez O oznaczyli liczbę mierzącą obwód w *cm*, zaś przez b liczbę mierzącą bok w *cm*, to moglibyśmy napisać:

$$O = 4 \, . \, b.$$

Wzór powyższy wyraża krótko i przejrzyście następującą ogólną regułę:

Obwód kwadratu w *cm* otrzymamy, mnożąc przez 4 liczbę mierzącą bok w *cm*.

W powyższym wzorze możemy za b podstawiać rozmaite liczby, zależnie od długości boku kwadratu; za każdym razem otrzymamy jego obwód.

Z tego względu, że O i b oznaczać mogą rozmaite liczby, mówimy że O i b są l i c z b a m i o g ó l n e m i.

2. Robotnik zarabia dziennie $7\frac{1}{2}$ *zł*; ile zarobi w ciągu 3, 4, 5, 8 dni? Zarobek jego w *zł* wynosi odpowiednio:

$$7\tfrac{1}{2} \, . \, 3, \quad 7\tfrac{1}{2} \, . \, 4, \quad 7\tfrac{1}{2} \, . \, 5, \quad 7\tfrac{1}{2} \, . \, 8.$$

Jeżeli przez z oznaczymy zarobek w *zł*, zaś przez d liczbę dni pracy, to będziemy mogli napisać:

$$z = 7\tfrac{1}{2} \, . \, d.$$

We wzorze powyższym z i d są liczbami ogólnemi.

We wzorach może występować więcej, niż dwie liczby ogólne; wskazują na to następujące przykłady:

3. Jak wiemy, pole prostokąta np. w cm^2 obliczamy, mnożąc przez siebie liczby, mierzące podstawę i wysokość w *cm*. Podaj kilka przykładów liczbowych!

Jeżeli przez P oznaczymy pole prostokąta w cm^2, przez p długość podstawy w *cm*, przez w długość wysokości w *cm*, wówczas możemy napisać:

$$P = p \cdot w.$$

4. Jeżeli przez b oznaczymy ciężar towaru wraz z opakowaniem w *kg*, przez t ciężar opakowania w *kg*, przez n ciężar samego towaru w *kg*, wówczas:

$$b = t + n.$$

Uwaga. Obwód koła w *cm* obliczamy, mnożąc liczbę wyrażającą w *cm* długość średnicy przez π (= 3·14...).

Jeżeli oznaczymy przez O liczbę wyrażającą w *cm* obwód koła, przez d liczbę wyrażającą w *cm* średnicę koła, wówczas:

$$O = \pi \cdot d.$$

We wzorze powyższym O i d mogą oznaczać rozmaite liczby, zależnie od wielkości koła. Litera π oznacza zawsze tę samą liczbę, zw. ludolfiną, t. j. 3·14. A więc π nie jest liczbą ogólną.

Zadania.

1. Opierając się na przykładzie 3 str. 52, oblicz pole prostokąta, gdy: *a)* $p = 8\,cm$, $w = 3\,cm$; *b)* $p = 12\,cm$, $w = 5\,cm$; *c)* $p = 71\,cm$, $w = 16\,cm$!
   Sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a) b) c)*!
   Opierając się na przykładzie 4 str. 52, oblicz wagę brutto, gdy: *a)* $t = \frac{1}{2}\,kg$, $n = 5\,kg$; *b)* $t = 2\,kg$, $n = 17\,kg$; *c)* $t = 2\frac{1}{4}\,kg$, $n = 21\frac{2}{5}\,kg$!
   Sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a) b) c)*!
2. Bok sześciokąta umiarowego wynosi: *a)* 3 *cm*, *b)* 5 *cm*; *c)* $7\frac{1}{2}$ *cm*; oblicz obwód tego sześciokąta!
   Oznacz przez O liczbę, wyrażającą w *cm* obwód sześciokąta, przez a liczbę, mierzącą bok w *cm* i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć obwód, znając bok.

   Podstaw kolejno w otrzymanym wzorze za a wartości: $5\frac{1}{2}$ *cm*, 12 *cm*, $4\frac{3}{4}$ *cm* i sformułuj za każdym razem, jakie rozwiązujesz zadanie!
3. Długość podstawy trójkąta wynosi: *a)* 8 *cm*, *b)* 9 *cm*, *c)* $10\frac{1}{2}$ *cm*, długość zaś wysokości: *a)* 6 *cm*, *b)* 14 *cm*, *c)* 12 *cm*; oblicz pole tego trójkąta!
   Oznacz przez P pole trójkąta wyrażone w cm^2, przez p długość podstawy w *cm*, przez w długość wysokości w *cm* i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć pole trójkąta, znając długości podstawy i wysokości.
   Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* $p = 16\,cm$, $w = 9\,cm$; *b)* $p = 5\,cm$, $w = 4\frac{1}{2}\,cm$; *c)* $p = 10\,cm$, $w = 4{\cdot}6\,cm$ i sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a), b), c)*!
4. Kilogram towaru kosztuje: *a)* 2 *zł*, *b)* 5 *zł*, *c)* 8 *zł*; ile kosztuje: *a)* 2, *b)* 7, *c)* $4\frac{1}{4}$ *kg* tego towaru?
   Oznacz przez a cenę 1 *kg* towaru, przez b liczbę, wyrażającą, ile *kg* towaru kupiłeś, przez c cenę zakupionego towaru i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć cenę towaru, wiedząc, ile kosztuje 1 *kg* i ile *kg* towaru zakupiłeś.
   Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* za a — 3 *zł*, za b — 8 *kg*; *b)* za a — 2 *zł* 40 *gr*, za b — 12 *kg*; *c)* za a — 4 *zł* 20 *gr*, za b — $6\frac{1}{2}$ *kg* i sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a), b), c)*.
5. Piechur, przebywając: *a)* 1·5 *m*, *b)* 1·8 *m*, *c)* $1\frac{3}{4}$ *m* w 1 sekundzie, idzie przez: *a)* 1 godzinę, *b)* 2 godz., *c)* 1 godz. 20 min.; oblicz drogę, którą przebył!
   Oznacz przez c drogę w *m*, jaką przebywa piechur w 1 sek., przez t liczbę sekund, wyrażającą czas trwania chodu, przez s długość przebytej drogi w *m*. Napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć przebytą drogę, znając drogę, jaką piechur przebywa w 1 sek., oraz znając liczbę sekund, wyrażającą czas trwania chodu.
   Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* za c — $1\frac{1}{4}$ *m* w 1 sek., za t — 3000 sek.; *b)* za c — 2 *m* w 1 sek., za t — $1\frac{1}{4}$ godz.; *c)* za c — $1\frac{9}{10}$ *m* w 1 sek., za t — 3 godz. i sformułuj za każdym razem zadanie, które rozwiązałeś!
6. Samolot przebywa w 1 sek. drogę: *a)* 30 *m*, *b)* 40 *m*, *c)* 50 *m*; w jakim czasie przebędzie drogę: *a)* 120 *km*, *b)* 144 *km*, *c)* 180 *km*?

Wprowadziwszy oznaczenia, jak w poprzedniem zadaniu, napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć czas trwania lotu, gdy znasz długość drogi i prędkość, z jaką samolot się porusza.
Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* za s — 140.000 m, za c — 35 m w 1 sek., *b)* za s — 360.000, za c — 45 m w 1 sek., *c)* za s — 540.000 m, za c — 60 m w 1 sek. i sformułuj zadanie, jakie za każdym razem rozwiązałeś!

Wartości liczbowe wyrażeń.

Przykłady:

1. Przypuśćmy, że mamy jakieś wyrażenie, jak np.:

$$2 \, . \, a + 3,$$

w którem a jest liczbą ogólną. Jeżeli za a podstawimy jakąś liczbę, np. 5, wówczas otrzymamy wyrażenie:

$$2 \, . \, 5 + 3.$$

Obliczając to wyrażenie, otrzymamy na wynik 13. Mówimy, że 13 jest wartością liczbową wyrażenia $2 \, . \, a + 3$ dla $a = 5$.

Jeżeli za a podstawimy np. 7, otrzymamy jako wartość liczbową wyrażenia liczbę 17.

Możemy utworzyć tabelkę, pisząc w pierwszym wierszu liczby, jakie podstawiamy za a, w drugim otrzymane wartości liczbowe (rys. 16):

a	1	2	3	4	5	7
$2 \, . \, a + 3$	5	7	9	11	13	17

Rys. 16.

Podobnie na rys. 17 tabelka przedstawia wartości liczbowe wyrażenia:

$$3 \, . \, (a + 1)$$

a	1	2	3	4	5
$3 \, . \, (a + 1)$	6	9	12	15	18

Rys. 17.

2. W wyrażeniu:

$$2 \, . \, a + b$$

występują dwie liczby ogólne: a i b.

Jeżeli podstawimy np. $a = 1$, $b = 3$, to otrzymamy jako wartość liczbową $2 \, . \, 1 + 3$, t. j. 5.

Tabelka (rys. 18) podaje nam wartości liczbowe tego wyrażenia, otrzymane przez podstawienie za a i b rozmaitych liczb:

a	1	1	2	2	3	3	3
b	1	2	1	2	1	2	3
$2 \, . \, a + b$	3	4	5	6	7	8	9

Rys. 18.

Moglibyśmy również zapisać wartości liczbowe w postaci tabliczki (podobnej do tabliczki mnożenia).

b \ a	1	2	3
1	3	5	7
2	4	6	8
3	5	7	9

Jeżeli chcemy wiedzieć jaką wartość liczbową otrzymamy np. dla $a = 3$, $b = 2$, to bierzemy pod uwagę pole w 3-ciej kolumnie w 2-gim wierszu; liczba 8, stojąca na tem polu, jest szukaną wartością liczbową.

Uwaga 1. Jeżeli przed literą stoi znak . lub $\times$, oznaczający mnożenie, to znak ten możemy opuścić.

A więc $\quad 2 \, . \, a = 2a, \qquad a \, . \, b = ab,$

$$5a + 1 = 5 \times a + 1, \qquad 3 + 5a = 3 + 5 \, . \, a,$$

$$3ab + 7a = 3 \, . \, a \, . \, b + 7 \, . \, a \quad \text{i t. d.}$$

Znaków $+$ $-$ $:$ nie wolno opuszczać.

Uwaga 2. Nie zawsze istnieje wartość liczbowa wyrażenia.

Np. wyrażenie:

$$a - 5$$

nie ma wartości liczbowej dla $a = 3$, bo nie można od 3 odjąć 5.

Podobnie wyrażenie:

$$\frac{1}{a}$$

nie ma wartości liczbowej dla $a = 0$, gdyż symbol $\frac{1}{0}$ nic nie znaczy.

Zadania.

1. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $a + 1$ dla $a = 1, 2, 5, 7, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{4}{7}$;
   b) $b - 1$ dla $b = 2, 3, 4, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{7}$;
   c) $x + \frac{1}{2}$ dla $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 7, \frac{2}{8}, \frac{4}{5}, \frac{1}{9}$;
   d) $y - \frac{1}{2}$ dla $y = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 6, \frac{9}{4}, \frac{7}{5}, \frac{13}{11}$.
   Sporządź tabelkę!
2. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $5a$ dla $a = 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 4, 15, \frac{3}{7}, \frac{8}{11}$;
   b) $\frac{2}{3}c$ dla $c = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 7, 18, \frac{13}{2}$;
   c) $3x + 2$ dla $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$;
   d) $\frac{2}{5}y - 1$ dla $y = 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6$.
   Sporządź tabelkę!
3. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $\dfrac{2a+1}{3a-1}$ dla $a = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5$;
   b) $\dfrac{8d-5}{5d+2}$ dla $d = 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{6}{5}, 3, \frac{7}{2}, \frac{9}{4}$;
   c) $\dfrac{\frac{2}{3}z+1}{\frac{5}{4}z+2}$ dla $z = 0, \frac{3}{2}, 2, \frac{12}{5}, 3, 4, 9$;
   d) $\dfrac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}}$ dla $x = 2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}$.
   Sporządź tabelkę!
4. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $2a+3b-1$ dla $a=0,\ b=1;\ a=1,\ b=0;\ a=1,\ b=1$;
   b) $4x-2y+5$ dla $x=1,\ y=0;\ x=2,\ y=1,\ x=3,\ y=4$;
   c) $\dfrac{5c+2d-2}{3c+d+4}$ dla $c=0,\ d=1;\ c=1,\ d=0,\ c=5,\ d=9$.
5. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $(3x + 8) - (2x - 6)$ dla $x = 3, 4, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5$;
   b) $(6x - 1)(5x + 8) - (7x - 3)$ dla $x = 3, \frac{3}{7}, 2, 2\frac{1}{2}, 1$;
   c) $2x^3 + 5x^2 + 7x + 2$ dla $x = 0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$;
   d) $\dfrac{3x-8}{2x+5} - \dfrac{4x-18}{7x-5}$ dla $x = 5, 6, 7, 8, 9$;
   e) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ dla $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$.

6. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $(2x + 3)(5y + 7) - (8xy - 23)$ dla : $x = 3,\ y = 2$; $x = 2,\ y = 3$; $x = 2,\ y = 2$;
   b) $(2x + 3y - 1)(3x + 2y + 1) - (xy + 2)$ dla: $x = 5,\ y = 7$; $x = 7,\ y = 5$; $x = 1,\ y = 1$; $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$; $x = 2,\ y = 0$.
   c) $\dfrac{7a+3b+1}{4a-5b+8} - \dfrac{8b-1}{5a+2}$ dla $a = 2,\ b = 3$.
7. Podstaw kilka razy w ułamku $\dfrac{x}{5}$ takie liczby w miejsce litery x, aby wartość w ten sposób powstałego ułamka była liczbą całkowitą!
8. Jakie liczby naturalne można wstawić w miejsce litery a, aby ułamek $\dfrac{a}{9}$ był ułamkiem właściwym?
9. Jakie liczby naturalne można wstawić w miejsce litery x, aby ułamek $\dfrac{9}{x}$ był niewłaściwy?
10. Napisz odwrotność ułamka:

$$\frac{a}{b};\quad \frac{a}{1};\quad \frac{1}{a};\quad \frac{2}{x};\quad \frac{y}{3}.$$

11. Oblicz wartość liczbową wyrażenia:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   a) dla $n = 1, 10, 15, 20, 100$;
   b) przekonaj się, że np. dla $n = 3$ wartość powyższego wyrażenia wynosi $1^2 + 2^2 + 3^2$;
   c) sprawdź jeszcze na kilku przykładach, że wzór powyższy daje sumę kwadratów pierwszych n liczb.
12. Zastąp literę x taką liczbą, aby:
   a) $x + 7 = 15$; *b)* $x - 2 = 9$; *c)* $x \cdot 5 = 20$; *d)* $x : 3 = 7$;
   e) $2 \cdot x = 10$; *f)* $\dfrac{x}{3} = 24$; *g)* $\dfrac{8}{x} = 4$.
13. Oznaczmy ciężar ciała, wyrażony w gramach, przez Q, ciężar 1 cm^3 tego ciała (wyrażony w *g*) przez q, objętość zaś tego ciała wyrażoną w cm^3 przez v; w takim razie mamy wzór:

$$Q = v \cdot q.$$

Oblicz Q, jeżeli:

a) $v\ cm^3 = 5\ cm^3$, $q\ g = 21{\cdot}4\ g$ (platyna);
b) v „ $= 8$ „ , q „ $= 19{\cdot}3$ „ (złoto);
c) v „ $= 15$ „ , q „ $= 11{\cdot}34$ „ (ołów);
d) v „ $= 21$ „ , q „ $= 8{\cdot}93$ „ (miedź);
e) v „ $= 40$ „ , q „ $= 7{\cdot}25$ „ (żelazo lane).

Jakie za każdym razem rozwiązałeś zadanie?

14. Jeśli boki równoległe trapezu mają $a\ cm$ i $b\ cm$, wysokość zaś $w\ cm$, to pole P (w cm^2) tego trapezu wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot w.$$

Wyjaśnij ten wzór i na podstawie niego oblicz pole trapezu, gdy:

a) $a\ cm = 3\ cm$, $b\ cm = 2\ cm$, $w\ cm = 1\ cm$;
b) a „ $= 8$ „ , b „ $= 5$ „ , w „ $= 3$ „ ;
c) a „ $= 10$ „ , b „ $= 7$ „ , w „ $= 4$ „ .

15. W ostrosłupie foremnym podstawa jest kwadratem, którego bok ma $a\ cm$, wysokość zaś trójkąta bocznego ma $w\ cm$; pole P (w cm^2) powierzchni tego ostrosłupa wyraża się wzorem:

$$P = a^2 + 2\,a\,w.$$

Wyjaśnij ten wzór i na podstawie niego oblicz pole powierzchni ostrosłupa, gdy:

a) $a\ cm = 4\ cm$, $w\ cm = 6\ cm$;
b) a „ $= 3{\cdot}5$ „ , w „ $= 5$ „ ;
c) a „ $= 2\frac{3}{4}$ „ , w „ $= 4\frac{1}{2}$ „ .

16. Oznaczmy przez l długość drutu miedzianego, wyrażoną w m, przez L długość tego drutu (wyrażoną w m) po ogrzaniu o t stopni C; w takim razie, jak doświadczenie uczy, mamy wzór:

$$L = l\,(1 + 0{\cdot}000017\ t).$$

Oblicz na podstawie tego wzoru L, gdy:

a) $l\ m = 8\ m$, $t^0\,C = 12^0\,C$;
b) l „ $= 20$ „ , t^0 „ $= 15^0$ „ ;
c) l „ $= 15$ „ , t^0 „ $= 21^0$ „ .

Jakie zadanie za każdym razem rozwiązałeś?

Działania liczbami ogólnemi.

Porównywanie:

1. Jeśli:

a) $a = b$ i $b = 3$, ile wynosi a?
b) $5 = b$ i $b = c$, „ „ c?
c) $\frac{l}{3} = b$ i $b = \frac{4}{6}$, „ „ l?
d) $\frac{7}{11} = b$ i $b = \frac{21}{m}$ „ „ m?

2. Obierz trzy liczby a, b, c tak, aby:

a) $a = b$ i $b = c$;
b) $a > b$ i $b > c$;
c) $a > b$ i $b = c$;
d) $a = b$ i $b > c$;
e) $a < b$ i $b < c$;
f) $a = b$ i $b < c$;
g) $a < b$ i $b = c$.

Co możesz o liczbach a i c powiedzieć? (czy są równe, a jeśli nie, to która z nich jest większa).

3. O liczbach a, b, c, d wiemy, że

$$a > c, \quad d < b, \quad c < d, \quad d > a.$$

Uporządkuj te liczby wedle wielkości!

Dodawanie.

Określenia:

Sumę liczb a i b oznaczamy, pisząc:

$$a + b.$$

Mamy dla każdej liczby a:

$$a + 0 = a, \quad 0 + a = a.$$

Zadania.

1. a) Towar waży $a\ kg$, opakowanie $b\ kg$; ile kg waży towar z opakowaniem?
b) Kupiec zapłacił za towar a *zł* i sprzedał go z zyskiem b *zł*; za ile *zł* sprzedał towar?
c) Jeden odcinek ma długość $a\ cm$, drugi $b\ cm$; ile cm ma suma tych odcinków?
d) Ktoś przeszedł w jednym dniu $a\ km$, w drugim $b\ km$; ile km przeszedł w obu dniach?

e) Robotnik zarobił w jednym dniu a *zł*, w drugim b *zł*; ile *zł* zarobił w obu dniach?

W zadaniach powyższych sporządź tabelkę!

2. Napisz sumę liczb:

a) 7 i a; $\frac{3}{2}$ i w; *b)* x i 8; z i $2\frac{1}{2}$.

3. Ile wynosi x, jeżeli:

$$a + x = a.$$

4. a jest liczbą całkowitą; którą liczbą zkolei po a jest liczba b, jeżeli:

$$b = a + 1; \quad b = a + 2; \quad b = a + 8.$$

5. a jest pewną liczbą całkowitą;

a) jaka liczba całkowita następuje po a?

b) jaka liczba całkowita jest druga zkolei po a?

c) jaka liczba całkowita jest siódma zkolei po a?

Suma kilku liczb.

Sumę kilku liczb, np. a, b, c, d, oznaczamy, pisząc:

$$a + b + c + d.$$

1. *a)* Do naczynia wlano a litrów wody, potem b litrów; ile litrów wody wlano do naczynia?

b) W mieszkaniu jeden pokój ma a m^3, drugi b m^3, trzeci c m^3; ile m^3 ma mieszkanie?

c) Ile *kg* ważą trzy paczki o ciężarach: a *kg*, b *kg*, c *kg*?

2. Oznacz przy pomocy nawiasów, w jakim porządku wykonuje się działania w sumie:

a) $a + b + c$, *b)* $x + w + z + t$, *c)* $a + x + b + y + t$,
d) $3 + a + 4$, *e)* $5 + a + 2\frac{1}{2} + 4$.

Prawo przemienności sumy.

Zmieńmy w sumie:

$$2 + 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}$$

porządek składników np. w następujący sposób:

$$\tfrac{1}{4} + 3\tfrac{1}{2} + 2.$$

W obu wypadkach wartość sumy jest ta sama.

A więc:

$$2 + 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + 3\tfrac{1}{2} + 2.$$

Wynika to z prawa przemienności.

Suma nie zależy od porządku składników. Jeżeli więc dodajniki oznaczymy literami, to możemy napisać:

$$a + b + c = c + b + a.$$

Podobnie:

$$a + b + c = c + a + b;$$
$$a + b = b + a \quad \text{i t. d.}$$

Uwaga. Ostatnia równość wyraża prawo przemienności sumy dwóch składników i możemy ją wysłowić: Sumą liczb a i b równa się sumie liczb b i a. Widzimy, że posługując się liczbami ogólnemi, możemy zwięźle sformułować jedną z zasadniczych własności sumy, t. j. prawo przemienności. Poznamy pokolei, jak wszystkie własności czterech działań wyrażają się w prosty sposób przy pomocy liczb ogólnych.

Zadania.

1. Przekonaj się o następujących równościach, wstawiając za litery dowolne liczby:

a) $a + b = b + a$;
b) $a + b + c = a + c + b = b + a + c$;
c) $a + b + c + d = a + d + c + b$.

Wysłów każdą z powyższych równości!

2. W sumie:

$$x + y + z$$

zmień porządek składników na wszystkie możliwe sposoby. Oblicz za każdym razem wartość otrzymanego wyrażenia dla $x = 1$, $y = 5$, $z = 2\frac{1}{2}$.

3. Do beczki wlano a litrów, b litrów i c litrów wina; ponieważ obojętną jest rzeczą, w jakim porządku to wino wlewano, więc zapisz kilkoma sposobami, ile litrów wina wlano do beczki!

4. Wskaż nawiasami kilka sposobów, w jakie można obliczyć sumy:

a) $8 + 7 + 4 + 2$; *d)* $a + 4 + b + 6 + c + 8$;
b) $2 + 5 + a$; *e)* $a + b + c + d + e$.
c) $7 + b + 1 + a$;

5. Przedstaw w najprostszej formie następujące sumy:

a) $3 + 5 + a$, $5 + a + 7$, $3\frac{1}{2} + x + 4$, $0{\cdot}6 + b + 2$;
b) $4 + x + a + 12$, $5 + b + 8 + c + 1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + a + \frac{3}{2} + b$;

c) $b + 1\frac{1}{2} + a + 2 + 3\frac{1}{4}$, $0{\cdot}4 + b + a + 0{\cdot}6 + c + 2{\cdot}5$;
d) $c + 2 + a + 1 + 4 + d + b$, $7 + d + 1 + c + b + 5 + a$.

Uwaga. Rozwiązuj jak np.:

$$11 + c + 3 + b + a + 4 = 11 + 3 + 4 + c + b + a = \\ = 18 + a + b + c.$$

Prawo łączności sumy.

Zastąpmy w sumie:

$$3\tfrac{1}{2} + 2 + 5\tfrac{1}{2} + 7$$

kilka dodajników np. 2, $5\frac{1}{2}$, 7 ich sumą t. j. $14\frac{1}{2}$, a otrzymamy:

$$3\tfrac{1}{2} + 14\tfrac{1}{2}.$$

W obu wypadkach wartość sumy jest ta sama. A więc:

$$3\tfrac{1}{2} + 2 + 5\tfrac{1}{2} + 7 = 3\tfrac{1}{2} + 14\tfrac{1}{2}.$$

Wynika to z prawa łączności.

Suma się nie zmieni, jeżeli kilka dodajników zastąpimy ich sumą.

Zamiast pisać sumę kilku dodajników możemy te dodajniki wziąć w nawias. Zatem:

$$3\tfrac{1}{2} + 2 + 5\tfrac{1}{2} + 7 = 3\tfrac{1}{2} + (2 + 5\tfrac{1}{2} + 7).$$

Oznaczając dodajniki literami, możemy napisać:

$$a + b + c + d = a + (b + c + d).$$

Podobnie:

$$a + b + c + d = a + (b + c) + d;$$
$$a + b + c = a + (b + c) \quad \text{i t. d.}$$

Z prawa przemienności i łączności wynika, że w sumie możemy dowolnie dodajniki łączyć (czyli zastępować ich sumą) i dowolnie możemy zmieniać porządek dodajników. Np.:

$$3 + \tfrac{1}{2} + 7 + 2\tfrac{1}{2} = 3 + (\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}) + 7 = (7 + 3) + (\tfrac{1}{2} + 2\tfrac{1}{2}) \text{ i t. d.}$$

Podobnie dla liczb ogólnych:

$$a + b + c + d = a + (b + d) + c = (a + c) + (b + d) = \\ = c + (a + d + b) \quad \text{i t. d.}$$
$$(a + b) + (c + d) = a + d + b + c \quad \text{i t. d.}$$

W sumie zatem wolno nawiasy opuszczać, lub dowolnie je umieszczać.

Zadania.

1. Wskaż nawiasami kilka sposobów, w jakie można obliczyć sumy:

   a) $a + 5 + 4 + b$, *b)* $a + 7 + b + c$, *c)* $a + b + 4 + c + d$.

2. Przedstaw w najprostszej formie następujące sumy:

   a) $4 + (5 + a)$, $(9 + a) + 11$, $2\frac{1}{4} + (b + 3\frac{3}{4})$;
   b) $(8 + t) + (c + 9)$, $(6 + a) + 11 + (b + 3)$, $\frac{1}{5} + (\frac{1}{4} + x + \frac{1}{6}) + y$;
   c) $y + (4\frac{1}{3} + x) + 2 + 5\frac{5}{6}$, $2{\cdot}3 + (y + x) + 3{\cdot}4 + (z + 1{\cdot}2)$;
   d) $z + (1 + x + 3) + 5 + (t + y)$, $(9 + a) + 3 + b + (d + 7) + c$.

   Licz, jak np.:

   $5 + (8 + a) + (3 + b) = 5 + 8 + a + 3 + b = 16 + a + b$.

3. Wskaż, które z niżej podanych sum są sobie równe:

   $(1 + 3 + a) + (b + 4)$; $(1 + b + a) + (4 + 10)$;
   $(2 + a + 7) + (5 + c)$; $(3 + b) + (1 + a + 4)$;
   $(2 + c + 5) + (7 + a)$; $(2 + x) + (7 + 5 + a)$;
   $(1 + a) + (3 + b) + 4$; $(c + a + 2) + (7 + 5)$.

4. W jednej klasie jest a uczniów, w drugiej o b uczniów więcej; ilu jest uczniów w drugiej klasie, a ilu w obu klasach razem?

Zmiany sumy.

1. Jeśli jeden dodajnik sumy powiększymy o: *a)* 4, *b)* $2\frac{1}{2}$, *c)* 3·5, *d)* a, *e)* b, to o ile powiększy się suma?

2. Wskaż, która ze sum jest większa i o ile:

   a) $5 + a$, $4 + a$;
   b) $3 + a$, $a + 8$;
   c) $a + 20 + b$, $a + b + 18$;
   d) $a + 16 + x + 4$, $a + x + 14 + 2$;
   e) $a + 20 + 4 + b + 1 + c$, $25 + a + 6 + c + 2 + b$.

3. Przekonaj się, że:

   a) jeśli $a = b$ i $c = d$, to $a + c = b + d$;
   b) jeśli $a > b$, to $a + c > b + c$;
   c) jeśli $a > b$ i $c > d$, to $a + c > b + d$;
   d) jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$;
   e) jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$.

Podaj w każdem z powyższych twierdzeń kilka przykładów liczbowych!

Twierdzenie *a)* można wysłowić: jeśli do równych liczb dodamy równe liczby, to otrzymamy równe wyniki.

Wysłów twierdzenia *b)*, *c)*, *d)* i *e)*!

4. Połącz odpowiednio znakami równości, względnie nierówności, następujące pary wyrażeń: *a)* $a + 5$ i $a + 5$; *b)* $x + \frac{3}{4}$ i $x + \frac{4}{5}$; *c)* $(a + b) + 17$ i $(a + b) + 13$; *d)* $12 + y$ i $15 + z$, przyczem $y < z$; *e)* $(a + 2) + \frac{4}{5}$ i $(a + 3) + 1$; *f)* $(x + 7) + \frac{8}{3}$ i $(x + 6) + 2$.

5. W sumie $a + b + c$ do dodajnika a dodano 2, do b dodano 5, do c dodano $\frac{4}{5}$; o ile zmieniła się suma?

6. Uporządkuj wedle wielkości rosnących następujące sumy:

$(a + 3) + (b + 5) + (c + 8)$, $(a + 3) + (b + 1) + (c + 8)$,
$(a + 5) + (b + 6) + (c + 9)$, $(a + 3) + (b + 5) + (c + 9)$.

Odejmowanie.

Określenia:

a) Jak określamy różnicę dwóch liczb?
b) Dlaczego: $8 - 5 = 3$, $7\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 4$ i t. d.?
c) Co to jest odjemna, odjemnik, różnica?

Jeżeli odjemną, odjemnik i różnicę oznaczymy odpowiednio literami a, b, c wówczas

$$a - b = c, \quad b + c = a.$$

Ostatnia równość wyraża, że odjemna (a) równa się sumie odjemnika (b) i różnicy (c).

Różnica istnieje tylko wtedy, gdy odjemna jest większa lub równa odjemnikowi, a więc, jeżeli:

$$a > b \quad \text{lub} \quad a = b.$$

Zadania.

1. *a)* Kupiec sprzedał towar za a *zł*, a zapłacił za ten towar b *zł*; ile *zł* zarobił?
b) Kupiec miał a *kg* towaru, z czego sprzedał b *kg*; ile *kg* towaru zostało mu?
c) Towar waży brutto a *kg*, opakowanie zaś b *kg*; ile *kg* waży sam towar?

d) Piechur przebył w dwóch dniach a *km*, w pierwszym zaś dniu b *km*; ile *km* przebył w drugim dniu?
e) Z beczki, zawierającej a *l* wina, odlano b *l*; ile *l* wina zostało w beczce?
f) Dłużnik winien jest a *zł*, a zapłacił z tego b *zł*; ile *zł* jeszcze winien?
g) Na placu, który miał a m^2, postawiono dom, który zajął b m^2; ile jeszcze wolnego placu pozostało?
h) Góra, która ma a *m*, jest wyższa od góry, która ma b *m*; o ile?
i) Suma dwóch liczb, z których jedna równa się a, wynosi b; ile wynosi druga liczba?

2. Ile wynosi x, jeżeli:

	odjemna	odjemnik	różnica
a)	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{4}$	x
b)	a	b	x
c)	a	a	x
d)	x	4·5	2·5
e)	x	b	$a - b$
f)	x	a	0
g)	5	x	$1\frac{1}{5}$
h)	a	x	$a - b$
i)	a	x	0

3. Ile wynosi x, jeżeli:

a) $11 - \frac{3}{4} = x$; *b)* $a - a = x$; *c)* $x - 7 = 3{\cdot}4$;
d) $x - b = a - b$; *e)* $x - a = o$; *f)* $7 - x = 2{\cdot}8$;
g) $a - x = a - b$; *h)* $a - x = 0$.

4. Ile to jest: $a - 0$?

Własności różnicy.

Zadania.

1. Jak się zmieni różnica, jeżeli:
a) odjemną powiększymy o x;
b) odjemną pomniejszymy o x;
c) odjemnik powiększymy o x;
d) odjemnik pomniejszymy o x.
Podaj przykłady liczbowe!

2. Jak się zmieni różnica, jeżeli:
   a) odjemną i odjemnik powiększymy o x;
   b) odjemną i odjemnik pomniejszymy o x.
3. Podaj, która z różnic jest większa i o ile:
   a) $(8+x)-5$ i $8-5$, $(a+x)-2$ i $a-2$, $(a+x)-b$ i $a-b$;
   b) $(10-x)-3$ i $10-3$, $(a-x)-4$ i $a-4$, $(a-x)-b$ i $a-b$;
   c) $16-2$ i $16-(2+x)$, $a-(3+x)$ i $a-3$, $a-b$ i $a-(b+x)$;
   d) $25-3$ i $25-(3-x)$, $a-8$ i $a-(8-x)$, $a-b$ i $a-(b-x)$;
   e) $15-2$ i $(15+x)-(2+x)$, $a-4$ i $(a+x)-(4+x)$, $a-b$ i $(a+x)-(b+x)$;
   f) $28-20$ i $(28-x)-(20-x)$, $a-16$ i $(a-x)-(16-x)$, $a-b$ i $(a-x)-(b-x)$.

Zmiany różnicy.

Zadania.

1. Jak się zmieni różnica (czy się zwiększy, czy zmniejszy), jeżeli:
   a) odjemną powiększymy;
   b) odjemnik powiększymy;
   c) odjemną pomniejszymy;
   d) odjemnik pomniejszymy.
2. Połącz znakami nierówności następujące pary wyrażeń:
   a) $a-8$ i $a-7$; b) $x-\frac{3}{4}$ i $x-\frac{2}{3}$; c) $x+\frac{2}{7}$ i $x-1$;
   d) $(a+8)-3$ i $(a+11)-3$; e) $(x+4)-2$ i $(x+6)-2$.
3. Przekonaj się, przypuszczając, że odejmowania można wykonać, iż:
   a) jeśli $a=b$ i $c=d$, to $a-c=b-d$;
   b) jeśli $a=b$ i $c<d$, to $a-c>b-d$;
   c) jeśli $a=b$ i $c>d$, to $a-c<b-d$;
   d) jeśli $a>b$ i $c=d$, to $a-c>b-d$;
   e) jeśli $a>b$ i $c<d$, to $a-c>b-d$;
   f) jeśli $a<b$ i $c>d$, to $a-c<b-d$.

   Podaj w każdem z powyższych twierdzeń kilka przykładów liczbowych!
   Twierdzenie a) można wysłowić: jeśli od równych liczb odejmiemy równe liczby, to otrzymamy równe wyniki. Wysłów twierdzenia b), c), d), e) i f).

Łączne dodawanie i odejmowanie.

Zadania.

1. a) Wiemy, że w sumie wolno nawiasy opuszczać i dowolnie umieszczać. Mamy zatem:

$$a+(b+c)=a+b+c,$$

czyli słowami:
Do liczby dodaje się sumę, dodając do tej liczby pokolei każdy dodajnik sumy.
Sprawdź ten wzór dla: $a=5$, $b=7$, $c=9$; $a=\frac{3}{2}$, $b=2\frac{1}{2}$, $c=4$; $a=2{\cdot}5$, $b=1{\cdot}4$, $c=7{\cdot}2$.

b) Z beczki, zawierającej a l wina, odlano najpierw b l wina, potem c l wina; ile l wina pozostało w beczce?
Odpowiedź. I sposób: Odlano najpierw b l wina, więc w beczce zostało $(a-b)$ l wina, odlano potem c l wina, więc w beczce zostało:

$$(a-b)-c \text{ litrów wina.}$$

II sposób: Skoro z beczki odlano b l wina, a potem c l wina, więc razem odlano $(b+c)$ l wina; w beczce pozostało zatem:

$$a-(b+c) \text{ litrów wina.}$$

Widzimy stąd, że:

$$a-(b+c)=(a-b)-c,$$

czyli słowami:
Od liczby odejmuje się sumę, odejmując od tej liczby pokolei każdy dodajnik sumy (jeśli odejmowania dadzą się wykonać).
Sprawdź powyższy wzór dla: $a=16$, $b=5$, $c=8$; $a=15{\cdot}4$, $b=8{\cdot}3$, $c=2{\cdot}1$; $a=21\frac{1}{2}$, $b=4\frac{3}{4}$, $c=8\frac{1}{8}$.

c) Jedna beczka zawierała a l wina, druga b l wina; jeśli z drugiej beczki odlano c l wina, to ile l wina razem zostało?
Odpowiedź. I sposób: Skoro z drugiej beczki odlano c l wina, więc w tej beczce zostało $(b-c)$ l wina, razem więc zostało:

$$a+(b-c) \text{ litrów wina.}$$

II sposób: W obu beczkach było razem $(a+b)$ l wina, a ponieważ odlano c l wina, więc razem zostało:

$$(a+b)-c \text{ litrów wina.}$$

Widzimy stąd, że:

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Do liczby dodaje się różnicę, dodając do tej liczby odjemną, a następnie odejmując odjemnik.

Sprawdź powyższy wzór dla: $a = 17$, $b = 8$, $c = 3$; $a = 12\frac{3}{4}$, $b = 8\frac{1}{2}$, $c = 3\frac{1}{4}$; $a = 15{\cdot}8$, $b = 12{\cdot}4$, $c = 4{\cdot}7$.

d) Beczka zawiera a l wina; winem z tej beczki napełniono naczynie o zawartości b l; z naczynia tego wlano zpowrotem do beczki c l wina. Ile l wina pozostało w beczce?

Odpowiedź. I sposób: Odlano b l, więc pozostało $(a - b)$ l wina, dolano wkońcu c l, a więc w beczce zostało:

$$(a - b) + c \text{ litrów wina.}$$

II sposób: Z naczynia zawierającego b l wina odlano c l, a zatem w naczyniu zostało $(b - c)$ l wina. W beczce więc zostało:

$$a - (b - c) \text{ litrów wina.}$$

Widzimy stąd, że:

$$a - (b - c) = (a - b) + c,$$

czyli słowami:

Od liczby odejmuje się różnicę, odejmując od tej liczby odjemną i dodając następnie odjemnik (jeśli odejmowania dadzą się wykonać).

Sprawdź powyższy wzór dla: $a = 23$, $b = 10$, $c = 8$; $a = 21{\cdot}8$, $b = 13{\cdot}2$, $c = 4{\cdot}1$; $a = 18\frac{3}{4}$, $b = 7\frac{1}{2}$, $c = \frac{7}{8}$.

Twierdzenia zawarte w *a*), *b*), *c*) i *d*) można ująć w jedno twierdzenie następujące:

Jeżeli przed nawiasem znajduje się znak dodawania (+), to nawias można opuścić, jeżeli zaś przed nawiasem znajduje się znak odejmowania (—), to opuszczając nawias należy pierwszą liczbę w nawiasie odjąć, drugą zaś dodać, jeżeli wewnątrz nawiasu należało ją odjąć, a odjąć, jeżeli wewnątrz nawiasu należało ją dodać.

2. *a)* Oblicz:

$(a + 5) + 8$, $(x + 2) + 3$, $11 + (a + 2{\cdot}5)$,
$18 + (x + 4)$, $(2\frac{1}{2} + x) + 3$, $5{\cdot}1 + (2{\cdot}4 + a)$;

b) $8 - (2 + a)$, $18 - (3 + x)$, $4\frac{1}{2} - (3 + a)$,
$18 - (2{\cdot}6 + x)$, $12\frac{1}{2} - (8\frac{1}{2} + x)$, $10{\cdot}8 - (3{\cdot}2 + x)$;

c) $7 + (5 - a)$, $4 + (7 - x)$, $18\frac{1}{2} + (3 - a)$,
$10 + (7\frac{1}{2} - x)$, $8\frac{5}{6} + (4\frac{2}{3} - a)$, $23{\cdot}2 + (8{\cdot}4 - x)$;

d) $10 - (8 - a)$, $7 - (7 - a)$, $4\frac{1}{2} - (3 - x)$,
$3\frac{1}{2} - (1\frac{3}{4} - a)$, $a - (a - 2{\cdot}6)$, $8{\cdot}8 - (6{\cdot}4 - x)$.

3. *a)* Posługując się wzorem:

$$a + b + c = a + (b + c),$$

oblicz:

$a + 3 + 4$, $x + 7 + 15$, $a + 3\frac{1}{2} + 9$,
$x + 4\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}$, $a + 2{\cdot}8 + 3{\cdot}2$, $x + 2{\cdot}4 + 6{\cdot}9$.

b) Posługując się wzorem:

$$a - b - c = a - (b + c),$$

oblicz:

$a - 3 - 5$, $x - 8 - 4$, $a - 2\frac{1}{2} - 3$,
$x - 4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$, $x - 2{\cdot}4 - 3{\cdot}5$, $x - 8\frac{1}{4} - 3\frac{1}{8}$.

c) Posługując się wzorem:

$$a + b - c = a + (b - c),$$

oblicz:

$a + 7 - 2$, $x + 4 - 1\frac{1}{2}$, $a + 7\frac{2}{5} - 3\frac{1}{5}$,
$x + 8{\cdot}4 - 2{\cdot}9$, $a + 11\frac{3}{4} - 6\frac{2}{5}$, $x + 12\frac{2}{5} - 7\frac{3}{4}$.

d) Posługując się wzorem:

$$a - b + c = a - (b - c),$$

oblicz:

$a - 8 + 3$, $x - 11 + 6$, $a - 10 + 3{\cdot}5$,
$x - 4{\cdot}6 + 2$, $a - 14{\cdot}6 + 2{\cdot}4$, $x - 13\frac{1}{2} + 5$,
$a - 12\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4}$, $x - 18\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5}$, $a - 4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2}$.

4. Balon wzniósł się o a m wgórę, potem opadł o b m, znowu wzniósł się o c m; na jakiej wysokości znajduje się balon?

5. W jednym worku jest a kg cukru, w drugim o b kg mniej; ile kg cukru jest w drugim worku, a ile w obu workach razem?

6. Kupiec zarobił a *zł*, wydał b *zł*, znowu zarobił c *zł*, wydał d *zł* i zarobił e *zł*; ile kupiec miał pieniędzy?

Odpowiedź. I sposób: Kupiec zarobił a *zł* i wydał b *zł*, zostało mu więc $(a - b)$ *zł*, potem zarobił c *zł*, miał zatem $(a - b + c)$ *zł*, wydał znowu d *zł*, zostało mu więc $(a - b + c - d)$ *zł*, zarobił wreszcie e *zł*, a więc miał wkońcu:

$$a - b + c - d + e \text{ złotych.}$$

II sposób: Kupiec zarobił a *zł*, potem c *zł*, miał zatem $(a + c)$ *zł*, wydał b *zł*, zostało mu więc $(a + c - b)$ *zł*, zarobił e *zł*, miał więc $(a + c - b + e)$ *zł*, a ponieważ wydał jeszcze d *zł*, więc posiadał wkońcu:

$$a + c - b + e - d \text{ złotych.}$$

Widzimy stąd, że:

$$a - b + c - d + e = a + c - b + e - d,$$

czyli słowami:

Mając zaznaczone na liczbach kolejne działania dodawania i odejmowania, możemy w dowolnym porządku je wykonywać (byle odejmowania były zawsze możliwe).

Sprawdź powyższy wzór dla:

$a = 85,\quad b = 16,\quad c = 46,\quad d = 13,\quad e = 28;$
$a = 104,\quad b = 13\tfrac{1}{2},\quad c = 50\tfrac{1}{2},\quad d = 40,\quad e = 16;$
$a = 93,\quad b = 24,\quad c = 75{\cdot}5,\quad d = 28{\cdot}4,\quad e = 46{\cdot}5.$

7. Oblicz:

a) $a - 1 + b - 3,\quad x - \tfrac{2}{3} + y - 1,\quad a - 2 + b - 3 + c;$
b) $8 - a + 9 - b,\quad 7 - x + \tfrac{2}{5} - y,\quad 11 - a + 5 - b - c;$
c) $a - 3 - b + 1,\quad x - \tfrac{3}{4} - y + 3,\quad a - 5 - b + 3 - c + 7.$

8. Oblicz:

a) $11 - (a + 3),\quad 12 - (x + 2),\quad 16\tfrac{1}{2} - (a + 3),$
$10 - (a + 1\tfrac{1}{2}),\quad 15\tfrac{1}{2} - (x + 3\tfrac{1}{4}),\quad 20{\cdot}8 - (x + 2{\cdot}3).$

Licz, jak np.:

$$14 - (x + 9) = 14 - x - 9 = 14 - 9 - x = 5 - x.$$

b) $7 + (a - 4),\quad 14 + (x - 5\tfrac{1}{2}),\quad 18\tfrac{3}{4} + (x - 6),\quad a + (3 - a),$
$20 + (a - 8\tfrac{3}{5}),\quad 15{\cdot}4 + (x - 8{\cdot}2),\quad 13\tfrac{1}{6} + (x - 8\tfrac{2}{3}),\quad x + (4\tfrac{1}{2} - x).$

Licz, jak np.:

$$12 + (a - 3) = 12 + a - 3 = 12 - 3 + a = 9 + a.$$

c) $11 - (a - 3),\quad 13 - (x - 2\tfrac{1}{2}),\quad 18\tfrac{1}{2} - (a - 3\tfrac{1}{2}),$
$24{\cdot}5 - (x - 2{\cdot}9),\quad 8\tfrac{3}{4} - (x - 5\tfrac{1}{2}),\quad a - (a - 3).$

Licz, jak np.:

$$14 - (a - 2) = 14 - a + 2 = 14 + 2 - a = 16 - a.$$

Mnożenie.

Określenia:

a) Jak określamy iloczyn, gdy mnożnik jest liczbą całkowitą?

b) Jak w postaci sumy zapiszemy następujące iloczyny:

$$5 \,.\, 3,\quad 3\tfrac{1}{2} \,.\, 4,\quad \tfrac{2}{7} \,.\, 5.$$

Jeżeli a oznacza liczbę ogólną, wówczas:

$$a \,.\, 2 = a + a,$$
$$a \,.\, 3 = a + a + a,$$
$$a \,.\, 1 = a,$$
$$a \,.\, 0 = 0.$$

Sumę: $\quad a + a + \ldots + a,$

w której dodajnik a występuje b razy, oznaczamy, pisząc:

$$a \,.\, b.$$

c) Ile to jest $\tfrac{3}{4}$ z $\tfrac{2}{5}$?

Jak określamy iloczyn, jeżeli mnożnik jest liczbą ułamkową, np.: $\tfrac{2}{5} \,.\, \tfrac{3}{4},\ 7 \,.\, \tfrac{3}{5},\ 3\tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{2}{3}$?

Jeżeli więc a jest liczbą ogólną, wówczas iloczyn np. $a \,.\, \tfrac{3}{4}$ oznacza $\tfrac{3}{4}$ z a.

Wiemy, że chcąc utworzyć jakiś ułamek, np. $\tfrac{3}{4}$ danej wielkości, należy tę wielkość podzielić na 4 równe części i wziąć takich części 3, albo też 3 takich wielkości podzielić na 4 równe części i wziąć jedną taką część. Mieć zatem będziemy:

$$a \,.\, \tfrac{3}{4} = \tfrac{a}{4} \,.\, 3 = \tfrac{3a}{4}.$$

Podobnie: $x \,.\, \tfrac{5}{7} = \tfrac{x}{7} \,.\, 5 = \tfrac{5x}{7}.$

d) Iloczyn kilku liczb np. a, b, c i d oznaczamy:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d,$$

a sposób jego obliczenia określony jest wzorem:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = [(a \,.\, b) \,.\, c] \,.\, d.$$

Liczby a, b, c i d nazywają się czynnikami.

Zadania.

