S. BANACH, W. SIERPIŃSKI, W. STOŻEK

# ARYTMETYKA i GEOMETRJA

DLA V KLASY SZKOŁY POWSZECHNEJ

K S I Ą Ż N I C A - A T L A S
S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.
LWÓW — WARSZAWA
1933

S. BANACH, W. SIERPIŃSKI, W. STOŻEK

# ARYTMETYKA i GEOMETRJA

DLA V KLASY SZKOŁY POWSZECHNEJ

CENA zł 1,60
WRAZ ZE ZNACZKIEM NA BUDOWĘ
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH

KSIĄŻNICA - ATLAS
S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.
LWÓW — WARSZAWA
1933

Przy rozwiązywaniu zadań z liczbami statystycznemi wskazane jest posługiwanie się danemi statystycznemi z wydawnictwa: Wąsowicz i Zierhoffer *Świat w cyfrach*

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie.

# Układ dziesiętny

## Jednostki

L i c z e n i e. Zbiór, złożony z dziesięciu przedmiotów, nazywamy d z i e s i ą t k ą.

Zbiór, złożony z dziesięciu dziesiątek, nazywamy s e t k ą.

Zbiór, złożony z dziesięciu setek, nazywamy t y s i ą c e m.

Zbiór, złożony z dziesięciu tysięcy, nazywamy d z i e s i ę ć t y s i ę c y albo dziesiątką tysięcy.

Jeśli mamy jeden przedmiot, np. jedną kulkę, to powiadamy, że mamy jednostkę pierwszego rzędu, lub krótko: jednostkę. Dziesiątka nazywa się jednostką drugiego rzędu, setka — trzeciego rzędu, tysiąc — czwartego rzędu, dziesięć tysięcy — piątego rzędu.

Przypuśćmy, że chcemy policzyć jakieś przedmioty, np. kulki; możemy to zrobić w następujący sposób:

Układamy najpierw kulki w dziesiątki. Otrzymamy w ten sposób pewną liczbę dziesiątek i kilka kulek osobno, np. sześć. Następnie zbieramy dziesiątki po dziesięć w setki. Wkońcu zostanie nam mniej niż dziesięć dziesiątek, np. pięć dziesiątek. Połączmy jeszcze setki po dziesięć w tysiące i przypuśćmy, że w ten sposób otrzymamy np. ośm tysięcy i cztery setki. Nasz zbiór składa się więc z ośmiu tysięcy, czterech setek, pięciu dziesiątek, i z sześciu osobnych kulek.

Powiadamy, że mamy wszystkich kulek: ośm tysięcy czterysta pięćdziesiąt sześć.

P i s a n i e l i c z b. W poprzednim przykładzie mieliśmy ośm tysięcy czterysta pięćdziesiąt sześć kulek.

Liczbę tę zapisujemy w następujący sposób: 8456.

Znak ten złożony jest z czterech cyfr. Cyfra 6, stojąca na pierwszem miejscu (licząc od prawej ręki), wskazuje nam, ile kulek zostało osobno; cyfry, znajdujące się na drugiem, trzeciem i czwartem miejscu, wskazują nam odpowiednio, ile otrzymaliśmy osobno dziesiątek, setek, tysięcy.

Jeśli, postępując jak poprzednio z jakimś zbiorem kulek, nie otrzymamy osobno bądź pojedyńczych kulek, bądź też dziesiątek, setek lub tysięcy, to brak ten zaznaczamy, pisząc na odpowiednich miejscach cyfrę zero.

Jeśli np. otrzymaliśmy trzy tysiące, siedm setek i sześć kulek, to liczbę kulek piszemy: 3706.

Podobnie, jeślibyśmy otrzymali pięć setek i ośm kulek, a brak byłoby tysięcy i dziesiątek, to powinnibyśmy liczbę kulek zapisać: 0508.

Zera jednak, znajdujące się na początku znaku liczby, opuszczamy, a więc liczbę powyższą piszemy: 508.

C z y t a n i e  l i c z b. Cyfry, znajdujące się w znaku liczby, nazywamy kolejno (postępując od prawej ręki ku lewej) cyfrą jednostek, dziesiątek, setek, tysięcy.

Liczbę czytamy, wygłaszając pokolei liczbę tysięcy, setek, dziesiątek i jednostek, wskazanych przez cyfry tej liczby.

Zamiast mówić: dwie dziesiątki, pięć dziesiątek i t. d., mówimy: dwadzieścia, pięćdziesiąt i t. d.