1. Przedstaw w postaci iloczynu następujące sumy:

$$a + a + a,\quad x + x + x + x + x,\quad z + z.$$

2. Przedstaw w postaci sumy następujące iloczyny:

$$a \,.\, 2,\quad x \,.\, 7,\quad (2x) \,.\, 3,\quad (\tfrac{2}{5}\, a) \,.\, 4.$$

3. Przedstaw w postaci iloczynu następujące sumy:

$$(\tfrac{3}{4}x) + (\tfrac{3}{4}x), \quad (5a) + (5a) + (5a),$$
$$2{\cdot}7\,z + 2{\cdot}7\,z + 2{\cdot}7\,z + 2{\cdot}7\,z.$$

4. Ile to jest:

$$a\,.\,0, \quad a\,.\,1, \quad 1\,.\,a, \quad 0\,.\,a.$$

5. *a)* Robotnik zarabia *a zł* dziennie; ile *zł* zarobi w ciągu *b* dni?
   b) Jeśli 1 *kg* towaru kosztuje *a zł*, to ile *zł* kosztuje *b kg* towaru?
   c) Samolot przelatuje *a km* w ciągu godziny; ile *km* przeleci w ciągu *b* godzin?
   d) Paczka waży *a kg*; ile *kg* waży *b* takich paczek?
   e) Jaka liczba jest *a* razy większa od liczby *b*?
   f) Obwód koła ma *a m*; jaką drogę zrobiło to koło po *b* obrotach?
   g) Pewną pracę wykona *a* robotników w *b* dniach; w ilu dniach wykona tę pracę 1 robotnik?
   h) Jaka to jest liczba, która podzielona przez liczbę *a* daje iloraz *b*?
6. *a* robotników pracowało przez *b* dni, przyczem każdy zarabiał dziennie *c zł*; ile *zł* w tym czasie razem zarobili?
7. Przedstaw w najprostszej formie następujące iloczyny:
   a) $8\,.\,2\,.\,a, \quad 4\,.\,7\,.\,3x, \quad \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{2}\,.\,a, \quad 2{\cdot}4\,.\,5\,.\,x;$
   b) $3\,.\,7\,.\,a\,.\,b, \quad 8\,.\,11\,.\,9\,.\,xy, \quad 3\,.\,9\,.\,\frac{1}{2}\,.\,ab, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\,.\,abc.$

   Uwaga. Licz, jak np.: $3\,.\,2\,.\,5\,.\,a\,.\,b\,.\,c = 6\,.\,5\,abc = 30\,abc.$

Prawo przemienności iloczynu.

Jeżeli w iloczynie np.:

$$3\,.\,4$$

zmienimy porządek czynników, otrzymamy iloczyn:

$$4\,.\,3.$$

Wyniki w obu wypadkach są te same, zatem:

$$3\,.\,4 = 4\,.\,3.$$

Podobnie:

$$\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{2} = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{4}, \quad 3\tfrac{1}{2}\,.\,2{\cdot}1 = 2{\cdot}1\,.\,3\tfrac{1}{2} \text{ i t. d.}$$

Oznaczając więc czynniki w iloczynie literami *a*, *b*, możemy napisać:

$$ab = ba.$$

Podobnie możemy w iloczynie kilku liczb zmieniać porządek czynników. Np.:

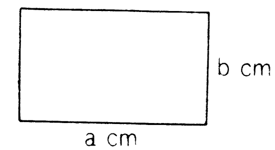
$$3\,.\,4\,.\,5 = 5\,.\,4\,.\,3, \quad \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{7} = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{2}{3},$$
$$a\,.\,b\,.\,c = a\,.\,c\,.\,b, \quad abcd = adcb \quad \text{i t. d.}$$

Widzimy zatem, że w iloczynie możemy porządek czynników dowolnie zmieniać.

Jest to tak zwane prawo przemienności dla iloczynu.

Zadania.

1. Na rys. 19 mamy prostokąt o bokach *a cm* i *b cm*; oblicz w cm^2 jego pole, przyjmując jednym razem bok *a cm*, drugim razem bok *b cm* za podstawę? Jakie prawo otrzymasz, porównując wyniki?



Ryc. 19.

2. Na jakiem prawie opieramy się, pisząc:
   a) $3\,.\,4 = 4\,.\,3;$ *b)* $a\,.\,2 = 2\,.\,a;$ *c)* $3{\cdot}5\,x = x\,.\,3{\cdot}5;$
   d) $\frac{2}{7}y = y\,.\,\frac{2}{7};$ *e)* $2\,.\,a\,.\,5 = 2\,.\,5\,.\,a;$ *f)* $2\,.\,a\,.\,4\,.\,b = 2\,.\,4\,.\,ab.$
3. Przedstaw w najprostszej formie następujące iloczyny:
   a) $8\,.\,a\,.\,2, \quad 4\,.\,x\,.\,3, \quad \frac{2}{5}\,.\,a\,.\,3, \quad 2{\cdot}5\,.\,x\,.\,4, \quad 3\,.\,a\,.\,5\,.\,4;$
   b) $5\,.\,a\,.\,2\,.\,b, \quad b\,.\,x\,.\,4\,.\,y, \quad \frac{1}{3}\,.\,b\,.\,2\,.\,a, \quad 4\,.\,5\,.\,a\,.\,7\,.\,b;$
   c) $b\,.\,3\,.\,a\,.\,4\,.\,c\,.\,2, \quad x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot y\cdot\frac{3}{4}, \quad c\,.\,2{\cdot}5\,.\,a\,.\,b\,.\,8\,.\,e\,.\,3\,.\,d.$
   Licz, jak np.: $2\,.\,a\,.\,3\,.\,b\,.\,5\,.\,c = 2\,.\,3\,.\,5\,.\,a\,.\,b\,.\,c = 30\,abc.$

Prawo łączności iloczynu.

Jeżeli w iloczynie np.:

$$3\,.\,5\,.\,4\,.\,2$$

zastąpimy kilka czynników, np. czynniki $5\,.\,4$, ich iloczynem, t. j. liczbą 20, to otrzymamy:

$$3\,.\,20\,.\,2.$$

W obu wypadkach wynik będzie ten sam; zatem

$$3\,.\,5\,.\,4\,.\,2 = 3\,.\,20\,.\,2.$$

Zamiast obliczać iloczyn $5\,.\,4$ możemy czynniki te wziąć w nawias. A więc

$$3\,.\,5\,.\,4\,.\,2 = 3\,.\,(5\,.\,4)\,.\,2.$$

Podobnie:

$$\tfrac{3}{4}\,.\,2\,.\,\tfrac{7}{5} = \tfrac{3}{4}\,.\,(2\,.\,\tfrac{7}{5}).$$

Jeżeli czynniki oznaczymy literami, wówczas możemy napisać:

$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = a \,.\, (b \,.\, c) \,.\, d,$$
$$a \,.\, b \,.\, c \,.\, d = a \,.\, (b \,.\, c \,.\, d),$$
$$abc = a(bc) \text{ i t. d.}$$

Widzimy zatem, że w iloczynie możemy kilka czynników zastąpić ich iloczynem.

Prawo to nosi nazwę prawa łączności dla iloczynu.

Z prawa łączności i przemienności wynika, że w iloczynie możemy dowolnie czynniki przestawiać i kojarzyć (t. zn. możemy kilka czynników zastąpić ich iloczynem). Np.:

$$2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = (2 \,.\, 5) \,.\, (4 \,.\, 3),$$
$$a \,.\, b \,.\, c = a\,(cb),$$
$$abcd = (adc) \,.\, b = (ac)\,(db) \text{ i t. d.}$$

Zadania.

1. a robotników pracowało przez b dni, przyczem każdy zarabiał po c *zł* dziennie; ile wszyscy robotnicy razem zarobili? Rozwiąż to zadanie trzema sposobami:

I) obliczając najpierw zarobek jednego robotnika w ciągu 6 dni;

II) obliczając najpierw liczbę dni pracy wszystkich robotników;

III) obliczając najpierw, ile dziennie wszyscy robotnicy zarabiali.

Porównując ostateczne wyniki, otrzymasz „prawo łączności".

Sprawdź otrzymany wzór, przyjmując:

a) $a = 5, \quad b = 8, \quad c = 3;$

b) $a = 12, \quad b = 4, \quad c = 2\frac{1}{2};$

c) $a = 14, \quad b = 12, \quad c = 2{\cdot}75.$

Jakie za każdym razem rozwiązałeś zadanie?

2. W zadaniu 1 otrzymałeś równość:

$$(a \,.\, b) \,.\, c = (a \,.\, c) \,.\, b = (b \,.\, c) \,.\, a,$$

która wyraża, że iloczyn mnoży się w ten sposób przez liczbę, iż jeden z czynników iloczynu mnoży się przez tę liczbę, a inne czynniki pozostawia się bez zmiany.

Zastosuj to twierdzenie do zadań:

a) $(2 \,.\, a) \,.\, 3, \quad (\frac{5}{2}\,x) \,.\, 7, \quad (a \,.\, 7) \,.\, 4, \quad (0{\cdot}5 \,.\, x) \,.\, 8;$

b) $(3 \,.\, a \,.\, b) \,.\, 5, \quad (\frac{3}{4}\,x \,.\, y) \,.\, 8, \quad (5 \,.\, a \,.\, 7 \,.\, b) \,.\, 4, \quad (a \,.\, 2 \,.\, b \,.\, 4) \,.\, 6;$

c) $(6 \,.\, a \,.\, b \,.\, c) \,.\, 2, \quad (\frac{1}{2} \,.\, a \,.\, \frac{2}{3} \,.\, b \,.\, c) \,.\, 10, \quad (2 \,.\, a \,.\, 3 \,.\, b \,.\, 5 \,.\, c \,.\, d \,.\, 4) \,.\, 8.$

Uwaga. Licz, jak np.:

$$(3 \,.\, a \,.\, 7 \,.\, b \,.\, 5) \,.\, 4 = (3 \,.\, 4)\, a \,.\, 7 \,.\, b \,.\, 5 = (3 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 5)\, ab = 420\, ab.$$

3. Przedstaw w najprostszej formie następujące iloczyny:

a) $(2a) \,.\, (3b), \quad (4x) \,.\, (5y), \quad (3{\cdot}2a) \,.\, (7x), \quad (4 \,.\, 3a) \,.\, (8b);$

b) $(2\frac{1}{3}x) \,.\, (\frac{3}{7}y) \,.\, 4, \quad 4 \,.\, (1\frac{1}{2}x) \,.\, (3y), \quad (10{\cdot}5a) \,.\, (4b) \,.\, 0{\cdot}1;$

c) $(2a) \,.\, (4b) \,.\, (3c), \quad (5x) \,.\, (4y) \,.\, (10z) \,.\, 2, \quad (\frac{1}{2}a) \,.\, (\frac{3}{4}b) \,.\, (2c),$ $(1{\cdot}2x) \,.\, (5y) \,.\, (1{\cdot}4z) \,.\, 7, \quad 5\,(2a) \,.\, (\frac{1}{2}b) \,.\, (0{\cdot}4c) \,.\, (25d).$

Uwaga. Licz, jak np.:

$$(5a) \,.\, (2b) \,.\, (9c) \,.\, 4 = 5 \,.\, 2 \,.\, 9 \,.\, 4\, abc = 360\, abc.$$

4. Przedstaw w najprostszej formie następujące iloczyny:

a) $(3a) \,.\, (2bc) \,.\, (3d), \quad (\frac{2}{3}a) \,.\, (4b) \,.\, (7cd) \,.\, 2;$

b) $5 \,.\, (3xy) \,.\, (2z) \,.\, (\frac{3}{4}xw), \quad (0{\cdot}2a) \,.\, (5bcd) \,.\, (8x) \,.\, \frac{3}{4}.$

Prawo rozdzielności iloczynu względem dodawania i odejmowania.

Wiemy, że:

$$(3 + 2) \,.\, 5 = 3 \,.\, 5 + 2 \,.\, 5;$$
$$(\tfrac{5}{2} + \tfrac{11}{4}) \,.\, 3\tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2} \,.\, 3\tfrac{1}{2} + \tfrac{11}{4} \,.\, 3\tfrac{1}{2}.$$

Możemy więc napisać przy pomocy liczb ogólnych:

$$(a + b)\, c = ac + bc.$$

Podobnie dla różnicy mamy:

$$(8 - 3) \,.\, 2 = 8 \,.\, 2 - 3 \,.\, 2;$$
$$(7\tfrac{1}{2} - 2) \,.\, \tfrac{3}{4} = 7\tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{3}{4} - 2 \,.\, \tfrac{3}{4}.$$

A więc:

$$(a - b)\, c = ac - bc.$$

Możemy zatem powiedzieć:

Sumę (lub różnicę) mnożymy przez liczbę, mnożąc składniki (odjemną i odjemnik) przez tę liczbę, a następnie dodając (odejmując) wyniki.

Prawo powyższe nazywa się prawem rozdzielności iloczynu względem dodawania (odejmowania).

Podobnie mnożymy sumę kilku składników.

Np.: $(3 + 2\frac{1}{2} + 4) \,.\, 5 = 3 \,.\, 5 + 2\frac{1}{2} \,.\, 5 + 4 \,.\, 5;$

$(a + b + c) \,.\, d = a \,.\, d + b \,.\, d + c \,.\, d;$

$(8 - 2\frac{1}{2} + 3 - 4) \,.\, 7 = 8 \,.\, 7 - 2\frac{1}{2} \,.\, 7 + 3 \,.\, 7 - 4 \,.\, 7;$

$(a - b + c - d) \,.\, e = ae - be + ce - de.$

Mieliśmy:

$$a \,.\, c + b \,.\, c = (a + b) \,.\, c,$$

więc np.:

$$3x + 4x = (3 + 4) \,.\, x.$$

Mówimy, że x wyłączyliśmy przed (względnie za) nawias.

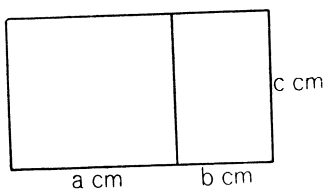
Ponieważ:
$$(3+4)\,x = 7\,x,$$
więc:
$$3\,x + 4\,x = 7\,x.$$

Mówimy, żeśmy wykonali redukcję wyrażenia $3\,x + 4\,x$.

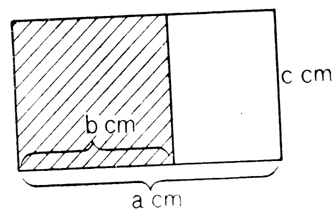
Podobnie:
$$8\,x - 5\,x = (8-5)\,.\,x = 3\,x;$$
$$11\,a - 5\,a + 3\,a = (11 - 5 + 3)\,.\,a = 9\,a.$$

Zadania.

1. Na rys. 20 mamy prostokąt, którego podstawa ma $(a+b)$ *cm*, wysokość zaś c *cm*; oblicz, ile cm^2 wynosi jego pole, obliczając jednym razem pole całego prostokąta, drugim razem sumę pól prostokątów, zaznaczonych na rys. 20. Jakie prawo otrzymasz, porównując wyniki?



Rys. 20.



Rys. 21.

2. Kupiec sprzedał jednego dnia a *kg* towaru, drugiego zaś b *kg* tego samego towaru, w cenie c *zł* za 1 *kg*; ile otrzymał za towar?
   Rozwiąż dwoma sposobami: *a)* oblicz, ile towaru sprzedał w obu dniach, a następnie, ile otrzymał za towar; *b)* oblicz, ile otrzymał za towar jednego dnia, potem drugiego dnia, a stąd, ile otrzymał w obu dniach. Porównaj wyniki!
3. Na rys. 21 prostokąt niezacieniowany ma podstawę $(a-b)$ *cm*, wysokość zaś c *cm*; oblicz jego pole, przyjmując jednym razem za podstawę $(a-b)$ *cm*, drugim zaś razem wyrażając szukane pole jako różnicę pól dużego prostokąta i zacieniowanego prostokąta!
   Jakie prawo otrzymasz, porównując wyniki?
4. Robotnik zarabiał dziennie a *zł*, wydawał zaś b *zł*; ile zaoszczędził w ciągu c dni?

   Rozwiąż dwoma sposobami: *a)* oblicz najpierw, ile zaoszczędził dziennie, a następnie w ciągu c dni; *b)* oblicz, ile zarobił w ciągu c dni, ile wydał w ciągu c dni i stąd, ile zaoszczędził w ciągu c dni. Porównaj oba wyniki!
5. Pomnóż:
   a) $(a+3)\,.\,5$, $(4+a)\,.\,\frac{1}{2}$, $(a+b)\,.\,0{\cdot}2$, $5\,(a+b+c)$;
   b) $(2a+36)\,.\,2$, $(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y)\,.\,4$, $(0{\cdot}2\,a+0{\cdot}4\,b+c)\,.\,5$;
   c) $(3a+2\,b)\,(4c)$, $(4a+5b+2c)\,(3d)$, $(\frac{1}{2}x+2y+\frac{5}{6}z)\,(\frac{1}{3}n)$;
   d) $(a-3)\,.\,2$, $(20-a)\,.\,4$, $(a-b)\,.\,\frac{1}{2}$, $7\,.\,(a-b)$;
   e) $(2\,a-b)\,.\,3$, $5\,(2\,x-3\,y)$, $(2\,a-6\,b)\,.\,2\,c$, $(\frac{1}{2}a-b)\,.\,\frac{2}{3}c$;
   f) $(\frac{2}{5}a-b+4\,c-\frac{1}{8}d)\,.\,2\,x$, $3\,a\,(2\,b-c+4\,d-5\,e)$.
6. Wyłącz przed nawias i wykonaj redukcję wyrażeń:
   a) $2\,a+4\,a$, $x+5\,x+8\,x$, $8\,y+3\,y+11\,y$;
   b) $a+2\,a+3\,a+4\,a$, $0{\cdot}6\,b+2{\cdot}3\,b+1{\cdot}7\,b+b$;
   c) $\frac{3}{4}x+2\frac{1}{2}x+x+5\,x$, $2{\cdot}4\,z+\frac{2}{5}z+0{\cdot}8\,z+3\,z$;
   d) $25\,a-13\,a$, $2{\cdot}8\,x-0{\cdot}9\,x$, $4\,z-\frac{2}{3}z$;
   e) $2\frac{1}{2}b-1\frac{4}{9}b$, $11\,a\,b-8\,a\,b$, $4{\cdot}5\,x\,y-2{\cdot}3\,x\,y$;
   f) $38\,a-16{\cdot}2\,a+6{\cdot}4\,a$, $30\frac{1}{12}x-28\frac{3}{4}x+7\frac{2}{3}x$;
   g) $13\,x\,y-8\,x\,y+5\,x\,y-2\,x\,y$, $3\,a\,b\,c+8\,a\,b\,c-9\,a\,b\,c$.
7. Wyłącz przed nawias i wykonaj redukcję wyrażeń:
   a) $11\,a+7\,b+3\,a+3\,b$, $\frac{1}{3}x+y+2\,x+\frac{3}{4}y$;
   b) $13\,a+8\,b-2\,a+4\,b$, $5\,x+6\,y-2\,x-y$;
   c) $15\,a+18\,b-6\,a-9\,b+4\,a$,
   $9\,x+7\,y-8\,x+13\,y+4\,x-5\,x+6\,y$;
   d) $14\,a\,b+5\,c-6\,a\,b+2\,c$, $3\,z+11\,x\,y+2\,z-8\,x\,y+5\,z$.
   Licz, jak np.:
   $$15\,a+8\,b-4\,a+9\,b-2\,a = 15\,a-4\,a-2\,a+8\,b+9\,b =$$
   $$= (15-4-2)\,a+(8+9)\,b = 9\,a+17\,b.$$
8. Ostrosłup prosty ma za podstawę kwadrat o boku a *cm*, przyczem wysokość trójkąta bocznego wynosi b *cm*. P miara pola (w cm^2) jego powierzchni wyraża się wzorem:
   $$P = a^2 + 2\,a\,b.$$
   Jeśli a wyłączymy przed nawias, otrzymamy:
   $$P = a\,(a+2\,b).$$
   a) Wyjaśnij powyższe wzory (siatka)!
   b) Oblicz w ten sposób pole powierzchni ostrosłupa, w którym bok kwadratu wynosi: *a)* 4 *cm*, *b)* 7·5 *cm*, *c)* $6\frac{3}{4}$ *cm*, wysokość zaś trójkąta bocznego: *a)* 8 *cm*, *b)* 11·75 *cm*, *c)* $9\frac{1}{8}$ *cm*.

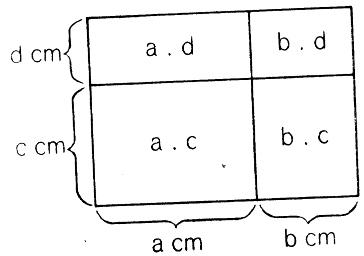
9. Jeżeli promień podstawy stożka obrotowego ma r *cm*, bok zaś s *cm*, to P miara pola (w cm^2) jego powierzchni wyraża się wzorem:

$$P = \pi r^2 + \pi r s.$$

Jeśli πr wyłączymy przed nawias, otrzymamy:

$$P = \pi r (r + s).$$

a) Wyjaśnij powyższe wzory!
b) Oblicz w ten sposób pole powierzchni stożka obrotowego, w którym promień podstawy wynosi: *a)* 3 *cm*, *b)* 4·5 *cm*, *c)* $6\frac{3}{4}$ *cm*, bok zaś: *a)* 7 *cm*, *b)* 10·5 *cm*, *c)* $13\frac{1}{4}$ *cm*.



Rys. 22.

10. Z rys. 22 wynika, że miara pola dużego prostokąta wynosi $(a + b)(c + d)$, a także równa się sumie miar pól: prostokąta o podstawie $(a + b)$ *cm* i wysokości c *cm* i prostokąta o podstawie $(a + b)$ *cm* i wysokości d *cm* t. j. równa się:

$$(a + b) c + (a + b) d.$$

Zatem:
$$(a + b)(c + d) = (a + b) c + (a + b) d.$$

Skąd:
$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd,$$

co można także wprost odczytać z rys. 22.

Oblicz w ten sposób:

a) $(a + 2)(b + 1)$, $(5x + 3)(4y + 7)$, $(2a + 3b)(c + d)$;
b) $(\frac{1}{2}a + 3b)(c + 4)$, $(\frac{7}{4}x + 1)(\frac{2}{5}y + 3)$, $(0{\cdot}2 + 2x)(2{\cdot}5 + y)$;
c) $(a + b + c)(d + e)$, $(a + 2b + 1)(c + 2)$, $(2x + y + 4)(z + 5)$;
d) $(2a + 3b + 7c)(5d + 4)$, $(2x + 6y + 4)(8z + 3)$, $(5a + b + 2c + d)(2e + 3)$.

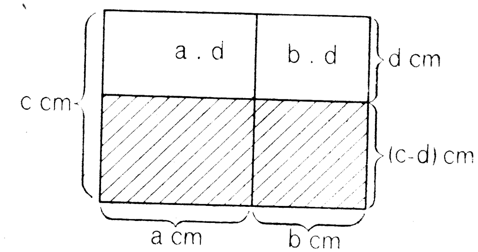
11. Z rys. 23 wynika, że miara pola prostokąta zacieniowanego równa się różnicy miar pola całego prostokąta i prostokąta niezacieniowanego.

Zatem:
$$(a + b)(c - d) = (a + b) c - (a + b) d.$$

Lecz:
$$(a + b) c - (a + b) d = (ac + bc) - (ad + bd) =$$
$$= ac + bc - ad - bd.$$

A więc:
$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd,$$

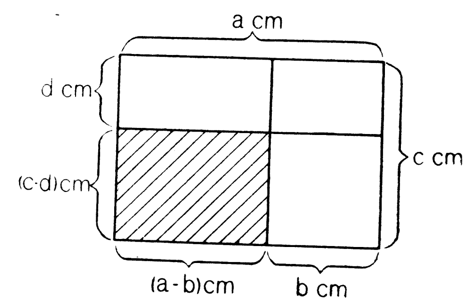
co można także wprost odczytać z rys. 23.



Rys. 23.

Oblicz w ten sposób:

a) $(a + 3)(b - 1)$, $(6a + 5b)(c - 2)$, $(2x + 3y)(4 - z)$;
b) $(\frac{5}{6}x + y)(2z - 8)$, $(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b)(\frac{1}{4} - 2c)$, $(2{\cdot}4x + 5y)(4 - 0{\cdot}8z)$;
c) $(a + b + c)(d - 1)$, $(2x + y + z)(3u - 2)$, $(3a + 5b + c)(2d - e)$;
d) $(\frac{1}{2}a + 3b + 5c)(4d - \frac{2}{5}e)$, $(\frac{2}{3}x + 4y + 3)(8z - \frac{1}{5}u)$.



Rys. 24.

12. Z rys. 24 wynika, że miara pola prostokąta zacieniowanego równa się różnicy miar: pola prostokąta o podstawie $(a - b)$ *cm* i wysokości c *cm* i prostokąta o podstawie $(a - b)$ *cm* i wysokości d *cm*.

Zatem:
$$(a - b)(c - d) = (a - b) c - (a - b) d.$$

Lecz:

$$(a - b)c - (a - b)d = (ac - bc) - (ad - bd) =$$
$$= ac - bc - ad + bd.$$

A więc:

$$(a - b)(c - d) = ac - bc + bd - ad,$$

co można także wprost odczytać z rys. 24.

Oblicz w ten sposób:

a) $(a-2)(b-3)$, $(2x-4)(5y-8)$, $(3a-2b)(2c-7d)$;
b) $(\frac{2}{5}a - b)(c - \frac{1}{3}d)$, $(\frac{3}{4}x - 9y)(\frac{5}{6}z - 8u)$,
$(0{\cdot}1a - 2b)(3c - 2{\cdot}4d)$.

13. Oblicz:
a) $(a+b-c)(d+2)$, $(a-b-c)(d+3)$, $(a+b+c)(d-e)$;
b) $(2a-b+3)(c-5)$, $(3a+2b-4c)(2d-3e)$,
$(5x+3y-2z)(7-8u)$;
c) $(a+b+c)(d-e+3)$, $(a-b+c)(4-d+2e)$;
d) $(2x-3y+9)(8z+4u-11)$,
$(5a+3b-2c)(8d+2e-3f)$.

Licz, jak np.:

$$(a-b+3)(c-d+8) = (a-b+3)c - (a-b+3)d +$$
$$+ (a-b+3)8 =$$
$$= ac - bc + 3c - (ad - bd + 3d) + 8a - 8b + 24 =$$
$$= ac - bc + 3c - ad + bd - 3d + 8a - 8b + 24.$$

14. O ile zmieni się iloczyn: $(a+b)c$, jeśli: *a)* c o 2 powiększymy, *b)* a o 4 powiększymy, *c)* a i b o $\frac{1}{2}$ powiększymy?
15. O ile zmieni się iloczyn $(a-b)c$, jeśli *a)* c o 2 powiększymy, *b)* a o 1 powiększymy, *c)* a i b o tę samą liczbę powiększymy?

Zmiany iloczynu.

Zadania.

1. Jak zmienia się iloczyn, jeżeli jeden lub kilka jego czynników:
a) powiększymy;
b) pomniejszymy.
2. Wskaż, który z następujących iloczynów jest większy:
a) $5a$ i $8a$, $4ab$ i $\frac{1}{2}ab$, $0{\cdot}4xy$ i xy;
b) $\frac{2}{3}a \cdot 4b$ i $2a \cdot 7b$, $x \cdot 2y \cdot 3z$ i $5y \cdot x \cdot 3\frac{1}{2}z$.

3. Przekonaj się, posługując się prostokątami, że:
a) jeśli $a = b$ i $c = d$, to $ac = bd$;
b) jeśli $a > b$, to $ac > bc$
c) jeśli $a < b$, to $ac < bc$ } przyczem $c \neq 0$.
a) Twierdzenie *a)* można wysłowić: równe liczby pomnożone przez równe liczby dają równe wyniki. Wysłów twierdzenia *b)* i *c)*!
b) Podaj na każde z powyższych twierdzeń kilka przykładów liczbowych!
4. Czy dla każdej wartości na a zachodzi nierówność:
$$4a < 5a\,?$$
5. Jeśli wiemy, że:
$$ac = bc$$
czy musi być: $a = b$?
6. 1 *kg* towaru kosztuje 3 *zł*; niech x *kg* towaru kosztuje y *zł*. Możemy więc napisać:

$$1\ kg\ —\ 3\ zł,$$
$$x\ kg\ —\ y\ zł.$$

Ponieważ te wielkości są wprost proporcjonalne, więc
$$y : 3 = x : 1 = x.$$
Stąd
$$y = 3x.$$
Widzimy zatem, że wielkości x i y, wprost do siebie proporcjonalne, spełniają równość:
$$y = 3x.$$
Na podstawie tego wzoru możemy obliczyć cenę (y *zł*) każdej ilości towaru (x *kg*).
Np. 8 *kg* tego towaru kosztuje 3 *zł* . 8 = 24 *zł*.

Uwaga. Jeśli wielkości x i y, od siebie zależne i zmienne, spełniają np. równość:
$$y = 12x$$
to wielkości x i y są do siebie wprost proporcjonalne. Ile razy bowiem zwiększymy (lub zmniejszymy) liczbę x, tyle razy zwiększy się także (lub zmniejszy) liczba y.

a) Robotnik zarabia dziennie 6 *zł*, niech x oznacza liczbę dni pracy, y zaś liczbę *zł*, jako wynagrodzenie za tę pracę. Jaki wzór na y otrzymasz? Oblicz na podstawie tego wzoru zarobek robotnika w 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dniach! Tabelka!

b) Pociąg jedzie z prędkością 15 *m* na sekundę; niech x oznacza liczbę sekund, y zaś liczbę *m*, jaką pociąg w tym czasie przejechał. Jaki wzór na y otrzymasz? Oblicz na podstawie tego wzoru drogę, jaką pociąg przejedzie w 2, 5, 8, 10, 12, 18 sekundach, w 1, 2, 3 minutach!

c) Wysokość prostokąta wynosi 3 *cm*, podstawa x *cm*, pole zaś y cm^2! Jaki wzór na y otrzymasz? Oblicz na podstawie tego wzoru powierzchnię prostokąta, w którym podstawa ma 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, 8 *cm*, 15 *cm*. Tabelka!

Potęgi.

Określenia:

Jeżeli w iloczynie wszystkie czynniki są równe, to iloczyn taki zapisujemy krócej. Np. iloczyn:

$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3$$

zapisujemy, pisząc:

$$3^4.$$

Piszemy więc czynnik, który się powtarza, a u góry liczbę, wskazującą, ile razy się ten czynnik powtarza. A więc:

$$3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 3^4,$$

co czytamy 3 do potęgi czwartej.

Podobnie:

$$5 \,.\, 5 = 5^2,$$

$$2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 2^5 \quad \text{i t. d.}$$

Dla liczb ogólnych mamy więc:

$$a^2 = a \,.\, a,$$

$$a^3 = a \,.\, a \,.\, a,$$

$$a^4 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \quad \text{i t. d.}$$

Zadania.

1. Oblicz:
   a) a^2 dla $a = 3, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}$; *d)* $5x^2$ dla $x = 2, \frac{1}{4}, 3$;
   b) a^3 dla $a = \frac{1}{3}, 2, 6$; *e)* $4{\cdot}6\,y^3$ dla $y = 3, 0{\cdot}1, 0{\cdot}9$.
   c) $\frac{1}{2}a^4$ dla $a = 1, \frac{1}{2}, 2$;
2. Przedstaw w najprostszej formie następujące iloczyny:
   a) $a \,.\, a \,.\, b \,.\, b \,.\, a \,.\, b$, $a \,.\, b \,.\, a \,.\, a \,.\, c \,.\, c \,.\, b$, $x \,.\, y \,.\, x \,.\, z \,.\, y \,.\, x$;
   b) $2a \,.\, 4a$, $0{\cdot}4x \,.\, 2x$, $\frac{1}{2}b \,.\, \frac{3}{4}b$, $5a \,.\, \frac{11}{3}a$, $x \,.\, 4x$;
   c) $3a \,.\, 8a \,.\, 2a$, $a \,.\, 6a \,.\, 5a$, $\frac{2}{3}x \,.\, 4x \,.\, 2x$, $2{\cdot}1a \,.\, 2a \,.\, 5a \,.\, 8a$;

   d) $2ab \,.\, 3a$, $\frac{5}{2}xy \,.\, 8y$, $2ab \,.\, 3ab$, $\frac{6}{7}xy \,.\, 14xy$;
   e) $3ab \,.\, 5ac$, $11xy \,.\, 8xz \,.\, 3yz$, $2ab \,.\, 3ac \,.\, bc \,.\, 5abc$.
   Licz, jak np.:
   $$2a \,.\, 3b \,.\, 4a \,.\, 8bc = 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, a \,.\, a \,.\, b \,.\, b \,.\, c = 24a^2b^2c.$$
3. Zamieniając najpierw potęgi na iloczyn równych czynników, przedstaw w najprostszej formie iloczyny:
   a) $a \,.\, a^2$, $x \,.\, x^3$, $a^2 \,.\, a^3$, $x^3 \,.\, x^2$, $a \,.\, a^4$, $x^5 \,.\, x$;
   b) $2a^2 \,.\, 3a^3$, $2x^2 \,.\, 6x^4$, $\frac{2}{3}a \,.\, 9a^4$, $\frac{3}{4}x^3 \,.\, 10x^2$;
   c) $4a^2b \,.\, 2a^3b$, $2xy^2 \,.\, 5x^3y^2$, $\frac{4}{5}ab^3 \,.\, 15a^2b^2$;
   d) $2ab \,.\, 4a^2b \,.\, 3ab^3$, $xy^2 \,.\, 3x^2y^2 \,.\, 4xy^2$, $\frac{1}{3}a^2b \,.\, 4a^2b^3 \,.\, 2ab$.
   Licz, jak np.:
   $$2ab \,.\, 4a^2b \,.\, 3a^2b = 2 \,.\, 4 \,.\, 3\,aa^2a^2bbb = 24\,aaaaabbb = 24a^5b^3.$$
4. Oblicz jak w zadaniu 3:
   a) $(3a)^2$, $(5x)^2$, $(\frac{2}{3}a)^3$, $(2{\cdot}1x)^2$, $(2a)^4$, $(2x)^5$;
   b) $(a^2)^2$, $(2x^2)^3$, $(\frac{1}{2}a^3)^2$, $(\frac{1}{3}x^3)^2$, $(a^2)^4$, $(x^4)^2$.
5. Oblicz:
   a) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$, $(x + 2y)^2$, $(a + 3x)^2$;
   b) $(2x + 3y)^2$, $(\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b)^2$, $(0{\cdot}1a + 2b)^2$.
6. Oblicz:
   a) $(2a + 5b)(3a + 2b)$, $(\frac{1}{2}x + 2y)(x - y)$;
   b) $(a + \frac{1}{2}b + 4c)(2a)$, $(2x + 4y + z)(\frac{1}{5}x)$.
7. Oblicz $(a + b)(a - b)$ i w otrzymanym wzorze połóż:
   a) $a = 21$, $b = 11$; *d)* $a = 18$, $b = 2$;
   b) $a = 38{\cdot}4$, $b = 18{\cdot}4$; *e)* $a = 14{\cdot}3$, $b = 5{\cdot}7$;
   c) $a = 18\frac{1}{2}$, $b = 8\frac{1}{2}$; *f)* $a = 8\frac{1}{2}$, $b = 1\frac{1}{2}$.
8. Oblicz:
   a) $(2x - y)^2$, $(a - 3b)^2$, $(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4})^2$, $(3x - 5y)^2$;
   b) $(0{\cdot}4 - a)^2$, $(\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y)^2$, $(4{\cdot}2a - 1{\cdot}2b)^2$.
9. Jeśli bok kwadratu ma a *cm*, to ile wynosi jego pole w cm^2?
10. Jeśli krawędź sześcianu ma a *cm*, to ile wynosi pole jego powierzchni w cm^2?

Dzielenie.

Określenia:

Iloraz dwóch liczb np. $7\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{2}$ oznaczamy:

$$7\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \frac{7\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}}.$$

$7\frac{1}{2}$ nazywa się dzielną, $2\frac{1}{2}$ dzielnikiem.

Ilorazem nazywamy liczbę, przez którą pomnożony dzielnik daje na wynik dzielną.

Więc: $7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = 3$, bo $2\frac{1}{2} . 3 = 7\frac{1}{2}$.

Należy pamiętać, że dzielnik nigdy nie może być zerem!

Jeżeli dzielną, dzielnik i iloraz oznaczymy odpowiednio literami a, b, c, to możemy napisać:

$$a : b = c \quad \text{lub} \quad \frac{a}{b} = c.$$

Wynika stąd:

$$a = b \,.\, c.$$

Uwaga 1. Wyrażenie $\frac{a}{b}$ przedstawia nam iloraz liczb a i b. Jeżeli a i b są liczbami całkowitemi, np. $a = 3$, $b = 5$, to wówczas wyrażenie $\frac{a}{b}$ przedstawia ułamek $\frac{3}{5}$; możemy jednak ułamek ten uważać również za iloraz, gdyż:

$$\tfrac{3}{5} = 3 : 5.$$

Uwaga 2. Jak wiemy:

$$\tfrac{2}{3} : \tfrac{4}{5} = \tfrac{2}{3} . \tfrac{5}{4}.$$

Możemy więc zawsze iloraz zamienić na iloczyn. Należy w tym celu dzielną mnożyć przez odwrotność dzielnika.

Odwrotność liczby możemy przedstawić w postaci ilorazu.

Np. Odwrotnością liczby $\frac{3}{5}$ jest $1 : \frac{3}{5} = \frac{5}{3}$.
Odwrotnością liczby 5 jest $1 : 5 = \frac{1}{5}$.
Odwrotnością liczby 2·5 jest $1 : 2{\cdot}5 = \frac{1}{2{\cdot}5}$.

A zatem odwrotnością liczby a jest iloraz:

$$1 : a = \frac{1}{a}.$$

Możemy więc napisać:

$$a : b = a \,.\, \frac{1}{b},$$

czyli

$$\frac{a}{b} = a \,.\, \frac{1}{b}.$$

Zadania.

1. *a)* a *zł* rozdzielono równo między b osób; ile *zł* otrzymała każda osoba?
   b) Kupiec sprzedał za a *zł* b *kg* towaru; po ile *zł* sprzedawał 1 *kg* tego towaru?

   c) Robotnik otrzymał a *zł* za b dni pracy; ile *zł* zarabiał dziennie?
   d) Piechur przeszedł a *km* w b godzinach; ile *km* drogi przypada na 1 godzinę?
   e) Ile razy b *m* mieści się w a *m*?
   f) Ile razy odcinek a *cm* jest dłuższy od odcinka b *cm*?
   g) Piechur przeszedł w 1 godzinie b *km*; w ilu godzinach przejdzie a *km*?
   h) a *l* płynu rozlano do naczyń, z których każde miało pojemność b *l*; ile było naczyń?
   i) a *kg* towaru kosztuje b *zł*; *a)* ile *kg* tego towaru można dostać za 1 *zł*, *b)* ile kosztuje 1 *kg*?
   k) Iloczyn dwóch liczb, z których jedna równa się a, wynosi b; ile wynosi druga liczba?
2. Ile to jest:
   a) $a : a$, *b)* $0 : a$, jeżeli a nie jest 0, *c)* $a : 1$?
3. Oblicz:
   a) $(8a) : a$, $(4x) : (2x)$, $(8xy) : (2x)$;
   b) $(3a) : (5a)$, $(7xyz) : (3xz)$, $(\frac{2}{3}ab) : (\frac{4}{5}a)$.
   Zastanów się, przez co należy pomnożyć dzielnik, aby otrzymać dzielną!
4. Przedstaw następujące ilorazy w postaci iloczynu:
   a) $a : b$, $\frac{a}{b}$, $2 : a$, $(3a) : 5$;
   b) $(8ab) : \frac{3}{4}$, $\frac{2x}{3}$, $\frac{8xy}{7}$, $\frac{8a}{9b}$.
5. Podaj odwrotności liczb:
   a) a, $3a$, $2{\cdot}5a$, $a + 3$; *b)* $2x$, $x - 1$, $4{\cdot}6x$, $\frac{1}{x}$.
6. Ile wynosi mnożna, jeśli:
   a) iloczyn wynosi a^2, a mnożnik a;
   b) iloczyn wynosi ab, a mnożnik b;
   c) iloczyn wynosi $\frac{2}{3}a$, a mnożnik $\frac{2}{3}$;
   d) iloczyn wynosi $a(b + c)$, a mnożnik $b + c$.
7. Ile wynosi mnożnik, jeśli:
   a) iloczyn wynosi a^2b, a mnożna ab;
   b) iloczyn wynosi $2{\cdot}5a$, a mnożna $10a$;
   c) iloczyn wynosi $\frac{4}{3}ab$, a mnożna $\frac{2}{5}b$;
   d) iloczyn wynosi a^3b^2, a mnożna a^2b.
8. Ile wynosi dzielna, jeśli:
   a) dzielnik wynosi $\frac{2}{5}a$, a iloraz $\frac{5}{2}$;

b) dzielnik wynosi $3{\cdot}4\,ab$, a iloraz 10;
c) dzielnik wynosi $\frac{3}{7}$, a iloraz $\frac{7}{3}\,a$.

9. Ile wynosi dzielnik, jeśli:
a) dzielna wynosi $2a$, a iloraz $\frac{a}{2}$;
b) dzielna wynosi $2ab^2$, a iloraz ab;
c) dzielna wynosi $2{\cdot}4\,a^3$, a iloraz $0{\cdot}1\,a^2$.

10. Oblicz:
a) $a^3 : a, \quad a^4 : a, \quad a^5 : a, \quad a^6 : a;$
b) $x^5 : x, \quad x^5 : x^2, \quad x^5 : x^3, \quad x^5 : x^4;$
c) $6a^3 : 2a, \quad 12a^4 : 3a, \quad 18a^5 : 6a, \quad 25a^6 : 5a;$
d) $8x^5 : 2x^2, \quad 14x^5 : 7x^2, \quad 22x^5 : 11x^3, \quad 64x^5 : 16x^4;$
e) $7x^6 : 4x^3, \quad 23a^4 : 5a^2, \quad 18a^6 : 4a^3.$

11. Oblicz:

a) $16ab : 4a;$	*d)* $60a^2b : 5a^2;$	*g)* $16xyz : 3yz;$
b) $48abc : 8c;$	*e)* $200x^2 : 25x;$	*h)* $4{\cdot}8\,ab^2 : 10b;$
c) $144bc : 24c;$	*f)* $\frac{2}{3}xy^2 : y^2;$	*i)* $6{\cdot}5\,a^2b^2c : abc.$

Rozdzielność ilorazu względem dodawania i odejmowania.

Jeżeli mamy sumę podzielić przez liczbę, np.:

$$(9 + 12) : 3$$

to, jak wiemy, wystarczy składniki podzielić i wyniki dodać.

A więc:

$$(9 + 12) : 3 = 9 : 3 + 12 : 3.$$

Podobnie:

$$\left(\tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{5}\right) : \tfrac{2}{3} = \tfrac{3}{4} : \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} : \tfrac{2}{3}.$$

Dla liczb ogólnych możemy więc napisać:

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

Pisząc iloraz w postaci ułamka, napiszemy:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Podobnie dzielimy sumę więcej niż dwóch składników. A więc mamy:

$$(a + b + c + d) : e = a : e + b : e + c : e + d : e,$$

lub w postaci ułamka:

$$\frac{a+b+c+d}{e} = \frac{a}{e} + \frac{b}{e} + \frac{c}{e} + \frac{d}{e}.$$

Dla różnicy mamy również podobne wzory:

$$(a - b) : c = a : c - b : c,$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Podobnie dzielimy wyrażenia, w których występują same dodawania i odejmowania. Np.:

$$(10 - 6 + 8 - 4) : 2 = 10 : 2 - 6 : 2 + 8 : 2 - 4 : 2.$$

Zatem dla liczb ogólnych mamy:

$$(a - b + c - d) : e = a : e - b : e + c : e - d : e,$$

lub
$$\frac{a-b+c-d}{e} = \frac{a}{e} - \frac{b}{e} + \frac{c}{e} - \frac{d}{e}.$$

Możemy więc powiedzieć:

S u m ę (lub różnicę) d z i e l i m y p r z e z l i c z b ę, d z i e l ą c k a ż d y s k ł a d n i k p r z e z t ę l i c z b ę i w y n i k i d o d a j ą c (odejmując).

Prawo powyższe nosi nazwę prawa rozdzielności ilorazu względem dodawania (odejmowania).

Zadania.

1. Oblicz:
a) $(a + b) : 5, \quad (6a + 3b) : 3, \quad (a + 2ab) : a;$
b) $(4a + 4b + 4c) : 8, \quad \dfrac{10a + 10b + 10c}{30};$
c) $(5a^2 + 7a^2b) : a^2, \quad \dfrac{a + ab + ac + ad}{a};$
d) $(a - b) : 7, \quad (8a - 4ab) : 2a, \quad \dfrac{6ab - 3a}{3a};$
e) $(63ax + 56bx) : 7x, \quad (34x^2 - 17xy) : 17x;$
f) $\dfrac{133x^2 + 76x}{19x}, \quad \dfrac{64x^2 - 48xy}{3x}, \quad \dfrac{24ab - 18bc}{6b};$
g) $(156ab + 117ac + 91ad) : 13a,$
$(180ab + 75ab^2 + 105a^2b + 150a^2b^2) : 15ab;$
h) $(21a^2b - 7ab + 28abc) : 7ab,$
$(7x^2yz - 63xy^2z + 49xyz^2) : 7xyz;$
i) $(24abc - 18bc^2 + 48b^2c + 42bcd) : 6bc.$

2. Zastępując ilorazy przez ułamki, oblicz następujące wyrażenia:

a) $(7a : c) + (3b : c)$; *b)* $(8x : y) - (3z : y)$;
c) $(5{\cdot}6a : x) + (4{\cdot}2b : x)$; *d)* $(0{\cdot}35x^2 : y) - (0{\cdot}49z^2 : y)$;
e) $(8a : x) - (15b : x) + (20c : x) - (40d : x)$;
f) $(5{\cdot}1x : a) - (6{\cdot}8y : a) - (4{\cdot}2z : a) + (5{\cdot}6u : a)$.

3. Między c osób rozdzielono równo a *zł*, a potem b *zł*; ile otrzymała każda osoba? Oblicz dwoma sposobami: *a)* rozdzielając równo sumę a *zł* i b *zł* między c osób; *b)* rozdzielając równo osobno a *zł* i osobno b *zł*. Porównaj wyniki!

Własności ilorazu.

Nauczyliśmy się w poprzedniej klasie ułamki dodawać, odejmować, mnożyć, dzielić. Przekonamy się teraz, że: n a i l o r a z a c h (napisanych np. w postaci ułamków) w y k o n u j e s i ę d z i a ł a n i a p o d o b n i e j a k n a u ł a m k a c h. Np.:

1. $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}} + \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{3}} = (\frac{3}{4} : \frac{5}{3}) + (\frac{2}{7} : \frac{5}{3})$.

Stosując prawo rozdzielności dzielenia względem dodawania, otrzymamy:

$$(\tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{7}) : \tfrac{5}{3}, \text{ czyli } \frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{7}}{\frac{5}{3}}.$$

A zatem:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}} + \frac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{7}}{\frac{5}{3}}.$$

Przy pomocy liczb ogólnych możemy więc napisać:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b},$$

czyli słowami: podobnie jak ułamki liczbowe dodajemy ułamki, których liczniki i mianowniki są liczbami ogólnemi.

2. Sprawdź jak wyżej wzór:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b},$$

podstawiając: $a = \frac{3}{4}$, $c = \frac{2}{7}$ $b = \frac{5}{3}$.

3. Mamy obliczyć:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{9}} \text{ czyli } (\tfrac{2}{5} : \tfrac{3}{7}) \cdot (\tfrac{3}{4} : \tfrac{11}{9}).$$

Wykonując dzielenie, otrzymamy stąd:

$$(\tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{7}{3}) \cdot (\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{9}{11}).$$

Stosując prawo łączności i przemienności w iloczynie, możemy napisać:

$$(\tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{3}{4}) \cdot (\tfrac{7}{3} \cdot \tfrac{9}{11}) = (\tfrac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4}) \cdot (\tfrac{7 \cdot 9}{3 \cdot 11}).$$

Zamieniając mnożenie (.) na dzielenie przez odwrotność, otrzymamy:

$$(\tfrac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4}) : (\tfrac{3 \cdot 11}{7 \cdot 9}) = \frac{(\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4})}{(\frac{3 \cdot 11}{7 \cdot 9})}.$$

Mamy zatem:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{9}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{7} \cdot \frac{11}{9}}.$$

Przy pomocy liczb ogólnych możemy więc napisać:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

czyli słowami: ułamki, których liczniki i mianowniki są liczbami ogólnemi, mnożymy podobnie, jak ułamki zwyczajne.

4. Sprawdź wzór:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

podstawiając:

$$a = \tfrac{2}{3}, \quad b = \tfrac{4}{5}, \quad c = \tfrac{2}{9}, \quad d = \tfrac{7}{2}.$$

Wzór powyższy możemy wysłowić: Dzielimy przez ułamek, którego licznik i mianownik są liczbami ogólnemi podobnie, jak przez ułamek zwyczajny.

Zadania.

1. Przekonaj się, że wzory:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

są słuszne np. dla następujących wartości, przyjętych na liczby a, b, c i d:

a) $a = 7$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$; $a = \frac{16}{3}$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 2$;
b) $a = \frac{25}{3}$, $b = \frac{5}{7}$, $c = 4$, $d = \frac{1}{8}$; $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{5}$, $c = \frac{2}{3}$, $d = 5$;
c) $a = 11$, $b = 0{\cdot}2$, $c = 9$, $d = \frac{2}{8}$; $a = 2{\cdot}5$, $b = 1$, $c = \frac{3}{4}$, $d = \frac{1}{2}$.

2. Oblicz:

$$a)\ \frac{1}{a}+\frac{3}{a},\quad \frac{a}{3}+\frac{b}{3},\quad \frac{\frac{3}{4}}{a}+\frac{\frac{5}{4}}{a},\quad \frac{a}{\frac{2}{3}}+\frac{b}{\frac{2}{3}};$$

$$b)\ \frac{2ab}{5}+\frac{6ab}{5},\quad \frac{7x^2}{4}+\frac{2x^2}{4},\quad \frac{3a^2b}{c}+\frac{a^2b}{c},\quad \frac{5a}{x}+\frac{4a}{x};$$

$$c)\ \frac{7}{a}-\frac{3}{a},\quad \frac{a}{9}-\frac{b}{9},\quad \frac{7ab}{11}-\frac{3ab}{11},\quad \frac{5a^2b}{x}-\frac{2a^2b}{x};$$

$$d)\ \frac{1}{a}\cdot\frac{b}{3},\quad \frac{a}{3}\cdot\frac{5}{b},\quad \frac{2a}{7}\cdot\frac{4a}{5b},\quad \frac{3ab}{5cd}\cdot\frac{4a}{6c};$$

$$e)\ \frac{2a^2b}{3c^2d}\cdot\frac{5}{d^2},\quad \frac{x^2}{y}\cdot\frac{4x}{9y},\quad \frac{4x^2y^3}{9}\cdot\frac{4x}{11},\quad \frac{ab^2}{c}\cdot\frac{a^2b}{c};$$

$$f)\ \frac{1}{a}:\frac{1}{b},\quad \frac{a}{2}:\frac{c}{3},\quad \frac{a}{b}:\frac{4}{c},\quad \frac{2a}{5}:\frac{3}{4a^2},\quad \frac{5}{3a^2}:\frac{6a^2}{1};$$

$$g)\ \frac{2a^2b}{3c}:\frac{5cd}{ab},\quad \frac{x^2}{y}:\frac{y^2}{x},\quad \frac{a+b}{5}:\frac{3}{4},\quad \frac{1}{5}:\frac{1}{a-b}.$$

3. Uprościć ułamek, np. $\frac{27a^2b}{3ab^2}$, to znaczy podzielić licznik i mianownik przez iloczyn wspólnych czynników. W naszem zadaniu licznik ma czynniki: $3 . 3 . 3 . a . a . b$, mianownik zaś: $3 . a . b . b$. Iloczyn wspólnych czynników wynosi:

$$3ab.$$

Mamy zatem:

$$\frac{27a^2b}{3ab^2}=\frac{27a^2b:3ab}{3ab^2:3ab}=\frac{9a}{b}.$$

Uprość w powyższy sposób następujące ułamki:

$$a)\ \frac{36}{63},\quad \frac{12a}{26},\quad \frac{15x}{60},\quad \frac{14a}{35b},\quad \frac{ab}{ac},\quad \frac{x}{xy};$$

$$b)\ \frac{x}{x^2},\quad \frac{a^4}{a},\quad \frac{5a^2}{4a^2b},\quad \frac{15abcx}{60abyc},\quad \frac{44xyz}{99ayz};$$

$$c)\ \frac{15a^2b}{14a^3},\quad \frac{(a+b)\,2}{(a+b)\,3},\quad \frac{5\,(a-b)}{c\,(a-b)},\quad \frac{c\,(a-b)}{d\,(a-b)}.$$

4. Przedstaw następujące ilorazy w postaci ułamków, a następnie uprość:

a) $18 : 15,\quad 18a : 15,\quad 15a^2 : 3a,\quad a^2b : ac;$
b) $(49a^2b) : (7ab^2),\quad (64a^2b^3c^4) : (72ab^2c^2).$

Zmiany ilorazu.

Zadania.

1. Przekonaj się na kilku przykładach liczbowych, że:

a) jeśli $a=b$ i $c=d$, to $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
b) „ $a=b$ i $c<d$, to $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$
c) „ $a=b$ i $c>d$, to $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$
d) „ $a>b$, to $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
e) „ $a<b$, to $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$
f) „ $a<b$ i $c>d$, to $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$
g) „ $a>b$ i $c<d$, to $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

przyczem $c \neq 0$ i $d \neq 0$.

Twierdzenie *a)* możemy wysłowić: równe liczby podzielone przez równe liczby dają równe wyniki.
Wysłów twierdzenia od *b)* do *g)*!

2. Wskaż, który z ilorazów jest większy:

$$(2a) : 3 \text{ i } (5a) : 3;\qquad (2ab) : c \text{ i } (5ab) : c.$$

3. Dla jakich wartości na a mamy:

a) $(7a) : 3 < (7a^2) : 3$; *b)* $(7a) : 3 = (7a^2) : 3$;
c) $(7a) : 3 > (7a^2) : 3$.

4. Dlaczego przy każdych wartościach naturalnych, przyjętych na litery a i b, zachodzą nierówności:

a) $\frac{a}{b}>\frac{a-1}{b+1}$ (odp.: ponieważ $\frac{a}{b}>\frac{a-1}{b}>\frac{a-1}{b+1}$);

b) $\frac{a}{b+2}<\frac{a+1}{b+1}$; *c)* $\frac{a}{a+5}>\frac{a-1}{a+6}$; *d)* $\frac{a+3}{a+9}<\frac{a+4}{a+8}$.

Podaj kilka przykładów liczbowych!

5. Uporządkuj wedle wielkości rosnących:

$$\frac{a+5}{b+7},\quad \frac{a+6}{b+6},\quad \frac{a+4}{b+7},\quad \frac{a+7}{b+3},\quad \frac{a+2}{b+8}.$$

6. Uporządkuj wedle wielkości malejących:

$$\frac{x+8}{x+14},\quad \frac{x+9}{x+10},\quad \frac{x+5}{x+14},\quad \frac{x+8}{x+12},\quad \frac{x+11}{x+10}.$$

7. 1 robotnik wykona pewną pracę w 24 dniach; niech x robotników wykona tę pracę w y dniach.
Możemy więc napisać:

1 robotnik . . . w 24 dniach,
x „ . . . w y „

Ponieważ te wielkości są odwrotnie proporcjonalne, więc:

$$y : 24 = 1 : x = \frac{1}{x}.$$

Stąd: $$y = \frac{24}{x}.$$

Widzimy zatem, że wielkości x i y, odwrotnie do siebie proporcjonalne, spełniają równość:

$$y = \frac{24}{x}.$$

Na podstawie tego wzoru możemy obliczyć liczbę dni y potrzebną na wykonanie pewnej pracy przez x robotników. Np.: 2 robotników wykona tę pracę w $\frac{24}{2} = 12$ dniach.

Uwaga. Jeśli wielkości x i y, od siebie zależne i zmienne, spełniają np. równość:

$$y = \frac{10}{x},$$

to wielkości x i y są do siebie odwrotnie proporcjonalne. Ile razy bowiem zwiększymy (lub zmiejszymy) liczbę x, tyle razy zmniejszy się także (lub zwiększy) liczba y.

a) 60 robotników wykona pewną pracę w 1 dniu; niech y oznacza liczbę robotników, którzy wykonają tę pracę w x dniach. Jaki wzór na y otrzymasz? Oblicz na podstawie tego wzoru liczbę robotników, którzy wykonają tę pracę w 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30 dniach. Tabelka!

b) Koło na pewnej drodze wykonało 300 obrotów; niech y obrotów wykona na tej drodze koło o obwodzie x razy większym (względnie mniejszym). Jaki wzór na y otrzymasz? Oblicz na podstawie tego wzoru liczbę obrotów na tej drodze koła 2, 3, 4, 5 razy większego i 2, 3, 4, 5 razy mniejszego. Tabelka!

c) Pole prostokąta wynosi 30 cm^2, podstawa ma x cm, wysokość zaś y cm. Jaki wzór na y otrzymasz? Oblicz na podstawie tego wzoru wysokość prostokąta, wiedząc, że podstawa wynosi 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm. Tabelka!

Plan zadań z liczbami ogólnemi.

Zadania.

1. Robotnik, pracujący przez a dni, po b godzin dziennie, zarobił c *zł*; ile kosztuje godzina jego pracy?
2. Zmieszano 2 gatunki kawy: a *kg* po b *zł* za 1 *kg* i c *kg* po d *zł* za 1 *kg*; ile kosztuje 1 *kg* mieszaniny?
3. Jeśli jedno koło ma a m obwodu i wykonało n obrotów na pewnej drodze, to ile obrotów wykona na tej samej drodze koło, posiadające b m obwodu?
4. a *kg* chleba wystarczy dla wyżywienia b ludzi w ciągu c dni; na ile dni wystarczy d *kg* chleba dla wyżywienia e ludzi?
5. a robotników, pracujących po b godzin dziennie, wykończy pewną pracę w c dniach; ilu robotników pracujących po d godzin dziennie wykończy tę samą pracę w e dniach?
6. Piechur szedł a godzin; resztę drogi, t. j. b *km*, przeszedł z prędkością c *km* na godzinę. Jak długo był w drodze?
7. W ogrodzie kształtu kwadratu o boku a m poprowadzono 2 ścieżki, odpowiednio równoległe do boków kwadratu, jedną szeroką na b m, drugą na c m; jakie jest pole uprawnej części ogrodu?
8. Ojciec posiadał a *zł*; jednemu dziecku dał $\frac{b}{c}$ tej kwoty, drugiemu zaś $\frac{d}{e}$ reszty; ile pieniędzy mu zostało?
9. Kupiono a arów ziemi za cenę b *zł*, a następnie sprzedano $\frac{c}{d}$ z tego majątku za tę samą cenę, t. j. b *zł*, resztę zaś w cenie e *zł* za 1 a; za ile sprzedano cały majątek?
10. Odległość miejscowości A od miejscowości B wynosi a *km*. Podróżny $\frac{b}{c}$ tej drogi przejechał z prędkością d *km* na godzinę, resztę zaś drogi z prędkością e *km* na godzinę; jak długo trwała podróż?

Równania.

Określenia:

Połączmy znakiem równości dwa wyrażenia, z których chociaż jedno zawiera litery, a otrzymamy **równanie**.

Równaniami są np.:

$$x + 3 = 5,$$
$$x + 4 = x + 4,$$
$$\frac{x}{3} = 2,$$
$$a \,.\, x = b,$$
$$a + b = b + a, \quad \text{i t. d.}$$

Weźmy pod uwagę równanie:

$$x + 3 = x + 3.$$

Jakąkolwiek liczbę podstawimy za literę x, zawsze otrzymamy równość. Równanie takie nazywamy **tożsamością**.

Tożsamościami są np. równania:

$$2\,x + 5 = 2\,x + 5,$$
$$(a + b)\,y = (a + b)\,y,$$
$$a \,.\, x = x \,.\, a, \quad \text{i t. d.}$$

Do tożsamości zaliczamy takie równości, jak np.:

$$2 + 5 = 7, \quad 4 \,.\, 7 = 28, \quad \text{i t. p.}$$

Weźmy teraz pod uwagę równanie:

$$x + 2 = 5.$$

Jeżeli podstawimy $x = 7$, to równość nie będzie zachodzić, gdyż $7 + 2$ nie równa się 5.

Jeżeli podstawimy $x = 3$, to widoczne, że równość będzie zachodziła, bo $3 + 2 = 5$.

O liczbie 3 mówimy, że **spełnia** powyższe równanie. Liczbę 3 nazywamy również **pierwiastkiem** danego równania.

Podobnie liczbę 6 nazywamy pierwiastkiem równania:

$$x - 4 = 2,$$

gdyż 6 spełnia powyższe równanie.

Nie każde równanie posiada pierwiastek. Np. równanie:

$$x + 5 = 2$$

nie posiada pierwiastka; nie ma bowiem liczby, któraby dodana do 5, dała na wynik 2.

Są równania posiadające kilka pierwiastków.

Np. równanie:

$$x = 7 - \frac{10}{x}$$

ma pierwiastki: 2 i 5; mamy bowiem

$$2 = 7 - \tfrac{10}{2},$$
$$5 = 7 - \tfrac{10}{5}.$$

Jeżeli mamy równanie, jak np.:

$$x - 3 = 8 - x,$$

to wyrażenie, stojące po lewej stronie znaku równości, nazywamy **lewą stroną** równania, zaś wyrażenie, stojące po prawej stronie znaku równości, nazywamy **prawą stroną** równania.

Zatem $x - 3$ jest lewą stroną, $8 - x$ jest prawą stroną równania.

Rozwiązać równanie, to znaczy znaleźć jego pierwiastki.

Zadania.

1. Sprawdź, że następujące równania są tożsamościami:

   a) $x + 7 = 7 + x$;
   b) $2 + x + 3 = x + 5$;
   c) $x : 3 = \frac{1}{3} \,.\, x$;
   d) $a + b + 1 = b + 1 + a$;
   e) $(a - b) \,.\, c = a \,.\, c - b \,.\, c$;
   f) $(3 - x) \,.\, 2 = 6 - 2\,x$.

2. Zbadaj, czy liczba:

   a) 3 spełnia równanie $x - 1 = 4$;
   b) $2\frac{1}{2}$ spełnia równanie $2 \,.\, x - 3 = 2$;
   c) $\frac{3}{4}$ spełnia równanie $4 \,.\, x - 1 = x + 1\frac{1}{4}$;
   d) 2·7 spełnia równanie $\frac{x}{3} + 0{\cdot}1 = 2$;
   e) 3·5 spełnia równanie $2{\cdot}x - 3 = 4\,x + 1$;
   f) $\frac{2}{5}$ spełnia równanie $\dfrac{3}{x} + 1 = \dfrac{4}{1 - x} - 1\frac{5}{6}$.

3. Sprawdź, że liczby 1, 2, 3 są pierwiastkami równania

$$\frac{11x-6}{x} = x(6-x).$$

4. Rozwiąż równania:

a) $x+3=5$; *c)* $3 \cdot x = 6$; *e)* $\frac{x}{3}=90$;
b) $x-2=8$; *d)* $8-x=3$; *f)* $\frac{24}{x}=6$.

Rozwiązywanie równań.

Przy rozwiązywaniu równań opierać się będziemy na następujących zasadach:

I. Ponieważ z $a+b=c$
wynika $a=c-b$
i z $a-b=c$
wynika $a=c+b$,
więc możemy powiedzieć:

W równości wolno każdy dodajnik (odjemnik) po jednej stronie równości przenieść jako odjemnik (dodajnik) na drugą stronę równości.

II. Ponieważ z $a \cdot b = c$ (przyczem $b \neq 0$)
wynika $a = \frac{c}{b}$
i z $\frac{a}{b} = c$
wynika $a = cb$,
więc możemy powiedzieć:

Wolno obie strony równości pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę.

Na przykładach poznamy teraz, jak stosuje się powyższe zasady do rozwiązywania równań.

Przykład 1.
Rozwiąż równanie:

$$x-7=2.$$

Odjemnik 7 przenosimy na prawą stronę.
Otrzymamy:

$$x=2+7.$$

Równanie to posiada ten sam pierwiastek, co dane równanie, przenosząc bowiem dodajnik 7 na lewą stronę, otrzymujemy zpowrotem dane równanie.

Widzieliśmy, że $x=2+7=9$.

Aby sprawdzić, czy równanie dobrze rozwiązaliśmy, wstawiamy w równanie liczbę 9 zamiast x.
Sprawdzenie:

$$9-7=2.$$

Zatem 9 jest pierwiastkiem równania.

Przykład 2.
Rozwiąż równanie:

$$7=x+2.$$

Dodajnik 2 przenosimy na lewą stronę. Otrzymamy

$$7-2=x.$$

Równanie to posiada ten sam pierwiastek, co dane równanie, przenosząc bowiem odjemnik 2 na prawą stronę, otrzymujemy zpowrotem dane równanie.
Mieliśmy

$$7-2=x,$$

czyli

$$x=5.$$

Sprawdzenie:

$$7=5+2.$$

Przykład 3.
Rozwiąż równanie:

$$7-x=3.$$

Odjemnik x przenosimy na prawą stronę. Otrzymamy

$$7=3+x.$$

Równanie to posiada ten sam pierwiastek, co dane równanie, przenosząc bowiem dodajnik x na lewą stronę, otrzymujemy zpowrotem dane równanie.

W równaniu $7=3+x$ przenosimy teraz dodajnik 3 na lewą stronę. Otrzymamy:

$$7-3=x, \text{ czyli } 4=x.$$

Równanie to posiada ten sam pierwiastek, co równanie $7=3+x$, które znowu posiada ten sam pierwiastek, co dane równanie, a zatem 4 jest pierwiastkiem danego równania.
Sprawdzenie:

$$7-4=3.$$

Przykład 4.
Rozwiąż równanie:

$$\frac{3}{4}x = \frac{8}{7}.$$

Dzielimy obie strony równania przez $\frac{3}{4}$.

A więc
$$\tfrac{3}{4}x : \tfrac{3}{4} = \tfrac{8}{7} : \tfrac{3}{4}.$$
Wykonując dzielenie, otrzymamy:
$$x = \tfrac{32}{21}.$$
Równanie to posiada ten sam pierwiastek, co dane równanie, mnożąc bowiem obie strony ostatniego równania przez $\frac{3}{4}$, otrzymujemy zpowrotem dane równanie.

Pierwiastkiem zatem danego równania jest $\frac{32}{21}$.

Uwaga. Moglibyśmy zamiast dzielić przez $\frac{3}{4}$ mnożyć przez $\frac{4}{3}$. Mielibyśmy
$$\tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{3}{4}x = \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{8}{7},$$
$$x = \tfrac{32}{21}.$$

Przykład 5.

Rozwiąż równanie:
$$\frac{2x}{3} = 5.$$
Mnożymy obie strony równania przez 3.

A więc $\quad 3 \cdot \frac{2x}{3} = 3 \cdot 5,$

czyli $\quad 2x = 15.$

Równanie to posiada ten sam pierwiastek, co dane równanie, dzieląc bowiem obie strony przez 3, otrzymujemy zpowrotem dane równanie.

W równaniu $2x = 15$ dzielimy teraz obie strony przez 2. Otrzymujemy:
$$2x : 2 = 15 : 2.$$
Stąd $\quad x = \frac{15}{2}.$

Równanie to posiada ten sam pierwiastek co równanie
$$2x = 15,$$
które znowu posiada ten sam pierwiastek co dane równanie, a zatem $\frac{15}{2}$ jest pierwiastkiem danego równania.

Sprawdzenie. $\quad \dfrac{2 \cdot \frac{15}{2}}{3} = \dfrac{15}{3} = 5.$

Zadania.

1. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $x + 4 = 9$; *b)* $5 + x = 11$; *c)* $x + \frac{1}{2} = 2$; *d)* $\frac{3}{4} + x = 1$; *e)* $x + 2{\cdot}8 = 4$; *f)* $3{\cdot}4 + x = 8$; *g)* $x + 3\frac{1}{2} = 4\frac{5}{6}$; *h)* $5\frac{3}{4} + x = 8\frac{1}{2}$; *i)* $x + 8{\cdot}6 = 12{\cdot}45$; *j)* $5{\cdot}8 + x = 14{\cdot}83$.

2. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $x - 4 = 6$; *b)* $x - 3 = 2\frac{1}{2}$; *c)* $x - 3\frac{1}{4} = 11$; *d)* $x - 1\frac{1}{2} = 3\frac{2}{5}$; *e)* $x - 7 = 2{\cdot}5$; *f)* $x - 3{\cdot}4 = 2{\cdot}41$.

3. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $8 - x = 2$; *b)* $6 - x = 0$; *c)* $6\frac{1}{2} - x = 2$; *d)* $4\frac{3}{5} - x = 1\frac{1}{2}$; *e)* $5{\cdot}4 - x = 3$; *f)* $6{\cdot}2 - x = 2{\cdot}81$.

4. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $4x = 20$; *b)* $11x = 143$; *c)* $25x = 5$; *d)* $18x = 6$; *e)* $0{\cdot}4x = 0{\cdot}32$; *f)* $2{\cdot}4x = 0{\cdot}72$; *g)* $\frac{3}{4}x = 5$; *h)* $2\frac{1}{2}x = 6$; *i)* $\frac{2}{3}x = \frac{4}{5}$; *j)* $1\frac{1}{2}x = 4$; *k)* $2\frac{2}{3}x = 3\frac{4}{5}$.

5. Rozwiąż równanie, a następnie sprawdź:

a) $\frac{3x}{5} = 7$; *b)* $\frac{x}{4} = 5$; *c)* $\frac{2{\cdot}5x}{0{\cdot}5} = 4$; *d)* $4 \cdot \frac{x}{5} = 7$; *e)* $2{\cdot}5 \cdot \frac{x}{0{\cdot}4} = 5$.

6. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $5x - 17 = 33$; *b)* $8x - 9 = 7$; *c)* $14 + 3x = 23$; *d)* $36 - 7x = 8$; *e)* $85 + 11x = 96$; *f)* $85 - 11x = 8$; *g)* $3x + 14 = 36$; *h)* $5x - 5 = 19$; *i)* $37 + 18x = 104$; *j)* $0{\cdot}4x + 2 = 3{\cdot}2$; *k)* $2{\cdot}1x - 0{\cdot}8 = 3{\cdot}4$; *l)* $5{\cdot}6 - 0{\cdot}4x = 1{\cdot}6$; *m)* $4{\cdot}1 - 2{\cdot}3x = 1{\cdot}14$; *n)* $3{\cdot}5 + 7x = 8{\cdot}4$; *o)* $3{\cdot}5 - 7x = 1{\cdot}1$; *p)* $\frac{3}{4}x + 2 = 5$; *q)* $\frac{7}{5}x - 1 = \frac{11}{4}$; *r)* $\frac{7}{5} + \frac{2}{3}x = 2\frac{1}{2}$; *s)* $4\frac{1}{2} - \frac{11}{3}x = 3\frac{1}{4}$; *t)* $21\frac{1}{4} + \frac{2}{3}x = 84\frac{1}{5}$; *u)* $21\frac{1}{4} - \frac{2}{3}x = 1\frac{1}{6}$.

Rozwiązanie: *a)* Przenosimy odjemnik 17 na prawą stronę równania. A więc $5x = 33 + 17$, stąd $5x = 40$, zatem $x = \frac{40}{5} = 8$.

8. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $6x + 7x - 2x = 22$; *b)* $23x - 7x = 32$; *c)* $x + 13x - 2x + 4 = 34$; *d)* $21x - 9x + 3 = 27$; *e)* $11x - 72 + 9x = 88$; *f)* $14x + 11 - 8x = 71$; *g)* $2{\cdot}4x + 3{\cdot}2x = 1{\cdot}4$; *h)* $8{\cdot}6x - 1{\cdot}4x = 0{\cdot}3$; *i)* $1{\cdot}8x + 3{\cdot}6x + 1{\cdot}1 = 7{\cdot}5$; *j)* $\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x = \frac{1}{5}$; *k)* $1\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x = \frac{1}{2}$; *l)* $\frac{3}{5}x + 2\frac{1}{4}x + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie: *a)* Naprzód redukujemy lewą stronę równania. Otrzymujemy więc

$$11x = 22,$$

stąd $$x = \tfrac{22}{11} = 2.$$

8. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $6x + 13 = 4x + 25$;
b) $12x + 17 = 18x + 15$;
c) $8x - 25 = 23 - 4x$;
d) $27x - 45 = 23x + 11$;
e) $11x + 16 = 24 - 4x$;
f) $8 - 3x = 4 - x$;
g) $16 - 6{\cdot}4x = 12 - 0{\cdot}8x$;
h) $5\tfrac{1}{4}x - 2 = 2\tfrac{1}{8}x + 1$;
i) $8 + 3\tfrac{2}{5}x = x + 20\tfrac{1}{2}$;
j) $3 - 1\tfrac{1}{4}x = 3\tfrac{1}{8}x + 2$;
k) $13 + 5x + 12 + 2x = 48 - x + 3$;
l) $18x + 123 - 3x + 14 - 2x - 160 = 0$.

Rozwiązanie: *a)* Przenosimy $4x$ na lewą stronę równania, a następnie rozwiązujemy, jak w zadaniu 7.

9. Opierając się na twierdzeniu, że $a - (b + c) = a - b - c$, rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $8x - (2x + 1) = 5$;
b) $10x = 60 - (8x + 6)$;
c) $4{\cdot}2x - (1{\cdot}2x + 3{\cdot}4) = 2$;
d) $8{\cdot}6x = 40{\cdot}8 - (4{\cdot}8x + 10{\cdot}2)$;
e) $3\tfrac{5}{6}x - (2\tfrac{1}{4}x + 2) = 4\tfrac{1}{2}$;
f) $6\tfrac{4}{5}x = 21\tfrac{1}{2} - (2\tfrac{1}{5}x + 3\tfrac{1}{2})$.

10. Opierając się na twierdzeniu, że $a - (b - c) = a - b + c$, rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $45x - (4 - 3x) = 8$;
b) $82x = 46 - (6 - 8x)$;
c) $12x - (5x - 1) = 15$;
d) $3x = 50 - (6x - 22)$;
e) $50\tfrac{1}{2}x - (4\tfrac{1}{3} - 12\tfrac{1}{2}x) = 2\tfrac{2}{3}$;
f) $64{\cdot}2x = 36{\cdot}4 - (16{\cdot}2 - 3{\cdot}6x)$.

11. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $5(6x - 4) = 55$;
b) $3(2x + 12) = 8(x + 3)$;
c) $2{\cdot}1(5x - 3) = 4{\cdot}2$;
d) $4(\tfrac{3}{5}x + 2) = 7(\tfrac{1}{5}x + 4)$;
e) $3(4x + 3) + 5 = 5(2x + 1) + 17$;
f) $8(5x - 4) + 9 = 2(x - 3) + 149$.

Uwaga. Wykonaj najpierw naznaczone działania!

12. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $\dfrac{10}{x} = 5$;
b) $\dfrac{48}{5x} = 12$;
c) $\dfrac{72}{11x} = 9$;
d) $\dfrac{3}{x+2} = 1$;
e) $\dfrac{120}{3x+1} = 4$;
f) $\dfrac{5}{2x-1} = 1$;

g) $\dfrac{20}{4x+3} = 2$;
h) $\dfrac{7}{x+1} = 6$;
i) $\dfrac{25}{3x+2} = 4$.

Uwaga. Pomnóż obie strony równania przez mianownik.

13. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $2[2(x - 3) - 5] - 8 = 2x$;
b) $0{\cdot}65x + 1{\cdot}72 = 2{\cdot}37 + 0{\cdot}04x$;
c) $9(9x - 8) = 441 - (5x + 7) \,.\, 7$;
d) $(17 + x)\,5 = (17 - 3x)\,11 + 88$.

14. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{6} + 6$;
b) $17x + 16 + \tfrac{5}{8}x = 290 - \tfrac{3}{4}x$;
c) $x + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{5} - \left(\dfrac{x}{2} + 2\right) = 17$;
d) $\dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x-3}{2} = 2$.

Uwaga. Pomnóż obie strony równania przez wspólny mianownik, np. w *a)* przez 6.

15. Rozwiąż równanie i sprawdź:

a) $\dfrac{1}{x-8} = \dfrac{3}{x}$;
b) $\dfrac{16}{3x-4} = \dfrac{22}{2x+3}$;
c) $\dfrac{13}{2x-3} = \dfrac{11}{x+3}$;
d) $\dfrac{23}{8x-1} = \dfrac{19}{5x+4}$.

Zastosuj twierdzenie: jeżeli dwa ułamki są sobie równe, to ich odwrotności są także sobie równe.

Układanie równań.

Ćwiczenia wstępne.

1. Suma dwóch liczb wynosi *a)* 5, *b)* $\tfrac{4}{7}$, *c)* 2·3; jeden z dodajników oznaczyliśmy przez x. Jak należy oznaczyć drugi dodajnik?

Odpowiedź: $5 - x$.

2. Pewną liczbę oznaczyliśmy przez x; jak należy oznaczyć liczbę *a)* 7, *b)* 25, *c)* $2\tfrac{2}{3}$, *d)* 8·4 razy większą? Jak liczbę *a)* 5, *b)* 100, *c)* 3·4 razy mniejszą? Jak liczbę o *a)* 8, *b)* $\tfrac{2}{3}$, *c)* 4·6 większą? Jak liczbę o *a)* 4, *b)* $\tfrac{7}{9}$, *c)* 3·4 mniejszą?

3. Różnica dwóch liczb wynosi *a)* 4, *b)* $\frac{8}{11}$, *c)* 4·6; odjemną oznaczyliśmy przez x. Jak należy oznaczyć odjemnik?
4. Różnica dwóch liczb wynosi *a)* 7, *b)* $2\frac{1}{3}$, *c)* 0·4; odjemnik oznaczyliśmy przez x. Jak należy oznaczyć odjemną?
5. Iloczyn dwóch liczb wynosi *a)* 9, *b)* $\frac{3}{4}$, *c)* 1·8; jeden z czynników oznaczyliśmy przez x. Jak należy oznaczyć drugi czynnik?
6. Iloraz dwóch liczb wynosi *a)* 5, *b)* $1\frac{2}{3}$, *c)* 0·15; dzielną oznaczyliśmy przez x. Jak należy oznaczyć dzielnik?
7. Iloraz dwóch liczb wynosi *a)* 12, *b)* $4\frac{1}{3}$, *c)* 2·4; dzielnik oznaczyliśmy przez x. Jak należy oznaczyć dzielną?
8. Napisz 5 kolejnych liczb naturalnych, z których środkowa jest x!
9. Oblicz sumę czterech kolejnych liczb naturalnych, z których *a)* najmniejsza jest x, *b)* największa jest x!

Zadania.

Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 5, a do iloczynu dodamy 4, to otrzymamy 19; jaka to jest liczba?

Rozwiązanie:

Oznaczmy szukaną liczbę przez x. Iloczyn tej liczby przez 5 jest $(5x)$; jeżeli do tego iloczynu dodamy 4 otrzymamy

$$(5x)+4, \text{ czyli } 5x+4.$$

W zadaniu jest powiedziane, że na wynik otrzymujemy 19. Zatem:

$$5x+4=19.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy:

$$x=3.$$

Sprawdzenie:

$$5\,.\,3+4=19.$$

Rozwiąż w ten sposób następujące zadania:

1. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 7 i do otrzymanego iloczynu dodamy 2, to wypadnie 23; co to za liczba?
2. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 4, a od otrzymanego iloczynu odejmiemy 16, to wypadnie 100; co to za liczba?

3. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 9 i od otrzymanego iloczynu odejmiemy 4, to otrzymamy tyle, co gdybyśmy tę liczbę pomnożyli przez 7 i do tego iloczynu dodali 8; co to za liczba?
4. Połowa pewnej liczby jest o 4 większa od trzeciej części tej liczby; co to za liczba?

   Rozwiązanie:

   Oznaczmy szukaną liczbę przez x. Połowa tej liczby jest $\frac{x}{2}$, trzecia część jest $\frac{x}{3}$. Zatem:

   $$\frac{x}{2}-4=\frac{x}{3}.$$

5. Piąta część pewnej liczby jest o 3 mniejsza od czwartej części tej liczby; co to za liczba?
6. Jeżeli pewną liczbę podwoimy i do tego dodamy 4, to otrzymamy tyle, co gdybyśmy wzięli trzecią część tej liczby i do wyniku dodali 9; co to za liczba?
7. Gdy podzielisz pewną liczbę przez 60 i iloraz dodasz do 7, to otrzymasz 12; co to za liczba?
8. *a)* Jaka liczba jest o 72 większa od jej piątej części? *b)* Jaka to liczba, której czwarta część jest o 5 mniejsza od trzeciej części?
9. Iloczyn pewnej liczby przez 8 jest o 51 większy, niż iloczyn tej liczby przez 5; jaka to liczba?
10. Iloraz pewnej liczby przez 7 jest o 1 większy, niż iloraz tej liczby przez 8; jaka to liczba?
11. Iloczyn pewnej liczby przez 6, powiększony o 10, jest równy iloczynowi tej liczby przez 8, zmniejszonemu o 20; jaka to liczba?
12. Dwaj robotnicy zarobili razem 42 *zł*; pierwszy z nich pracował 3 dni, drugi 4 dni. Ile zarobił każdy z nich?

    Rozwiązanie: Jeżeli każdy z nich zarabiał x *zł* dziennie, to pierwszy zarobił $3x$ *zł*, drugi zaś $4x$ *zł*, zatem:

    $$3x+4x=42.$$

13. Trzej robotnicy zarobili razem 324 *zł*; pierwszy pracował 7 dni, drugi 8 dni, trzeci 12 dni. Ile zarobił każdy robotnik?
14. A otrzymał trzecią część pewnej kwoty, zaś B dziesiątą część; ile wynosiła kwota, jeżeli A otrzymał o 700 *zł* więcej niż B?

15. Przy podziale zysków między 4 wspólników A otrzymał trzecią część tego zysku, B czwartą część, C piątą część, a D resztę, t. j. 1300 *zł*; ile wynosił zysk?
16. Ktoś zapytany, ile ma pieniędzy, odpowiedział: gdybym wydał połowę tej kwoty, którą posiadam, potem trzecią część, to pozostałoby mi 2 *zł*; ile posiadał pieniędzy?
17. Owczarz zapytany, ile ma owiec, odpowiedział: jeśli do tego, co mam, dodać drugie tyle i jeszcze połowę i czwartą część tego i doliczyć mego psa, to będzie razem 100 sztuk; ile owczarz miał owiec?
18. Ojciec ma 30 lat, syn ma 2 lata; po ilu latach ojciec będzie 5 razy starszy od syna?
19. Wydałem połowę pieniędzy, które miałem, następnie szóstą część reszty, poczem pozostało mi 8·95 *zł*; ile miałem pieniędzy?
20. Piłka sprężysta odskakuje na $\frac{2}{9}$ wysokości, z której spadła; jeżeli po 3 odbiciach jest na wysokości $\frac{1}{3}$ *dm*, to z jakiej wysokości ją puszczono?
21. Ktoś podzielił swój majątek między spadkobierców w ten sposób, że jedna osoba otrzymała $\frac{1}{6}$, druga $\frac{1}{9}$, trzecia $\frac{1}{12}$ tego majątku, czwarta zaś osoba otrzymała resztę, t. j. 6325 *zł*; ile wynosił majątek i ile otrzymała każda osoba?
22. Pewna osoba spotyka ubogich i chciałaby dać każdemu po 5 *gr*, ale jej brakuje 10 *gr*, daje przeto po 4 *gr* i zostaje jej 2 *gr*; ilu było ubogich i ile miała pieniędzy przy sobie?

    Rozwiązanie:

    Niechaj x oznacza ilość ubogich. Aby każdemu dać po 5 *gr*, musiałaby ta osoba mieć $5x$ *gr*; ponieważ brakuje jej 10 *gr*, więc ma $(5x - 10)$ *gr*.
    Ponieważ każdemu daje 4 *gr* i zostaje jej 2 *gr*, więc ma $(4x + 2)$ *gr*. A więc:

    $$5x - 10 = 4x + 2.$$

23. Chłopiec sądził, że za kwotę, którą posiada, może kupić 9 ołówków. Ponieważ jednak ołówek kosztował o 4 *gr* drożej, niż on się spodziewał, kupił tylko 6 ołówków; ile kosztował ołówek i ile pieniędzy chłopiec posiadał? Oznacz przez x cenę ołówka!

24. Różnica dwóch liczb wynosi 17, a ich suma 73; znaleźć te liczby!

    Uwaga. Mniejszą liczbę oznaczmy przez x, to większa będzie $17 + x$.

25. Przedstaw liczbę 72 jako sumę dwóch dodajników tak, aby jeden był dwa razy większy od drugiego!
26. Przedstaw liczbę 581 jako sumę trzech składników tak, aby pierwszy był dwa razy większy od drugiego, drugi zaś dwa razy większy od trzeciego!
27. Przedstaw liczbę 420 jako sumę dwóch dodajników tak, aby jeden wynosił $\frac{2}{5}$ drugiego!
28. Jaś i Staś mają razem 29 lat; Staś ma o 5 lat więcej, niż Jaś. Ile każdy z nich ma lat?
29. 799 *zł* rozdzielono między dwie osoby w ten sposób, że jedna otrzymała o 87 *zł* więcej, niż druga; ile *zł* otrzymała każda osoba?
30. Jan, Piotr i Józef mają razem 52 *zł*. Piotr ma o 7 *zł* więcej, niż Jan, zaś Józef o 5 *zł* więcej, niż Piotr; ile każdy z nich ma pieniędzy?
31. Rodzice wydali na książki szkolne dla trzech synów 75 *zł*. Książki średniego syna kosztowały 5 *zł* mniej, a najmłodszego o 13 *zł* mniej, niż najstarszego; ile kosztowały książki każdego syna?
32. Ojciec jest starszy od syna o 27 lat i 10 miesięcy, a jednocześnie obecnie jest 3 razy starszy od niego; ile lat ma ojciec, a ile syn?
33. Ojciec jest 3 razy starszy od syna, a za 14 lat i 7 miesięcy będzie od niego starszy tylko 2 razy; ile lat ma obecnie ojciec, a ile syn?
34. Kupiono 24 *m* sukna dwóch gatunków — po 14 *zł* za 1 *m* i po 10 *zł* za 1 *m* i zapłacono razem 300 *zł*; ile metrów droższego sukna kupiono?
35. Kupiono za 1 *zł* 44 *gr* piór i zeszytów, razem 16 sztuk, płacąc po 2 *gr* za pióro i po 30 *gr* za zeszyt; ile kupiono piór, a ile zeszytów?
36. Ktoś wysłał w przeciągu miesiąca razem 36 listów i kart pocztowych; ile wysłał listów (ze znaczkami 25 groszowemi), a ile kart (ze znaczkami 15 groszowemi), jeżeli razem wydał na znaczki 7 *zł* 10 *gr*?

37. Bank sprzedał razem 100 sztuk funtów angielskich i dolarów — funty po 43 *zł* 25 *gr*, dolary po 8 *zł* 88 *gr*; ile sprzedał funtów angielskich, a ile dolarów, jeżeli otrzymał łącznie sumę 1850 *zł* 36 *gr*?
38. Ojciec i syn mają razem lat 68, przyczem ojciec jest trzy razy starszy od syna; ile lat ma ojciec, a ile syn?
39. W pociągu jedzie 600 osób. W klasie drugiej znajduje się trzy razy tyle osób, co w pierwszej, a w pierwszej i trzeciej trzy razy tyle, co w drugiej; ile osób jedzie w każdej klasie?
40. Jan, Piotr i Paweł rozdzielili między siebie 100 *zł* w ten sposób, że Piotr otrzymał o 3 *zł* więcej od Jana, zaś Jan i Paweł o 7 *zł* więcej, niż podwójna kwota, jaką otrzymał Piotr; ile otrzymał każdy?
41. W pewnej wycieczce brało udział o 3 panów więcej, niż pań, liczba zaś dzieci była dwa razy większa, niż liczba pań. Koszta tej wycieczki, wynoszące 154 *zł*, rozdzielono w ten sposób, że panowie wpłacili po 6 *zł*, panie po 5 *zł*, dzieci po 3 *zł*; ile osób wzięło udział w wycieczce?
42. Dwa pociągi wyszły jednocześnie naprzeciw siebie z dwóch stacyj, których odległość wynosi 72 *km*; po upływie jakiego czasu spotkają się te pociągi, jeżeli jeden z nich jedzie z prędkością 40 *km* na godzinę, drugi zaś z prędkością 50 *km* na godzinę?
43. Z dwóch miast, odległych od siebie o 243 *km*, wychodzą jednocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi. Jeden ma prędkość 25 *km* na godzinę, drugi 35 *km* na godzinę; po jakim czasie odległość między pociągami wyniesie 39 *km*?
44. W trzeciej klasie pociągu jechało 3 razy tyle osób, co w drugiej. Ponieważ po drodze z trzeciej klasy 40 osób wysiadło, zaś do drugiej 20 wsiadło, było w trzeciej klasie 2 razy tyle osób, co w drugiej; ile osób znajdowało się przy końcu jazdy w klasie drugiej?
45. Jan rozdzielił pewną liczbę bochenków chleba w następujący sposób: dał Piotrowi $\frac{1}{3}$ wszystkich bochenków i jeszcze $3\frac{2}{3}$ bochenka, Pawłowi $\frac{1}{6}$ wszystkich bochenków i jeszcze $1\frac{5}{6}$ bochenka, a wreszcie Józefowi $\frac{1}{7}$ wszystkich bochenków i jeszcze $\frac{3}{7}$ bochenka; zostały 3 bochenki; ile bochenków dał każdemu?

46. Czarodziej rzekł do skąpca: ile razy przejdziesz przez tę kładkę i wrzucisz do strumyka 4 *zł*, podwoi ci się gotówka, jaką masz przy sobie. Skąpiec przeszedł 3 razy przez kładkę i został bez pieniędzy; ile pieniędzy miał na początku?
47. W prawej kieszeni mam tyle złotych, ile w lewej groszy. Jeżeli jednak przełożę z prawej kieszeni do lewej 6·93 *zł*, to będę miał w lewej kieszeni tyle złotych, ile w prawej mam obecnie groszy; ile pieniędzy mam w prawej kieszeni?

Zastosowanie równań do geometrji.

Zadania.

1. W prostokącie jeden bok jest o: *a)* 2 *cm*, *b)* 2·45 *dm*, *c)* $1\frac{3}{4}$ *m* dłuższy od drugiego. Obwód tego prostokąta wynosi: *a)* 28 *cm*, *b)* 17·75 *dm*, *c)* 24 *m*; jak długie są jego boki?
2. W prostokącie jeden bok jest o: *a)* 5 *cm*, *b)* 3·75 *dm*, *c)* $3\frac{1}{4}$ *m* krótszy od drugiego. Obwód tego prostokąta wynosi: *a)* 74 *cm*, *b)* 68·5 *dm*, *c)* $38\frac{1}{2}$ *m*; jak długie są jego boki?
3. W prostokącie *a)* jeden bok jest 2 razy większy od drugiego, *b)* jeden bok jest $\frac{3}{5}$ drugiego. Obwód tego prostokąta wynosi *a)* 24 *cm*, *b)* 18 *dm*; oblicz długość boków tego prostokąta!
4. Prostokąt o wymiarach 3 *cm* i 5 *cm* podzielono na 2 części, z których jedna była o 3 cm^2 większa od drugiej; oblicz pola tych części.
5. Oblicz pole trójkąta, wiedząc, że suma podstawy i wysokości wynosi 14 *cm* i że podstawa równa się $\frac{4}{3}$ wysokości.
6. W rombie jedna przekątna jest o 3 *cm* dłuższa od drugiej. Gdybyśmy każdą z nich o 1 *cm* przedłużyli, to pole danego rombu wzrosłoby o 7 cm^2; oblicz długości obu przekątnych.
7. W trapezie boki równoległe mają 5 *cm* i 8 *cm*, wysokość zaś 4 *cm*; o ile *cm* należy przedłużyć jednakowo każdy z boków równoległych, aby pole trapezu podwoiło się?

8. Dany jest prostopadłościan o wymiarach 3 *cm*, 5 *cm*, 8 *cm*; o ile trzeba zwiększyć krawędź 3 *cm*, aby pole tego prostopadłościanu powiększyło się 3 razy?
9. Dane są sześciany o krawędzi 4 *cm* i o krawędzi 2 *cm*. Z tych sześcianów ułożono prostopadłościan na 20 *cm* długi, którego podstawa jest kwadratem o boku 4 *cm*; ile wzięto większych, a ile mniejszych sześcianów, jeżeli razem ich liczba wynosi 26?
10. Walec mosiężny, którego podstawa wynosi 78·5 cm^2, po wrzuceniu do wody ważył pozornie 14·13 *kg*; jaka jest objętość walca i jaka wysokość, jeśli wiemy, że 1 cm^3 mosiądzu waży 8·5 *g*?

Mieszaniny.

Zadania.

1. Do 2 *kg* kwasu siarkowego, w cenie 5 *zł* za 1 *kg*, dodano tyle *kg* wody, iż 1 *kg* mieszaniny kosztował 45 *gr*; ile *kg* wody dodano?

   Rozwiązanie: Cena mieszaniny = cenie kwasu siarkowego. Zatem, jeśli x oznacza liczbę *kg* wody, to:

   $$(x+2)\,.\,0{\cdot}45 = 2\,.\,5, \text{ stąd } x = 20{\cdot}222 \ kg.$$
2. Kupiec zmieszał 2 gatunki tytoniu, jeden po 56 *zł* za 1 *kg*, drugi po 44 *zł* za 1 *kg* i otrzymał 18 *kg* tytoniu po 50 *zł* za 1 *kg*; ile wziął do tej mieszaniny z każdego gatunku tytoniu?

   Rozwiązanie: Jeżeli x oznacza liczbę *kg* tytoniu jednego gatunku, to $18 - x$ oznacza liczbę *kg* drugiego gatunku. Cena mieszaniny wynosi więc z jednej strony: $x\,.\,56 + (18 - x)\,.\,44$ złotych, z drugiej zaś strony: $50\,.\,18$ złotych. Mamy zatem: $56x + (18 - x)\,44 = 50\,.\,18$, skąd $x = 9$.
3. Do 7 *kg* spirytusu po 8 *zł* za 1 *kg* dolano tyle *kg* wody, że 1 *kg* mieszaniny kosztował 3·50 *zł*; ile *kg* wody dolano?
4. Kupiec zmieszał dwa gatunki herbaty: 5 *kg* po 24 *zł* za 1 *kg* z herbatą w cenie 30 *zł* za 1 *kg*; jeśli 1 *kg* mieszaniny wart był 26 *zł* 25 *gr*, to ile *kg* herbaty drugiego gatunku zużyto do tej mieszaniny?

5. Kupiec chce zmieszać dwa gatunki herbaty po 36 *zł* 50 *gr* i po 32 *zł* 50 *gr* za 1 *kg*, aby otrzymać 8 *kg* mieszaniny wartości 280 *zł*; ile ma wziąć *kg* każdego gatunku?
6. Kupiec sprzedał 10 *kg* kawy i 8 *kg* herbaty, licząc 12 *zł* drożej 1 *kg* herbaty, niż 1 *kg* kawy i otrzymał razem za ten towar 456 *zł*; po czemu liczył 1 *kg* kawy i 1 *kg* herbaty?
7. Zmieszano trzy gatunki herbaty: 10 *kg* po 20 *zł* za 1 *kg*, 15 *kg* po 18 *zł* za 1 *kg* i 12 *kg* trzeciego gatunku; jaka była cena 1 *kg* herbaty trzeciego gatunku, jeżeli całkowita mieszanina kosztowała 650 *zł*?
8. Zmieszano trzy gatunki tytoniu: 8 *kg* po 56 *zł* za 1 *kg*, 12 *kg* po 44 *zł* za 1 *kg* i pewną ilość trzeciego gatunku po 36 *zł* za 1 *kg*; ile było *kg* trzeciego gatunku tytoniu, jeżeli mieszanina kosztowała 1516 *zł*?
9. Kupiec sprzedał 20 *kg* kawy jednego gatunku, 15 *kg* drugiego i 10 *kg* trzeciego gatunku i otrzymał razem 810 *zł*; jeśli drugi gatunek był o 2 *zł* na 1 *kg* tańszy, niż pierwszy, a trzeci o 4 *zł* na 1 *kg* tańszy, niż drugi, to po czemu sprzedawał 1 *kg* kawy pierwszego, drugiego i trzeciego gatunku?
10. Przy zmianie 200 *zł* otrzymano 13 sztuk pieniędzy po 5 *zł* i po 20 *zł*; ile było sztuk po 5 *zł*, a ile po 20 *zł*?

Procenty.

Zadania.

1. Uprawna ziemia wynosi 55% majątku ziemskiego, a resztę, t. j. 270 morgów, stanowi las; jak wielki jest ten majątek?
   Rozwiązanie: jeżeli x oznacza liczbę morgów tego majątku, to:

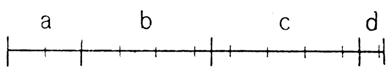
   $$x\,.\,\frac{55}{100} + 270 = x.$$
2. Kupiec sprzedał towar za *a)* 2632 *zł*, *b)* 483 *zł*, zyskując *a)* 12% *b)* $7\frac{1}{2}$% ceny kupna; ile zapłacił za towar?
3. Kupiec sprzedał towar za *a)* 336 *zł*, *b)* 714 *zł*, tracąc *a)* 4%, *b)* 15% ceny kupna; ile zapłacił za towar?
4. Sprzedano dom za 47.000 *zł*, tracąc przy tem 6% ceny kupna; za ile dom był kupiony?
5. Do następnej klasy przeszło 48 uczniów, przyczem 5% pozostało w tej samej klasie; ilu było uczniów w klasie?