Zamiast mówić: dwie setki, sześć setek i t. d., mówimy: dwieście, sześćset i t. d.

Jeśli na jakiemś miejscu, np. na miejscu setek, znajduje się zero, to w czytaniu pomijamy setki. Np. liczbę 5027 czytamy: pięć tysięcy dwadzieścia siedm.

U w a g a. Powyższy sposób pisania liczb przy pomocy dziesięciu cyfr, wynaleziony przez Hindusów, nazywa się u k ł a d e m (systemem) d z i e s i ę t n y m  p o z y c y j n y m.

W układzie tym przedstawiamy liczbę zapomocą jednostek rozmaitych rzędów. Każda jednostka pewnego rzędu składa się z dziesięciu jednostek rzędu bezpośrednio niższego — stąd nazwa u k ł a d u  d z i e s i ę t n e g o.

Do zapisywania liczb używamy dziesięciu znaków (cyfr); znaczenie każdej cyfry zależy od miejsca (pozycji), jakie zajmuje. Stąd pochodzi nazwa u k ł a d u  p o z y c y j n e g o.

## Porównywanie liczb

Dwie liczby, napisane w układzie dziesiętnym, są tylko wtedy równe, jeśli w obu liczbach na odpowiednich miejscach znajdują się te same cyfry.

Dla wyrażenia równości dwóch liczb używamy znaku = (czytaj: równa się). Np.: $203 = 203$.

Dla zaznaczenia, że jedna liczba jest większa od drugiej, np., że 35 jest większe od 12, piszemy:

$35 > 12$ (czytaj: 35 większe od 12)
albo $12 < 35$ (czytaj: 12 mniejsze od 35).

Liczba 207 zawiera setki, liczba zaś 48 nie zawiera setek, więc: $207 > 48$.

Widzimy zatem, że z dwu liczb ta jest większa, która zawiera większą liczbę cyfr. Np.: $8643 > 867$

Liczba 5234 zawiera 5 tysięcy, liczba zaś 3894 zawiera 3 tysiące.

Oczywiście: $5234 > 3894$

Liczby 4527 i 4518 składają się z 4 tysięcy, 5 setek; pierwsza z nich składa się nadto z 2 dziesiątek, druga zaś tylko z 1 dziesiątki, więc: $4527 > 4518$.

Jeżeli zatem dwie liczby mają równą liczbę cyfr, to ta z nich jest większa, w której cyfra jednostek najwyższego rzędu jest większa; jeśli te cyfry są równe, to ta liczba jest większa, w której cyfra jednostek rzędu bezpośrednio niższego jest większa i t. d.

Np.: $1458 > 1269$

### Zadania

1. Ile to jest: *a)* 6 tys. 4 set. 7 dzies. i 3 jedn.?
*b)* 2 tys. 5 set. 1 dzies. i 4 jedn.?
*c)* 9 tys. — set. 5 dzies. i 8 jedn.?
*d)* 7 tys. 3 set. 2 dzies. i — jedn.?
*e)* 6 tys. — set. — dzies. i 6 jedn.?