6. Kupiec kupił towar po *a)* 4 *zł* za 1 *kg*, *b)* 13 *zł* 20 *gr*; po czemu winien sprzedawać 1 *kg*, jeśli chce mieć *a)* 20%, *b)* 12% zysku od ceny sprzedażnej?
7. Liczba mieszkańców pewnego miasta wzrosła w ostatnim roku o 6% i wynosi 47.700; jaka była liczba mieszkańców przed rokiem?
8. Na wybudowanie domu potrzeba 198.000 cegieł. Jeśli strata cegły przy budowie wynosi 4%, to ile cegieł trzeba zakupić, aby ten dom postawić?

Podział proporcjonalny.

Określenie:

Na rys. 25 mamy odcinek podzielony na 4 części, których miary długości w *cm* oznaczyliśmy literami a, b, c, d.



Rys. 25.

Mówimy, że odcinek ten jest podzielony proporcjonalnie do liczb 2, $3\frac{1}{2}$, 4, $\frac{2}{3}$, jeżeli długości tych części są proporcjonalne do tych liczb; a zatem iloraz (zwany także stosunkiem) długości dwóch części równa się ilorazowi odpowiednich liczb.

A więc:

$a : b = 2 : 3\frac{1}{2}$, $a : d = 2 : \frac{2}{3}$, $d : b = \frac{2}{3} : 3\frac{1}{2}$, $c : a = 4 : 2$ i t. d.

Zadanie 1. Podziel odcinek 8 *cm* proporcjonalnie do liczb $1\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie: Oznaczmy długość jednej części w *cm* przez x. Zatem druga część ma $(8 - x)$ *cm*. A więc:

$$\frac{x}{8 - x} = \frac{1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}}.$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy:

$$x = 3.$$

Zatem jedna część ma 3 *cm*, druga zaś 5 *cm*.

Zadanie 2. Podziel odcinek 58 *cm* proporcjonalnie do liczb 2, 5, $7\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez x długość pierwszej części w *cm*. Iloraz pierwszej części przez drugą ma wynosić 2 : 5, t. j. $\frac{2}{5}$. Zatem druga część, jako dzielnik, wynosi w *cm*:

$$x : \frac{2}{5} = x \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}\, x.$$

Iloraz pierwszej części przez trzecią wynosi:

$$2 : 7\tfrac{1}{2} \text{ t. j. } 2 : \tfrac{15}{2} = 2 \cdot \tfrac{2}{15} = \tfrac{4}{15}.$$

Zatem trzecia część, jako dzielnik, wynosi w *cm*:

$$x : \tfrac{4}{15} = x \cdot \tfrac{15}{4} = \tfrac{15}{4}\, x.$$

Ponieważ suma wszystkich części wynosi 58 *cm*, więc:

$$x + \tfrac{5}{2}\, x + \tfrac{15}{4}\, x = 58.$$

Po rozwiązaniu otrzymujemy $x = 8$.

A więc pierwsza część ma 8 *cm*, druga 8 *cm* . $\frac{5}{2}$, t. j. 20 *cm*, trzecia 8 *cm* . $\frac{15}{4}$, t. j. 30 *cm*.

Zadania.

1. Podziel odcinek *a)* 8 *cm*, *b)* 120 *cm*, *c)* 100 *cm* na części proporcjonalne do liczb *a)* 2 i 3, *b)* 7 i 8, *c)* 3 i 7.
2. Podziel liczbę *a)* 24, *b)* 663, *c)* 4000 na części proporcjonalne do liczb *a)* 1, 2 i 5, *b)* 2, 3 i 8, *c)* 1, 7 i 8. Rysunek!
3. Podziel liczbę *a)* 385, *b)* 3834, *c)* 3120 na części proporcjonalne do liczb *a)* 5, 7, 11 i 12, *b)* 6, 8, 10 i 12, *c)* 2, 3, 4 i 6.
4. Podziel:
   a) 48 *kg* proporcjonalnie do liczb: 3 i 5;
   b) 165 *zł* „ „ „ 2, 7 i 9;
   c) 684 *l* „ „ „ 2, 4, 5 i 7;
   d) 1863 m^3 „ „ „ 4, 6, 5 i 8.
5. Podzielić jakąś wielkość odwrotnie proporcjonalnie do liczb np. 2, 3 i 5, to znaczy podzielić ją wprost proporcjonalnie do odwrotności tych liczb, to jest do liczb: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$.
   Podziel:
   a) 45 odwrotnie proporcjonalnie do liczb: 2 i 3;
   b) 90 „ „ „ „ $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$;
   c) 765 *zł* „ „ „ „ 5, 8 i 10;
   d) 882 *kg* „ „ „ „ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$ i $\frac{1}{8}$.
6. Podziel sumę 2350 *zł* pomiędzy trzy osoby odwrotnie proporcjonalnie do ich dochodów miesięcznych, które wynoszą 180 *zł*, 240 *zł* i 300 *zł*!
7. Dwaj kupcy włożyli we wspólny interes: pierwszy 25.000 *zł*, drugi 38.000 *zł*. Przy likwidacji spółki otrzymano 94.900 *zł*; jak mają się tem podzielić?
   (Rozdziel proporcjonalnie do włożonych kapitałów!)

8. Majątek 83.700 *zł* podzielono pomiędzy trzy osoby odwrotnie proporcjonalnie do liczb: 36, 24 i 18; ile każda osoba otrzymała?
9. Dwóch rolników wynajęło łąkę za 1400 *zł*. Jeden z nich wypasał na tej łące 36 wołów, drugi zaś 27 wołów; ile każdy z nich powinien zapłacić za łąkę? (Wprost proporcjonalnie do liczby wołów).
10. Ktoś przekazał w testamencie 5160 *zł* na pokrycie swych zobowiązań, a winien był jednemu 2400 *zł*, drugiemu 2800 *zl*, trzeciemu 3400 *zł*; jak należy między nich 5160 *zł* rozdzielić? (Rozdziel proporcjonalnie do zobowiązań).
11. Trzej przemysłowcy włożyli we wspólny interes handlowy: pierwszy 12.000 *zł*, drugi 30.000 *zł*, trzeci 7500 *zł*. Jak podzielili się zyskiem, który wynosił 6435 *zł*? (Rozdziel proporcjonalnie do włożonych kwot).
12. Czterech przemysłowców włożyło we wspólne przedsiębiorstwo: pierwszy 7200 *zł*, drugi 7500 *zł*, trzeci 8000 *zł* i czwarty 9100 *zł*. Jak należy podzielić między nich stratę, która wynosi 1272 *zł*? (Rozdziel proporcjonalnie do włożonych kwot).
13. Trzej kupcy włożyli we wspólny interes jednakowe kapitały. Jak mają podzielić się zyskiem 12835 *zł*, jeżeli kapitał pierwszego kupca był w obrocie 1 rok, drugiego $1\frac{1}{2}$ roku, a trzeciego $2\frac{1}{2}$ lat? (Rozdziel proporcjonalnie do czasu).
14. Czterej robotnicy zarobili razem 232 *zł* 50 *gr*; ile zarobił każdy z nich, jeżeli pierwszy pracował 6 dni, drugi i trzeci po 8 dni, czwarty zaś 9 dni? (Zarobki są proporcjonalne do dni pracy).

Obliczanie kapitału, czasu oprocentowania, stopy procentowej.

Kapitał.

Jaki kapitał, pożyczony na 4 lata na 9%, przyniósł 2340 *zł* dochodu?

Rozwiązanie: Niechaj szukany kapitał wynosi x *zł*. Jeżeli 1 *zł* przynosi 9 *gr* $= \frac{9}{100}$ *zł* dochodu na rok, to x *zł*

przyniesie $\frac{9}{100} \cdot x$ *zł* dochodu na rok; zatem x *zł* przyniesie za 4 lata $4 \cdot \frac{9}{100}\, x$ *zł* dochodu. A więc:

$$(1) \qquad 4 \cdot \tfrac{9}{100}\, x = 2340.$$

Stąd po rozwiązaniu otrzymamy:

$$x = 6500.$$

Kapitał szukany wynosi więc 6500 *zł*.

Uwaga. Równanie (1) możemy otrzymać, podstawiając we wzorze str. 36.

$$D = \tfrac{1}{100}\, KPL$$

dane zadania, a w miejsce litery K literę x. Podstawiając, znajdziemy:

$$2340 = \tfrac{1}{100} \cdot x \cdot 9 \cdot 4.$$

Zadania.

1. Rozwiąż *a)* przy pomocy równań, *b)* przy pomocy reguły trzech, zadania:
   Jaki kapitał oddany

a)	na 5%	przyniesie	po 4 latach	2462 *zł*	dochodu
b)	„ 6%	„	„ 2 „	660 *zł*	„
c)	„ $7\frac{1}{2}$%	„	„ 4 miesiącach	65 *zł*	„
d)	„ 8%	„	„ 5 „	120 *zł*	„
e)	„ $4\frac{1}{2}$%	„	„ 4 „	117 *zł* 78 *gr*	„
f)	„ 12%	„	„ 5 „	423 *zł*	„
g)	„ $3\frac{1}{2}$%	„	„ 45 dniach	14 *zł*	„
h)	„ $5\frac{1}{2}$%	„	„ 105 „	77 *zł*	„
i)	„ 8%	„	od 3/III do 29/X	134 *zł*	„
j)	„ 9%	„	miesięcznie	750 *zł*	„
k)	„ 11%	„	po 2 latach 11 mies.	14341 *zł* 25 *gr*	„

2. Majątek ziemski przynosi rocznie 12.750 *zł* dochodu; jaki kapitał, umieszczony na 8%, przyniesie ten sam dochód?
3. Kapitał *a)* 3240 *zł*, *b)* 7004 *zł* pożyczono na pewien czas na *a)* 8%, *b)* 9%; jaki kapitał, oddany na *a)* 6%, *b)* 8·5%, przyniesie w tym samym czasie ten sam dochód? (Rozwiąż przy pomocy reguły trzech).
4. Kapitał *a)* 8040 *zł*, *b)* 1134 *zł* pożyczono na pewien czas na *a)* 9%, *b)* $8\frac{1}{2}$%; na jaki procent należy oddać kapitał *a)* 10.800 *zł*, *b)* 1071 *zł*, aby w tym samym czasie przyniósł ten sam dochód? (Rozwiąż przy pomocy reguły trzech).

5. Kapitał *a)* 6184 *zł*, *b)* 5160 *zł* oddano na *a)* 5 lat, *b)* $4\frac{1}{2}$ lat na pewien procent; jaki kapitał, oddany na *a)* 8 lat, *b)* $6\frac{3}{4}$ lat, na ten sam procent, przyniesie ten sam dochód? (Rozwiąż przy pomocy reguły trzech).
6. Kapitał *a)* 1480 *zł*, *b)* 558 *zł* oddano na *a)* 6 lat, *b)* $5\frac{1}{2}$ lat na pewien procent; na ile lat na ten sam procent trzeba pożyczyć kapitał *a)* 1620 *zł*, *b)* 396 *zł*, aby otrzymać ten sam dochód?

Czas oprocentowania.

W jakim czasie kapitał 3610 *zł*, oddany na 9%, przyniesie 1949·4 *zł* dochodu?

Rozwiązanie. Niechaj x oznacza liczbę lat oprocentowania.

Kapitał 3610 *zł* przyniesie po jednym roku dochodu: $3610 \cdot \frac{9}{100}$ *zł*; zatem po x latach przyniesie w *zł* dochodu:

$$3610 \cdot \tfrac{9}{100} \cdot x.$$

A więc

$$(2) \qquad 3610 \cdot \tfrac{9}{100} \cdot x = 1949{\cdot}4.$$

Stąd po rozwiązaniu otrzymamy $x = 6$.

Zatem po 6 latach przyniesie kapitał żądany dochód.

Uwaga. Równanie (2) możemy otrzymać, podstawiając we wzorze:

$$D = \tfrac{1}{100} K \cdot P \cdot L$$

dane zadania, a w miejsce litery L literę x.

Podstawiając, znajdziemy:

$$1949{\cdot}4 = \tfrac{1}{100}\, 3610 \cdot 9 \cdot x.$$

Zadania.

Rozwiąż *a)* przy pomocy równań, *b)* przy pomocy reguły trzech, zadania 1 i 2.

1. W jakim czasie:

a) 1248 *zł*	oddane na	8%	dadzą	37 *zł* 34 *gr*	dochodu
b) 7584 *zł*	„	$9\frac{1}{2}$%	„	330 *zł* 2 *gr*	„
c) 3600 *zł*	„	8%	„	480 *zł*	„
d) 1168 *zł*	„	5%	„	1203 *zł* 9 *gr*	„
e) 1640 *zł*	„	6%	„	2132 *zł*	„
f) 465 *zł*	„	9%	„	167 *zł* 40 *gr*	„
g) 4275 *zł*	oddane na	6%	dadzą	5044 *zł* 50 *gr*	dochodu
h) 7310 *zł*	„	8%	„	804 *zł* 10 *gr*	„

2. W jakim czasie kapitał:

a) 1200 *zł*	oddany na	5%	ma	wartość końcową	1440 *zł*
b) 1650 *zł*	„	8%	„	„	1705 *zł*
c) 2144 *zł*	„	9%	„	„	2168 *zł* 21 *gr*
d) 5940 *zł*	„	$9\frac{1}{2}$%	„	„	8197 *zł* 20 *gr*

3. Ktoś wypożyczył 3500 *zł* na 6% na 2 lata; w jakim czasie otrzymałby ten sam dochód, gdyby wypożyczył swój kapitał na 8%?
4. Pewien kapitał oddano na *a)* 6%, *b)* $7\frac{1}{2}$% na *a)* 9 lat, *b)* $8\frac{1}{2}$ lat; na jaki procent trzeba ten kapitał umieścić, aby po *a)* 8 latach, *b)* 5 latach przyniósł ten sam dochód? (Rozwiąż przy pomocy reguły trzech).
5. Pewien kapitał oddano na *a)* 10%, *b)* $12\frac{1}{2}$% na *a)* $4\frac{1}{2}$ lat, *b)* 6 lat; w ilu latach ten kapitał przyniesie ten sam dochód, jeśli przyjmiemy, że oddany był na *a)* 9%, *b)* 12%? (Rozwiąż przy pomocy reguły trzech).

Stopa procentowa.

Na jaki procent pożyczono kapitał 3500 *zł*, jeśli po 4 latach przyniósł 840 *zł* dochodu?

Rozwiązanie: Oznaczmy przez x szukany procent.

1 *zł* przyniesie po roku x $gr = \frac{x}{100}$ *zł* dochodu, zatem 3500 *zł* przyniesie po roku dochodu: $3500 \cdot \frac{x}{100}$ *zł*, a po 4 latach $4 \cdot 3500 \cdot \frac{x}{100}$ *zł*, zatem

$$(3) \qquad 4 \cdot 3500 \cdot \frac{x}{100} = 840.$$

Stąd $x = 6$.

A więc kapitał pożyczono na 6%.

Uwaga. Równanie (3) możemy otrzymać, podstawiając we wzorze:

$$D = \tfrac{1}{100} K \cdot P \cdot L$$

dane zadania, a w miejsce litery P literę x.

Podstawiając, znajdziemy:

$$840 = \tfrac{1}{100}\, 3500 \cdot x \cdot 4.$$

Zadania.

Zadania 1 i 2 rozwiąż przy pomocy równań i przy pomocy reguły trzech.

1. Przy jakim procencie:

a) Kapitał	2460 *zł*	da po	3 latach	405 *zł* 90 *gr* dochodu
b) „	9725 *zł*	„ „	9 miesiącach	291 *zł* „
c) „	2280 *zł*	„ „	21 dniach	3 *zł* 99 *gr* „
d) „	5184 *zł*	„ „	100 „	57 *zł* 60 *gr* „
e) „	6440 *zł*	„ „	3 miesiącach	48 *zł* 30 *gr* „
f) „	2150 *zł*	„ „	3 lt. i 4 mies.	430 *zł* „
g) „	1000 *zł*	„ „	10 latach	1000 *zł* „

2. Przy jakim procencie:

a) Kapitał	5600 *zł*	ma po	5 latach	wartość końc. 6760 *zł*
b) „	2000 *zł*	„ „	3 lt. i 4 mies.	„ „ 2300 *zł*
c) „	9725 *zł*	„ „	9 mies.	„ „ 10.016 *zł* 75 *gr*
d) „	5400 *zł*	„ „	5 latach	„ „ 6642 *zł*
e) „	425 *zł* 50 *gr*	„ „	4 latach	„ „ 476 *zł* 56 *gr*

3. Kupiec zaciągnął 7 kwietnia pożyczkę 1300 *zł* i zobowiązał się wypłacić za nią 7 sierpnia 1332 *zł* 50 *gr*; na jaki procent wziął pożyczkę?
4. Na jaki procent trzeba oddać 1 *zł*, aby jego wartość końcowa po $12\frac{1}{2}$ latach wynosiła 2 razy tyle, t. j. 2 *zł*?
6. Pewien kapitał, oddany na *a)* 8%, *b)* $7\frac{1}{2}$%, przyniósł po pewnym czasie *a)* 645 *zł*, *b)* 585 *zł* dochodu; na jaki procent należy ten kapitał umieścić, aby w tym samym czasie przyniósł *a)* 774 *zł*, *b)* 624 *zł* dochodu? (Rozwiąż przy pomocy reguły trzech).
7. Pewien kapitał, oddany na *a)* 11%, *b)* $10\frac{1}{2}$%, przyniósł po pewnym czasie *a)* 1034 *zł*, *b)* 903 *zł* dochodu; jaki dochód w tym samym czasie da ten kapitał, jeśli będzie umieszczony na *a)* 9%, *b)* $10\frac{3}{4}$%? (Rozwiąż przy pomocy reguły trzech).

Rabat, brutto, skonto, prowizja.

Zadania.

1. Arkusz papieru kosztuje 4 *gr*. Przy zakupnie 100 arkuszy daje kupiec 10%, przy zakupnie 500 arkuszy 12%, a przy zakupnie 1000 arkuszy 15% rabatu; ile należy zapłacić za 100, za 500, za 1000 arkuszy papieru?

2. Kupiec sprzedał 84 *m* sukna za 1108 *zł* 80 *gr*, dając 12% rabatu; po ile sprzedawał kupiec 1 *m* tego sukna bez rabatu?
3. Kupiec sprzedał 120 *l* wina, którego litr kosztował 6 *zł*, z pewnym rabatem za 669 *zł* 60 *gr*; ile % wynosił rabat?
4. Kupiec zakupił kawy i herbaty, za które to ilości miał zapłacić równe ceny. Na kawie otrzymał 5%, a na herbacie 8% rabatu. Razem zapłacił 2618 *zł*; ile *zł* zapłaciłby bez rabatu?
5. Księgarz zakupił 150 czytanek polskich, 120 niemieckich, 90 francuskich. Cena czytanki polskiej była $1\frac{1}{2}$ razy większa niż niemieckiej, a francuskiej była równa cenie czytanki niemieckiej. Otrzymawszy na czytankach polskich 30%, na niemieckich 20%, a na francuskich 25% rabatu, zapłacił za wszystko 642 *zł*; ile kosztuje czytanka polska?
6. Obliczyć wagę netto, jeżeli waga brutto wynosi 20 *kg*, a tara $4\frac{1}{2}$%!
7. Obliczyć wagę brutto, jeżeli waga netto wynosi 18 *kg*, a tara 15%!
8. Ile procent wynosi tara, jeżeli waga brutto wynosi 30 *kg*, a waga netto 27·45 *kg*?
9. Jeżeli ktoś kupuje towar w większej ilości, to otrzymuje opust na cenie, który nazwaliśmy rabatem. Należności za towar czasami nie płaci się natychmiast gotówką, ale dopiero po kilku miesiącach. Jeżeli ktoś jednak płaci gotówką, to otrzymuje na cenie towaru opust, który nazywa się skontem. Np. ktoś zakupił 20 *t* węgla po 75 *zł* za tonnę, a ponieważ płacił gotówką, zapłacił o 150 *zł* mniej. W tym wypadku skonto wynosi 150 *zł*; ile % ceny węgla wynosi skonto?
10. Ktoś zakupił 40 tonn węgla po 72 *zł* za tonnę. Ponieważ płacił gotówką, zapłacił o 280 *zł* mniej; ile % ceny węgla wynosi skonto?
11. Przy zakupnie towaru za 4350 *zł*, za który płacono gotówką, otrzymano $8\frac{1}{2}$% skonta; ile zapłacono za towar?
12. Handlarz zakupił żelaza za 16.500 *zł* i zapłacił natychmiast gotówką tylko 15.427 *zł* 50 *gr*; ile % skonta otrzymał?
13. Kupiec zakupił kawy i za 2 razy większą kwotę herbaty. Otrzymawszy na kawie 6%, a na herbacie 4% skonta, zapłacił za cały towar gotówką 1120 *zł*; ile zapłacił za kawę, a ile za herbatę?
14. W pace wysłano 80 *kg* owoców; ile waży paka, jeżeli

opłata za przesyłkę 1 *kg* wynosi 16 *gr*, opłacono zaś 15 *zł* 20 *gr*?

15. Towar waży 2332 *kg* brutto, tara zaś wynosi 6%; ile należy zapłacić za ten towar, jeżeli 1 *kg* towaru netto kosztuje 72 *gr*, rabat zaś wynosi $2\frac{3}{4}\%$?
16. Pośrednik pobiera za sprzedanie towaru 8‰ prowizji (t. j. wynagrodzenia za pośrednictwo); ile *zł* otrzyma, gdy za jego pośrednictwem sprzedano towaru za 25.000 *zł*?
17. Wór kawy waży wraz z opakowaniem 120 *kg* i kosztuje bez cła 896 *zł* 80 *gr*. Opłata celna za 1 *kg* kawy wynosi 40 *gr*. Po opłaceniu cła cena 1 *kg* kawy wynosi 7 *zł* 60 *gr*; ile % wagi brutto wynosi tara?
18. Kupiec sprowadził z Zaleszczyk w skrzyniach 300 *kg* moreli, które go kosztowały bez opłaty przewozowej 750 *zł*. Przewozowe, które kosztowało za 1 *kg* o 2 *zł* 14 *gr* mniej, niż kosztował 1 *kg* moreli, wyniosło 126 *zł*; ile % ciężaru brutto ważyły skrzynie?
19. Za ubezpieczenie towaru zapłacił kupiec 26 *zł* 25 *gr*, t. j. $1\frac{3}{4}\%$ wartości towaru; oblicz wartość towaru!
20. Kupiec sprowadził 10 skrzyń kawy, z których każda ważyła 40 *kg* brutto. Tara wynosiła 10% wagi brutto; ile zapłaci za kawę, jeżeli przewozowe za 1 *kg* (brutto) wynosi 35 *gr*, a otrzymał 6% rabatu z ceny 20 *zł* za 1 *kg*?
21. Kupiec zakupił 460 *kg* winogron po 2 *zł* 40 *gr* za 1 *kg*, a płacąc gotówką, otrzymał 5% skonta. Zepsuło się 12% winogron; po czemu ma sprzedawać 1 *kg*, jeżeli chce zarobić 16% włożonej gotówki?
22. Skrzynia pomarańcz kosztowała 200 *zł*, a koszta przewozu wyniosły 40 *zł*. 8% pomarańcz okazało się zepsutych, a na reszcie zarobił kupiec 36 *zł*, sprzedając sztukę po 60 *gr*; ile pomarańcz zawierała skrzynia?
23. Za ubezpieczenie zboża na wypadek gradobicia zapłacono 120 *zł* tak zwanej premji, liczonej jako $\frac{3}{4}\%$ wartości zboża; jak wysoko oszacowano zboże?
24. Ajent handlowy w Wilnie sprzedał na rachunek fabrykanta w Poznaniu narzędzia rolnicze. Po odciągnięciu komisowego, wynoszącego 7%, przesłał mu 11.552 *zł*; za jaką kwotę sprzedał narzędzia?
25. Kupiec sprowadził towaru za 1200 *zł*, przyczem otrzymał 6% skonta, ponieważ płacił gotówką. Koszta przewozu wyniosły 88 *zł*, a pośrednikowi zapłacił 30 *zł*. Połowę towaru sprzedał za 640 *zł*; za ile musi sprzedać drugą połowę, jeżeli chce zarobić 20% wyłożonych pieniędzy?

Stopy.

Określenie:

Zawartość szlachetnych metali, t. j. platyny, złota lub srebra w stopach (otrzymanych przez stopienie szlachetnego metalu z innemi metalami), określamy **próbą**. Próba jest to iloraz (stosunek) liczby wyrażającej w *g* ciężar szlachetnego metalu, zawartego w danym stopie i liczby wyrażającej w *g* ciężar całego stopu.

Np. Stop, zawierający 18 *g* czystego srebra i 2 *g* miedzi, jest srebrem próby $\frac{18}{18+2} = \frac{18}{20} = 0{\cdot}9$.

Ponieważ przy danej próbie ciężar szlachetnego metalu jest wprost proporcjonalny do ciężaru stopu, więc 1 *g* srebra próby 0·9 zawiera 0·9 *g* czystego srebra. Znając ciężar stopu i próbę możemy obliczyć ciężar metalu szlachetnego, zawartego w stopie.

Np. Ile czystego srebra zawiera 680 *g* srebra próby 0·875?

Ponieważ 1 *g* stopu zawiera 0·875 *g* czystego srebra, więc 680 *g* stopu zawiera 0·875 . 680 *g* czystego srebra, czyli 595 *g* czystego srebra.

Zadania.

1. Jakiej próby są stopy, zawierające: *a)* 6·3 *g* czystego srebra i 2·7 *g* miedzi; *b)* 45 *g* czystego złota i 9 *g* miedzi; *c)* 52 *g* czystego srebra i 12 *g* miedzi?
2. Ile czystego srebra znajduje się w stopie, który waży: *a)* 845 *g*, *b)* 0·65 *kg*, *c)* 0·712 *kg*, a jest próby: *a)* 0·76, *b)* 0·85, *c)* 0·68?
3. Karat równa się $\frac{1}{24}$ i służy (w systemie niemetrycznym) do wyrażania, ile *g* czystego złota przypada na 24 *g* stopu. Np. 14-karatowe złoto zawiera 14 *g* czystego złota i 10 *g* innych metali (miedzi). Jakiej próby jest złoto: *a)* 14-, *b)* 16-, *c)* 18-karatowe?
4. Stopiono razem 32 *g* srebra próby 0·825, 40 *g* próby 0·85 i 75 *g* próby 0·924; jakiej próby będzie nowy stop?

5. Stopiono razem 83 *g* złota próby 0·75, 42 *g* próby 0·82 i 25 *g* czystego złota; jakiej próby będzie nowy stop?
6. Srebro próby 0·815 stopiono ze srebrem próby 0·935 i otrzymano 300 *g* stopu próby 0·892; ile srebra próby 0·815 i próby 0·935 w tym celu wzięto?

   Rozwiązanie: Jeżeli przez x oznaczymy liczbę g srebra próby 0·935, to $(300 - x)$ g waży srebro próby 0·815. Czystego srebra jest razem: $x \cdot 0{\cdot}935 + (300 - x) \cdot 0{\cdot}815$ gramów. W nowym stopie jest srebra: $300 \cdot 0{\cdot}892$ gramów. Zatem:

   $$x \cdot 0{\cdot}935 + (300 - x)\ 0{\cdot}815 = 300 \cdot 0{\cdot}892.$$

7. Stopiono razem złota próby 0·825, 0·85 i 0·924 i otrzymano 147 *g* złota próby 0·882; wiedząc że złota próby 0·825 wzięto 32 *g*, oblicz, ile wzięto złota próby 0·85 i 0·924.
8. Ile czystego srebra trzeba dodać do 408 *g* srebra próby 0·845, aby otrzymać srebro próby 0·96?

   Rozwiązanie: Jeśli przez x oznaczymy liczbę g czystego srebra, to razem jest czystego srebra: $x + 408 \cdot 0{\cdot}845$ gramów. Ponieważ nowy stop waży $x + 408$ gramów, więc czyste srebro w nim zawarte waży: $(x + 408) \cdot 0{\cdot}96$ gramów. Zatem:

   $$x + 408 \cdot 0{\cdot}845 = (x + 408) \cdot 0{\cdot}96.$$

9. Ile *g* czystego srebra należy dodać do 800 *g* srebra próby 0·835, aby otrzymać stop próby 0·9?
10. Ile *g* czystej miedzi należy dodać do złota próby 0·84, aby otrzymać stop próby 0·75?
11. Dzwony leją ze stopu, który zawiera 390 *kg* miedzi, 110 *kg* cyny, 5 *kg* cynku i 4 *kg* ołowiu; ile *kg* każdego z tych metali potrzeba do dzwonu, który waży 1600 *kg*? (Podziel 1600 proporcjonalnie do liczb 390, 110, 5, 4).
12. Do odlewu rzeźb używa się bronzu, który zawiera 26 *kg* miedzi, 2 *kg* cyny, 1 *kg* cynku i 1 *kg* ołowiu; ile *kg* każdego z tych metali użyto przy odlewie rzeźby wagi 2000 *kg*?

G E O M E T R J A

Obwody i pola.

Obwody.

Zadania.

1. Oblicz obwód kwadratu o boku: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 3·24 *m*, *c)* $4\frac{3}{5}$ *km*!
2. Oblicz bok kwadratu, którego obwód wynosi: *a)* $21\frac{3}{4}$ *cm*, *b)* 15·48 *dm*, *c)* $18\frac{1}{16}$ *km*!
3. Ogrodzono plac w kształcie kwadratu o boku: *a)* 28 *m*, *b)* 31·5 *m*, *c)* $29\frac{3}{4}$ *m* płotem, którego 1 *m* kosztował: *a)* 4 *zł*, *b)* 4·5 *zł*, *c)* $4\frac{1}{4}$ *zł*; ile kosztowało całe ogrodzenie?
4. Pole w kształcie kwadratu można obejść w 1·7 minutach, przyjmując, że idzie się z prędkością 4·5 *km* na godzinę; oblicz długość boku tego kwadratu!
5. Oblicz obwód prostokąta o bokach: *a)* 8 *cm* i $5\frac{3}{4}$ *cm*, *b)* 6·25 *m* i 8·5 *m*, *c)* $5\frac{3}{4}$ *km* i $6\frac{7}{8}$ *km*!
6. Obwód prostokąta wynosi: *a)* $35\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 38·4 *m*, *c)* $41\frac{3}{10}$ *dm*, jeden zaś z boków: *a)* 7 *cm*, *b)* 10·75 *m*, *c)* $11\frac{2}{5}$ *dm*; oblicz długość drugiego boku!
7. Ogród w kształcie prostokąta o wymiarach 30 *m* i 40 *m* obwiedziono ścieżką na 2 *m* szeroką; jaki jest zewnętrzny obwód tej ścieżki? Rysunek w skali 1 : 500!
8. Ogrodzenie ogrodu w kształcie prostokąta, którego jeden bok wynosi 58 *m*, kosztowało 988 *zł*, przyczem za 1 *m* ogrodzenia płacono 4·75 *zł*; jak długi jest drugi bok?
9. Obwód kwadratu równa się obwodowi prostokąta o wymiarach 4·5 *m* i 6 *m*; oblicz bok tego kwadratu! Rysunek w skali 1 : 100!
10. Oblicz obwód prostokąta o wymiarach 4 *km* i 5 *km*, a następnie obwody tych prostokątów, które przedstawiają jego plan w skali: 1 : 10, 1 : 25, 1 : 50, 1 : 200, 1 : 500, 1 : 1000. Porównaj te obwody z obwodem danego prostokąta! Co zauważysz?

11. Oblicz obwód trójkąta równobocznego o boku: *a)* $7\frac{3}{4}$ *cm*, *b)* 8·76 *m*, *c)* $3\frac{5}{8}$ *km*!
12. Oblicz obwód sześciokąta umiarowego o boku: *a)* $5\frac{1}{8}$ *dm*, *b)* 9·64 *km*, *c)* $4\frac{3}{20}$ *cm*!
13. Oblicz obwód wielokąta umiarowego, którego bok wynosi 8 *cm*, a w którym liczba boków wynosi: *a)* 5, *b)* 7, *c)* 10, *d)* 20.
14. Oblicz obwód koła, którego promień równa się: *a)* 4 *cm*, *b)* $1\frac{1}{4}$ *m*, *c)* 2·25 *dm*, przyjmując $\pi = 3{\cdot}14$.
15. Oblicz promień koła, którego obwód wynosi: *a)* 18·84 *cm*, *b)* 5 *dm*, *c)* $2\frac{1}{8}$ *m*!
16. Jedno z kół samochodu wykonało podczas jazdy z miasta *A* do miasta *B* 60.000 obrotów; jaka jest odległość tych miast, jeżeli promień koła wynosi 33 *cm*?
17. Obwód wielkiego koła u wozu wynosi 3 *m*. Gdy wóz porusza się, mniejsze koło wykonuje 4 obroty, a większe równocześnie 3 obroty; *a)* jaki jest obwód koła mniejszego? *b)* jaki jest jego promień?
18. Duża wskazówka zegara ma 2 *cm*, mała 14 *mm*, a ta, która wskazuje sekundy 6 *mm*. Jaką drogę opisze koniec każdej z tych wskazówek w ciągu: *a)* doby, *b)* tygodnia, *c)* roku?
19. Wycinek koła o promieniu 3 *cm* należy do kąta: *a)* 60°, *b)* 120°, *c)* 30°; jaka jest długość łuku, na którym ten wycinek się opiera? Jaki jest promień koła, którego obwód równa się długości tego łuku? Rysunek!
20. Obwiązano paczkę w kształcie prostopadłościanu wzdłuż i wszerz sznurkiem. Długość tej paczki wynosiła 60 *cm*, szerokość $\frac{7}{12}$ długości, wysokość zaś $\frac{4}{5}$ szerokości; jak długi musiał być sznurek, jeśli 9 *cm* liczymy na węzeł?

Pola.

Zadania.

1. Oblicz pole kwadratu o boku: *a)* $3\frac{1}{2}$ *m*, *b)* $5\frac{3}{4}$ *cm*, *c)* 2·4 *dm*, *d)* 0·2 *cm*!
2. Ile wynosi bok kwadratu, którego pole wynosi: *a)* 16 m^2, *b)* 25 dm^2, *c)* 81 cm^2, *d)* 1 *a*, *e)* 1·44 *a*?
3. Stół kwadratowy o boku 0·9 *m* przykryty jest serwetą,

która zwisa dookoła stołu na szerokość 0·25 *m*; jakie jest pole tej serwety?
4. Oblicz pole prostokąta o wymiarach: *a)* $5\frac{1}{2}$ *m* i $4\frac{3}{4}$ *m*, *b)* 2·4 *dm* i 5·8 *dm*, *c)* $6\frac{5}{8}$ *km* i $7\frac{1}{25}$ *km*!
5. Jaka jest wysokość prostokąta, w którym podstawa równa się: *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 4·5 *dm*, *c)* $4\frac{1}{5}$, *m*, *d)* $\frac{7}{4}$ *m*, *e)* 2·4 *m*, a którego pole wynosi: *a)* $17\frac{1}{2}$ cm^2, *b)* 14·4 dm^2, *c)* $15\frac{9}{40}$ m^2, *d)* 0·7 m^2, *e)* 0·6 m^2?
6. Jak długi jest bok kwadratu, którego pole równa się polu prostokąta o wymiarach: *a)* 4 *cm* i 9 *cm*, *b)* 9 *cm* i 16 *cm*?
7. Zamieniono pole w kształcie prostokąta o wymiarach 156 *m* i 75 *m*, w cenie 3·75 *zł* za 1 m^2, na pole w cenie 2·5 *zł* za 1 m^2; ile pola na zamianie zyskano?
8. W ogrodzie w kształcie prostokąta, o polu 10·08 *a*, przeprowadzono równolegle do dłuższego boku drogę na 2·5 *m* szeroką, wskutek czego uprawna część ogrodu zmniejszyła się o 1·05 *a*; jakie były wymiary ogrodu?
9. Dookoła ogrodu w kształcie prostokąta biegnie ścieżka 0·85 *m* szeroka. Pole tego placu (ogrodu wraz z ścieżką) wynosi 37·96 *a*, długość zaś 73 *m*; jakie jest pole tej ścieżki?
10. Oblicz pole równoległoboku, którego podstawa wynosi: *a)* 3 *m*, *b)* 4·6 *m*, *c)* $2\frac{3}{4}$ *dm*, wysokość zaś: *a)* $1\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 3·64 *m*, *c)* $1\frac{1}{8}$ *dm*!
11. Ile wynosi podstawa równoległoboku, którego pole wynosi: *a)* $22\frac{1}{2}$ cm^2, *b)* 36·72 dm^2, *c)* $43\frac{1}{8}$ m^2, wysokość zaś: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 5·4 *dm*, *c)* $5\frac{3}{4}$ *m*?
12. Ile wynosi wysokość równoległoboku, którego pole wynosi: *a)* $6\frac{3}{5}$ dm^2, *b)* 115·5 m^2, *c)* $85\frac{1}{2}$ km^2, *d)* 2·8 cm^2, *e)* $\frac{5}{8}$ m^2, podstawa zaś: *a)* 3 *dm*, *b)* 15·4 *m*, *c)* $11\frac{1}{4}$ *km*, *d)* 3·5 *cm*, *e)* 1·6 *m*?
13. Przez pole w kształcie równoległoboku, o podstawie 85·6 *m* i wysokości 62·5 *m*, poprowadzono równolegle do podstawy drogę na 2·6 *m* szeroką, resztę zaś sprzedano po 55 *zł* za ar; jaką kwotę ze sprzedaży uzyskano?
14. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego podstawa wynosi: *a)* 6 *cm*, *b)* 8·4 *dm*, *c)* $10\frac{3}{4}$ *m*, wysokość zaś: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 10·85 *dm*, *c)* $12\frac{1}{8}$ *m*!
15. Oblicz pole trójkąta, którego podstawa wynosi: *a)* 15 *m*,

b) 16·45 *dm*, *c)* $12\frac{5}{8}$ *km*, wysokość zaś: *a)* $14\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 18·55 *dm*, *c)* $14\frac{1}{4}$ *km*!

16. Jaka jest wysokość trójkąta, którego pole wynosi: *a)* 1 m^2, *b)* 1 *a*, *c)* 1 *ha*, podstawa zaś: *a)* $1\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 20·5 *m*, *c)* $175\frac{3}{4}$ *m*?
17. Pole w kształcie równoległoboku, o podstawie 128 *m* i wysokości 85 *m*, oceniono po 50 *zł* za 1 *a*. Pole to zamieniono na łąkę w kształcie trójkąta, licząc po 68 *zł* za 1 ar; jakie jest pole tej łąki? Ile wynosi podstawa, jeśli wysokość ma 100 *m*?
18. Oblicz pole rombu, w którym przekątne wynoszą: *a)* 4 *m* i 6 *m*, *b)* 8·4 *dm* i 6·8 *dm*, *c)* $4\frac{1}{2}$ *km* i $6\frac{3}{4}$ *km*! Rysunek: *ad a)* w skali 1 : 100, *ad b)* w skali 1 : 10, *ad c)* w skali 1 : 100.000!
19. Pole rombu wynosi: *a)* 20 cm^2, *b)* $14\frac{5}{8}$ cm^2, *c)* 35·1 cm^2, długość zaś jednej przekątnej: *a)* 5 *cm*, *b)* $6\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 5·2 *cm*; jak długa jest druga przekątna? Rysunek!
20. Pole rombu jest 3 razy większe od pola prostokąta o wymiarach 3·23 *m* i 2·7 *m*, jedna z przekątnych zaś wynosi 3·8 *m*; jak długa jest druga przekątna?
21. Oblicz pole trapezu, którego boki równoległe mają: *a)* 3 *m* i 5 *m*, *b)* 2·8 *dm* i 4·6 *dm*, *c)* $3\frac{1}{4}$ *cm* i $5\frac{3}{8}$ *cm*, wysokość zaś wynosi: *a)* $2\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 3·5 *dm*, *c)* $4\frac{1}{2}$ *cm*!
22. Pole trapezu wynosi: *a)* $39\frac{1}{8}$ cm^2, *b)* 0·388 *ha*, *c)* 1·815 *a*, boki zaś równoległe mają: *a)* 4 *cm* i $11\frac{1}{4}$ *cm*, *b)* 112·4 *m* i 81·6 *m*, *c)* $14\frac{1}{8}$ *m* i $16\frac{1}{8}$ *m*; oblicz wysokość trapezu!
23. Pole trapezu równoramiennego równa się 18·72 *a*, przyczem jeden z boków równoległych jest 2 razy większy od drugiego, wysokość zaś wynosi 48 *m*; oblicz długości boków równoległych! Rysunek w skali 1 : 1000!
24. Pole w kształcie trapezu sprzedano za 5760 *zł*, licząc po 48 *zł* za 1 *a*; wiedząc, że wysokość trapezu wynosiła 80 *m*, jeden zaś z boków równoległych miał 135 *m*, oblicz długość drugiego boku równoległego!
25. Narysuj sześciokąt umiarowy o boku 5 *cm*, zmierz odległość jego środka od boku, a następnie oblicz jego pole.
26. Przekątna czworokąta ma długość 157·4 *m* i dzieli ten czworokąt na 2 trójkąty, z których jeden ma wysokość 74·6 *m*, drugi zaś 96·4 *m*, przyczem wysokości te są prostopadłe do przekątnej; oblicz pole tego czworokąta! Rysunek w skali 1 : 500!

27. Oblicz pole koła, którego promień równa się: *a)* 3 *m*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 8·7 *cm*, *d)* $5\frac{3}{4}$ *dm*, przyjmując za liczbę π jednym razem $\frac{22}{7}$, drugim razem 3·14!
28. Oblicz pole pierścienia, zawartego między dwoma kołami spółśrodkowemi o promieniach: *a)* 6 *m* i 4 *m*, *b)* 4·6 *dm* i 2·8 *dm*, *c)* $5\frac{1}{4}$ *km* i $4\frac{1}{8}$ *km*!
29. Obwód koła wynosi: *a)* 8 *m*, *b)* 14·5 *dm*, *c)* $4\frac{2}{5}$ *cm*; oblicz jego pole!
30. Pole koła o promieniu 3·4 *cm* równa się polu prostokąta o podstawie 8 *cm*; jaka jest wysokość tego prostokąta?
31. W kwadrat o obwodzie 55 *dm* wpisano koło; oblicz jego pole! O ile jest ono mniejsze od pola kwadratu? Rysunek w skali 1 : 10!
32. Koło ma promień: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 5·8 *dm*, *c)* $6\frac{3}{4}$ *m*, łuk zaś na którym wycinek tego koła się opiera, ma długość: *a)* $6\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 8·4 *dm*, *c)* $10\frac{1}{8}$ *m*; oblicz pole wycinka!
33. Pole wycinka koła o promieniu: *a)* 5 *cm*, *b)* 7·5 *dm*; *c)* $8\frac{1}{2}$ *m* wynosi: *a)* 17·7 cm^2, *b)* 41·5 dm^2, *c)* $70\frac{1}{2}$ m^2; oblicz długość łuku, należącego do tego wycinka!
34. Pole wycinka koła wynosi: *a)* 15 cm^2, *b)* 52·4 dm^2, *c)* $48\frac{3}{4}$ m^2, łuk zaś, na którym ten wycinek się opiera, ma: *a)* 6 *cm*, *b)* 6·4 *dm*, *c)* $6\frac{1}{2}$ *m*; oblicz promień koła, do którego wycinek należy!
35. Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi: *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 5·8 *dm*, *c)* $14\frac{3}{8}$ *m*! Narysuj siatkę w odpowiedniej skali!
36. Oblicz krawędź sześcianu, którego pole równa się: *a)* 150 cm^2, *b)* 384 dm^2, *c)* 2·16 *a*!
37. Bryłę marmuru, w kształcie sześcianu o krawędzi 1·4 *m*, oszlifowano na całej powierzchni; ile zapłacono za tę pracę, jeśli za 1 m^2 płacono 8 *zł* 50 *gr*?
38. Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu o wymiarach: *a)* 2 *cm*, 5 *cm*, 8 *cm*; *b)* 3·4 *dm*, 5·8 *dm*, 6 *dm*; *c)* $4\frac{1}{2}$ *m*, $6\frac{1}{4}$ *m*, $7\frac{3}{8}$ *m*! Narysuj siatki w odpowiedniej skali!
39. Prostopadłościan, którego podstawa jest kwadratem o boku: *a)* 5 *cm*, *b)* 3·5 *cm*, ma pole: *a)* 130 cm^2, *b)* 103·25 cm^2; jak wysoki jest ten prostopadłościan?
40. Pokój ma 8 *m* długości, 4·5 *m* szerokości, a 4 *m* wysokości. Podłoga kosztowała po 15 *zł* za 1 m^2, tynkowanie zaś po 5 *zł* za 1 m^2; ile kosztowały razem podłoga i tynkowanie pokoju?

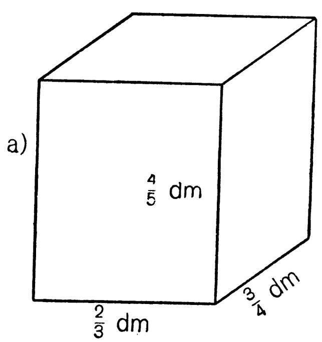
41. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego o wysokości 8 *cm*, którego podstawa jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych 4 *cm* i 5 *cm*. Narysuj siatkę!
42. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego o wysokości 6 *cm*, którego podstawa jest trójkątem równoramiennym, przyczem podstawa tego trójkąta ma $4\frac{1}{2}$ *cm*, wysokość zaś $5\frac{1}{2}$ *cm*. Brakujące wymiary znajdź przy pomocy rysunku i pomiaru!
43. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego (w skali 1 : 100) o wysokości $3\frac{3}{4}$ *m*, którego podstawa jest trójkątem równobocznym o boku 2 *m* i oblicz pole jego powierzchni, mierząc na siatce odległość środka trójkąta od boku.
44. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego (w skali 1 : 25) o wysokości 7·5 *dm*, którego podstawa jak sześciokątem umiarowym o boku 5 *dm* i oblicz pole jego powierzchni, mierząc na siatce odległość środka sześciokąta od boku!
45. Oblicz pole powierzchni walca prostego, którego podstawa jest kołem o promieniu: *a)* $4\frac{1}{2}$ *dm*, *b)* 8·6 *dm*, *c)* $9\frac{3}{4}$ *m*, a którego wysokość wynosi: *a)* 5 *dm*, *b)* 12·4 *dm*, *c)* $20\frac{1}{2}$ *m*. Narysuj siatkę w skali: *a)* 1 : 20, *b)* 1 : 100, *c)* 1 : 1000.
46. Pole pobocznicy walca wynosi: *a)* 15·7 dm^2, *b)* 36·424 *a*, *c)* 35·325 m^2, wysokość zaś walca: *a)* 2·5 *dm*, *b)* 40 *m*, *c)* $3\frac{3}{4}$ *m*; jaki jest promień podstawy walca?
47. Pole powierzchni walca wynosi: *a)* 125·6 cm^2, *b)* 357 dm^2, *c)* 486·7 m^2, promień zaś podstawy: *a)* 2 *cm*, *b)* $2\frac{1}{2}$ *dm*, *c)* 5 *m*; jaka jest wysokość walca?
48. Podstawa rury walcowej ma promień zewnętrzny 4 *cm*, wewnętrzny 3 *cm*, długość zaś rury wynosi 6 *cm*; oblicz pole powierzchni tej rury! Siatka!
49. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa umiarowego, którego podstawa jest trójkątem o boku 3 *cm*, przyczem wysokość trójkąta bocznego wynosi 5 *cm*. Siatka i model!
50. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa umiarowego, którego podstawa jest sześciokątem o boku 2 *cm*, przyczem wysokość trójkąta bocznego wynosi 6 *cm*. Siatka i model!
51. Pole powierzchni ostrosłupa umiarowego wynosi: *a)* $65\frac{1}{4}$ m^2, *b)* 23·25 dm^2, *c)* 63·84 cm^2, podstawa zaś jest kwadratem o boku: *a)* $4\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 2·5 *dm*, *c)* $4\frac{1}{5}$ *cm*; jaka jest wysokość trójkąta bocznego?
52. Namiot w kształcie ostrosłupa umiarowego ma za podstawę kwadrat o boku 2·5 *m*, wysokość zaś trójkąta bocznego wynosi 3·25 *m*; ile kosztowało płótno na ten namiot, jeśli za 1 m^2 płacono po 4 *zł* 50 *gr*?

53. Pokryto blachą dach w kształcie ostrosłupa umiarowego, którego podstawa jest kwadratem o boku 8·5 *m*, przyczem wysokość trójkąta bocznego równa się 10·25 *m*; ile kosztowało pokrycie, jeśli 1 *q* blachy kosztuje 135 *zł* i zawiera 40 arkuszy blachy po $\frac{1}{2}$ m^2 i jeśli nadto robocizna od 1 m^2 wynosi 1 *zł* 20 *gr*? Jaki jest ciężar blachy, pokrywającej dach?
54. Oblicz pole powierzchni stożka prostego, którego bok wynosi: *a)* 4 *dm*, *b)* $5\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 6·5 *m*, a którego promień podstawy ma: *a)* $\frac{1}{2}$ *dm*, *b)* $1\frac{1}{4}$ *m*, *c)* 1·6 *cm*.
55. Pobocznica stożka jest wycinkiem koła o promieniu 8 *cm*, przyczem wycinek ten zawiera kąt 120°; ile wynosi promień podstawy tego stożka? Siatka i model!
56. Oblicz pole powierzchni stożka, którego pobocznica jest wycinkiem koła o promieniu: *a)* 9 *cm*, *b)* 4 *dm*, *c)* $5\frac{1}{2}$ *m*, przyczem wycinek ten zawiera kąt: *a)* 90°, *b)* 135°, *c)* 180°.
57. Pole powierzchni stożka wynosi: *a)* 12·56 cm^2, *b)* 494 cm^2, *c)* 46·22 cm^2, promień zaś podstawy: *a)* 3 *cm*, *b)* $8\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 2·5 *cm*; jak długi jest bok stożka?
58. Z walca o długości 5 *cm*, którego podstawa jest kołem o promieniu 1·5 *cm*, wydrążono stożek tej samej długości i o tej samej podstawie; jakie jest pole powierzchni tak otrzymanej bryły? Narysuj jej siatkę!
59. Wieża o wysokości 30 *m* ma kształt walca, którego promień podstawy wynosi 2·75 *m*. Dach tej wieży jest stożkiem o boku 3·8 *m*; jakie jest pole powierzchni całej wieży?

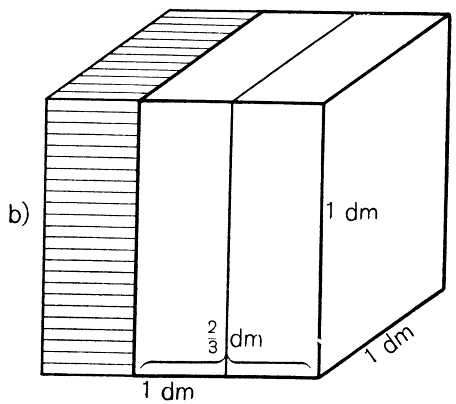
Objętości.

Objętość prostopadłościanu.

Mamy obliczyć objętość prostopadłościanu o wymiarach $\frac{2}{3}$ *dm*, $\frac{3}{4}$ *dm*, $\frac{4}{5}$ *dm* (rys. 26). Prostopadłościan ten możemy otrzymać w następujący sposób: podzielmy najpierw sześcian o boku 1 *dm* na 3 równe części, jak na rys. 27, i weźmy



Rys. 26.



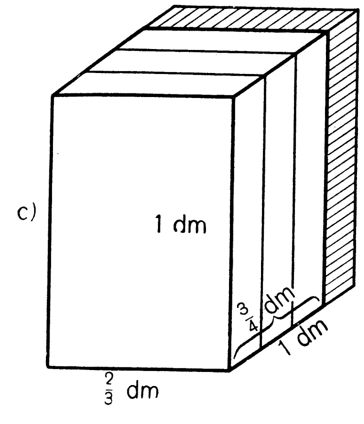
Rys. 27.

takich części 2. Otrzymany prostopadłościan podzielmy teraz na 4 równe części, jak na rys. 28, i weźmy takich części 3. Otrzymany wkońcu prostopadłościan podzielmy na 5 równych części, jak na rys. 29, i biorąc takich części 4, utworzymy nasz prostopadłościan. Sposób, w jaki można otrzymać nasz prostopadłościan, podaje nam również jeden rys. 30.

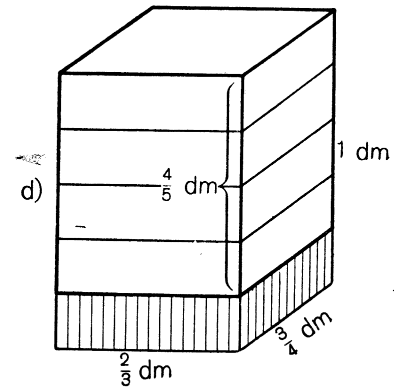
Sześcian rys. 27 ma objętość 1 dm^3. Prostopadłościan niezacieniowany rys. 27 ma objętość $\frac{2}{3}$ dm^3.

Prostopadłościan niezacieniowany rys. 28 ma objętość:

$$\tfrac{3}{4} \text{ z } (\tfrac{2}{3}\ dm^3) = (\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4})\ dm^3.$$



Rys. 28.

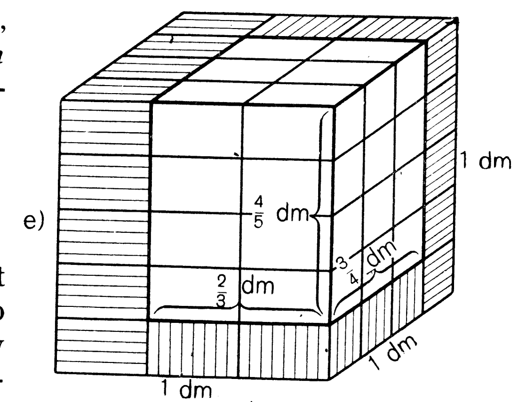


Rys. 29.

Nasz wreszcie prostopadłościan (niezacieniowany rys. 29) ma objętość $\frac{4}{5}$ z poprzedniego prostopadłościanu, t. j.:

$$\tfrac{4}{5} \text{ z } (\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4})\ dm^3 = (\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5})\ dm^3 = \tfrac{2}{5}\ dm^3.$$

A b y w i ę c o b l i c z y ć o b j ę t o ś ć p r o s t o p a d ł o ś c i a n u n p. w dm^3, n a l e ż y u t w o r z y ć i l o c z y n l i c z b, w y r a ż a j ą c y c h w *dm* w y m i a r y p r o s t o p a d ł o ś c i a n u.



Rys. 30.

Uwaga 1. Mamy:

$$\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5} = (\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4}) \cdot \tfrac{4}{5}.$$

Lecz $(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4})$ dm^2 jest to pole podstawy naszego prostopadłościanu. Możemy więc powiedzieć, że: o b j ę t o ś ć p r o s t o p a d ł o ś c i a n u w dm^3 o t r z y m a m y, m n o ż ą c l i c z b ę, w y r a ż a j ą c ą p o l e p o d s t a w y w dm^2 p r z e z l i c z b ę, w y r a ż a j ą c ą w y s o k o ś ć w *dm*.

Uwaga 2. Jeżeli liczby *a*, *b*, *c* wyrażają w *dm* wymiary prostopadłościanu, zaś *v* wyraża objętość w dm^3, wówczas:

$$v = a \cdot b \cdot c.$$

Zadania.

1. Sporządź model sześcianu, którego krawędź wynosi 5 *cm* i oblicz jego objętość!
2. Oblicz objętość sześcianu, którego krawędź wynosi:

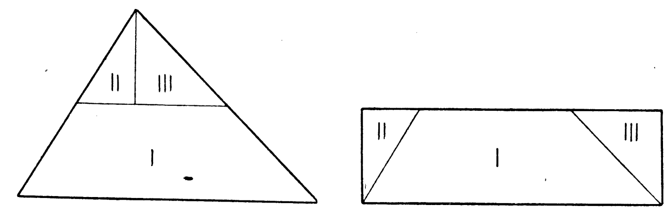
   a) $9\frac{4}{5}$ *cm*, *b)* 4·6 *m*, *c)* $8\frac{3}{8}$ *dm*.
3. Pudełko w kształcie sześcianu ma krawędź: *a)* 16 *cm*, *b)* 27 *cm*; ile zmieści się w nim sześcianów o krawędzi: *a)* 2 *cm*, *b)* 3 *cm*?
4. Jaki jest ciężar sześcianu o krawędzi 1·2 *m*, wykutego z granitu, którego 1 cm^3 waży 2·65 *g*?
5. Jak długa jest krawędź sześcianu, którego objętość wynosi: *a)* 8 cm^3, *b)* 27 dm^3, *c)* 125 m^3?
6. Ciało zanurzone w płynie traci pozornie tyle na swym ciężarze, ile waży płyn przez to ciało wyparty (t. zn. płyn tej samej objętości, co ciało). Jeżeli więc np. 1 dm^3 z mosiądzu wrzucimy do wody, to on w wodzie waży 8·5 *kg* — — 1 *kg* = 7·5 *kg*, gdyż 1 dm^3 mosiądzu w powietrzu waży 8·5 *kg*, a 1 dm^3 wody waży 1 *kg*.

   Sześcian z mosiądzu o krawędzi: *a)* 4 *cm*, *b)* 8·7 *cm*, *c)* $6\frac{3}{4}$ *cm* wrzucono do wody; ile waży ten sześcian w wodzie?
7. Sporządź model prostopadłościanu o wymiarach: $2\frac{1}{2}$ *cm*, 4 *cm*, 6 *cm* i oblicz jego objętość.
8. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach:

   a) 2 *cm*, $4\frac{1}{2}$ *cm*, $5\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 4·2 *dm*, 5·4 *dm*, 6 *dm*,
   c) $2\frac{1}{2}$ *m*, $4\frac{3}{5}$ *m*, 6 *m*, *d)* 5 *dm*, $4\frac{5}{8}$ *dm*, 9 *cm*.
9. Jaka jest wysokość prostopadłościanu, którego objętość wynosi: *a)* 140 cm^3, *b)* 33·12 dm^3, *c)* $81\frac{13}{16}$ m^3, a którego podstawa ma: *a)* 40 cm^2, *b)* 14·4 dm^2, *c)* $19\frac{1}{4}$ m^2?
10. Jak wysoką powinna być sala o długości 9 *m* i szerokości $4\frac{1}{2}$ *m*, jeśli ma mieścić 48 uczniów, przyczem liczymy po 4 m^3 powietrza na 1 osobę?
11. Jaki jest ciężar prostopadłościanu z ołowiu, którego 1 cm^3 waży 11·34 *g*, jeśli wymiary prostopadłościanu są: *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, 4 *cm*, $5\frac{3}{4}$ *cm*; *b)* 4·2 *cm*, 5·4 *cm*, 8 *cm*; *c)* $6\frac{3}{4}$ *cm*, $8\frac{1}{5}$ *cm*, 10 *cm*; ile straci pozornie ten prostopadłościan na ciężarze, jeżeli go całkiem zanurzymy w wodzie?
12. Kostka cukru ma wymiary 22 *mm*, 24 *mm*, 8 *mm*; oblicz, ile kostek cukru przypada na 1 *kg*, wiedząc, że 1 cm^3 cukru waży 1·6 *g*. Jaką objętość zajmuje 5 *kg* cukru?
13. Prostopadłościan z miedzi, wrzucony do wody, stracił pozornie 235 *g* na swym ciężarze. Jeśli podstawą tego prostopadłościanu był kwadrat o boku 5 *cm*, to jaka była długość tego prostopadłościanu? Ile waży 1 cm^3 miedzi, jeśli ten prostopadłościan ważył w wodzie 1863·55 *g*?

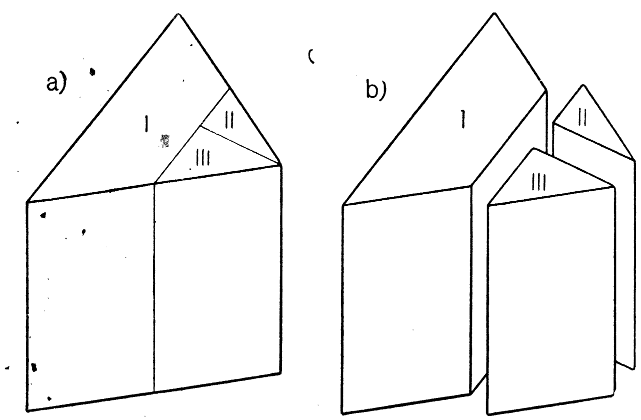
Objętość graniastosłupa prostego trójkątnego.

Na rys. 31 mamy przedstawione, w jaki sposób z trójkąta można utworzyć prostokąt o tem samem polu.

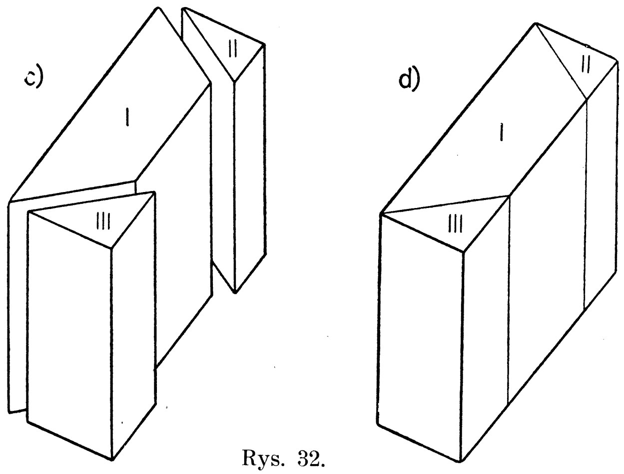


Rys. 31.

Rys. 32 *a, b, c, d* przedstawia nam, w jaki sposób można podobnie z graniastosłupa prostego o podstawie trójkątnej utworzyć prostopadłościan o równej podstawie i równej wysokości.



Rys. 32.



Rys. 32.

Widzimy stąd, że objętość graniastosłupa prostego o podstawie trójkątnej równa się objętości prostopadłościanu o tej samej podstawie i wysokości.

Aby więc obliczyć objętość np. w dm^3, graniastosłupa prostego o podstawie trójkątnej, należy pomnożyć liczbę, wyrażającą w dm^2 pole podstawy, przez liczbę, wyrażającą w dm wysokość.

Uwaga. Jeżeli p oznacza pole podstawy graniastosłupa prostego trójkątnego w dm^2, zaś w wysokość w dm, wówczas jego objętość v w dm^3 wyraża się wzorem:

$$v = p \cdot w.$$

Objętość graniastosłupa prostego

(o dowolnej podstawie).

Rys. 33 przedstawia nam, w jaki sposób można rozbić graniastosłup prosty o dowolnej podstawie na graniastosłupy proste o podstawach trójkątnych.

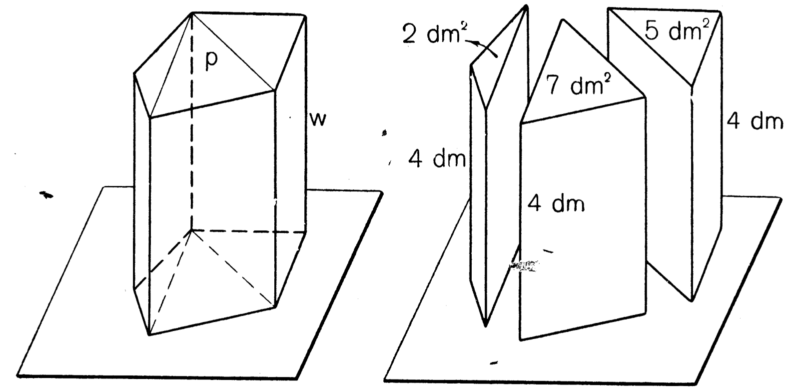
Przypuśćmy, że graniastosłupy trójkątne, na które rozbiliśmy nasz graniastosłup (rys. 33), mają odpowiednie podstawy: $2\,dm^2$, $7\,dm^2$, $5\,dm^2$; wspólna ich wysokość niech wynosi $4\,dm$.

Objętość zatem naszego graniastosłupa wyraża się w dm^3 liczbą:

$$(2 \cdot 4) + (7 \cdot 4) + (5 \cdot 4)$$

czyli:

$$(2 + 7 + 5) \cdot 4.$$



Rys. 33.

Wyrażenie w nawiasie przedstawia nam oczywiście w dm^2 pole podstawy danego graniastosłupa.

Aby zatem obliczyć objętość graniastosłupa prostego np. w dm^3, należy pomnożyć liczbę, wyrażającą w dm^2 pole podstawy, przez liczbę, wyrażającą w dm wysokość.

Jeżeli v oznacza objętość graniastosłupa prostego w dm^3, p pole podstawy w dm^2, w wysokość w dm, to:

$$v = p \cdot w.$$

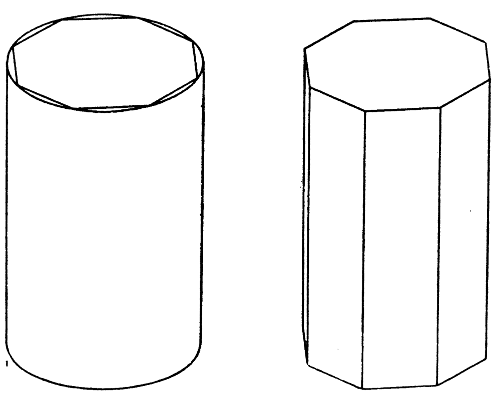
Zadania.

1. Sporządź model graniastosłupa prostego o wysokości $5\,cm$, którego podstawa jest trójkątem równobocznym o boku $2\,cm$; oblicz jego objętość, mierząc na modelu wysokość podstawy.
2. Sporządź model graniastosłupa prostego o wysokości $6\,cm$, którego podstawa jest sześciokątem umiarowym o boku $1\frac{1}{2}\,cm$; oblicz jego objętość, mierząc na modelu odległość środka podstawy od boku.
3. Graniastosłup prosty, zrobiony z drzewa dębowego, o wysokości $8\,cm$, ma za podstawę romb, w którym przekątne wynoszą $4\,cm$ i $3\,cm$; oblicz ciężar tego graniastosłupa, wiedząc, że $1\,cm^3$ drzewa dębowego waży $0{\cdot}7\,g$. W jaki sposób utworzyłbyś z tego graniastosłupa prostopadłościan o tej samej podstawie i wysokości?

4. Objętość graniastosłupa prostego wynosi: *a)* 1080 cm^3, *b)* 25 dm^3, *c)* $871\frac{7}{8}$ m^3, podstawa zaś: *a)* 135 cm^2, *b)* 6·25 dm^2, *c)* 5625 m^2; jaka jest wysokość tego graniastosłupa?
5. Objętość graniastosłupa prostego wynosi: *a)* 14·7 cm^3, *b)* $261\frac{27}{32}$ dm^3, *c)* 162·4 m^3, wysokość zaś: *a)* 7·5 *cm*, *b)* $9\frac{1}{2}$ *dm*, *c)* 8·5 *m*; jakie jest pole podstawy tego graniastosłupa?
6. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 7 *cm* jest czworokąt, w którym jedna przekątna wynosi 3 *cm* i dzieli go na 2 trójkąty o wysokościach 4·5 *cm* i 2 *cm*, przyczem ta przekątna jest wspólną podstawą; oblicz objętość tego graniastosłupa!
7. Rów ma kształt graniastosłupa prostego na 8 *m* długiego, którego podstawa jest trapezem równoramiennym o bokach równoległych 2 *m* i 3 *m*, przyczem wysokość trapezu równa się 1·8 *m*; oblicz ile *hl* wody ten rów pomieści.

Walec obrotowy.

Na rys. 34 mamy walec obrotowy. W koło, będące podstawą walca, wpiszmy wielokąt umiarowy o wielkiej liczbie bardzo małych boków. Na wielokącie tym, jako podstawie, zbudujmy graniastosłup prosty o tej samej wysokości, co walec. Podstawy obu brył i ich objętości mało się od siebie różnią. Różnica będzie tem mniejsza, im więcej boków będzie miał wielokąt umiarowy. W ten sposób przekonano się, że objętość walca obrotowego oblicza się w podobny sposób, jak objętość graniastosłupa prostego.



Rys. 34.

A b y w i ę c o b l i c z y ć o b j ę t o ś ć w a l c a o b r o t o w e g o np. w dm^3, n a l e ż y p o m n o ż y ć l i c z b ę, w y r a ż a j ą c ą p o l e p o d s t a w y w dm^2, p r z e z l i c z b ę, w y r a ż a j ą c ą w y s o k o ś ć w *dm*.

Jeżeli v oznacza objętość walca w dm^3, p pole podstawy w dm^2, w wysokość w *dm*, wówczas:

$$v = p \cdot w.$$

Jeżeli r oznacza promień podstawy w *dm*, wówczas:

$$p = \pi \cdot r^2.$$

Zatem: $$v = \pi \cdot r^2 \cdot w.$$

Zadania.

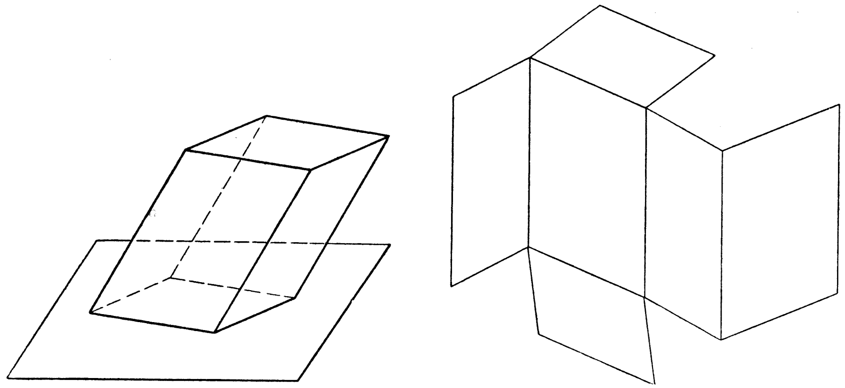
1. Sporządź model walca obrotowego o wysokości 6 *cm*, którego podstawa ma promień $1\frac{1}{2}$ *cm* i oblicz jego objętość!
2. Oblicz objętość walca obrotowego, którego podstawa ma promień: *a)* 7 *cm*, *b)* 4·8 *dm*, *c)* $6\frac{3}{4}$ *m*, a którego wysokość wynosi: *a)* $1\frac{1}{2}$ *dm*, *b)* 8·2 *dm*, *c)* $10\frac{1}{8}$ *m*.
3. Jaka jest wysokość walca, którego objętość wynosi: *a)* 60·68 cm^3, *b)* 81·4 dm^3, *c)* 211·6 m^3, a którego promień podstawy ma: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 2·4 *dm*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *m*?
4. Oblicz, ile waży rura walcowa żelazna, 3·5 *m* długa, której promień zewnętrzny wynosi 2·8 *dm*, wewnętrzny zaś 2·4 *dm*, jeżeli 1 m^3 żelaza waży 7·25 *t*.
5. Jaka jest objętość ciała, które, zanurzone zupełnie w wodzie, znajdującej się w naczyniu kształtu walca, podniosło poziom wody w tem naczyniu o 14 *cm*, jeśli podstawa naczynia ma promień 5 *cm*?
6. Do naczynia kształtu walca, w którem podstawa ma promień 6 *cm*, wlano wody, a następnie wrzucono prostopadłościan o wymiarach 5 *cm*, 6·24 *cm*, 8 *cm*; o ile wskutek tego podniósł się poziom wody w tem naczyniu?
7. Naczynie w kształcie walca, którego promień podstawy ma 6 *cm*, waży pełne wody 8·5 *kg*, a jeśli odlać $\frac{1}{4}$ część tej wody, to waży 7 *kg*; *a)* jaka jest pojemność tego naczynia, *b)* ile waży naczynie próżne, *c)* jak wysokie jest to naczynie?

Równoległościan i wielościany umiarowe.

Równoległościan.

Na rys. 35 mamy przedstawioną bryłę, zwaną równoległościanem, a obok jej siatkę.

Równoległościan ograniczony jest 6-ma równoległobokami. Przeciwległe ściany są równoległe i równe.



Rys. 35.

Na rys. 36 mamy przedstawione, w jaki sposób możemy otrzymać z prostopadłościanu równoległościan, którego dwie ściany są prostokątami.

Równoległościan otrzymamy, biorąc dwa jednakowe równoległoboki i ustawiając je w równoległych płaszczyznach tak, aby odpowiednie równe boki były równoległe, a potem łącząc odcinkami odpowiednie wierzchołki obu równoległoboków.

Rys. 36.

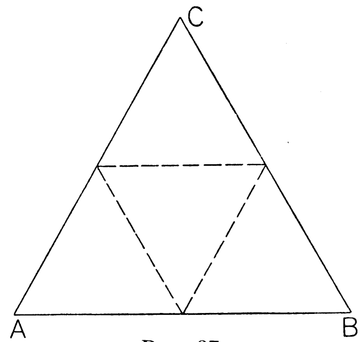
Zadania.

1. Przerysuj siatkę równoległościanu, podaną na rys. 35 w skali 2 : 1 i zbuduj model równoległościanu.
2. Mając model równoległościanu: *a)* podaj liczbę ścian, krawędzi i naroży, *b)* wskaż ściany parami równoległe i podaj, jakiemi figurami są te ściany!
3. Oblicz pole powierzchni równoległościanu, otrzymanego w zadaniu 1, mierząc na modelu potrzebne wielkości.
4. Oblicz pole powierzchni równoległościanu, otrzymanego ze siatki, podanej na rys. 35, w skali: *a)* 3 : 1, *b)* 100 : 1, *c)* 1 : 50.
5. Wytnij z kartonu sześć jednakowych rombów, a następnie zbuduj z nich model równoległościanu! Narysuj siatkę tego równoległościanu!

Czworościan umiarowy.

Na rys. 37 mamy trójkąt równoboczny. Proste, łączące środki jego boków dzielą go na 4 mniejsze trójkąty równoboczne.

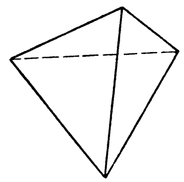
Wykrójmy taki trójkąt ABC z papieru i przegnijmy go według linij kropkowanych tak, aby się zeszły punkty A, B, C. Otrzymamy w ten sposób wielościan, zwany czworościanem umiarowym (rys. 38).



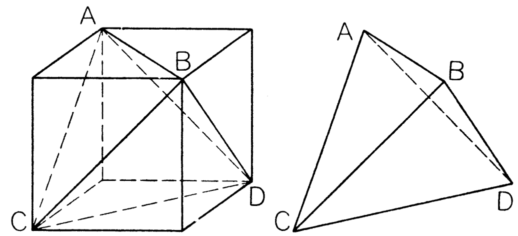
Rys. 37.

Jak widzimy czworościan umiarowy jest ostrosłupem umiarowym trójkątnym, którego ściany boczne są trójkątami równobocznemi.

Jeżeli w sześcianie (rys. 39) z dowolnego wierzchołka, np. B, poprowadzimy 3 przekątne BA, BC, BD, a następnie połączymy końce tych przekątnych odcinkami, to będziemy mieli wyznaczony czworościan umiarowy.



Rys. 38.



Rys. 39.

Zadania.

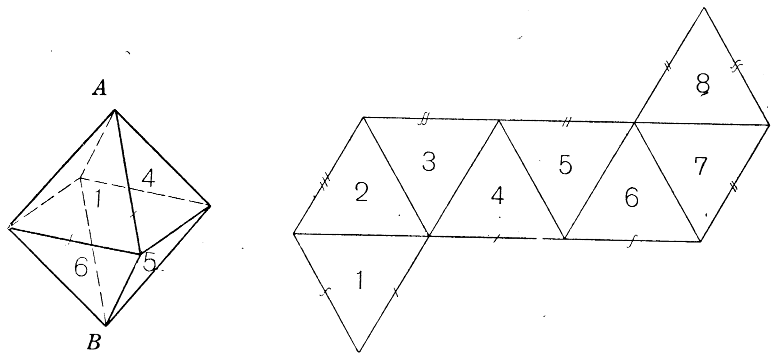
1. Narysuj siatkę czworościanu umiarowego o krawędzi 6 *cm* i zbuduj jego model!
2. Mając model czworościanu umiarowego, podaj liczbę ścian, krawędzi i naroży. Sprawdź, że suma liczby naroży i liczby ścian jest o 2 większa od liczby krawędzi.
3. Oblicz pole powierzchni czworościanu umiarowego, otrzymanego w zadaniu 1, mierząc na modelu potrzebną wielkość!
4. Oblicz pole powierzchni czworościanu umiarowego o krawędzi: *a)* 3 *cm*, *b)* $\frac{3}{5}$ *cm*, *c)* 5 *m*.

Uwaga. W przypadkach *b)* i *c)* zmierz potrzebne wielkości, rysując trójkąty równoboczne w odpowiednich skalach!

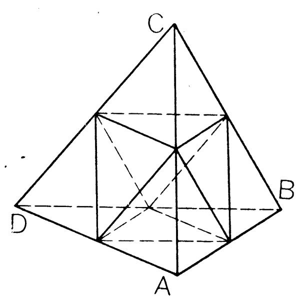
Ośmiościan umiarowy.

Na rys. 40 mamy bryłę, zwaną ośmiościanem umiarowym i jej siatkę.

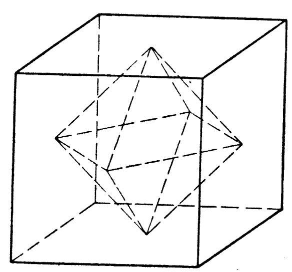
Siatka składa się z ośmiu równych trójkątów równobocznych. Składamy najpierw trójkąty 1, 2, 3, 4 tak, aby utworzyły ostrosłup o wierzchołku A i podstawie kwadratowej. Podobnie tworzymy ostrosłup o tej samej podstawie, co poprzedni i o wierzchołku B, z trójkątów 5, 6, 7, 8. Boki jednakowo naznaczone schodzą się po utworzeniu ośmiościanu z siatki.



Rys. 40.



Rys. 41.



Rys. 42.

Na rys. 41 mamy czworościan umiarowy. Środki jego 6-ciu krawędzi tworzą sześć wierzchołków ośmiościanu.

Na rys. 42 mamy sześcian. Środki jego ścian tworzą sześć wierzchołków ośmiościanu.

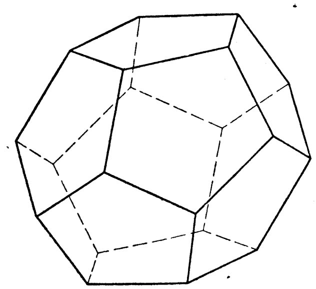
Zadania.

1. Narysuj siatkę ośmiościanu umiarowego o krawędzi 4 *cm* i zbuduj jego model!
2. Mając model ośmiościanu rozwiąż zadanie, jak zadanie 2 str. 137.
3. Oblicz pole powierzchni ośmiościanu umiarowego, otrzymanego w zadaniu 1, mierząc na modelu potrzebną wielkość!
4. Oblicz pole powierzchni ośmiościanu umiarowego o krawędzi *a)* 2 *cm*, *b)* $\frac{3}{4}$ *cm*, *c)* 4 *m*!

Uwaga. W przypadkach *b)* i *c)* zmierz potrzebne wielkości, rysując trójkąty równoboczne w odpowiednich skalach!

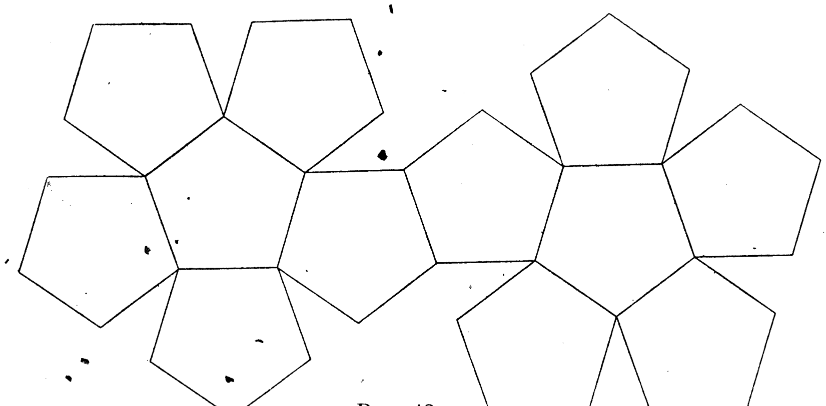
Dwunastościan umiarowy.

Na rys. 43 mamy bryłę, zwaną dwunastościanem umiarowym i jej siatkę. Siatka składa się z 12-u pięciokątów umiarowych.



Zadania.

1. Narysuj siatkę dwunastościanu umiarowego, podaną na rys. 43 w skali 2 : 1.
2. Oblicz pole powierzchni dwunastościanu umiarowego, którego siatkę narysowałeś w zadaniu 1, mierząc na siatce długości krawędzi i odległość środka pięciokąta od boku.



Rys. 43.

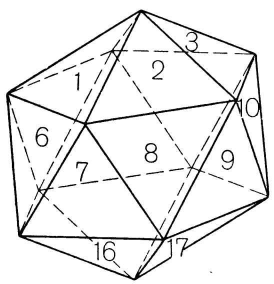
3. Oblicz pole powierzchni dwunastościanu umiarowego o krawędzi: *a)* 10 *cm*, *b)* $\frac{1}{5}$ *cm*, *c)* 3 *m*!
   Uwaga. W przypadkach *b)* i *c)* zmierz potrzebne wielkości rysując pięciokąty umiarowe w odpowiednich skalach!
4. Posługując się modelem dwunastościanu umiarowego rozwiąż zadanie, jak zadanie 2, str. 137.

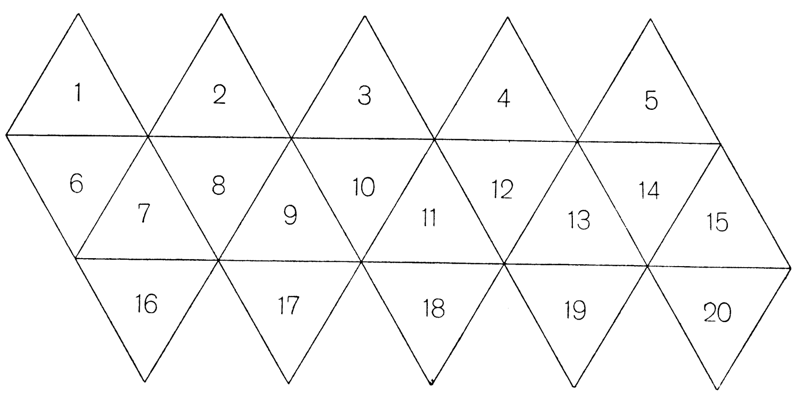
Dwudziestościan umiarowy.

Na rys. 44 mamy bryłę, zwaną dwudziestościanem umiarowym i jej siatkę, złożoną z 20-u trójkątów równobocznych.

Zadania.

1. Narysuj siatkę dwudziestościanu umiarowego, podaną na rys. 45, w skali 3 : 2.
2. Oblicz pole powierzchni dwudziestościanu umiarowego, którego siatkę narysowałeś w zadaniu 1, mierząc na siatce długość krawędzi i wysokość trójkąta.
3. Oblicz pole powierzchni dwudziestościanu umiarowego o krawędzi: *a)* 8 *cm*, *b)* $\frac{1}{4}$ *cm*, *c)* 6 *m*.
   Uwaga. W przypadkach *b)* i *c)* zmierz potrzebne wielkości, rysując trójkąty równoboczne w odpowiednich skalach!
4. Posługując się modelem dwudziestościanu umiarowego rozwiąż zadanie, jak zadanie 2, str. 137.





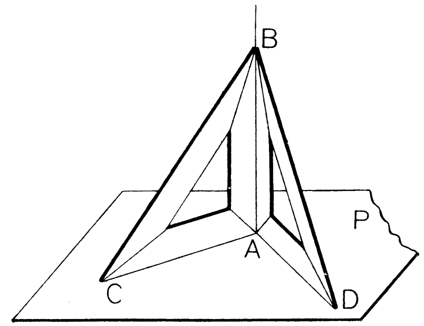
Rys. 44.

Symetrja i jednokładność.

Symetrja.

Prosta prostopadła do płaszczyzny.

Ustawmy na płaszczyźnie (przedstawionej np. przez kartkę papieru) dwie ekierki (rys. 45) tak, aby jedną przyprostokątnę miały wspólną (AB) i aby pozostałe przyprostokątne AC i AD, położone w danej płaszczyźnie, nie leżały na prostej. Mówimy wtedy, że prosta AB jest do danej płaszczyzny prostopadła.



Rys. 45.

Jeżeli jedną z ekierek będziemy obracać około przyprostokątnej AB, wówczas zauważymy, że druga przyprostokątna będzie zawsze leżała na danej płaszczyźnie.

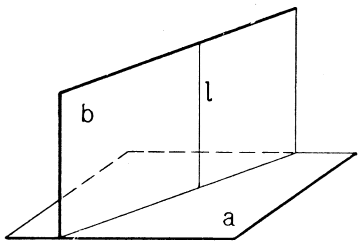
Jeżeli dana płaszczyzna będzie pozioma, wówczas przekonamy się przy pomocy pionu, że przyprostokątna AB będzie ustawiona pionowo.

Uwaga. Jeśli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to mówimy także, że płaszczyzna jest prostopadła do prostej.

Przykłady: *a)* Krawędzie boczne graniastosłupa prostego są do podstawy prostopadłe, *b)* prosta pionowa jest do płaszczyzny poziomej prostopadła, *c)* oś walca obrotowego jest prostopadła do podstawy, *d)* oś stożka obrotowego jest prostopadła do podstawy.

Płaszczyzny prostopadłe.

Na rys. 46 mamy płaszczyznę a i prostą l, prostopadłą do a. Przesuńmy przez l dowolną płaszczyznę b. Mówimy, że płaszczyzny a i b są do siebie prostopadłe.



Rys. 46.

Przykłady:

a) Ściany boczne graniastosłupa prostego są do podstawy prostopadłe.

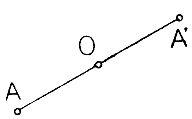
b) Płaszczyzna pionowa (t. j. przechodząca przez pion) jest do do płaszczyzny poziomej prostopadła.

Zadania.

1. Wskaż, które krawędzie pokoju są prostopadłe do podłogi, a które do bocznej ściany!
2. Wymień kilka brył, w których istnieją krawędzie prostopadłe do odpowiedniej ściany!
3. Ustaw otwartą książkę na stole tak, aby jej grzbiet był prostopadły do płaszczyzny stołu; jakie położenie względem płaszczyzny stołu mają kartki tej książki?
4. Wskaż, które ściany sali szkolnej są do siebie prostopadłe!
5. Wymień bryły, w których każde dwie sąsiednie ściany są do siebie prostopadłe!
6. Wskaż w graniastosłupie umiarowym sześciokątnym te ściany, które są do siebie prostopadłe!
7. Dane są dwie płaszczyzny do siebie prostopadłe; jak w jednej z nich poprowadzisz prostą, prostopadłą do drugiej płaszczyzny?

Symetrja środkowa.

Dwa punkty A i A' są symetrycznie względem punktu O położone, jeżeli punkt O jest środkiem odcinka AA' (rys. 47).

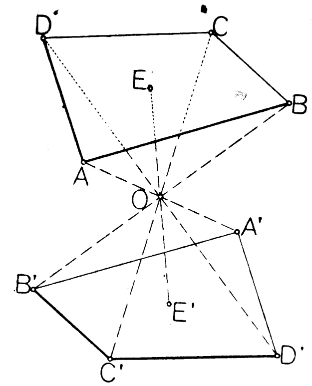


Rys. 47.

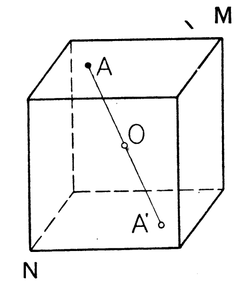
Na rys. 48 mamy dwie figury $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Jeżeli obierzemy dowolny punkt na jednej z figur, to na drugiej znajduje się punkt symetrycznie położony względem punktu O. Np. punkty A i A', B i B', E i E' i t. d. są symetrycznie położone względem punktu O. Figury $ABCD$ i $A'B'C'D'$ nazywamy symetrycznie położonemi względem punktu O. A więc np. dwie przeciw-

ległe ściany sześcianu są symetrycznie położone względem punktu, połowiącego odcinek, łączący środki tych ścian.

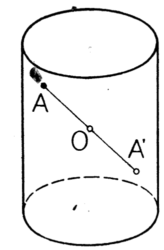
Niechaj O oznacza środek dowolnej przekątnej sześcianu (rys. 49) (t. j. odcinka łączącego dwa wierzchołki, nie leżące na jednej ścianie, jak np. M i N). Obierając na jakiejś ścianie sześcianu dowolny



Rys. 48.



Rys. 49.



Rys. 50.

punkt A, przekonamy się, że na przeciwległej ścianie leży punkt A', symetrycznie względem punktu A położony.

Punkt O nazywamy **środkiem symetrji.**

Podobnie punkt, połowiący odcinek, łączący środki podstaw walca obrotowego (rys. 50), jest środkiem symetrji. Jeżeli bowiem punkt A leży na walcu, wówczas punkt A', symetrycznie względem punktu O położony, leży również na walcu. Środek kuli jest środkiem symetrji kuli.

Z powyższych przykładów widzimy, że punkt O jest środkiem symetrji bryły, jeżeli punkty tej bryły są symetrycznie położone względem punktu O (t. zn. że, jeżeli jakiś punkt A do bryły należy, wówczas punkt A', symetrycznie względem O położony, również do bryły należy).

Zadania.

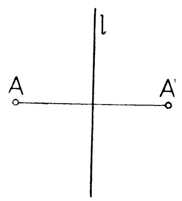
1. Wskaż środek symetrji: *a)* w sześcianie, *b)* w prostopadłościanie, *c)* w walcu, *d)* w graniastosłupie umiarowym sześciokątnym, *e)* w kuli.
2. Czy graniastosłup umiarowy: *a)* trójkątny, *b)* pięciokątny posiada środek symetrji?
3. Gdzie leży środek symetrji obu podstaw: *a)* prostopadłościanu, *b)* walca obrotowego, *c)* graniastosłupa umiarowego sześciokątnego?

4. Gdzie leży środek symetrji dwóch kul o równym promieniu, leżących nazewnątrz siebie?
5. Wytnij z kartonu dwa jednakowe trójkąty i, mając obrany punkt, ustawiaj je tak, aby były względem tego punktu symetrycznie położone.

Symetrja osiowa.

Jak wiemy, dwa punkty A i A' są względem prostej l symetrycznie położone, jeżeli prosta l połowi odcinek AA' i jest do niego prostopadła (rys. 51).

Na rys. 52 figury $ABCD$ i $A'B'C'D'$ nie leżą w płaszczyźnie. Jeżeli obierzemy dowolny punkt na jednej z figur, to na drugiej znajduje się punkt symetrycznie położony względem prostej l. Np. punkty A i A', B i B', E i E' i t. d. są symetrycznie położone względem prostej l. Figury $ABCD$ i $A'B'C'D'$ nazywamy symetrycznie położonemi względem prostej l.

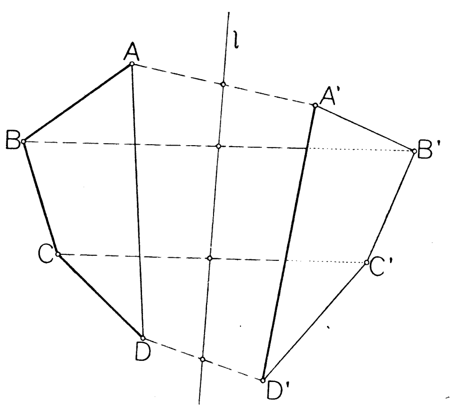


Rys. 51.

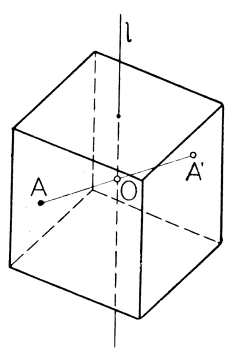
A więc np. dwie przeciwległe ściany ostrosłupa umiarowego kwadratowego są symetrycznie położone względem prostej, przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa i środek jego podstawy.

Na rys. 53 mamy sześcian. Poprowadźmy prostą l przez środki jakiejkolwiek pary ścian przeciwległych. Obierzmy na powierzchni sześcianu dowolny punkt A.

Prowadząc z punktu A odcinek AO, prostopadły do l i przedłużając go następnie do punktu A' tak, by $AO = OA'$,



Rys. 52.



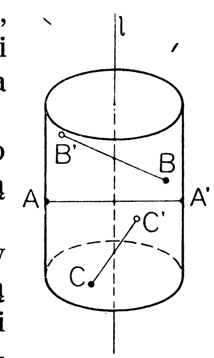
Rys. 53.

przekonamy się, że punkt A' leży na przeciwległej ścianie sześcianu. Punkty A i A' są symetrycznie położone względem prostej l. Prostą l nazywamy osią symetrji.

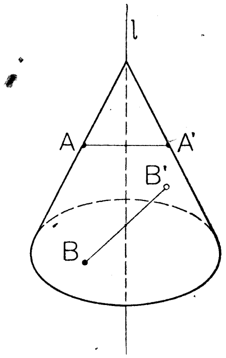
Podobnie oś walca obrotowego jest jego osią symetrji (rys. 55). Obierając bowiem dowolny punkt A (B, C) na powierzchni walca, przekonamy się, że punkt A' (B', C'), symetrycznie względem osi położony, leży również na powierzchni walca.

Oś stożka obrotowego (rys. 56) jest również osią symetrji.

Z powyższych przykładów widzimy, że prosta l jest osią symetrji danej bryły, jeżeli punkty bryły są symetrycznie względem prostej l położone (t. zn., że jeżeli jakiś punkt A do bryły należy, wówczas punkt A' symetrycznie względem prostej l położony, również do bryły należy).



Rys. 55.



Rys. 56.

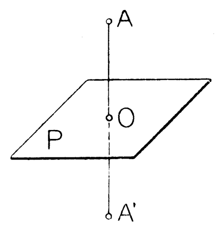
Zadania.

1. Przekonaj się, że prosta prostopadła do płaszczyzny jest jej osią symetrji. (Obierz kilka punktów i wskaż punkty do nich symetrycznie położone).
2. Na modelu *a)* sześcianu, *b)* prostopadłościanu wskaż wszystkie osie symetrji; ile ich jest w każdej z tych brył?
3. Na modelu graniastosłupa umiarowego *a)* sześciokątnego, *b)* ośmiokątnego wskaż osie symetrji; ile ich jest w każdej z tych brył?
4. Wskaż kilka osi symetrji, które posiada: *a)* walec obrotowy, *b)* kula.
5. Wskaż kilka osi symetrji, które posiada utwór, składający się z podstaw walca.
6. Wytnij z kartonu dwa przystające kwadraty i mając obraną prostą ustawiaj je tak, aby były względem tej prostej symetrycznie położone.
7. Powtórz poprzednie zadanie, mając dwa sześciany o równych krawędziach!

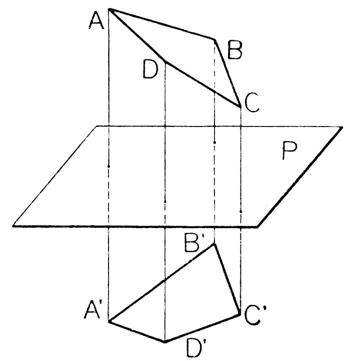
Symetrja płaszczyznowa.

Przypuśćmy, że mamy daną dowolną płaszczyznę P i punkt A (rys. 57). Poprowadźmy przez punkt A odcinek AO prostopadły do płaszczyzny P. Przedłużmy następnie odcinek AO do punktu A' tak, by $AO = OA'$.

O punktach A i A' mówimy, że leżą symetrycznie względem płaszczyzny P.



Rys. 57.

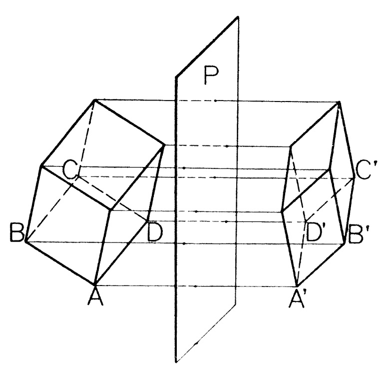


Rys. 58.

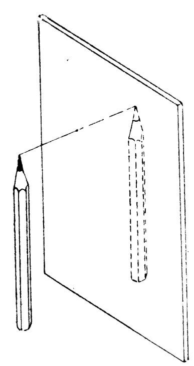
Na rys. 58 mamy dwie figury $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Punkty A i A', B i B' i t. d. są symetrycznie położone względem płaszczyzny P.

O figurach tych mówimy, że są **symetrycznie położone** względem płaszczyzny P.

Na rys. 59 mamy dwa wielościany. Punkty jednego wielościanu i odpowiednie punkty drugiego (odpowiednie punkty są połączone odcinkami) są względem płaszczyzny P symetrycznie położone. O danych wielościanach mówimy, że są względem płaszczyzny P **symetrycznie położone.**

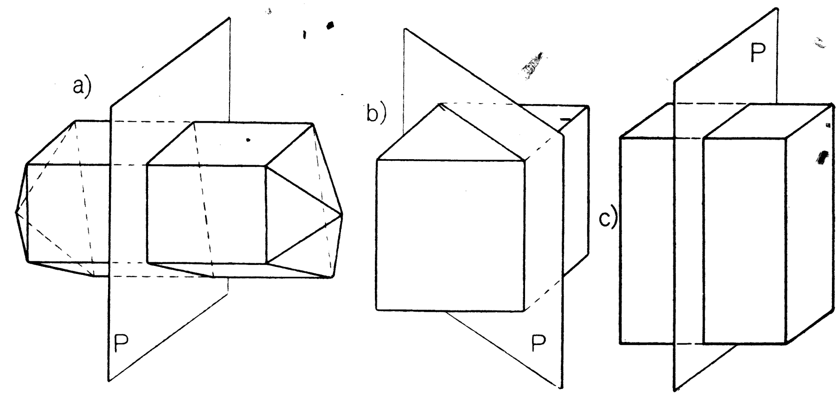


Rys. 59.



Rys. 60.

Ustawmy na stole płytę szklaną pionowo, a przed nią dowolny przedmiot np. ołówek rys. 60. Podobnie, jak w zwierciadle, ujrzymy na płytce obraz ołówka. Zaznaczając za płytką



Rys. 61.

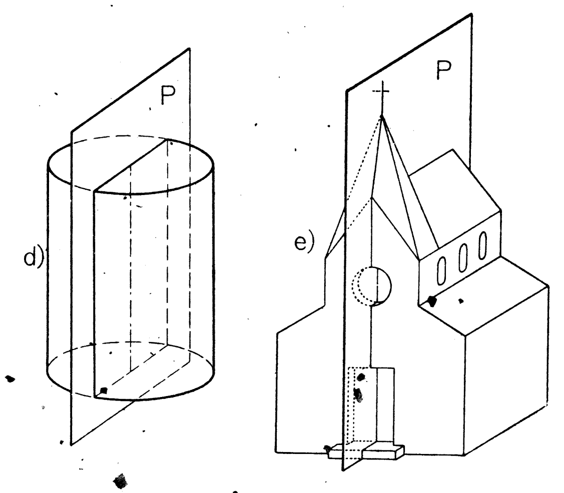
miejsce, w którem się pozornie obraz pokazuje, przekonamy się, że ołówek i jego obraz są symetrycznie względem płytki położone.

Podobnie w zwierciadle, przedmiot i jego obraz są względem powierzchni zwierciadła symetrycznie położone.

Na rys. 61 *a* płaszczyzna P dzieli bryłę na dwie części symetrycznie położone względem płaszczyzny P.

Mówimy, że płaszczyzna P jest **płaszczyzną symetrji** danej bryły.

Płaszczyznę symetrji posiada sześcian (rysunek 61 *b*), **prostopadłościan** (rysunek 61 *c*), walec obrotowy (rysunek 61 *d*), niektóre budynki (rysunek 61 *e*) i t. d.



Rys. 61.

Zadanie.

1. Przekonaj się, że płaszczyzna prostopadła do drugiej płaszczyzny jest jej płaszczyzną symetrji. (Postąp podobnie, jak w zad. 1, str. 145).
2. Przekonaj się, że płaszczyzna prostopadła do prostej jest jej płaszczyzną symetrji. (Postąp podobnie, jak w zad. 1, str. 145).
3. Na modelu: *a)* sześcianu, *b)* prostopadłościanu wskaż wszystkie płaszczyzny symetrji; ile ich jest?
4. Na modelu: graniastosłupa umiarowego *a)* pięciokątnego, *b)* sześciokątnego wskaż płaszczyzny symetrji; ile ich jest?
5. Wskaż kilka płaszczyzn symetrji, które posiada: *a)* walec obrotowy, *b)* kula, *c)* stożek obrotowy.
6. Wskaż kilka płaszczyzn symetrji, które posiada utwór, składający się z dwóch podstaw walca.
7. Wytnij z kartonu dwa równe trójkąty i mając obraną płaszczyznę (kartkę papieru) ustawiaj je tak, aby były względem tej płaszczyzny symetrycznie położone.
8. Powtórz zadanie 7, mając dwa sześciany o równych krawędziach!
9. Ustaw dwie kule, jedną nazewnątrz drugiej. Wskaż kilka płaszczyzn symetrji, jeżeli promienie kul są: *a)* różne, *b)* równe. Jaka płaszczyzna symetrji istnieje w drugim wypadku, której niema w pierwszym?
10. Jak poprowadzisz płaszczyznę symetrji w sześcianie tak, aby 4 wierzchołki sześcianu same sobie odpowiadały?
11. Narysuj dwie figury w płaszczyźnie, symetrycznie położone względem prostej AB; jak poprowadzisz płaszczyznę, aby te figury były względem niej symetrycznie położone?
12. Dlaczego otrzymasz trójkąt równoramienny, łącząc w figurze, posiadającej płaszczyznę symetrji dwa odpowiadające sobie punkty odcinkiem, a następnie końce tego odcinka z dowolnym punktem płaszczyzny symetrji?
13. Wskaż na modelu: *a)* równoległościanu, *b)* czworościanu umiarowego płaszczyzny symetrji!
14. Wskaż na modelu ośmiościanu umiarowego: *a)* płaszczyzny symetrji, *b)* osie symetrji, *c)* środek symetrji!

Jednokładność i podobieństwo.

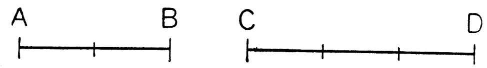
Jednokładność na płaszczyźnie.

Odcinki proporcjonalne.

Stosunkiem (lub ilorazem) dwóch odcinków AB i CD nazywamy iloraz liczb mierzących te odcinki. Stosunek odcinków oznaczamy:

$$\frac{AB}{CD}.$$

Jeżeli np. AB ma 2 *cm*, CD ma 3 *cm* (rys. 62), to stosunek tych odcinków wynosi $\frac{2}{3}$. Stosunek ten wyraża jakim ułamkiem odcinka CD jest odcinek AB. Odcinek bowiem AB jest $\frac{2}{3}$ odcinka CD.



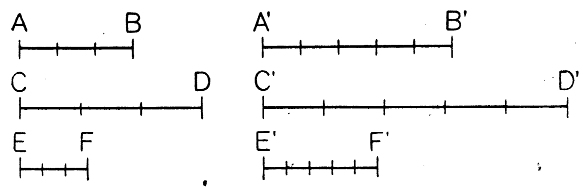
Rys. 62.

Mówimy, że odcinki AB, CD, EF i t. d. są proporcjonalne do odcinków $A'B'$, $C'D'$ $E'F'$... (rys. 63 i 64), jeżeli stosunek odpowiednich odcinków jest ten sam, zatem jeżeli

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{EF}{E'F'} \ldots$$

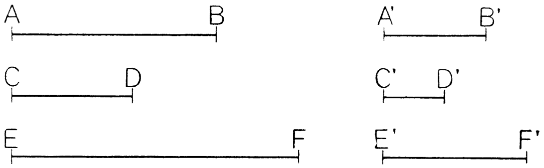
Dla odcinków na rys. 63 stosunek ten wynosi $\frac{3}{5}$, zaś dla odcinków na rys. 64 wynosi 2.

Z dowolnego punktu S narysujmy dwie proste i obierzmy na nich dwa dowolne punkty A i B (rys. 65*a*).

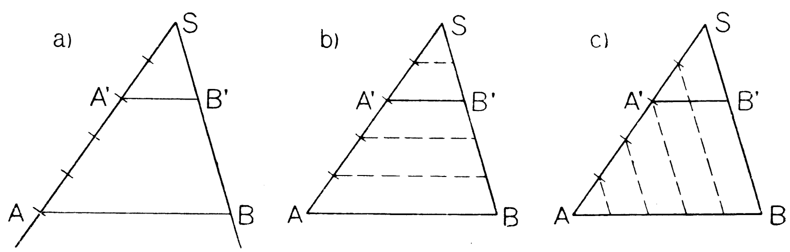


Rys. 63.

Utwórzmy jakiś ułamek odcinka SA. Niechaj np. $SA' = \frac{2}{5} SA$. Z punktu A' narysujmy odcinek $A'B'$ równoległy do odcinka AB. Łatwo się przekonać, że odcinek SB' jest również $\frac{2}{5}$ odcinka SB. Jeżeli bowiem odcinek SA podzielimy na 5 równych części (rys. 65 *b*) i z punktów podziału narysujemy odcinki równoległe do AB, to odcinki te podzielą nam odcinek SB również na 5 równych części. Zatem $SB' = \frac{2}{5} SB$.



Rys. 64.



Rys. 65.

Można się również przekonać, jak wskazuje rys. 65 *c*, że odcinek $A'B' = \frac{2}{5} AB$.

Mamy zatem:

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{5}.$$

A więc odcinki SA', SB', $A'B'$ są proporcjonalne do odcinków SA, SB, AB.

Uwaga. Gdy na odcinku SA odcięliśmy odcinek $SA' = \frac{2}{5} SA$, na odcinku zaś SB odcinek $SB' = \frac{2}{5} SB$, to odcinek AB jest równoległy do odcinka $A'B'$.

Zadania.

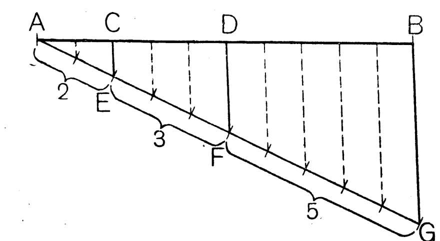
1. Odcinek AB ma długość: *a)* 5 *cm*, *b)* 8 *cm*, *c)* 15 *dm*, *d)* 7 *m*, *e)* 12 *km*, odcinek zaś CD ma długość: *a)* 9 *cm*, *b)* 4 *cm*, *c)* 12 *dm*, *d)* 8 *m*, *e)* 9 *km*; oblicz stosunek $\frac{AB}{CD}$!
2. Stosunek odcinków AB i CD wynosi: *a)* $\frac{3}{4}$, *b)* $\frac{3}{2}$, *c)* $\frac{4}{5}$, *d)* $\frac{6}{5}$, *e)* 1, *f)* 4.

a) jaka jest długość odcinka AB, jeżeli odcinek CD ma długość 5 *cm*?
b) jaka jest długość odcinka CD, jeżeli odcinek AB ma długość 6 *cm*? Rysunek!

3. Odcinki AB, CD i EF są proporcjonalne do odcinków $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$, przyczem stosunek ich wynosi: *a)* $\frac{1}{2}$, *b)* $\frac{3}{2}$, *c)* $\frac{5}{7}$, *d)* $\frac{8}{3}$; *A)* obierz dowolnie odcinki AB, CD, EF i narysuj odcinki $A'B'$, $C'D'$ i $E'F'$; *B)* obierz dowolnie odcinki $A'B'$, $C'D'$ i $E'F'$ i narysuj odcinki AB, CD i EF.
4. Dane są 2 mapy: jedna w skali 1 : 25.000, druga zaś w skali 1 : 1,500.000; jaki jest stosunek odcinków na jednej mapie do odpowiednich odcinków na drugiej mapie?
5. Obierz na promieniu SA taki punkt A', aby stosunek $\frac{SA'}{SA}$ równał się: *a)* $\frac{3}{4}$, *b)* $\frac{4}{3}$, *c)* $\frac{2}{5}$, *d)* $\frac{6}{5}$.
Rozwiązanie zadania *a)*: z punktu S rysujemy dowolną prostą i od punktu S odmierzamy 4 równe, zresztą dowolne odcinki, np. o długości 1 *cm*. Otrzymany punkt B łączymy z punktem A. Jeżeli teraz z punktu na prostej SB, odległego o 3 *cm* od punktu S, poprowadzimy równoległą do AB, to ta równoległa przetnie promień SA w szukanym punkcie A'. Dlaczego?
6. Podzielić odcinek AB na części proporcjonalne do liczb np. 2, 3 i 5, to znaczy podzielić go tak na 3 części AC, CD, DB (rys. 66), aby stosunek którychkolwiek z tych części równał się ilorazowi odpowiadających liczb, t. j. aby:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{2}{3}, \quad \frac{AC}{DB} = \frac{2}{5} \text{ i } \frac{CD}{DB} = \frac{3}{5}.$$

Podziału tego można dokonać, posługując się sposobem, w jaki dzieli się dany odcinek na kilka równych części. Odcinamy mianowicie $2+3+5=10$ równych odcinków na dowolnie obranym promieniu. Otrzymujemy punkt G, który łączymy z punktem B. Następnie przez punkt E (odpowiadający dwom odłożonym odcinkom) i przez punkt F (odpowiadający trzem dalszym odłożonym odcinkom) rysujemy rów-



Ryc. 66.

noległe do BG. Równoległe te wyznaczają punkty C i D, które dają rozwiązanie naszego zadania.

A) Podziel odcinek 6 *cm* proporcjonalnie do liczb *a)* 1 i 2; *b)* 4 i 5; *c)* 2 i 7.

B) Podziel odcinek o długości 8 *cm* na 3 części proporcjonalne do liczb: *a)* 2, 3, 5; *b)* 4, 3, 2; *c)* 5, 2, 4; *d)* 2, 6, 3.

C) Podziel odcinek o długości 9 *cm* na 4 części proporcjonalne do liczb: *a)* 2, 1, 3, 4; *b)* 3, 2, 5, 1.

7. *a)* W trójkącie, z punktu połowiącego jeden bok, poprowadzono równoległą do drugiego boku; w jakim punkcie ta równoległa przetnie trzeci bok? Jaka będzie długość tej równoległej?

   b) W trójkącie jeden bok podzielono proporcjonalnie do liczb 3 i 4 i z punktu podziału poprowadzono równoległą do drugiego boku; w jakim punkcie ta równoległa przetnie trzeci bok? Jaka będzie długość tej równoległej?

8. Przyjmując, że odcinek 1 *cm* odpowiada ciężarowi 3 *kg*, przedstaw 15 *kg* odcinkiem i podziel je proporcjonalnie do liczb 2 i 3. Odczytaj rozwiązanie zadania z rysunku!

9. Boki trójkąta są proporcjonalne do liczb 3, 5 i 7, obwód zaś tego trójkąta wynosi 10·5 *cm*; wyznacz rysunkiem jego boki!

10. Boki czworokąta są proporcjonalne do liczb 2, 3, 4 i 6, obwód zaś tego czworokąta wynosi 10 *cm*; wyznacz rysunkiem jego boki!

11. W trójkącie, którego obwód wynosi 18 *cm*, połączono środki boków odcinkami; ile wynosi obwód nowopowstałego trójkąta? Rysunek!

12. Ramię trójkąta równoramiennego wynosi 9 *cm*, podstawa zaś 5 *cm*. Trójkąt ten przecięto prostą równoległą do podstawy w $\frac{2}{3}$ wysokości, licząc od podstawy; oblicz obwód w ten sposób powstałego trapezu!

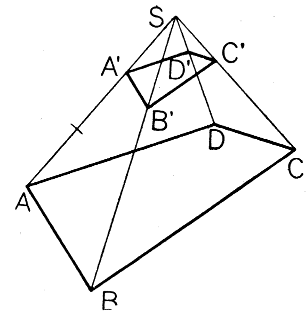
13. Długość odcinka AB wynosi: *a)* 2 *cm*, *b)* 3 *cm*, *c)* 5 *cm*; odcinka BC (na przedłużeniu AB): *a)* 3 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* 9 *cm*; odcinka AD: *a)* 3 *cm*, *b)* x *cm*, *c)* x *cm*; odcinka DE (na przedłużeniu AD): *a)* x *cm*, *b)* 8 *cm*, *c)* 4 *cm*). Wiedząc, że odcinki BD i CE są równoległe oraz że $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}$, wyznacz x pomiarem i rachunkiem.

Jednokładność.

Narysujmy na płaszczyźnie jakąś figurę, np. czworokąt $ABCD$ (rys. 67). Obierzmy jakąś liczbę, np. $\frac{1}{3}$. Dowolny punkt S połączmy odcinkami z punktami A, B, C, D. Na odcinku SA odetnijmy odcinek $SA' = \frac{1}{3} SA$. Podobnie zaznaczmy punkty B', C', D' tak, aby

$$SB' = \tfrac{1}{3} SB, \quad SC' = \tfrac{1}{3} SC, \quad SD' = \tfrac{1}{3} SD.$$

Łącząc punkty A', B', C', D' odpowiednio odcinkami otrzymamy nowy czworokąt. O czworokącie $A'B'C'D'$ mówimy, że jest **j e d n o k ł a d n y** z czworokątem $ABCD$. Mówimy również, że wielokąt $ABCD$ przekształciliśmy jednokładnie na wielokąt $A'B'C'D'$.



Rys. 67.

Punkt S nazywamy **ś r o d k i e m   j e d n o k ł a d n o ś c i**, liczbę $\frac{1}{3}$ **s t o s u n k i e m   j e d n o k ł a d n o ś c i**.

Wierzchołki A i A' nazywamy **w i e r z c h o ł k a m i   o d p o w i e d n i e m i**. Podobnie wierzchołki B i B', C i C' i t. d. są wierzchołkami odpowiedniemi. Boki AB i $A'B'$ nazywamy **b o k a m i   o d p o w i e d n i e m i**. Podobnie odpowiedniemi bokami są boki BC i $B'C'$, CD i $C'D'$ i t. d.

Ponieważ

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{1}{3} \text{ i } \frac{SB'}{SB} = \frac{1}{3}$$

więc na mocy ustępu poprzedniego odcinki AB i $A'B'$ są równoległe, a ponadto

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Podobnie odcinki BC, CD, DA są równoległe odpowiednio do odcinków $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$ i ponadto

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{1}{3}.$$

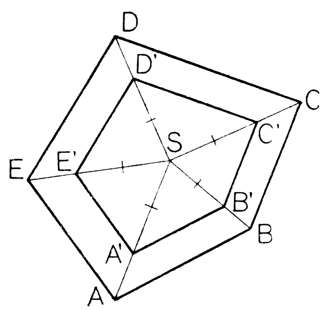
Widzimy zatem, że: **w   f i g u r a c h   j e d n o k ł a d n y c h,   o d p o w i e d n i e   b o k i   s ą   d o   s i e b i e   r ó w n o l e g ł e   i   p r o p o r c j o n a l n e.   S t o s u n e k   o d p o w i e d n i c h   b o k ó w   r ó w n a   s i ę   s t o s u n k o w i   j e d n o k ł a d n o ś c i.**

Mierząc kąty wielokątów $ABCD$ i $A'B'C'D'$ można się przekonać, że są odpowiednio równe.

A więc: $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$, $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$ i t. d.

Zatem **w figurach jednokładnych kąty odpowiednie** (t. j. zawarte między odpowiedniemi bokami) **są sobie równe.**

Uwaga. Wielokąt $A'B'C'D'$ (rys. 67) ma boki trzy razy mniejsze od boków wielokąta $ABCD$. Możemy również powiedzieć, że wielokąt $A'B'C'D'$ przedstawia nam wielokąt $ABCD$ w skali 1 : 3.

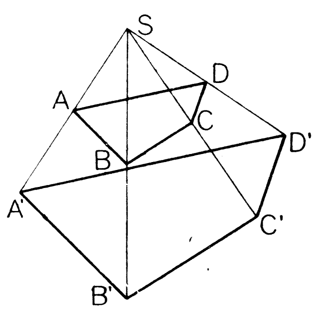


Rys. 68.

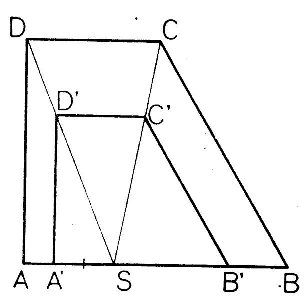
Na rys. 68 środek jednokładności S obrany jest na polu wielokąta $ABCDE$. Stosunek jednokładności wynosi $\frac{2}{3}$.

Boki wielokąta $A'B'C'D'E'$ wynoszą $\frac{2}{3}$ odpowiednich boków wielokąta $ABCDE$.

Na rys. 69 stosunek jednokładności jest 2. W tym wypadku występuje dwukrotne zwiększenie boków danego wielokąta. Mamy bowiem: $A'B' = 2AB$, $B'C' = 2BC$ i t. d.



Rys. 69.



Rys. 70.

Na rys. 71 środek jednokładności S obrany jest na jednym z boków wielokąta $ABCD$. Stosunek jednokładności jest $\frac{2}{3}$.

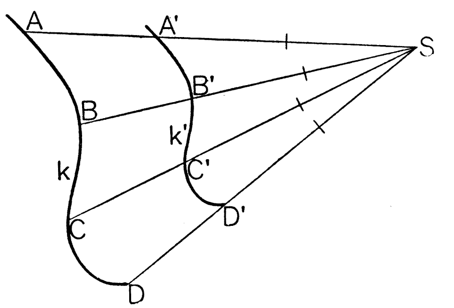
Zadania.

1. Obierz trójkąt i zewnątrz niego punkt S jako środek jednokładności; narysuj trójkąt jednokładny z obranym trójkątem, gdy stosunek jednokładności wynosi: *a)* $\frac{1}{2}$, *b)* $\frac{1}{3}$, *c)* $\frac{3}{4}$, *d)* $\frac{5}{3}$. Porównaj długość odpowiednich boków i wielkość odpowiednich kątów.

2. Powtórz zadanie 1, obierając środek jednokładności S: *a)* wewnątrz, *b)* na jednym z boków, *c)* w jednym z wierzchołków trójkąta.
3. Obierz dowolny pięciokąt i narysuj pięciokąt z nim jednokładny, gdy stosunek jednokładności wynosi $\frac{2}{5}$, przyczem środek jednokładności S jest: *a)* zewnątrz, *b)* wewnątrz, *c)* na jednym z boków, *d)* w jednym z wierzchołków obranego pięciokąta. Porównaj długości odpowiednich boków i wielkość odpowiednich kątów!
4. Narysuj po 2 wielokąty tak, żeby jeden był jednokładny z drugim, gdy temi wielokątami są: *a)* 2 równoboczne trójkąty, *b)* 2 kwadraty, *c)* 2 prostokąty, *d)* 2 równoległoboki, *e)* 2 romby, *f)* 2 sześciokąty umiarowe, *g)* 2 trapezy, *h)* 2 deltoidy. Przyjmując dowolnie stosunek jednokładności, obierz w zadaniach *a)* i *b)* środek jednokładności S wewnątrz, w zadaniach *c)* i *d)* zewnątrz, w zadaniach *e)* i *f)* na jednym z boków, w zadaniach *g)* i *h)* w jednym z wierzchołków.
5. Narysuj 2 wielokąty tak, aby jeden był jednokładny z drugim i leżał całkowicie nazewnątrz drugiego.
6. Narysuj 2 kwadraty tak, aby jeden był jednokładny z drugim i aby 2 odpowiadające sobie boki leżały na jednej prostej.
7. Narysuj 2 pięciokąty jednokładne i z dwóch odpowiednich wierzchołków wszystkie przekątne; przekonaj się, że stosunek odpowiednich przekątnych równa się stosunkowi jednokładności.
8. Dany jest prostokąt o wymiarach 10 *cm*, 8 *cm* i dwa różne punkty S i W. Obierz pokolei te punkty jako środki jednokładności i za każdym razem narysuj prostokąt jednokładny z danym prostokątem, przyjmując jako stosunek jednokładności $\frac{3}{4}$. Wytnij następnie z papieru otrzymane prostokąty i przekonaj się, że są przystające (t. j. jednym można nakryć dokładnie drugi). Powtórz to zadanie, obierając jeszcze inaczej punkt W!
9. Powtórz zadanie poprzednie, obierając dowolny wielokąt, a jako stosunek jednokładności $\frac{2}{3}$. Czy wielokąt jedno-

kładny z danym wielokątem zależy od położenia środka jednokładności? Jakie twierdzenie można zatem wypowiedzieć?

10. Narysuj dwa wielokąty umiarowe o tej samej liczbie boków (2 kwadraty, 2 pięciokąty umiarowe i t. p.), tak, by boki jednego wielokąta były odpowiednio równoległe do boków drugiego wielokąta; przekonaj się, że te wielokąty są jednokładne, i że środek jednokładności leży w punkcie przecięcia dwóch prostych, poprowadzonych przez odpowiadające sobie wierzchołki obu wielokątów.
11. Narysuj jakąś krzywą np. k (rys. 71) i obierz jakąś liczbę np. $\frac{1}{3}$. Dowolny punkt S połącz odcinkami z punktami A, B, C, D i t. d. położonemi na krzywej k. Na odcinku SA odetnij odcinek $SA' = \frac{1}{3} SA$. Podobnie zaznacz punkty $B' C' D'$... tak, aby $SB' = \frac{1}{3} SB$, $SC' = \frac{1}{3} SC$, $SD' = \frac{1}{3} SD$ i t. d. Jeżeli dość gęsto obierzesz punkty na danej krzywej i wyznaczysz punkty, jak A', B', C', D' i t. d., to otrzymasz krzywą k', którą nazywamy **jednokładną** z krzywą k.



Ryc. 71.

Obierz punkt S wewnątrz, na okręgu, lub zewnątrz koła o promieniu 2 *cm* i narysuj krzywą z danem kołem jednokładną, gdy stosunek jednokładności wynosi *a)* $\frac{2}{3}$, *b)* $\frac{4}{3}$. Jaka to będzie krzywa?

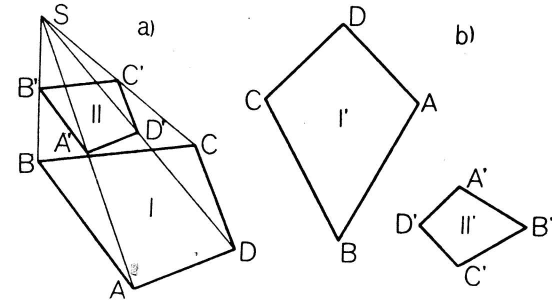
Podobieństwo.

Określenie.

Na rys. 72*a* wielokąty I i II są jednokładne; stosunek jednokładności wynosi $\frac{1}{2}$. Przerysujmy te wielokąty (rys. 72*b*) tak, aby odpowiednie boki nie były równoległe. Wielokąty I' i II' na rys. 72*b* nie są już jednokładne; mają jednak (tak jak wielokąty I i II) odpowiednie boki proporcjonalne, zaś odpowiednie kąty równe.

Wielokąty, takie jak I' i II', które mają odpowiednie boki proporcjonalne, zaś odpowiednie kąty równe, nazywamy **podobnemi**.

Uwaga 1. Wielokąty jednokładne są podobne. Naodwrót zaś, wielokąty podobne nie muszą być jednokładne. Można jednak dwa wielokąty podobne zawsze tak ustawić, aby były jednokładne.



Rys. 72.

Uwaga 2. Wielokąty I' i II' na rys. 72*b* są podobne; stosunek boków wielokąta I' do odpowiednich boków wielokąta II' wynosi $\frac{1}{2}$.

Mamy więc: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}$, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$, $\frac{CD}{C'D'} = \frac{1}{2}$, $\frac{CA}{C'A'} = \frac{1}{2}$,

skąd: $AB = \frac{1}{2} A'B'$, $BC = \frac{1}{2} B'C'$, $CD = \frac{1}{2} C'D'$, $CA = \frac{1}{2} C'A'$.

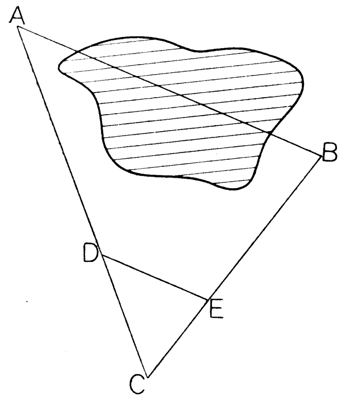
Zatem: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$, $\frac{BC}{CA} = \frac{B'C'}{C'A'}$ i t. d.

Widzimy więc, że **w wielokątach podobnych stosunek boków jednego wielokąta jest równy stosunkowi odpowiednich boków drugiego wielokąta.**

Zadania.

1. Bok *a)* 5 *cm*, *b)* 8 *m*, *c)* 26 *m* jednego trójkąta odpowiada bokowi: *a)* 8 *cm*, *b)* 6 *cm*, *c)* 5 *cm* drugiego trójkąta, przyczem pozostałe boki drugiego trójkąta wynoszą: *a)* 12 *cm*, 15 *cm*; *b)* 4 *cm*, 7 *cm*; *c)* 9 *cm*, 11 *cm*; wiedząc, że te trójkąty są podobne, oblicz pozostałe boki pierwszego trójkąta!
2. Wytnij z papieru 2 trójkąty, jeden o bokach 3 *cm*, 4·5 *cm*, 6 *cm*, drugi zaś o bokach 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*; *a)* przekonaj się, że te trójkąty są podobne; *b)* ułóż je tak aby były jednokładne; *c)* zaznacz jedną, dwiema kreskami odpowiadające sobie boki, jednym, dwoma, trzema łukami odpowiadające sobie kąty.
3. Wytnij z papieru 2 trójkąty, jeden o bokach 3 *cm* i 4 *cm*, drugi zaś o bokach 4·5 *cm* i 6 *cm*, przyczem tak, by kąt między temi bokami wynosił 60°; postąp, jak w zadaniu 2!

4. Narysuj 2 różne trójkąty o kątach 45°, 75°, 60°; postąp, jak w zadaniu 2!
5. Dlaczego *a)* 2 trójkąty równoboczne, *b)* 2 kwadraty, *c)* 2 pięciokąty umiarowe są podobne?
6. Dlaczego plan parceli jest podobny do tej parceli?
7. Plan podłogi narysowany w skali 1 : 100 jest prostokątem o bokach 4 *cm* i 5 *cm*; *a)* jakie są wymiary podłogi? *b)* podaj, mierząc na planie, ile wynosi przekątna podłogi.
8. Pręt pionowy o wysokości 2 *m* rzuca cień 1·5 *m* długi; jak wysoka jest wieża, której cień o tym samym czasie wynosi 45 *m*?
9. Mamy zmierzyć w terenie odległość punktu A od punktu B (rys. 73), przyczem odległości tej nie możemy wprost zmierzyć, gdyż po drodze znajduje się staw. W tym celu obieramy w terenie taki punkt C, z którego można dojść do punktu A i do punktu B. Przypuśćmy, że $AC = 70$ *m*, $BC = 40$ *m*. Obieramy teraz na bokach AC i BC takie punkty D i E, aby $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$.



Rys. 73.

Punkty te możemy tak obrać, aby powyższy stosunek wynosił np. 5. Wówczas, jak wiemy (uwaga str. 150), odcinek DE będzie równoległy do odcinka AB. Ponieważ większy trójkąt jest podobny do mniejszego, zatem: $\frac{AB}{DE} = 5$.

Mierząc więc DE, możemy obliczyć długość AB. Przypuśćmy, że $DE = 16$ *m*. Wówczas $AB = 80$ *m*.

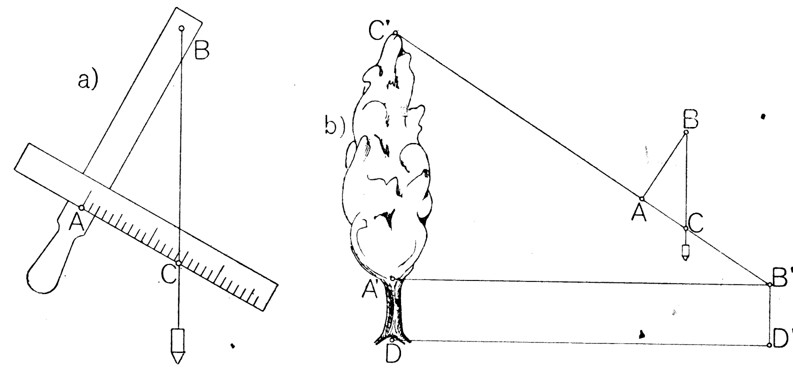
Oblicz AB, wiedząc, że:

a) $AC = 110$ *m*, $BC = 80$ *m*, $\frac{CA}{CD} = 4$, $DE = 30$ *m*.

b) $AC = 150$ kroków, $BC = 120$ kroków, $\frac{CA}{CD} = 6$, $DE = 28$ kroków (długość kroku $= 0·75$ *m*).

c) Oblicz tą metodą odległość punktu A od punktu B, gdy na drodze jest przeszkoda, np. dom, wykonując odpowiednie pomiary.

10. Do mierzenia wysokości przedmiotów zbuduj przyrząd następujący: przybij do siebie prostopadle dwie listwy (rys. 74 *a*). U jednego końca listwy w punkcie B na odpowiedniej podkładce umocuj nitkę, obciążoną ciężarkiem, poczynając zaś od punktu A zaznacz podziałkę milimetrową. Jeśli



Rys. 74.

będziesz celował listwą z podziałką na szczyt drzewa, to nitka wyznaczy trójkąt ABC podobny do trójkąta $A'B'C'$ (rys. 74 *b*). Długość boku AB jest znaną i wynosi np. 20 *cm*. Długość boku AC odczytujesz na podziałce np. $AC = 15$ *cm*. Długość $A'B'$ zmierzysz taśmą, np. $A'B' = 24$ *m*. Ponieważ stosunki odpowiednich boków (t. j. leżących naprzeciw równych kątów) są sobie równe, więc:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Stąd:

$$\frac{A'C'}{15} = \frac{2400}{20},$$

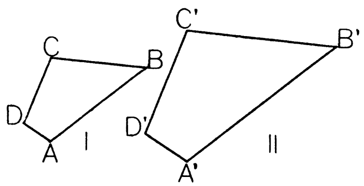
czyli:

$$A'C' = 1800\ cm = 18\ m.$$

Jeżeli przyjmiesz, że $A'D = B'D' = 1·5$ *m* (wysokość obserwatora), to wysokość drzewa wynosi 19·5 *m*. Zrób kilka takich pomiarów, mierząc wysokość okolicznych drzew, wież i t. p.

Obwody figur podobnych.

Na rys. 75 mamy dwa czworokąty podobne; stosunek odpowiednich boków jest $\frac{1}{2}$. Ponieważ boki wielokąta I są dwa razy mniejsze od odpowiednich boków wielokąta II, więc i obwód wielokata I jest dwa razy mniejszy od obwodu wielokąta II. Widzimy zatem, że **w wielokątach podobnych iloraz obwodów jest równy ilorazowi odpowiednich boków.**



Rys. 75.

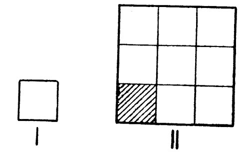
Zadania.

1. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC, przyczem $A'B'=3\,cm$, $B'C'=4\,cm$, $A'C'=6\,cm$, a stosunek boków trójkąta ABC do odpowiednich boków trójkąta $A'B'C'$ wynosi $1\frac{1}{2}$; oblicz obwód trójkąta ABC dwoma sposobami: *a)* obliczając najpierw długość boków trójkąta ABC, *b)* stosując twierdzenie str. 160.
2. Obwód trójkąta równobocznego wynosi 36 m; narysuj plan jego w skali 1 : 200 i oblicz jego obwód na planie!
3. Plan pola w kształcie prostokąta w skali 1 : 2500 ma wymiary 8 cm i 16 cm; ile będzie kosztowało ogrodzenie tego pola, jeśli 1 m ogrodzenia kosztuje 2·40 *zł*?
4. Bok pięciokąta umiarowego wynosi 3 m; jakiej użyto skali, jeśli jego obwód na planie wynosi 37·5 cm?
5. Suma obwodów dwóch kwadratów wynosi 80 cm, a stosunek boku mniejszego kwadratu do boku większego kwadratu wynosi $\frac{2}{3}$; oblicz boki tych kwadratów!
6. Obwód większego z wielokątów jednokładnych wynosi 90 cm, a stosunek jednokładności $\frac{2}{3}$; oblicz obwód mniejszego wielokąta!

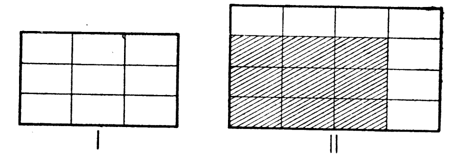
Pola figur podobnych.

a) Na rys. 76 kwadraty I i II są podobne; stosunek odpowiednich boków wynosi $\frac{1}{3}$. Jak rys. 76 wskazuje, pole kwadratu I jest $\frac{1}{9}$ pola kwadratu II. Zatem iloraz pól wynosi $\frac{1}{9}=(\frac{1}{3})^2$.

b) Na rys. 77 prostokąty I i II są podobne; stosunek odpowiednich boków wynosi $\frac{3}{4}$. Jak widać z rysunku, prostokąt I składa się z 9, zaś prostokąt II z 16 takich samych równych prostokątów. Zatem pole prostokąta I wynosi $\frac{9}{16}$ pola prostokąta II. A więc iloraz pól wynosi: $\frac{9}{16}=(\frac{3}{4})^2$.



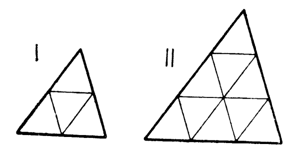
Rys. 76.



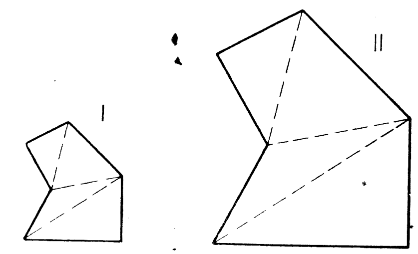
Rys. 77.

c) Na rys. 78 trójkąty I i II są podobne; stosunek odpowiednich boków wynosi $\frac{2}{3}$. Jak widać z rysunku, pole trójkąta I wynosi $\frac{4}{9}$ pola trójkąta II. A więc iloraz pól równa się: $\frac{4}{9}=(\frac{2}{3})^2$.

d) Na rys. 79 mamy dwa wielokąty podobne; stosunek odpowiednich boków wynosi $\frac{1}{2}$. Przy pomocy przekątnych rozbiliśmy oba wielokąty na trójkąty, które są parami podobne. Stosunek odpowiednich boków w dwóch trójkątach podobnych wynosi również $\frac{1}{2}$.



Rys. 78.



Rys. 79.

Zatem pola trójkątów wielokąta I są 4 razy mniejsze od pól odpowiednich trõjkątów wielokąta II.

Wynika stąd, że pole wielokąta I jest cztery razy mniejsze od pola wielokąta II. A więc iloraz pól wynosi: $\frac{1}{4}=(\frac{1}{2})^2$.

Z przykładów powyższych wynika:

Iloraz pól figur podobnych równa się kwadratowi ilorazu odpowiednich boków.

Zadania.

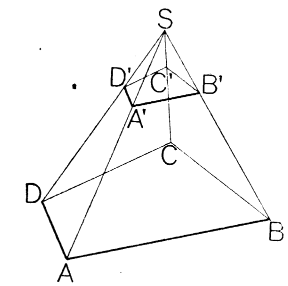
1. Długość boku kwadratu wynosi 3 cm; ile wynosi pole kwadratu o boku: *a)* 2, *b)* 3, *c)* $\frac{5}{2}$ razy większym, *d)* 2, *e)* 3, *f)* 7 razy mniejszym?
2. Obwód kwadratu wynosi 20 cm; ile wynosi pole kwadratu o obwodzie: *a)* 2, *b)* 3 razy większym, *c)* 2, *d)* 4 razy mniejszym?

3. Dany jest prostokąt o wymiarach 3 *cm* i 5 *cm*; ile wynosi pole prostokąta o bokach: *a)* 2, *b)* 5 razy większych, *c)* 3, *d)* 10 razy mniejszych?
4. Prostokąt o podstawie 8 *cm* i wysokości 5 *cm* jest podobny do prostokąta o podstawie 6 *cm*; jaki jest stosunek pól tych prostokątów?
5. Z dwóch wielokątów jednokładnych jeden ma pole 36 cm^2, drugi zaś 4 cm^2; ile wynosi stosunek jednokładności?
6. W dwóch trójkątach podobnych odpowiadające sobie boki wynoszą: *a)* 8 *cm* i 11 *cm*, *b)* 24 *m* i 7 *cm*; ile wynosi stosunek pól tych trójkątów?
7. W dwóch trójkątach podobnych odpowiadające sobie boki wynoszą: *a)* 6 *cm* i 5 *cm*, *b)* 8 *m* i 3 *cm*, przyczem pole pierwszego wynosi: *a)* 24 cm^2, *b)* 32 m^2; ile wynosi pole drugiego trójkąta?
8. Pole rombu wynosi 60 cm^2, a jedna jego przekątna 5 *cm*, pole zaś rombu do niego podobnego wynosi 240 cm^2; oblicz długości przekątnych drugiego rombu!
9. Plan parceli w skali 1 : 1500 jest trójkątem o bokach 5 *cm*, 8 *cm*, 10 *cm*; oblicz pole tej parceli, mierząc na planie wysokość trójkąta!
10. Namiot ma kształt ostrosłupa umiarowego, którego podstawa jest sześciokątem o boku 1·5 *m*, przyczem krawędź boczna wynosi 3 *m*; ile kosztował ten namiot, jeśli za 1 m^2 płótna płacono 10 *zł*?
    Uwaga. Narysuj plan trójkąta bocznego w skali 1 : 50 i zmierz jego wysokość.
11. Zmierz pole powierzchni podwórza, posługując się palikami i taśmą.
    Uwaga. W wierzchołkach figury wbij paliki, zmierz długości wszystkich boków i przekątnych, wychodzących z jednego wierzchołka. Na rysunku w odpowiedniej skali zmierz potrzebne wielkości do obliczenia pól trójkątów, na które przekątne podzieliły daną figurę. Jeśliby taśma okazała się za krótka, to celując wzdłuż kierunku od jednego wierzchołka do drugiego, wbij tak gęsto paliki, aby można było zmierzyć taśmą odległość sąsiednich palików.
12. Zmierz pole gruntu *a)* sposobem, jak w zadaniu 11, *b)* obierając punkt wewnątrz figury i mierząc jego odległości od wszystkich wierzchołków!

Jednokładność i podobieństwo w przestrzeni.

Obierzmy w przestrzeni dowolną figurę $ABCD$ (płaską lub nie), dowolny punkt S, a ponadto dowolną liczbę, np. $\frac{1}{3}$ (rys. 80). Połączmy punkt S z punktami A, B, C, D. Na odcinku SA odetnijmy odcinek $SA' = \frac{1}{3} SA$. Podobnie zaznaczmy punkty B', C', D'.

Figurę $A'B'C'D'$ nazywać będziemy j e d n o k ł a d n ą z figurą $ABCD$. Punkt S nazywamy ś r o d k i e m j e d n o k ł a d n o ś c i. Liczbę $\frac{1}{3}$ s t o s u n k i e m j e d n o k ł a d n o ś c i.



Rys. 80.

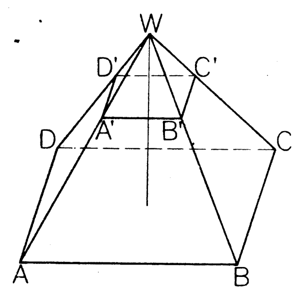
Weźmy pod uwagę trójkąt SAB. Ponieważ $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{1}{3}$, więc odcinki AB i $A'B'$ są równoległe a ponadto $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3}$.

Podobnie odcinki AC, CD... są równoległe odpowiednio do odcinków $A'C'$, $C'D'$... i ponadto $\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \ldots = \frac{1}{3}$.

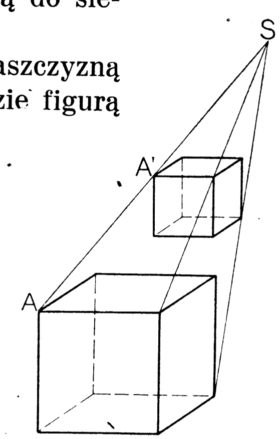
Również, jak na płaszczyźnie, w figurach jednokładnych w przestrzeni odpowiednie boki są do siebie równoległe i proporcjonalne.

Uwaga. Jeżeli ostrosłup przetniemy płaszczyzną równoległą do podstawy, to przekrój będzie figurą jednokładną z podstawą (rys. 81).

Podobnie określamy bryły jednokładne. Na rys. 82 mamy dwa sześciany jednokładne. Środkiem jednokładności jest punkt S; stosunek jednokładności wynosi $\frac{1}{2}$.



Rys. 81.



Rys. 82.

Odpowiednie krawędzie są proporcjonalne i równoległe.

Jeżeli dwie bryły jednokładne rozsuniemy, to mogą przestać być jednokładnemi.

Nazywamy je wówczas p o d o b n e m i.

Zadania.

1. Zrób kulkę z plasteliny i wbij 3 cienkie patyczki tak, aby utworzyły naroże. Wolne końce tych patyczków wyznaczą trójkąt; zaznacz nitkami jakikolwiek trójkąt z nim jednokładny, przyjmując kulkę jako środek jednokładności i zmierz stosunek jednokładności.
2. Zwiąż końce nitki i umieść na modelu ostrosłupa umiarowego w ten sposób, by nitka utworzyła wielokąt jednokładny z podstawą, przyczem wierzchołek ostrosłupa ma być środkiem jednokładności; zmierz stosunek jednokładności! Powtórz to zadanie, obierając rozmaite długości nitek! Jak się zmienia stosunek jednokładności z długością nitki?
3. Dany jest ostrosłup umiarowy, którego podstawa jest kwadratem o boku 5 *cm*. Na jednej krawędzi zaznacz punkt: *a)* w $\frac{1}{2}$, *b)* w $\frac{1}{3}$, *c)* w $\frac{4}{5}$ odległości od wierzchołka i oblicz obwód i pole przekroju płaszczyzną równoległą do podstawy i przechodzącą przez ten punkt.
4. Dwa sześciany jeden o krawędzi 8 *cm*, drugi o krawędzi 5 *cm*, są jednokładne; oblicz: *a)* stosunek jednokładności, *b)* stosunek ich pól, *c)* stosunek ich objętości; *d)* jak możesz wyrazić stosunek pól i stosunek objętości zapomocą stosunku jednokładności?
5. Sześcian o krawędzi 18 *cm* jest jednokładny z drugim, który ma krótszą krawędź, przyczem stosunek jednokładności wynosi $\frac{2}{3}$; oblicz pole i objętość mniejszego sześcianu!
6. Twierdzenie poznane w zadaniach 8, 9 str. 155 stosuje się także do wielokątów jednokładnych w przestrzeni. Aby się o tem przekonać, weź model ostrosłupa i przyjąwszy jego wierzchołek za środek jednokładności, zaznacz na ostrosłupie wielokąt jednokładny z podstawą, gdy stosunek jednokładności wynosi $\frac{3}{4}$. Przyjmując ten sam stosunek jednokładności i obierając dowolnie środek jednokładności w płaszczyźnie podstawy ostrosłupa, narysuj wielokąt jednokładny z podstawą ostrosłupa, a następnie przekonaj się, że oba wielokąty jednokładne z podstawą ostrosłupa są równe. Powtórz to zadanie, przyjmując inny stosunek jednokładności!

Przekroje i rzuty.

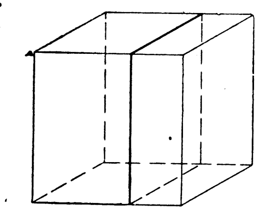
Przekroje płaskie brył.

Przekroje sześcianu.

Sporządźmy model sześcianu.

1. Jeżeli sześcian ten przetniemy płaszczyzną równoległą do jednej ze ścian sześcianu (rys. 83), to przekrojem będzie kwadrat, równy którejkolwiek ścianie.

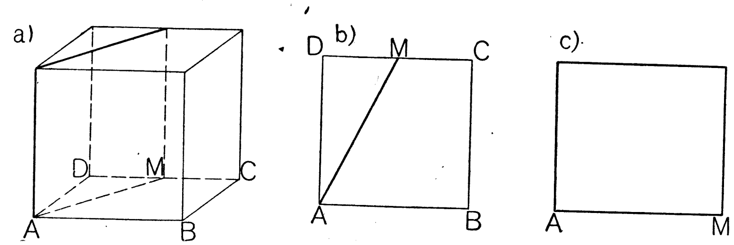
2. Przeprowadźmy płaszczyznę przez jedną z krawędzi sześcianu (rys. 84 *a*). Przekrój będzie prostokątem, którego jednym bokiem będzie krawędź sześcianu.



Rys. 83.

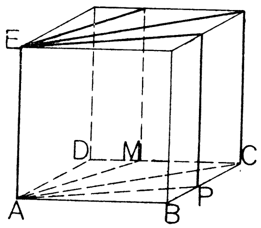
Gdybyśmy mieli na podstawie sześcianu zaznaczoną linję przecięcia płaszczyzny tnącej z podstawą (rys. 84 *b*), to łatwo wyrysowalibyśmy przekrój (rys. 84 *c*).

Jeśli będziemy płaszczyznę tnącą obracać około krawędzi AE, wówczas będzie się zmieniał przekrój, który zawsze będzie jednak prostokątem o tej samej wysokości AE (rys. 85).



Rys. 84.

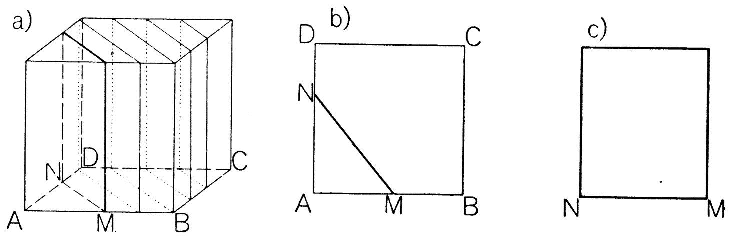
3. Przetnijmy sześcian płaszczyzną prostopadłą do podstawy (rys. 86 *a*). Przekrój będzie prostokątem o wysokości równej krawędzi sześcianu. Rys. 86 *b* i 86 *c* wskazuje, jak wyznaczyć



Rys. 85.

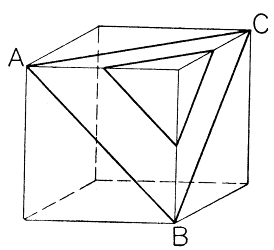
przekrój, jeżeli zaznaczona jest linja przecięcia się płaszczyzny tnącej z podstawą.

4. Przeprowadźmy płaszczyznę przez trzy wierzchołki sześcianu, z których żadne dwa nie leżą na jednej krawędzi (rys. 87). Przekrojem będzie trójkąt równoboczny, o boku równym przekątnej którejkolwiek ściany. Przesuwając płaszczyzny równo-

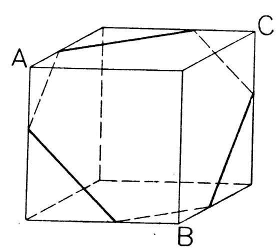


Rys. 86.

legle w jednym kierunku, otrzymamy jako przekroje trójkąty równoboczne, w drugim zaś kierunku początkowo sześciokąty o przeciwległych bokach równoległych (rys. 88).



Rys. 87.

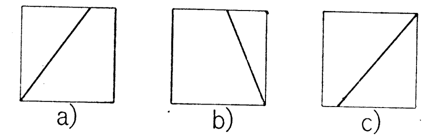


Rys. 88.

Zadania.

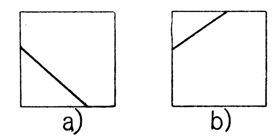
1. Sześcian o krawędzi 3 *cm* przecięto płaszczyzną: *a)* równoległą do podstawy w $\frac{1}{3}$ długości krawędzi, licząc od podstawy, *b)* równoległą do ściany bocznej w $\frac{1}{2}$ krawędzi, *c)* równoległą do ściany przedniej w $\frac{1}{4}$ długości krawędzi, licząc od ściany przedniej.
Narysuj w przypadku *a), b), c)* siatkę sześcianu, zaznaczając na niej odcinki wzdłuż których płaszczyzna tnąca przecina ściany sześcianu.

2. Sześcian o krawędzi 4 *cm* przecięto płaszczyzną przechodzącą przez dwie równoległe krawędzie, nie leżące w tej samej ścianie. Narysuj przekrój, a następnie siatkę tego sześcianu, zaznaczając na niej odcinki, wzdłuż których płaszczyzna tnąca przecina ściany sześcianu.



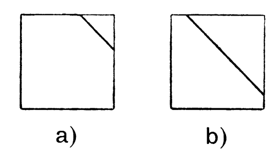
Rys. 89.

3. Sześcian przecięto płaszczyzną, przechodzącą przez krawędź prostopadłą do podstawy w ten sposób, że ta płaszczyzna przecięła podstawę, jak wskazuje rys. 89 *a*, *b* i *c*; narysuj te przekroje!
4. Sześcian przecięto płaszczyzną prostopadłą do podstawy w ten sposób, że ta płaszczyzna przecięła podstawę, jak wskazuje rys. 90 *a*, *b*; narysuj te przekroje!



Rys. 90.

5. Sześcian przecięto płaszczyzną w ten sposób, że ta płaszczyzna przecięła podstawę górną, jak wskazuje rys. 91 *a*, dolną zaś, jak wskazuje rys. 91 *b*; narysuj ten przekrój!



Rys. 91.

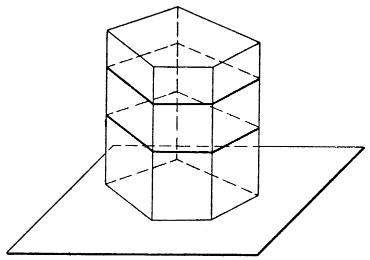
6. Sześcian o krawędzi $3\frac{1}{2}$ *cm* przecięto płaszczyzną, która przecina każdą z trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka w odległości $1\frac{1}{2}$ *cm* od tego wierzchołka. Narysuj przekrój i siatkę sześcianu, zaznaczając na niej odcinki, wzdłuż których płaszczyzna tnąca przecina ściany sześcianu.
7. W sześcianie o krawędzi 6 *cm* poprowadzono przekątną, t. j. odcinek łączący dwa wierzchołki, nie leżące w jednej ścianie. Wyznacz rysunkiem długość tej przekątnej!

Uwaga. Posłuż się przekrojem poprowadzonym przez dwie krawędzie równoległe, nie leżące w jednej ścianie.

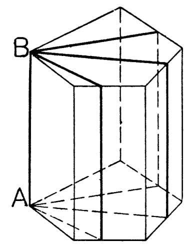
Przekroje graniastosłupa prostego.

Sporządźmy model graniastosłupa prostego.

1. Przekroje graniastosłupa prostego płaszczyznami równoległemi do podstawy są wielokątami równemi podstawie (rys. 92).



Rys. 92.



Rys. 93.

2. Przekrój płaszczyzną przechodzącą przez jedną z krawędzi jest prostokątem (rys. 93). Obracając płaszczyznę tnącą około krawędzi, przez którą przechodzi, otrzymamy jako przekroje prostokąty o tej samej wysokości, o niejednakowych podstawach.

Zadania.

1. Prostopadłościan o wysokości 6 *cm*, którego podstawa ma wymiary 4 *cm* i 3 *cm* przecięto płaszczyzną: *a)* równoległą do podstawy w $\frac{2}{3}$ wysokości, *b)* równoległą do ściany bocznej (o krawędziach 3 *cm* i 6 *cm*) w $\frac{1}{2}$ krawędzi, *c)* równoległą do ściany przedniej w $\frac{2}{5}$ długości krawędzi, licząc od ściany przedniej. Narysuj w przypadku *a), b), c)* przekrój oraz siatkę prostopadłościanu, zaznaczając na niej odcinki, wzdłuż których płaszczyzna tnąca przecina ściany prostopadłościanu.
2. Prostopadłościan o wysokości 4 *cm*, którego podstawa ma wymiary 3 *cm* i $2\frac{1}{2}$ *cm*, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez dwie boczne, nie sąsiednie krawędzie. Narysuj przekrój, a następnie siatkę prostopadłościanu, naznaczając na niej odcinki, wzdłuż których płaszczyzna tnąca przecina ściany prostopadłościann.
3. W prostopadłościanie zadania 1 poprowadzono płaszczyznę przez krawędź boczną ściany przedniej w taki sposób, że odcinek, wzdłuż którego ta płaszczyzna przecina podstawę, tworzy z krawędzią podstawy, leżącą w ścianie przedniej kąt: *a)* 15^0, *b)* 30^0, *c)* 45^0. Narysuj przekrój i siatkę prostopadłościanu, zaznaczając na niej odcinki, wzdłuż których płaszczyzna tnąca przecina ściany prostopadłościanu.
4. Prostopadłościan zadania 1 przecięto płaszczyzną, która

przecina ścianę przednią wzdłuż odcinka równoległego do krawędzi podstawy w wysokości 2 *cm*, tylną zaś ścianę w wysokości 4 *cm*. Narysuj przekrój oraz siatkę prostopadłościanu, zaznaczając na niej odcinki, wzdłuż których przekrój przecina ściany prostopadłościanu.
5. W prostopadłościanie o wymiarach $2\frac{1}{2}$ *cm*, $3\frac{1}{2}$ *cm*, 5 *cm* poprowadzono przekątną; wyznacz rysunkiem długość tej przekątnej. (Porównaj zadanie 7, str. 167).
6. Wyznacz rysunkiem przekątną prostopadłościanu, którym jest np. pudełko zapałek.
Mierzeniem można wyznaczyć długość tej przekątnej w następujący sposób: kładzie się pudełko na kartce papieru i zaznacza ołówkiem na tej kartce dwie równoległe krawędzie *AB* i *CD* dolnej podstawy. Następnie przesuwa się pudełko tak, aby krawędź *AB* pudełka padła na odcinek *CD* narysowany na kartce i mierzy się odległość punktu *A* od odpowiedniego wierzchołka górnej podstawy; odległość ta jest długością przekątnej.
7. Narysuj przekrój graniastosłupa umiarowego sześciokątnego płaszczyzną równoglegią do podstawy, której obwód wynosi 15 *cm*. Czy przekrój zmienia się, gdy płaszczyznę tnącą przesuwamy równolegle do podstawy?
8. Graniastosłup umiarowy o wysokości 6 *cm*, którego podstawa jest sześciokątem o boku 2 *cm*, przecięto płaszczyznami prostopadłemi do podstawy, a przechodzącemi przez dwie boczne krawędzie. Narysuj przekroje!
9. Graniastosłup taki, jak w zadaniu poprzedniem, przecięto płaszczyzną równoległą do jednej ze ścian bocznych w odległości: *a)* $\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 1 *cm*, *c)* $1\frac{1}{2}$ *cm* od tej ściany. Narysuj ten przekrój!
10. Graniastosłup umiarowy sześciokątny o wysokości $5\frac{1}{2}$ *cm*, którego bok podstawy wynosi $2\frac{1}{2}$ *cm*, przecięto płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź boczną i przecina podstawę wzdłuż odcinka, tworzącego z krawędzią podstawy kąt: *a)* 20^0, *b)* 40^0, *c)* 60^0 (wierzchołek tego kąta leży w wierzchołku podstawy). Narysuj ten przekrój!

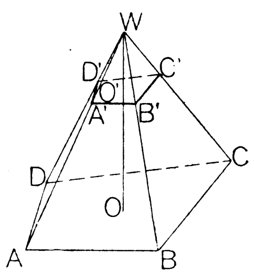
Przekroje ostrosłupa.

Sporządźmy model ostrosłupa.

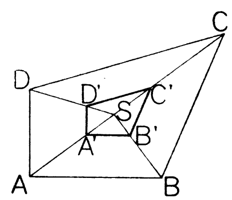
1. Przekrojem ostrosłupa płaszczyzną równoległą do podstawy jest wielokąt jednokładny z podstawą (rys. 94). Stosunek jednokładności równa się ilorazowi $WA' : WA$, $WB' : WB$ i t. d. Jeżeli O i O' są odpowiedniemi punktami podstawy i przekroju, wówczas stosunek jednokładności wynosi również $WO' : WO$.

Na rys. 95 mamy narysowany przekrój płaszczyzną dzielącą krawędź WA w stosunku $1:3$.

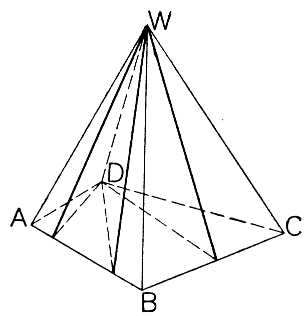
2. Przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną jest trójkątem (rys. 96).



Rys. 94.



Rys. 95.



Rys. 96.

Zadania.

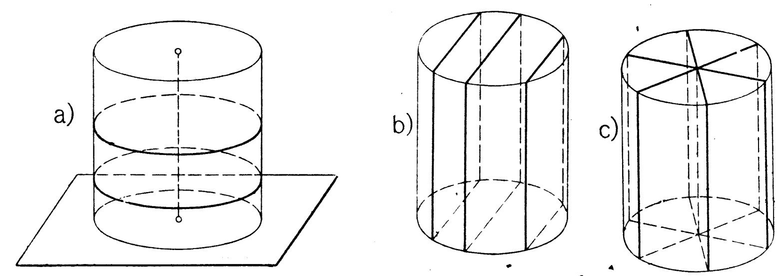
1. Na płaszczyźnie poziomej postawiono ostrosłup umiarowy, którego podstawa jest kwadratem o boku $2\frac{1}{2}$ *cm*, a którego wysokość (t. j. odcinek, łączący wierzchołek ze środkiem podstawy) wynosi 6 *cm*; ostrosłup ten przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy w wysokości: *a)* 2 *cm*, *b)* 4 *cm*. Narysuj ten przekrój! (Zwróć uwagę, że środek podstawy O i przekroju O' są punktami odpowiedniemi).
2. Narysuj przekrój przechodzący: *a)* przez dwie boczne krawędzie (nie leżące w jednej ścianie) ostrosłupa danego w zadaniu poprzedniem, *b)* przez boczną krawędź i punkt połowiący krawędź podstawową.
3. W ostrosłupie podstawa jest dowolnie przez ciebie obranym wielokątem; narysuj przekroje, jakie otrzymasz, przecinając ten ostrosłup płaszczyznami równoległemi do podstawy,

a przechodzącemi przez punkty, dzielące jedną z krawędzi proporcjonalnie do liczb 2, 3 i 4.
4. Ostrosłup umiarowy kwadratowy o krawędzi podstawowej 3 *cm*, bocznej zaś 5 *cm*, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez *a)* oś symetrji i krawędź boczną, *b)* oś symetrji i środek krawędzi podstawowej. Narysuj przekrój *a)* i zmierz w nim wysokość ostrosłupa! Narysuj przekrój *b)* i zmierz w nim wysokość ściany bocznej!
5. Narysuj siatkę ostrosłupa umiarowego, w którym krawędź podstawowa wynosi: *a)* 3 *cm*, *b)* 4 *cm*, wysokość zaś ściany bocznej: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 6 *cm*.
6. Narysuj siatkę ostrosłupa umiarowego kwadratowego o wysokości: *a)* 5 *cm*, *b)* $6\frac{1}{2}$ *cm*, w którym krawędź podstawowa wynosi: *a)* 4 *cm*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *cm*. (Krawędź boczną wyznacz z odpowiedniego przekroju).

Przekroje walca obrotowego.

Sporządźmy model walca obrotowego.

1. Przekroje walca obrotowego płaszczyznami równoległemi do podstawy są kołami o tym samym promieniu, co podstawa (rys. 97 *a*).



Rys. 97.

2. Przekroje płaszczyznami prostopadłemi do podstawy walca są prostokątami o tej samej wysokości (rys. 97 *b*).

3. Przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś walca jest prostokątem o podstawie równej średnicy, a o wysokości równej wysokości walca (rys. 97 *c*).

Zadania.

1. Walec obrotowy o wysokości 5 *cm*, w którym obwód podstawy wynosi 6 *cm*, przecięto płaszczyzną równoległą do

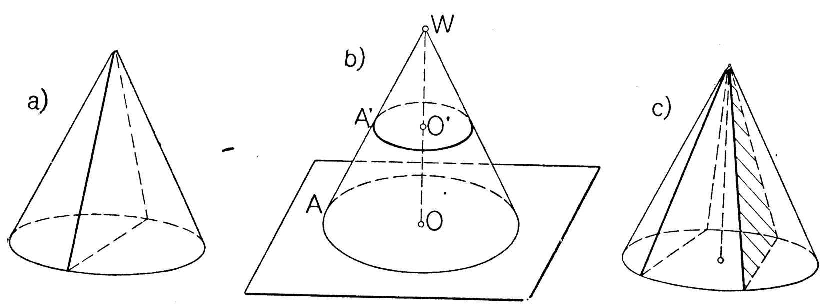
podstawy: *a)* w $\frac{1}{3}$ wysokości, *b)* w $\frac{3}{4}$ wysokości. Narysuj przekrój! Jaką linją na siatce będzie koło, wzdłuż którego przecina płaszczyzna pobocznicę? Zaznacz tę linję na siatce!

2. Walec obrotowy o wysokości 8 *cm*, w którym podstawa jest kołem o promieniu 2 *cm*, przecięto płaszczyzną prostopadłą do podstawy i taką, że odcinek wzdłuż którego płaszczyzna ta przecina podstawę jest bokiem: *a)* kwadratu wpisanego w podstawę; *b)* trójkąta równobocznego wpisanego w podstawę, *c)* sześciokąta umiarowego wpisanego w podstawę. Narysuj przekrój!
3. Obierz na modelu walca obrotowego dwa przekroje tak, aby ich prosta przecięcia wyznaczała: *a)* oś symetrji walca prostopadłą do podstawy, *b)* oś symetrji równoległą do podstawy.
4. Obierz na modelu walca trzy przekroje wzajemnie do siebie prostopadłe tak, aby przechodziły przez środek symetrji walca.

Przekroje stożka obrotowego.

Sporządźmy model stożka obrotowego.

1. Przekrojem stożka płaszczyzną przechodzącą przez oś stożka jest trójkąt równoramienny (rys. 98 *a*). Podstawą tego trójkąta jest średnica podstawy stożka, ramionami są boki stożka.



Rys. 98.

2. Przekrojem stożka obrotowego płaszczyzną równoległą do podstawy jest koło o środku O' na osi stożka (rys. 98 *b*). Koło to jest jednokładnę z podstawą.

Zatem $$\frac{WA'}{WA} = \frac{A'O'}{AO}.$$

Znając więc stosunek jednokładności, łatwo znajdziemy promień przekroju.

3. Przekrój stożka płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek jest trójkątem równoramiennym (rys. 98 *c*). Ramionami tego trójkąta są boki stożka.

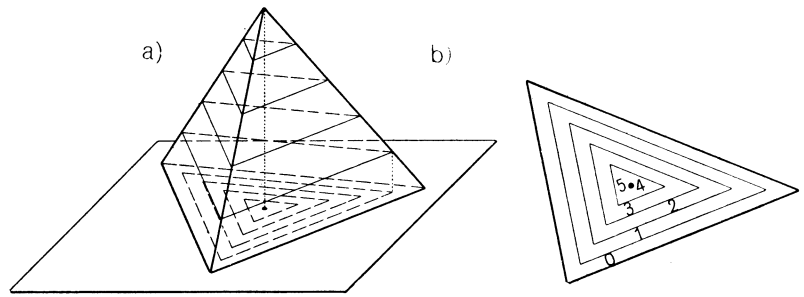
Zadania.

1. Stożek obrotowy o wysokości 8 *cm*, którego podstawa ma promień 2·5 *cm*, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek stożka i środek podstawy. Narysuj przekrój! (Wysokością stożka obrotowego nazywamy odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy).
2. Stożek obrotowy o wysokości 9 *cm*, którego promień podstawy wynosi 3 *cm*, przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy w wysokości: *a)* 2 *cm*, *b)* 5 *cm*. Narysuj przekrój! Podaj stosunek jednokładności w przypadku *a)*, *b)*!
3. Stożek obrotowy o wysokości 7 *cm*, którego promień podstawy wynosi 3 *cm*, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek i cięciwę podstawy. Narysuj przekrój, jeśli długość cięciwy wynosi: *a)* 3 *cm*, *b)* 4 *cm*!
4. Stożek obrotowy ma dowolnie przez ciebie obraną podstawę. Narysuj przekroje, jakie otrzymasz, przecinając ten stożek płaszczyznami równoległemi do podstawy, a przechodzącemi przez punkty dzielące bok stożka proporcjonalnie do liczb 1, 2 i 3.
5. Wyznacz rysunkiem: *a)* wysokość stożka obrotowego, znając jego bok i promień podstawy, *b)* bok stożka obrotowego, znając jego wysokość i promień podstawy.
6. Kulę o promieniu 5 *cm* przecięto: *a)* płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli, *b)* płaszczyznami równoległemi do poprzedniej w odległości 2 *cm* i 3 *cm*. Narysuj przekroje! Jakiemi przekrojami kuli ziemskiej są równik, równoleżnik, południk?

Warstwice.

Postawmy ostrosłup o podstawie trójkątnej na płaszczyźnie poziomej (np. na stole). Przetnijmy ten ostrosłup płaszczyznami poziomemi w wysokości 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm* i t. d. nad płaszczyzną podstawy. Przekroje będą trójkątami (rys. 99 *a*).

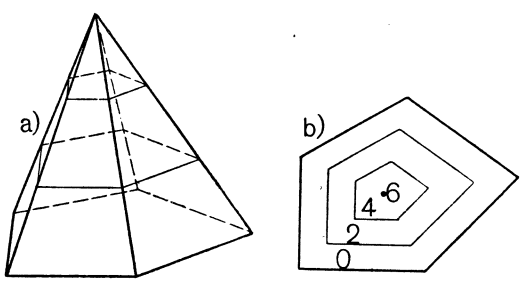
Przerysujmy te trójkąty na płaszczyźnie podstawy tak, jakby one opuszczone pionowo na nią padły i zaznaczmy na każdym z nich wysokość, w jakiej się znajduje. Otrzymamy w ten sposób rysunek jak wskazuje rys. 99 *b*.



Rys. 99.

Linje przekroju danej bryły płaszczyznami poziomemi, nazywamy **w a r s t w i c a m i.**

Warstwice są figurami jednokładnemi z podstawą, przyczem środek jednokładności jest punktem, w którym prosta, przeprowadzona przez wierzchołek prostopadle do płaszczyzny podstawy, przebija podstawę.



Rys. 100.

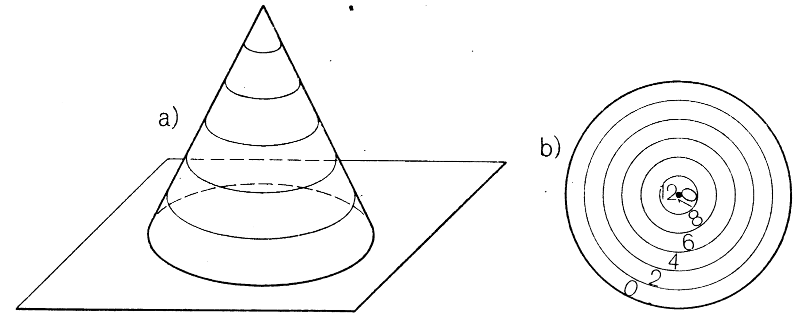
Rysunek 99 *b* nazywamy **p l a n e m w a r s t w i c o w y m** naszego ostrosłupa.

Gdybyśmy wycięli z papieru takie trójkąty, jak przedstawia rysunek 99 *b* i przebiwszy drutem rozsunęli na odpowiednie wysokości, to moglibyśmy sobie wyobrazić nasz ostrosłup.

Na rys. 100 *a* przedstawiony mamy ostrosłup o podstawie pięciokątnej, a obok (rys. 100 *b*) jego plan warstwicowy. Warstwicę otrzymano, przecinając ostrosłup płaszczyznami poziomemi co 2 *cm*.

Na rys. 101 *a* mamy stożek obrotowy, ą obok (rys. 101 *b*)

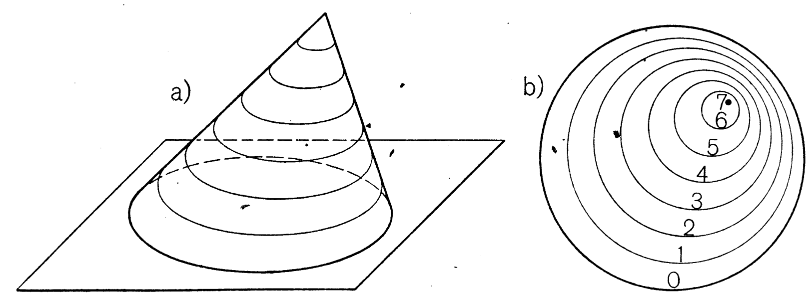
plan warstwicowy. Warstwice otrzymaliśmy przecinając stożek płaszczyznami w wysokości 2 *cm*, 4 *cm*, 6 *cm* i t. d. nad płaszczyzną podstawy.



Rys. 101.

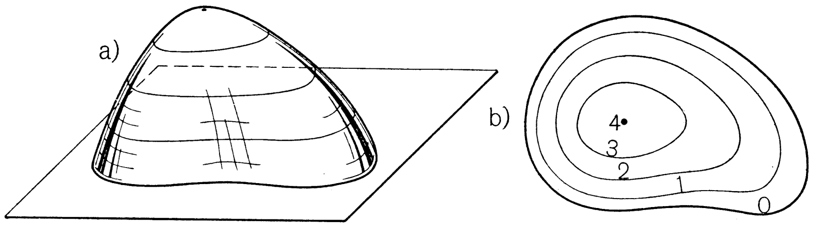
Na rys. 102 *a* mamy stożek pochyły, a obok (rys. 102 *b*) plan warstwicowy. Widzimy, że na planie, z prawej strony warstwice biegną gęściej, niż z lewej. Powodem tego jest to, że powierzchnia stożka opada bardziej stromo z prawej strony, niż z lewej.

Na rys. 103 *a* mamy przedstawioną bryłę kształtu kopy, a obok niej (rys. 103 *b*) jej plan warstwicowy. Z planu widzimy, że bryła opada stromo z lewej strony, łagodniej z prawej. Najwyższy punkt bryły jest na wysokości 4 *cm* nad podstawą.



Rys. 102.

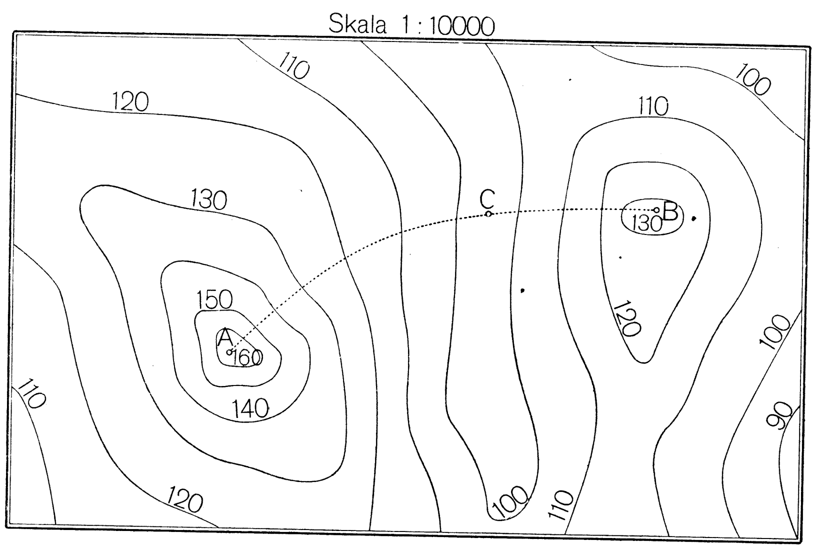
Wycinając warstwice z papieru i przebijając drutem, a następnie podnosząc na odpowiednie wysokości, będziemy mogli wyobrazić sobie w przybliżeniu naszą bryłę.



Rys. 103.

Podobnie możemy podać plan warstwicowy góry, miejscowości, dna morza, jeziora i t. p. Plany takie wykonane w pewnej skali, nazywamy planami topograficznemi.

Zazwyczaj mapy geograficzne przedstawiają nam plany topograficzne. Wysokości warstwic zaznaczone są na mapach kolorami. Z planu topograficznego możemy się zorjentować o układzie pionowym danej miejscowości.



Rys. 104. — Liczby wyrażają wysokości w metrach.

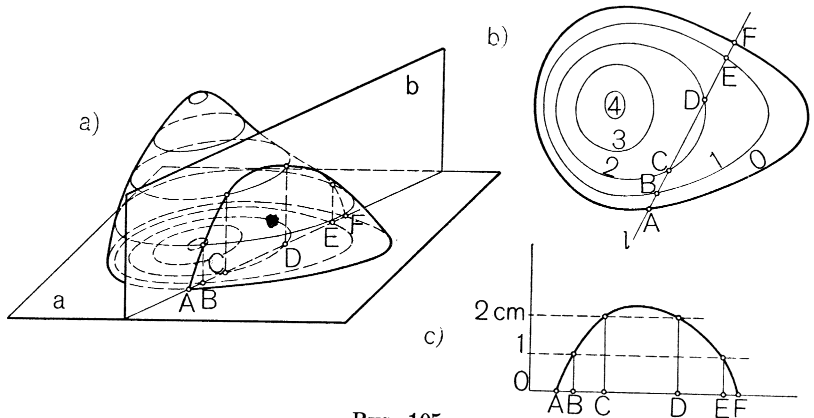
Z planu topograficznego (rys. 104) widzimy, że w danej miejscowości są dwa wzniesienia A i B. A ma wysokość około 160 m, B około 130 m. Idąc drogą kropkowaną z wierzchołka A do B widzimy, że z początku schodzimy wdół, aż do punktu C (na wysokości około 100 m), a następnie dopiero idziemy wgórę.

Zadania.

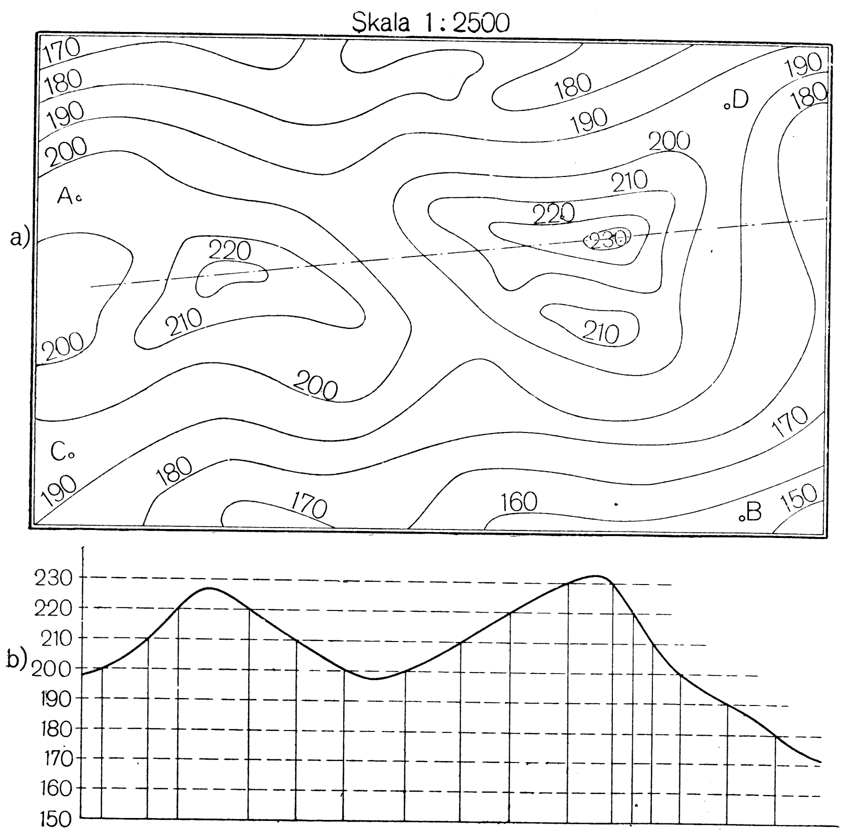
1. Na płaszczyźnie poziomej postawiono ostrosłup umiarowy, którego podstawa jest: *a)* kwadratem o boku 5 *cm*, *b)* trójkątem o boku 3 *cm*, *c)* sześciokątem o boku $1\frac{1}{2}$ *cm*, a którego wysokość wynosi: *a)* 8 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* 6 *cm*; narysuj plan warstwicowy tego ostrosłupa: *a)* co 2 *cm*, *b)* co 1 *cm*, *c)* co $1\frac{1}{2}$ *cm*!
2. Na płaszczyźnie poziomej postawiono ostrosłup, którego podstawa jest prostokątem o bokach 5 *cm* i 3 *cm*; wierzchołek leży na prostej pionowej, przechodzącej przez środek podstawy, w wysokości 7 *cm*. Narysuj jego plan warstwicowy co 1 *cm*! Oprzej się na zadaniu 1 str. 170.
3. Na płaszczyźnie poziomej ustawiono ostrosłup, którego podstawa jest kwadratem o boku 6 *cm*; wierzchołek znajduje się w wysokości 8 *cm* nad podstawą, na prostej pionowej, która przecina przekątnę kwadratu w punkcie odległym o 2 *cm* od środka podstawy. Narysuj jego plan warstwicowy co 2 *cm*!
4. Na płaszczyźnie poziomej postawiono stożek obrotowy, o wysokości 6 *cm*, którego promień podstawy wynosi 2·5 *cm*; narysuj jego plan warstwicowy co 1 *cm*!
5. Na płaszczyźnie poziomej postawiono stożek, którego promień podstawy wynosi 3 *cm*; wierzchołek znajduje się w wysokości 9 *cm* nad podstawą, na prostej pionowej, przechodzącej przez środek promienia podstawy. Narysuj jego plan warstwicowy co $1\frac{1}{2}$ *cm*!
6. Kulę, o promieniu 6 *cm*, przecięto przez środek płaszczyzną poziomą; narysuj plan warstwicowy co 1·2 *cm* półkuli, znajdującej się nad tą płaszczyzną! (Zmierz promienie warstwic na przekroju płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez środek kuli).

Profile.

Na rys. 105 *a* mamy bryłę w kształcie kopy, stojącą na płaszczyźnie poziomej *a*. Na podstawie tej bryły zaznaczony jest plan warstwicowy, przerysowany obok. Przetnijmy tę bryłę płaszczyzną pionową *b*. Przekrój płaszczyzny pionowej z bryłą nazywamy p r o f i l e m. Przekrój ten jest na bryle zaznaczony.



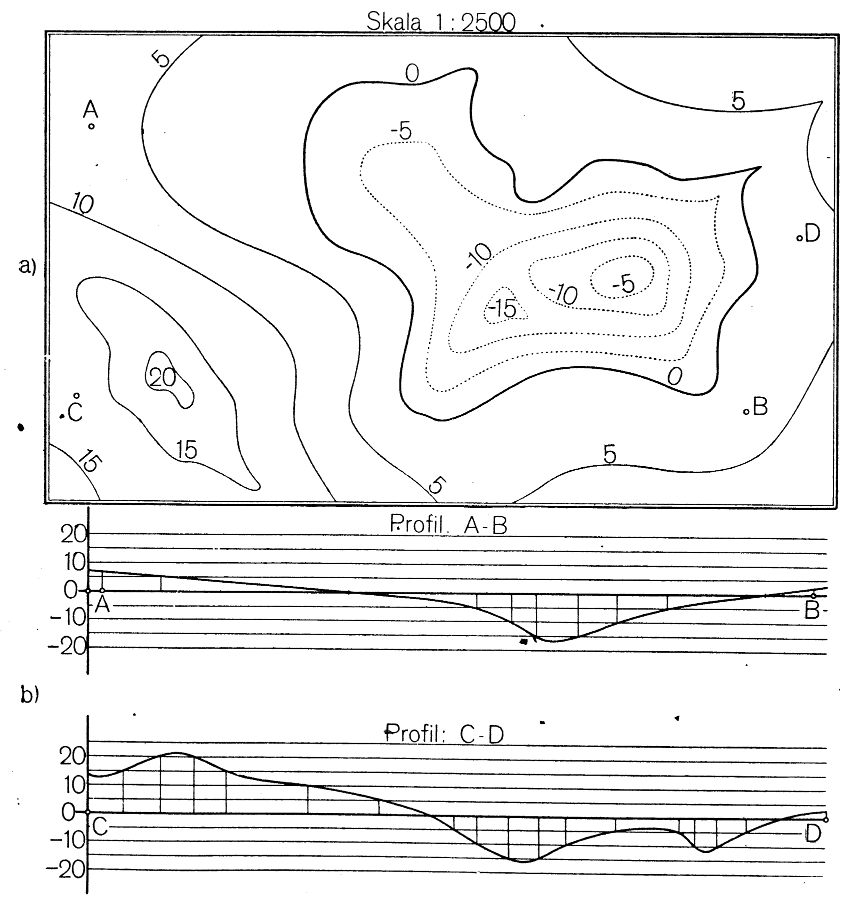
Rys. 105.



Rys. 106. — Liczby wyrażają wysokości w metrach.

Z planu warstwicowego możemy otrzymać profil w następujący sposób: zaznaczamy na planie prostą l (rys. 105 *b*), wzdłuż której płaszczyzna pionowa przecina płaszczyznę poziomą. W punktach przecięcia prostej l z warstwicami w płaszczyźnie tnącej, kreślimy odcinki prostopadłe do l, równe odpowiednio wysokościom warstwic (rysunek powyższy robi się zwyczajnie osobno, jak na rys. 105 *c*). Łącząc końce tych odcinków, otrzymujemy w przybliżeniu profil.

Na rys. 106 *a* mamy plan topograficzny, pewnej miejscowości, a poniżej (rys. 106 *b*) przekrój płaszczyzną pionową, której przecięcie z płaszczyzną poziomą zaznaczone jest na planie.



Rys. 107. — Liczby wyrażają wysokości w metrach.

W profilu odcinki prostopadłe równe są wysokościom warstwic, liczonym od poziomu 150 *m*. Odcinki te są ponadto rysowane w skali tej, co plan topograficzny, t. j. w skali 1 : 2500.

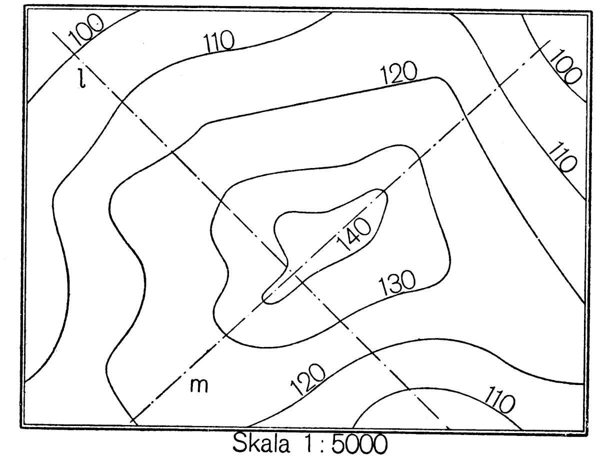
Na rys. 107 *a* mamy plan topograficzny dna jeziora. Znaki —, postawione przed liczbami, oznaczają, że warstwice znajdują się pod poziomem wody jeziora.

Poniżej narysowany jest profil wzdłuż linji *AB* i linji *CD* (rys. 107 *b*).

Uwaga. Aby w profilu uwydatnić wyniosłości gruntu, rysuje się prostopadłe odcinki nie w skali, w jakiej mapa jest sporządzona, ale kilka razy większe, np. 5 lub 10 razy.

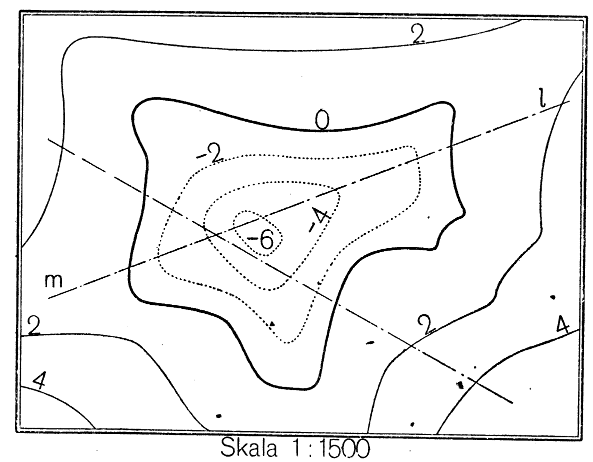
Zadania.

1. Z planów warstwicowych zadań: 1 *a*, 1 *b*, 1 *c*, str. 177, narysuj kilka profilów ostrosłupa!
2. Z planu warstwicowego zadania 2, str. 177, narysuj kilka profilów ostrosłupa.
3. Z planu warstwicowego zadania 3, str. 177, narysuj kilka profilów ostrosłupa!
4. Z planu warstwicowego zadania 4, str. 177, narysuj kilka profilów stożka!
5. Z planu warstwicowego zadania 5, str. 177, narysuj kilka profilów stożka!
6. Z planu warstwicowego zadania 6, str. 177, narysuj kilka profilów do siebie równoległych!
7. Piramida Cheopsa w Egipcie ma kształt ostrosłupa umiarowego o wysokości 137 *m*, przyczem podstawa jest kwadratem o boku 222 *m*; narysuj plan warstwicowy co 20 *m* w skali 1 : 2000, a następnie kilka profilów.
8. Kopiec Kościuszki w Krakowie ma kształt stożka obrotowego o wysokości 34 *m*, przyczem podstawa ma średnicę 80 *m*; narysuj plan warstwicowy co 4 *m* w skali 1 : 500, a następnie kilka profilów.
9. Z planu warstwicowego na rys. 108, narysuj profil, przechodzący przez prostą *l* i przez prostą *m*, przyczem długości prostopadłych rysuj w skali *a)* podanej na rysunku, *b)* 5 razy powiększonej.



Rys. 108. Liczby wyrażają wysokości w metrach.

10. Z planu warstwicowego jeziora (rys. 109) narysuj profil, przechodzący przez prostą *l* i przez prostą *m*, przyczem długości prostopadłych rysuj w skali *a)* podanej na rysunku, *b)* 5 razy powiększonej.

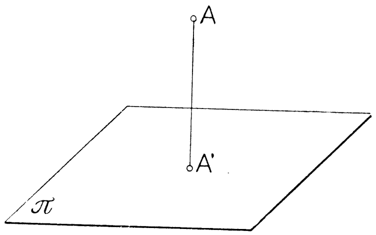


Rys. 109. Liczby wyrażają wysokości w metrach.

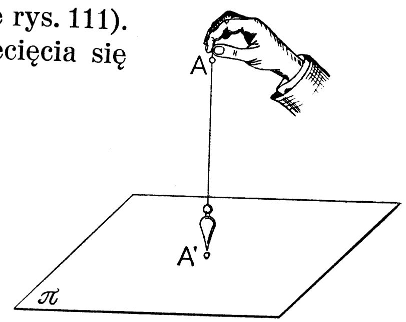
Rzuty prostokątne.

Rzut punktu.

Przypuśćmy, że mamy dany punkt A i płaszczyznę π poziomą (rys. 110), np. podłogę lub powierzchnię stołu. Przeprowadźmy przez punkt A prostą prostopadłą do płaszczyzny π (prostą tę moglibyśmy poprowadzić przy pomocy pionu, jak wskazuje rys. 111). Oznaczmy przez A' punkt przecięcia się



Rys. 110.

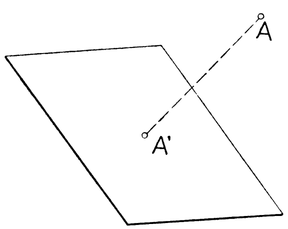


Rys. 111.

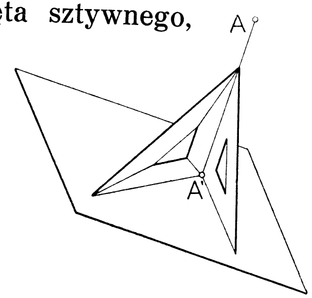
tej prostej z płaszczyzną π. Punkt A' nazywamy **rzutem punktu** A na płaszczyznę π. Płaszczyznę π nazywamy **płaszczyzną rzutów** albo **rzutnią**.

Jeżeli punkt A leży na płaszczyźnie rzutów, to punkt A jest równocześnie swoim rzutem.

Podobnie określamy rzut punktu A na dowolnie nachyloną płaszczyznę π (rys. 112). Przez punkt A prowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny (można to uskutecznić przy pomocy dwóch ekierek i pręta sztywnego,



Rys. 112.

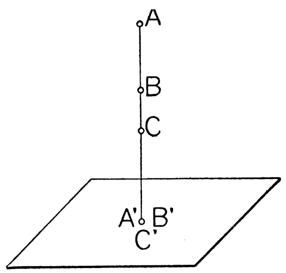


Rys. 113.

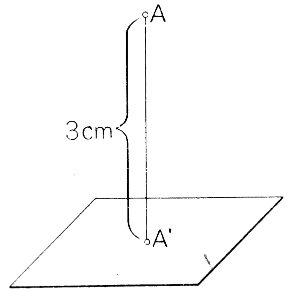
przedłużającego wspólną przekątną, jak na rys. 113). Punkt A' przecięcia się tej prostej z płaszczyzną π nazywamy **rzutem punktu** A na płaszczyznę π.

Uwaga. Jeżeli mamy dany rzut punktu, to nie wiemy jeszcze, gdzie punkt się znajduje.

Na rys. 114 płaszczyzna π jest poziomą. Punkty $A, B, C\ldots$, leżące na tej samej linji pionowej, mają wspólny rzut.



Rys. 114.



Rys. 115.

Jeżeli np. mamy dany rzut punktu A na płaszczyznę poziomą π i przez ten rzut poprowadzimy linję pionową, to wiemy tylko, że na tej linji pionowej punkt A się znajduje. Gdybyśmy jeszcze wiedzieli w jakiej wysokości nad płaszczyzną π punkt się znajduje, to moglibyśmy wówczas punkt A wyznaczyć (rys. 115).

Zadania.

1. Trzymaj nad stołem ołówek i przez jego koniec poprowadź pion, aż dotknie stołu w punkcie A'; jak możesz nazwać płaszczyznę stołu, jak punkt A'?
2. Ustaw kartkę papieru pionowo, obierz na niej kilka punktów i wyznacz ich rzuty na kartkę poziomą.
3. Ustaw na kartce papieru (kartonie): *a)* sześcian, *b)* prostopadłościan, *c)* graniastosłup prosty i utwórz rzuty prostokątne wierzchołków tej bryły, przyjmując kartkę papieru za rzutnię. Przechyl kartkę tak, aby bryła nie zmieniła wobec niej swego położenia; gdzie wówczas będą rzuty prostokątne wierzchołków bryły, jeśli nadal rzutnią będzie kartka papieru?
4. Ustaw równoległościan na kartce papieru i zaznacz na niej rzuty prostokątne wierzchołków tego równoległościanu; powtórz to zadanie, ustawiając inną ścianę równoległościanu na kartce!
5. Wytnij trójkąt z kartonu i ustaw tak, aby leżał: *a)* w płaszczyźnie równoległej do dowolnie obranej rzutni, *b)* w pła-

szczyźnie prostopadłej do dowolnie obranej rzutni. Oznacz wierzchołki trójkąta przez A, B, C, a ich prostokątne rzuty przez A', B', C'. Porównaj długości odcinków AA', BB', CC' w przypadku zadania *a)*! Gdzie leżą punkty A', B', C' w przypadku zadania *b)*?

6. Gdzie znajduje się rzut prostokątny wierzchołka: *a)* ostrosłupa umiarowego, *b)* stożka obrotowego, jeżeli podstawa leży w płaszczyźnie rzutów?
7. Obierz odcinek (ołówek) i ustawiaj pokolei tak, aby rzuty prostokątne jego końców: *a)* na rzutnię poziomą, *b)* pionową, *c)* nachyloną do poziomu, padały w tym samym punkcie. Jakie za każdym razem jest położenie odcinka wobec rzutni i wobec płaszczyzny poziomej?
8. Obierz punkt A' na płaszczyźnie poziomej i *a)* wskaż kilka punktów, których rzutem na tę płaszczyznę jest punkt A', *b)* wskaż punkt A (którego rzutem jest A'), znajdujący się w wysokości 4 *cm* nad płaszczyzną poziomą!
9. *a)* Rzut A' punktu A (lampy) odległy jest o 3 *m* od punktu B' (rogu pokoju), położonego w płaszczyźnie rzutów (podłodze); zmierz długość odcinka AB' (lampy od rogu pokoju) wiedząc, że odcinek AA' (wysokość lampy nad podłogą) ma długość 2 *m*!

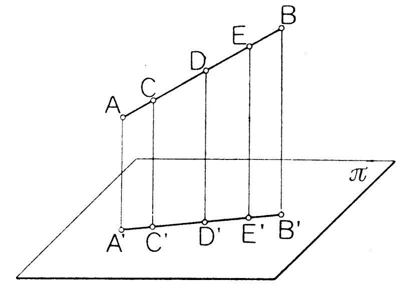
   b) Jak wysoko nad płaszczyzną rzutów znajduje się punkt A, jeśli jego rzut A' odległy jest o $3\frac{1}{2}$ *m* od punktu B', położonego w płaszczyźnie rzutów, a długość odcinka AB' wynosi 6 *m*?

Rzut odcinka.

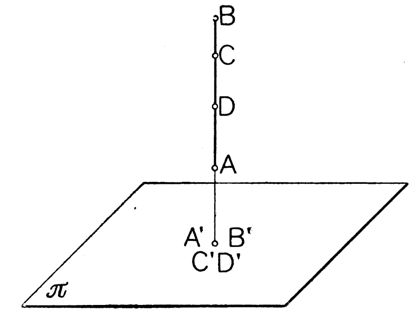
Przypuśćmy, że mamy dany odcinek AB i płaszczyznę π, np. poziomą (rys. 116). Przy pomocy pionu można się przekonać, że rzuty na płaszczyznę π poszczególnych punktów odcinka AB utworzą odcinek $A'B'$, t. j. odcinek łączący rzut punktu A z rzutem punktu B. Odcinek $A'B'$ nazywamy r z u t e m o d c i n k a AB na płaszczyznę π.

Jeżeli odcinek AB jest prostopadły do płaszczyzny π (t. zn. jeżeli AB jest pionowy), wówczas rzutem jego jest punkt, jak wskazuje rys. 117.

Aby więc rzut odcinka wyznaczyć, wystarczy wyznaczyć rzuty jego końców (rys. 118).

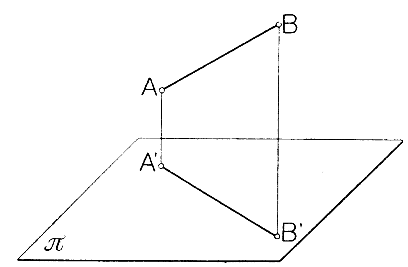


Rys. 116.

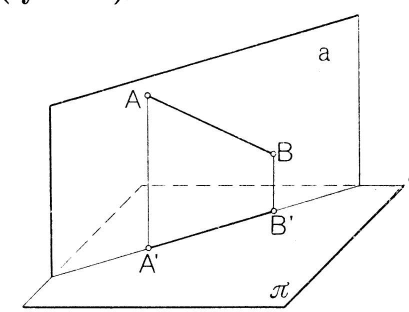


Rys. 117.

Jeżeli przez odcinek AB poprowadzimy płaszczyznę a prostopadłą do płaszczyzny rzutów π (a więc pionową, jeżeli płaszczyzną rzutów jest płaszczyzna pozioma), wówczas przekonamy się, że rzut odcinka AB leży w linji przecięcia się płaszczyzny a z płaszczyzną π (rys. 119).

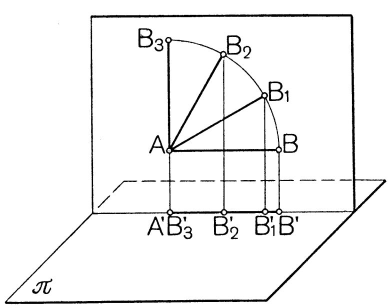


Rys. 118.



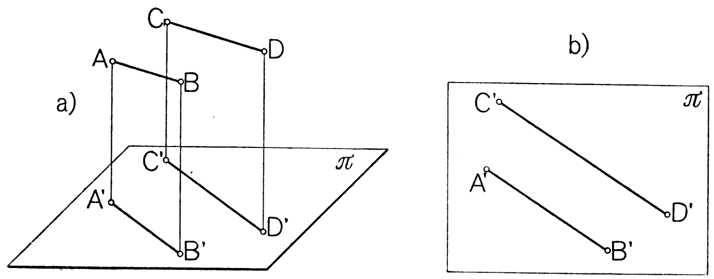
Rys. 119.

Jeżeli odcinek AB jest równoległy do płaszczyzny π, wówczas rzut jego $A'B'$ jest tej samej wielkości (rys. 120). Jeżeli będziemy odcinek AB obracali około punktu A w płaszczyźnie pionowej, to, jak widać z rysunku, rzut odcinka będzie malał. Z chwilą gdy odcinek AB przyjmie położenie pionowe (na rysunku zaznaczone AB_3), wówczas rzut jego będzie punktem. Widzimy stąd, że rzut odcinka AB jest zawsze krótszy od samego odcinka, z wyjątkiem tylko



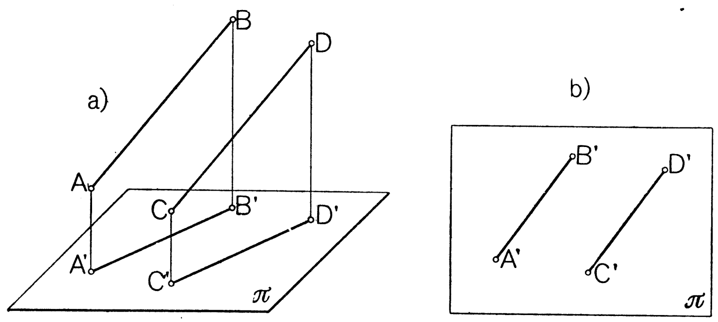
Rys. 120.

wypadku, gdy odcinek AB jest równoległy do płaszczyzny π; w tym wypadku odcinek AB jest równy swojemu rzutowi.



Rys. 121.

Jeżeli mamy dwa odcinki równoległe AB i CD, to rzuty ich są również równoległe (rys. 121).



Rys. 122.

Jeżeli odcinki równoległe AB i CD są równe, wówczas ich rzuty są równoległe i równe (rys. 122).

Zadania.

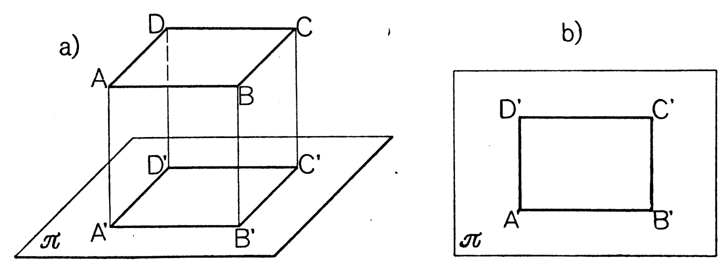
1. Obierz, jako rzutnię: *a)* płaszczyznę poziomą, *b)* pionową, *c)* nachyloną do płaszczyzny poziomej i ustaw ołówek w taki sposób, aby jego rzut był odcinkiem tej samej długości, krótszym lub punktem. Jakie położenie za każdym razem będzie miał ołówek wobec płaszczyzny rzutów?
2. Rzuty dwóch odcinków przecinają się; czy te odcinki muszą się też przecinać? Wyjaśnij odpowiedź na przykładzie dwóch ołówków odpowiednio ustawionych względem płaszczyzny rzutów.

3. Odcinek AB ma rzut $A'B'$; jakie jest położenie odcinka AB wobec rzutni, jeśli: *a)* czworokąt $AA'B'B$ jest prostokątem, *b)* trapezem, *c)* $AA'B'B$ nie tworzy czworokąta?
4. Koniec A odcinka AB o długości $8\,cm$ leży na płaszczyźnie rzutów, odcinek zaś tworzy ze swym rzutem kąt 30^0; jak długi jest rzut tego odcinka?
5. Mamy dany odcinek AB, jak w zad. 4; wyznacz na odcinku $A'B'$ rzut punktu C: *a)* połowiącego odcinek AB, *b)* dzielącego odcinek AB proporcjonalnie do liczb 2 i 3.
6. Odcinek AB tworzy kąt 30^0 ze swym prostokątnym rzutem $A'B'$; na odcinku AB zaznaczona jest podziałka w *cm*. Jaką podziałkę na odcinku $A'B'$ wyznaczają rzuty prostokątne podziałki, znajdującej się na odcinku AB?
7. Obierz jedną z krawędzi sześcianu i ustaw tak sześcian, aby prostokątny rzut tej krawędzi był równocześnie rzutem prostokątnym drugiej krawędzi. Powtórz to zadanie z prostopadłościanem, równoległościanem, graniastosłupem umiarowym sześciokątnym!
8. Ustaw kartkę papieru pionowo i narysuj na niej odcinek tak, aby jego prostokątny rzut na płaszczyznę poziomą był *a)* odcinkiem tej samej długości, *b)* odcinkiem krótszym, *c)* punktem.

Rzuty figur płaskich.

Rzut prostokąta.

Obierzmy płaszczyznę poziomą π (np. powierzchnię stołu) za płaszczyznę rzutów (rys. 123*a*). Ustawmy dowolny prostokąt $ABCD$ (wycięty z kartonu) poziomo, t. j. równolegle do π.

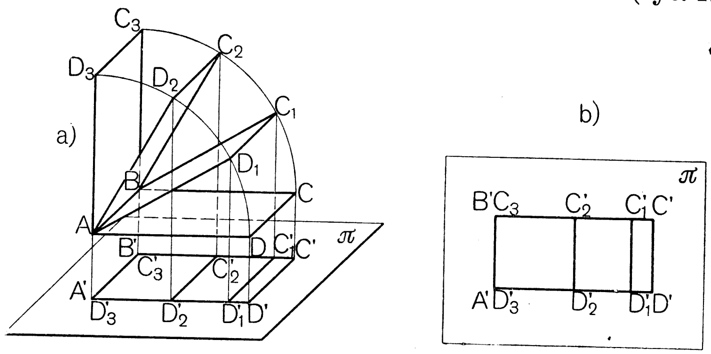


Rys. 123.

Jeżeli utworzymy rzuty tego prostokąta, to otrzymamy równy jemu prostokąt $A'B'C'D'$. Prostokąt $A'B'C'D'$ nazywamy **rzutem prostokąta** $ABCD$.

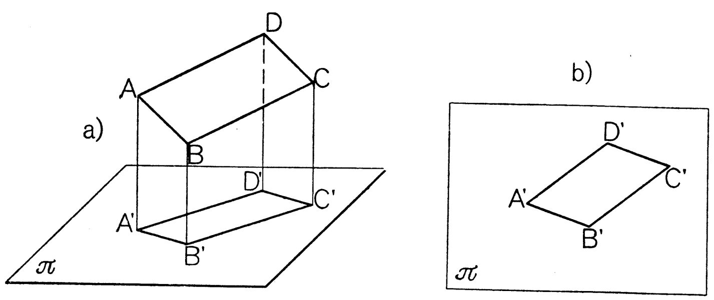
Rzut prostokąta $ABCD$ jest przerysowany obok na rys. 123 *b*.

Ustawmy prostokąt $ABCD$ poziomo, jak poprzednio, i obracajmy go około jednego z boków, np. około boku AB (rys. 124 *a*).



Rys. 124.

Rzut będzie nadal prostokątem, którego jednym bokiem będzie $A'B'$, drugi zaś bok (sąsiedni) będzie coraz to krótszy. Jeżeli prostokąt nasz przyjmie położenie pionowe ABC_3D_3, wówczas rzutem jego będzie odcinek $A'B'$. Rzut prostokąta $ABCD$ jest przerysowany obok na rys. 124 *b*.



Rys. 125.

Podobny wynik otrzymamy, gdy obierzemy dowolną płaszczyznę rzutów (niekoniecznie poziomą).

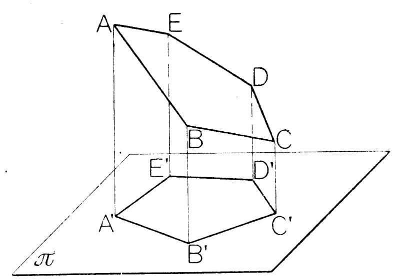
Widzimy zatem, że jeżeli jeden bok prostokąta jest równoległy do płaszczyzny rzutów, wówczas rzut prostokąta jest prostokątem, z wyjątkiem wypadku, gdy prostokąt jest prostopadły do płaszczyzny rzutów; w wypadku tym rzut jest odcinkiem.

Jeżeli prostokąt jest dowolnie nachylony do płaszczyzny rzutów, wówczas rzut jest równoległobokiem (rys. 125). Przeciwległe bowiem boki prostokąta są równoległe i równe a więc rzuty ich są również równoległe i równe.

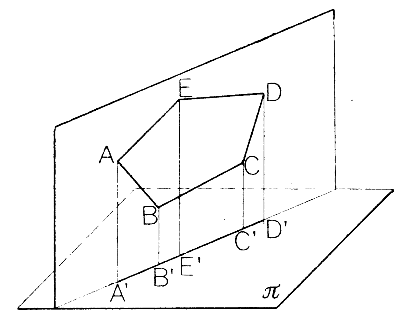
Rzut dowolnej figury.

Jeżeli mamy dowolną figurę, np. $ABCDE$ (rys. 126), to tworząc rzuty jej wierzchołków i łącząc je odpowiednio odcinkami, otrzymamy rzut tej figury.

Rzut będzie figurą, mającą naogół inne boki i inne kąty, niż wielokąt $ABCDE$.



Rys. 126.



Rys. 127.

Jeżeli wielokąt $ABCDE$ będzie leżał w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny rzutów, wówczas rzut będzie wielokątem równym wielokątowi $ABCDE$.

Jeżeli wielokąt $ABCDE$ będzie leżał w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rzutów, wówczas rzut jego będzie odcinkiem (rys. 127).

Zadania.

1. Wytnij z kartonu: *a)* trójkąt, *b)* prostokąt, *c)* sześciokąt umiarowy i wyznacz pokolei jego rzut na rzutnię poziomą, pionową, ustawiając figurę jednym razem równolegle, drugim prostopadle do płaszczyzny rzutów.
2. Wytnij z kartonu prostokąt o wymiarach 5 *cm* i 10 *cm*; *a)* ustaw go równolegle do płaszczyzny rzutów i narysuj jego rzut, *b)* ustaw tak, aby krótszy bok leżał w płaszczyźnie rzutów i aby rzut tego prostokąta był kwadratem;

jak długi jest bok tego kwadratu i jaki kąt tworzy wówczas dłuższy bok prostokąta ze swoim rzutem? *c)* jeśli dłuższy bok prostokąta leży w płaszczyźnie rzutów, czy jest możliwe, aby rzut tego prostokąta był kwadratem?

3. Kwadrat leży w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rzutów; jak należy go ustawić, aby rzut jego był odcinkiem: *a)* najdłuższym, *b)* najkrótszym? Jaki kąt tworzy jeden z boków kwadratu ze swoim rzutem w przypadku *a)*, jaki w przypadku *b)*?
4. Podstawa graniastosłupa prostego leży w płaszczyźnie rzutów; na każdej ze ścian jego pobocznicy narysowany jest odcinek, którego końce leżą na krawędziach bocznych. Jaką figurę tworzą rzuty tych odcinków?
5. Sześcian o krawędzi 8 *cm* ma tylko jedną krawędź leżącą w płaszczyźnie rzutów, a inna krawędź tworzy ze swoim rzutem kąt 45^0; narysuj rzuty ścian tego sześcianu!
6. Narysuj rzut jednej ściany bocznej ostrosłupa umiarowego, którego podstawa leży w płaszczyźnie rzutów i jest: *a)* trójkątem o boku 8 *cm*, *b)* kwadratem o boku 6 *cm*, *c)* sześciokątem o boku 4 *cm*.

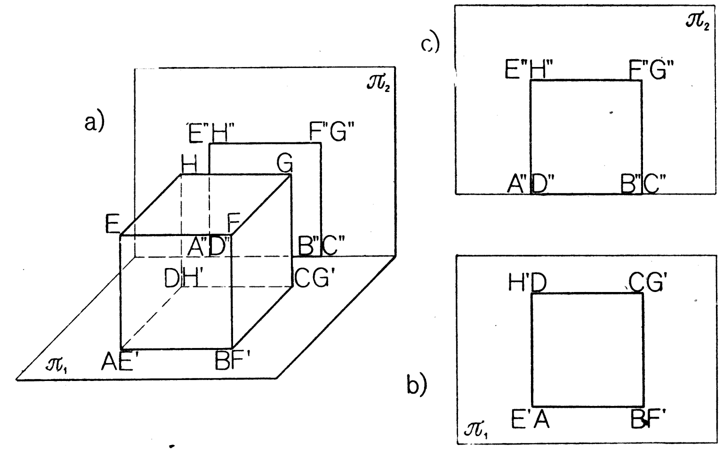
Rzuty brył.

Na rys. 128*a* mamy sześcian, spoczywający na płaszczyźnie poziomej π_1 (np. na stole). Rzuty jego krawędzi na płaszczyznę π_1 utworzą kwadrat (rys. 128*b*), równy podstawie.

Na rys. 128*c* mamy rzut sześcianu na płaszczyznę pionową, równoległą do ściany sześcianu. Rzut jest również kwadratem. (Rzuty na płaszczyznę pionową oznaczone są przez A'', B'' i t. d.).

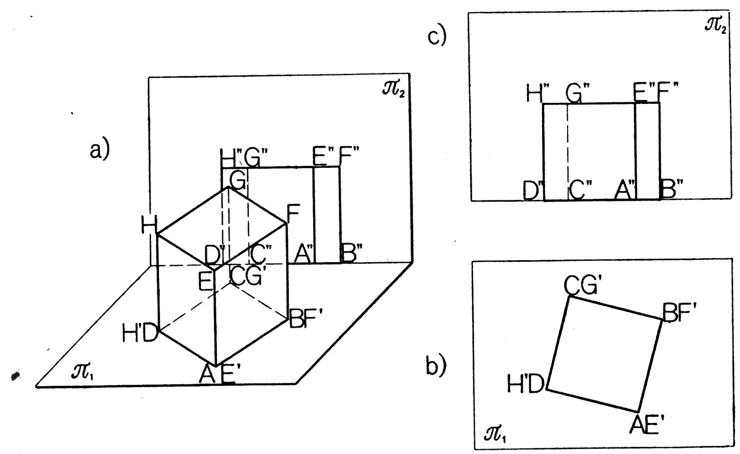
Na rys. 129*a* mamy sześcian o podstawie poziomej i płaszczyznę π_2 pionową, nierównoległą do ścian sześcianu. Na rys. 129*b* mamy rzut sześcianu na płaszczyznę π_1, a na rys. 129*c* na płaszczyznę π_2. Rzut podstawy $ABCD$ jest odcinkiem. Rzuty krawędzi pionowych AE, BF i t. d. są prostopadłe do rzutu podstawy i równe są tym krawędziom.

Na rys. 130*a* mamy prostopadłościan o podstawie poziomej, na rys. 130*b* rzut tego prostopadłościanu na płaszczyznę poziomą π_1, zaś na rys. 130*b* rzut na płaszczyznę pionową π_2, nierównoległą do ścian. Rzuty $D''H''$, $C''G''$ i t. d. są równe krawędziom DH, CG i t. d.



Rys. 128.

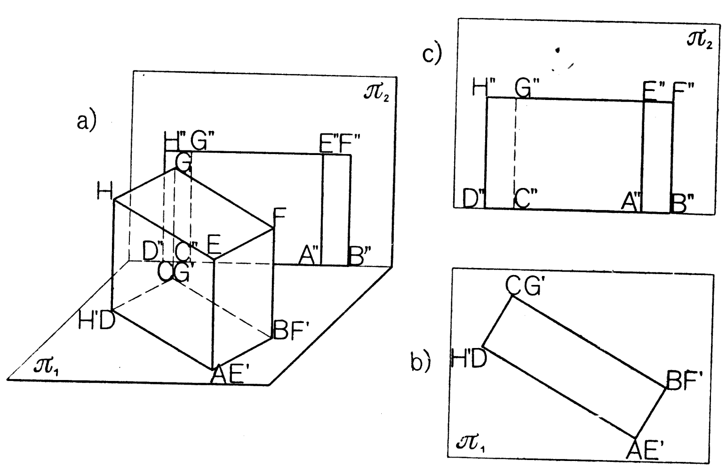
Na rys. 131*a* mamy graniastosłup prosty o podstawie poziomej. Na rys. 131*b* mamy jego rzut na płaszczyznę poziomą π_1. Rzut ten jest równy podstawie. Na rys. 131*c* mamy rzut gra-



Rys. 129.

niastosłupa na płaszczyznę pionową π_2. Rzuty $E''J''$, $A''F''$... są odpowiednio równe krawędziom EJ, AF...

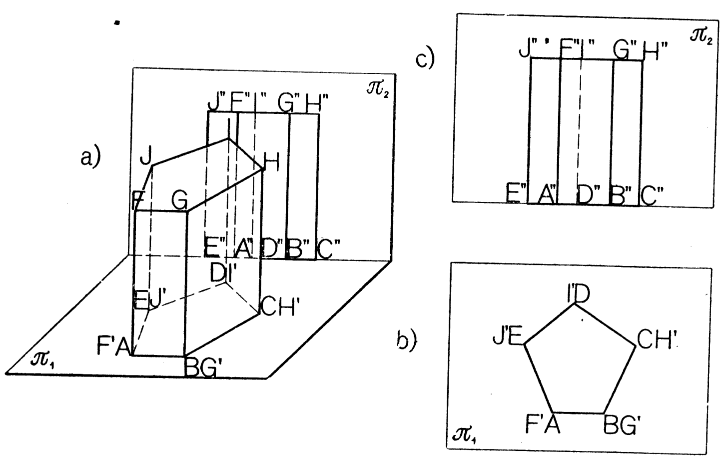
Na rys. 132*a* mamy ostrosłup prosty o podstawie poziomej kwadratowej. Rzut na płaszczyznę poziomą π_1 (rys. 132*b*) jest kwadratem równym podstawie, w którego środku jest rzut wierzchołka W.



Rys. 130.

Na rys. 132*c* mamy przedstawiony rzut na płaszczyznę pionową π_2. Widzimy, że rzut podstawy $ABCD$ jest odcinkiem. Prostopadła $W''O''$ do odcinka $D''B''$ równa jest wysokości WO ostrosłupa.

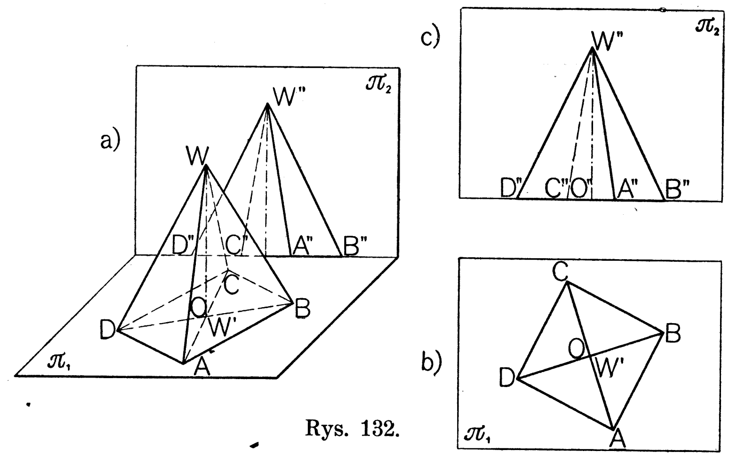
Na rys. 133*a* mamy walec obrotowy o podstawie poziomej.



Rys. 131.

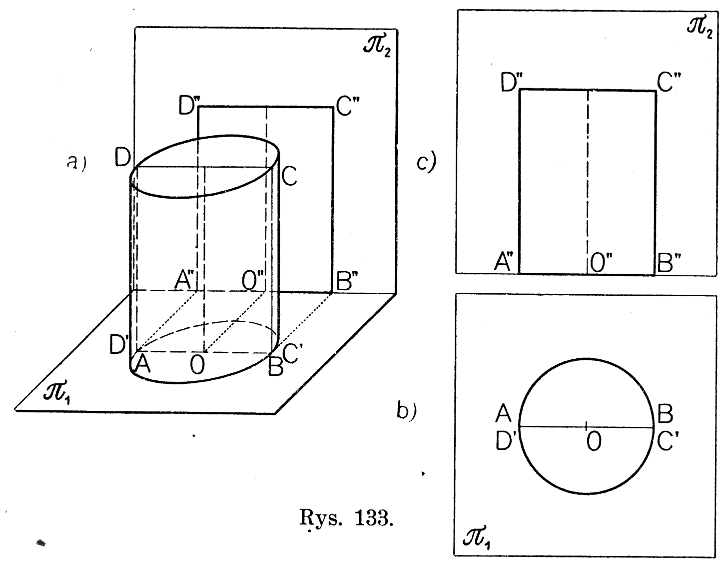
Na rys. 133*b* mamy jego rzut na płaszczyznę poziomą π_1. Rzut jest kołem równem podstawie. Rzut na płaszczyznę pionową (rys. 133*c*) jest prostokątem o podstawie równej średnicy podstawy walca i o wysokości równej wysokości walca.

Na rys. 134*a* mamy stożek obrotowy o podstawie poziomej. Na rys. 134*b* mamy jego rzut na płaszczyznę poziomą π_1.



Rys. 132.

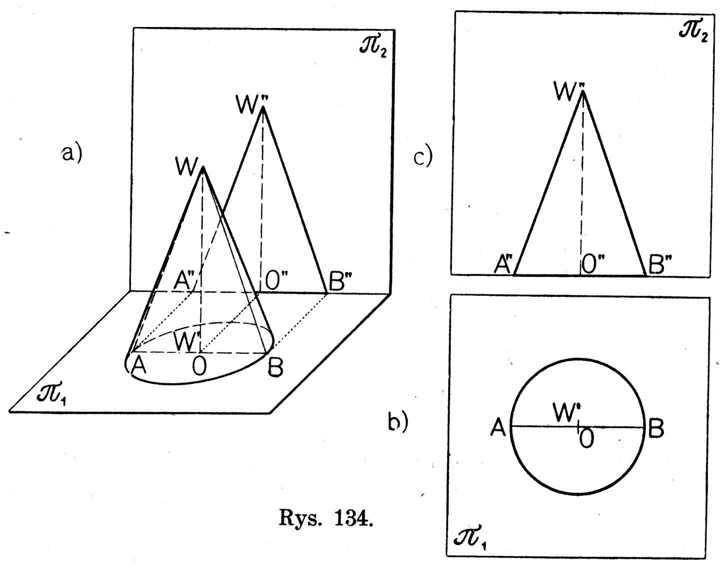
Rzut na płaszczyznę pionową π_2 (rys. 134*c*) jest trójkątem równoramiennym, o ramionach równych bokowi stożka. Wysokość jego $W''O''$ równa jest wysokości stożka WO.



Rys. 133.

Na rys. 135*a* mamy kulę. Na rys. 135*b* mamy rzut kuli na płaszczyznę π. Rzut jest kołem o promieniu równym promieniowi kuli.

Na rys. 136*a* mamy bryłę złożoną z kilku prostopadłościanów ustawionych na sobie i ostrosłupa, położonego na wierzchu, o podstawie kwadratowej. Z rzutów na płaszczyznę

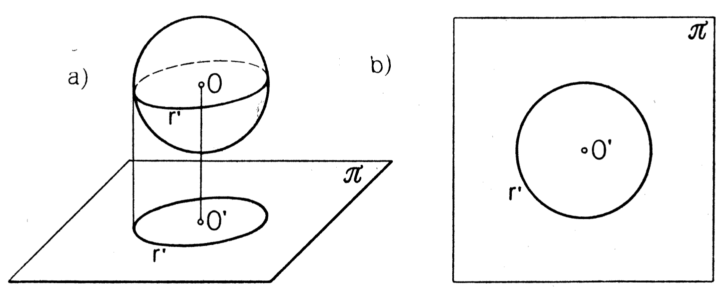


Rys. 134.

poziomą (rys. 136*b*) i na płaszczyznę pionową (rys. 136*c*) możemy odczytać wymiary prostopadłościanów i ostrosłupa.

Zadania.

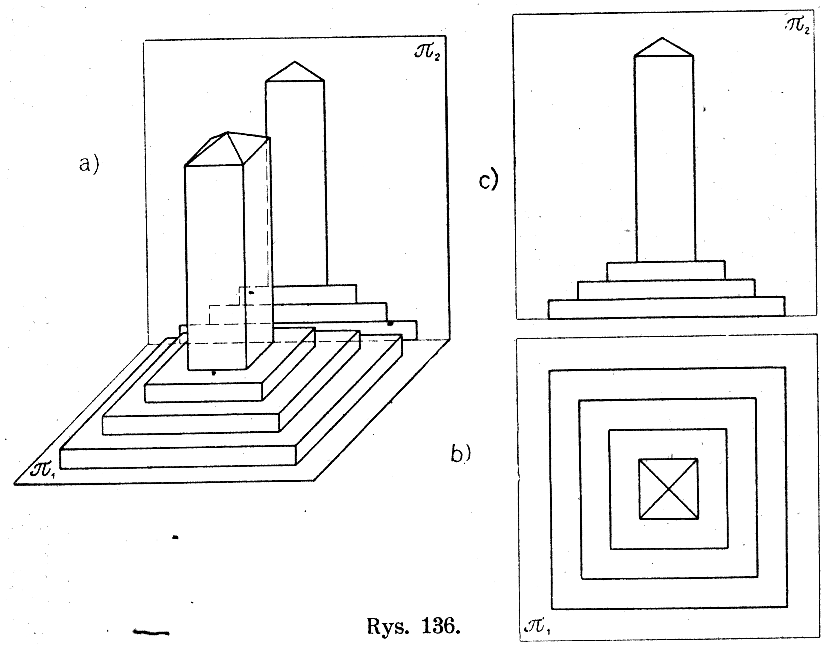
1. Narysuj i oznacz rzuty sześcianu o krawędzi 4 *cm* na dwie płaszczyzny, z których: *a)* jedna przechodzi przez jego podstawę, druga zaś jest równoległa do ściany bocznej, *b)* jedna przechodzi przez dolną podstawę, druga zaś jest równoległa do przekroju, poprowadzonego przez dwie



Rys. 135.

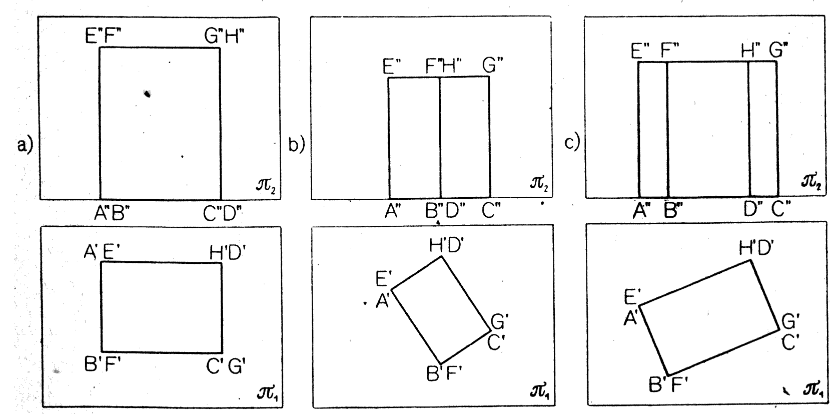
boczne, niesąsiednie krawędzie. (Oznaczaj rzut np. wierzchołka *A* na płaszczyznę poziomą przez *A'*, na płaszczyznę zaś pionową przez *A"*).

2. Narysuj i oznacz rzuty prostopadłościanu o wysokości



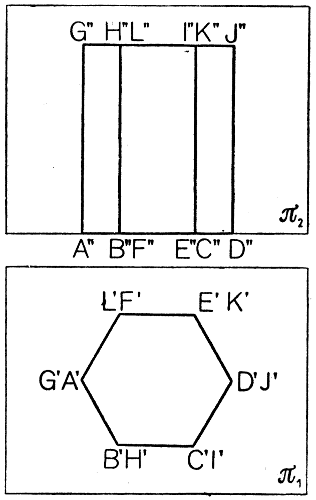
Rys. 136.

8 *cm*, którego podstawa ma wymiary 5 *cm* i 6 *cm*, przyczem płaszczyzny rzutów mają położenie, jak w zadaniu 1.

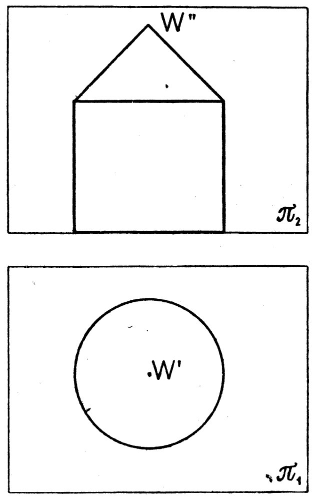


Rys. 137.

3. Jakie wymiary ma prostopadłościan, którego rzuty na dwie płaszczyzny rzutów są, jak na rys. 137 *a*, *b* i *c*?
4. Narysuj rzuty graniastosłupa umiarowego sześciokątnego o wysokości 7 *cm*, którego bok podstawy wynosi 3 *cm*, jeżeli jedna płaszczyzna rzutów przechodzi przez podstawę, a druga jest równoległa do ściany bocznej.
5. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa umiarowego, którego rzuty w skali 1 : 10 na rzutnię poziomą i pionową podaje rys. 138.
6. Na płaszczyźnie poziomej ustawiono ostrosłup umiarowy



Rys. 138.

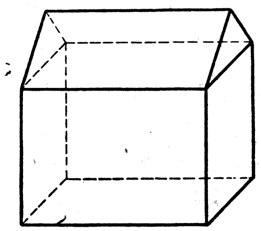


Rys. 139.

kwadratowy o wysokości $7\frac{1}{2}$ *cm*, w którym bok podstawy wynosi 4 *cm*. Narysuj i oznacz jego rzuty na płaszczyznę poziomą i na płaszczyznę pionową, przechodzącą przez krawędź podstawy.

7. Narysuj i oznacz rzuty ostrosłupa zadania 6 na płaszczyznę pionową, przechodzącą przez przekątnę podstawy.
8. Ostrosłup umiarowy sześciokątny o wysokości 6 *cm*, którego bok podstawy wynosi 2 *cm*, przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy, w połowie wysokości. Narysuj i oznacz rzuty przekroju na płaszczyznę przechodzącą przez podstawę oraz na płaszczyznę prostopadłą do podstawy, a przechodzącą przez krawędź podstawy.

9. Narysuj rzuty walca obrotowego o wysokości 8 *cm*, którego promień podstawy wynosi $2\frac{1}{2}$ *cm*, na płaszczyznę przechodzącą przez podstawę i na płaszczyznę prostopadłą do podstawy.
10. Narysuj rzuty stożka obrotowego o wysokości 7 *cm*, którego promień podstawy wynosi 3 *cm*, na płaszczyznę przechodzącą przez podstawę i na płaszczyznę prostopadłą do podstawy.
11. Stożek obrotowy poprzedniego zadania przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy w $\frac{1}{2}$ wysokości. Narysuj rzuty przekroju na płaszczyznę przechodzącą przez podstawę i na płaszczyznę prostopadłą do podstawy.



Rys. 140.

12. Narysuj rzut kuli o promieniu 3 *cm* na dowolnie obraną rzutnię.
13. Oblicz pole bryły, złożonej z walca i stożka o wspólnej podstawie, której rzuty w skali 1 : 5 na dwie płaszczyzny do siebie prostopadłe podane są na rys. 139.
14. Z 6 kostek o krawędzi 3 *cm* ułożono literę T. Narysuj rzuty tej bryły na obie jej płaszczyzny symetrji.
15. Dom (rys. 140) jest 20 *m* długi, 14 *m* szeroki i $14\frac{1}{2}$ *m* wysoki (nie licząc dachu). Najwyżej położona linja dachu znajduje się na wysokości 6 *m* nad górnem piętrem. Narysuj w odpowiedniej skali: *a)* rzut tego domu na płaszczyznę poziomą, *b)* rzut na płaszczyznę równoległą do dłuższej ściany bocznej, *c)* profil równoległy do krótszej ściany bocznej.

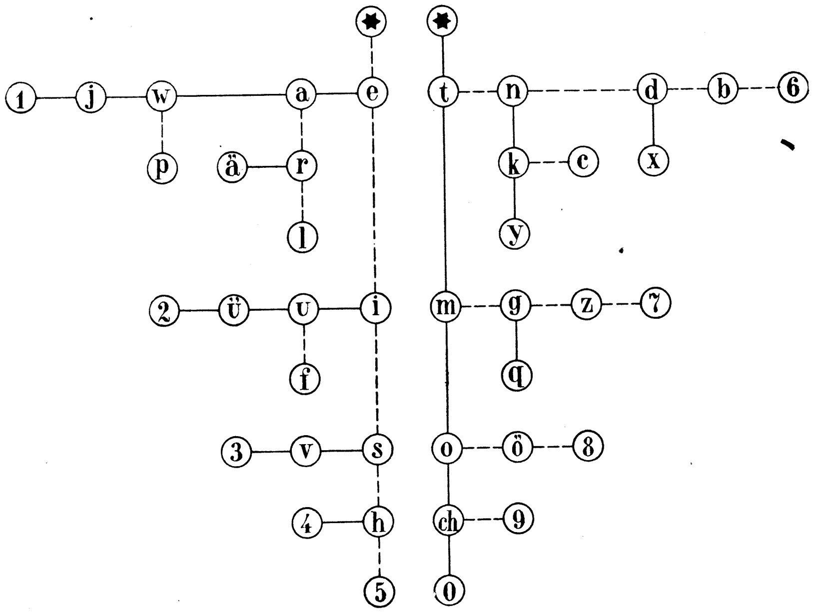
Dodatek.

1. Na rys. 141 zanotowany jest alfabet Morsego. Punktem wyjścia jest zawsze jeden z dwóch punktów, oznaczonych gwiazdką. Odcinek pełny między dwoma kolejnemi kółkami liczymy za kreskę, przerywany zaś za kropkę. Np. chcąc odczytać ·· — — — idziemy lewą gałęzią i dochodzimy do kółka, w którem jest 2. Zatem ·· — — — oznacza 2. *a)* Odczytaj:

— — ·— — · — — ·— — —·— — —·— ·—

·—· — — — —·—

·— — — — — — — —· ···— — ··— — —



Rys. 141.

b) Napisz znakami Morsego:
1) swój rok urodzenia,
2) zdanie: matematyka jest królową nauk.

2. Ponumeruj litery alfabetu polskiego (a ą b c ć d e ę f g h i j k l m n o ó p r s ś t u w y z ź ż), poczynając od litery a, tak, że a otrzymuje numer 10, ą numer 11, b numer 12 i t. d. W ten sposób każda litera może być zastąpiona liczbą. Jest to tak zwany „szyfr". Klucz do tego szyfru podany jest w tabelce:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g
2	h	i	j	k	l	m	n	o	ó	p
3	r	s	ś	t	u	w	y	z	ź	ż

a) Wytłumacz, jak ten klucz jest urządzony.
b) Odczytaj:
24 34 12 21 17   26 10 34 23 17
25 10 33 16 25 10 33 36 23 21.

c) Napisz w powyższy sposób:
„jestem uczniem trzeciej klasy".

3. Na globusie narysowany jest równik i wszystkie równoleżniki (co 1°); ile jest wszystkich kół?
4. Zegar potrzebuje 6 sekund na wybicie 6 uderzeń; ile potrzebuje czasu na wybicie 12 uderzeń?
5. Przy pomocy dwójek napisz: 7, 23, 28!
6. Napisz 100 zapomocą: *a)* 4 dziewiątek, *b)* 6 dziewiątek, *c)* 5 jedynek, *d)* 5 trójek, *e)* 5 piątek!
7. Jaka liczba podzielona przez swoją piątą część daje na wynik 5?
8. Flaszka z korkiem kosztuje 11 *gr*; flaszka jest o 10 *gr* droższa niż korek. Ile kosztuje flaszka, a ile korek?
9. Dwóch Beduinów, z których jeden miał 3 suchary, a drugi 5 sucharów, spotkało na pustyni podróżnego, który nie miał nic do jedzenia. Wobec tego wspólnie zjedli 8 sucharów, poczem podróżny wręczył im 8 sztuk złotej monety z tem, żeby sprawiedliwie podzielili się. Jaki powinien być ten podział?
10. Ziemia opasana jest sznurem wzdłuż równika i podobnie pomarańcza. Przedłużamy każdy z tych sznurów o 1 *m* i odpowiednio formujemy z nich koła współśrodkowe do kół równikowych. Które z tych kół bardziej odstaje, czy koło opasujące pomarańczę, czy też opasujące ziemię?
11. Są 3 naczynia o pojemności 8 *l*, 5 *l* i 3 *l*; naczynie największe jest pełne wody. W jaki sposób można, posługując się tylko temi trzema naczyniami, przelać wodę tak, aby w dwóch naczyniach było po 4 *l* wody?
12. Na papierze kratkowanym zaznacz 4 wierzchołki kwadratu. Naprzemian z kolegą łącz odcinkami sąsiednie punkty kratki. Jest to tak zwana gra „w szewca". Niech grę zaczyna twój kolega. Ty za każdym razem rysuj odcinek symetrycznie położony ze względu na środek kwadratu. Jeśli kwadrat ma nieparzystą liczbę kratek, to tym sposobem grę wygrasz, jeśli zaś liczba kratek jest parzysta, to uzyskasz remis.

Odpowiedzi.

3. 179.
4. Więcej niż 12 sekund, bo przy 6 uderzeniach jest 5 przerw, a przy 12 uderzeniach 11 przerw.

5. $7 = 2^2 + 2 + \frac{2}{2}$, $23 = 22 + \frac{2}{2}$, $28 = 2 + 2 + 2 + 22$.
6. $100 = 99 + \frac{9}{9} = 99 + \frac{99}{99} = 111 - 11 = 3.33 + \frac{3}{3} = 5.5.5 - 5.5$ albo $(5 + 5 + 5 + 5).5$.
7. Każda ($\neq 0$).
8. Flaszka kosztuje $10\frac{1}{2}$ *gr*.
9. Ten, który miał 3 suchary odstąpił $\frac{1}{3}$ suchara, a drugi $\frac{7}{3}$ suchara. Pierwszy powinien dostać 1 monetę, a drugi 7 monet.
10. Oba koła jednakowo odstają, gdyż w obu wypadkach promień wzrósł o $\frac{1}{2\pi}\,m$.
11. Z początku największe naczynie było pełne wody, średnie i najmniejsze puste, co zapisujemy: 8, 0, 0. Następnie przelano z największego naczynia do średniego 5 *l* wody, co zapisujemy: 3, 5, 0. W jaki sposób dalej należy wodę przelewać podają następujące trójki liczb: 3, 2, 3; 6, 2, 0; 6, 0, 2; 1, 5, 2; 1, 4, 3; 4, 4, 0 albo 8, 0, 0; 5, 0, 3; 5, 3, 0; 2, 3, 3; 2, 5, 1; 7, 0, 1; 7, 1, 0; 4, 1, 3; 4, 4, 0.

Spis rzeczy.

Arytmetyka.

Wielkości proporcjonalne.

Tabele i przedstawienia graficzne.

Str. | Str.

Przykłady . . . . 3 | Zadania 4

Wielkości wprost proporcjonalne.

Określenia . . . . 5 | Zadania 8

Reguła trzech prosta.
(Dla wielkości wprost proporcjonalnych).

Określenia . . . . 9 | Zadania 10

Wielkości odwrotnie proporcjonalne.

Określenia . . . . 15 | Zadania 17

Reguła trzech prosta.
(Dla wielkości odwrotnie proporcjonalnych).

Określenia . . . . 18 | Zadania 19

Wielkości zależne od kilku innych.

Przykłady . . . . 22 | Zadania 24

Procenty.

Określenia . . . . 25 | Zadania 26

Obliczanie liczby, której procent jest znany.

Przykłady . . . . 30 | Zadania 31

Obliczanie procentu.

Przykłady . . . . 32 | Zadania 33

Procenty proste.

Obliczanie dochodu . . . . . . 35 | Zadania 36

Obliczanie wyrażeń.

Porządek wykonywania działań.

Przypadek 1 . . . . 38 | Przypadek 3 39
Zadania . . . . 38 | Zadania 39
Przypadek 2 . . . . 38 | Przypadek 4 39
Zadania . . . . 39 | Zadania 40

Obliczanie wartości wyrażeń, zawartych w nawiasach.

Przypadek 1 . . . . 41 | Zadania 42
Przypadek 2 42

Używanie nawiasów.

Przykłady . . . . 44 | Zadania 45

Plan zadania.

Przykłady . . . . 47 | Zadania 48

Liczby ogólne.

Określenie liczb ogólnych.

Przykłady . . . . 51 | Zadania 52

Wartości liczbowe wyrażeń.

Przykłady . . . . 54 | Zadania 56

Porównywanie liczb ogólnych.

Zadania 59

Dodawanie.

Określenia . . . . 59 | Zadania 59

Prawo przemienności sumy.

Przykłady . . . . 60 | Zadania 61

Prawo łączności sumy.

Przykłady . . . . 62 | Zadania 63

Zmiany sumy.

Zadania 63

Odejmowanie.

Określenia . . . . 64 | Zadania 64

Własności różnicy.

Zadania 65

Zmiany różnicy.

Zadania 66

Łączne dodawanie i odejmowanie.

Zadania 67

Mnożenie.

Określenia . . . . 71 | Zadania 71

Prawo przemienności iloczynu.

Przykłady . . . . 72 | Zadania 73

Prawo łączności iloczynu.

Przykłady . . . . 73 | Zadania 74

Prawo rozdzielności iloczynu względem dodawania i odejmowania.

Przykłady . . . . 75 | Zadania 76

Zmiany iloczynu.

Zadania 80

Potęgi.

Określenia . . . . 82 | Zadania 82

Dzielenie.

Określenia . . . . 83 | Zadania 84

Rozdzielność ilorazu względem dodawania i odejmowania.

Przykłady . . . . 86 | Zadania 87

Własności ilorazu.

Przykłady . . . . 88 | Zadania 89

Zmiany ilorazu.

Zadania 91

Plan zadań z liczbami ogólnemi.

Zadania 93

Równania.

Określenia . . . . 94 | Zadania 95

Rozwiązywanie równań.

Przykłady . . . . 96 | Zadania 98

Układanie równań.

Ćwiczenia wstępne . . . . . . 101 | Zadania 102

Zastosowanie równań do geometrji.

Zadania 107

Mieszaniny.

Zadania 108

Procenty.

Zadania 109

Podział proporcjonalny.

Określenie . . . . 110 | Zadania 111

Obliczanie kapitału, czasu oprocentowania, stopy procentowej.

Kapitał . . . . 112 | Zadania 114
Zadania . . . . 113 | Stopa procentowa 115
Czas oprocentowania . . 114 | Zadania 116

Rabat, brutto, skonto, prowizja.

Zadania 116

Stopy.

Określenie 119
Zadania 119

Geometrja.

Obwody i pola.

Obwody 121
Zadania 121
Pola 122
Zadania 122

Objętości.

Objętość prostopadłościanu 128
Zadania 130
Objętość graniastosłupa prostego trójkątnego 131
Objętość graniastosłupa prostego (o dowolnej podstawie) 132
Zadania 133
Walec obrotowy 134
Zadania 135

Równoległościan i wielościany umiarowe.

Równoległościan 135
Zadania 136
Czworościan umiarowy 137
Zadania 137
Ośmiościan umiarowy . 138
Zadania 139
Dwunastościan umiarowy 139
Zadania 139
Dwudziestościan umiarowy 140
Zadania 140

Symetrja.

Prosta prostopadła do płaszczyzny 141
Płaszczyzny prostopadłe 141
Zadania 142
Symetrja środkowa . . . 142
Zadania 143
Symetrja osiowa 144
Zadania 145
Symetrja płaszczyznowa 146
Zadania 148

Jednokładność na płaszczyźnie.

Odcinki proporcjonalne 149
Zadania 150
Jednokładność 153
Zadania 154
Podobieństwo 156
Zadania 157
Obwody figur podobnych 159
Pola figur podobnych . 160
Zadania 161

Jednokładność i podobieństwo w przestrzeni.

Określenia 163
Zadania 164

Przekroje płaskie brył.

Przekroje sześcianu . . 165
Zadania 166
Przekroje graniastosłupa prostego 167
Zadania 168
Przekroje ostrosłupa . 170
Zadania 170
Przekroje walca obrotowego 171
Zadania 171
Przekroje stożka obrotowego 172
Zadania 173
Warstwice 173
Zadania 177
Profile 177
Zadania 180

Rzuty prostokątne.

Rzut punktu 182
Zadania 183
Rzut odcinka 184
Zadania 186
Rzuty figur płaskich . 187
Zadania 189
Rzuty brył 190
Zadania 195

Dodatek 197
Odpowiedzi 199