2. Przeczytaj następujące liczby: 1000, 2000, 9000, 15000, 8456, 7002, 6407, 5690, 6703, 9016, 1001, 10001, 17085.

3. Napisz cyframi liczby: trzysta dwadzieścia siedm, tysiąc dwa, trzy tysiące czterdzieści siedm, pięć tysięcy sześćset trzy, dziesięć tysięcy ośmnaście, piętnaście tysięcy dwieście cztery, dziewięć tysięcy trzydzieści sześć, ośm tysięcy pięć, ośm tysięcy pięćset, dziewiętnaście tysięcy dwieście ośm, jedenaście tysięcy jeden.
4. Licz: *a)* od 5980 do 6000, *b)* od 9995 do 10 015,
   *c)* po dziesięć od 15 100 do 15 300,
   *d)* po sto od 18 600 do 19 200.
5. Wymień cyfry jednostek, dziesiątek, setek i tysięcy w liczbach: 4357, 6002, 7083, 1502.
6. Ile *a)* jednostek, *b)* dziesiątek, *c)* setek zawiera: jeden tysiąc, 2 tys., 8 tys., 10 tys., 13 tys.?
7. *a)* Ile to jest tysięcy:
   20 setek, 30 setek, 90 setek, 100 setek, 160 setek, 300 dzies., 800 dzies., 1200 dzies., 1500 dzies.?
   *b)* Ile to jest setek: jeden tysiąc, 5 tys., 10 tys., 13 tys.?
   *c)* Ile to jest dziesiątek: jeden tysiąc, 3 tys., 12 tys., 5 tys. 4 setki, 7 tys. 6 setek 3 dzies.?
8. Ile *a)* tysięcy, *b)* setek, *c)* dziesiątek zawiera liczba: 4618, 5203, 7049, 12 154, 15 003, 18 149, 13 200, 10 500? Odpowiedź: liczba 4618 zawiera *a)* 4 tysiące, *b)* 4 tysiące i 6 setek, czyli 46 setek, *c)* 4 tysiące, 6 setek i 1 dziesiątkę, t. j. 461 dziesiątek.
9. Jakiego rzędu jednostkę przedstawia 1, jeśli dopiszemy: *a)* jedno, *b)* dwa, *c)* trzy zera?
10. Ułóż wedle wielkości *a)* rosnących, *b)* malejących, liczby: 3583, 6409, 3581, 6418, 6509.
11. Umieść pomiędzy następującemi parami liczb odpowiednie znaki nierówności:
    6783 i 7514, 5200 i 5184, 13 101 i 13 204, 19 000 i 19 001.
12. Napisz najmniejszą i największą liczbę:
    *a)* dwucyfrową, *b)* trzycyfrową, *c)* czterocyfrową.
13. Ułóż *a)* największą, *b)* najmniejszą liczbę czterocyfrową z cyfr: 2, 5, 7, 1.

## Jednostki wyższych rzędów

Jak wiemy: 10 jedn. = 1 dziesiątka, 10 dzies. = 1 setka, 10 setek = 1 tysiąc, 10 tysięcy = 1 dziesiątka tysięcy, a więc 10 jednostek rzędu pierwszego równa się jednostce rzędu drugiego; 10 jednostek rzędu drugiego równa się jednostce rzędu trzeciego i t. d. Opierając się na tej zasadzie, określamy jednostki rzędów wyższych w następujący sposób:

Jednostka rzędu szóstego (setka tysięcy) = 10 dziesiątek tysięcy.

Jednostka rzędu siódmego (miljon) = 10 setek tysięcy.

Jednostka rzędu ósmego (dziesiątka miljonów) = 10 miljonów i t. d.

Na następującej tablicy zaznaczone mamy jednostki aż do rzędu trzynastego.

| 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | **Rząd** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| biljony | setki tysięcy miljonów | dziesiątki tysięcy miljonów | tysiące miljonów (miljardy) | setki miljonów | dziesiątki miljonów | miljony | setki tysięcy | dziesiątki tysięcy | tysiące | setki | dziesiątki | jednostki | |

U w a g a: Zamiast mówić „tysiąc miljonów“ mówimy „miljard“, a zamiast „tysiąc miljardów“ mówimy „biljon“.

## Pisanie i czytanie liczb w układzie dziesiętnym

Chcąc jakiś zbiór przedmiotów policzyć, postępujemy jak poprzednio, a zatem: łączymy pojedyncze przedmioty w dziesiątki, te dziesiątki w setki, otrzymane setki w tysiące, te tysiące w dziesiątki tysięcy i t. d. W ten sposób rozłożymy zbiór na szereg jednostek rozmaitych rzędów, przyczem jednostek tego samego rzędu będzie co najwyżej dziewięć. Przypuśćmy, że, postępując tak z jakimś zbiorem przedmiotów, otrzymaliśmy trzy miljardy, pięć setek miljonów, dwie dziesiątki miljonów, sześć miljonów, cztery setki tysięcy, trzy tysiące, jedną dziesiątkę i siedm jednostek.

Liczbę powyższą tak zapisujemy: 3 526 403 017.

Każda z cyfr oznacza ilość jednostek tego rzędu, na którem stoi miejscu. A zatem, cyfra stojąca na pierwszem miejscu (od prawej ręki ku lewej), oznacza ilość jednostek, cyfra na drugiem miejscu, ilość dziesiątek, na szóstem ilość setek tysięcy i t. d. Cyfra zero, stojąca na pewnem miejscu, oznacza brak jednostek odpowiedniego rzędu.

Liczbę powyższą czytamy: trzy miljardy pięćset dwadzieścia sześć miljonów czterysta trzy tysiące siedmnaście.

Widzimy więc, że przy pomocy dziesięciu cyfr możemy w układzie dziesiętnym napisać każdą liczbę.

Liczby odczytujemy w następujący sposób: dzielimy liczbę (od prawej ręki ku lewej) na klasy po trzy cyfry, lub na klasy po sześć cyfr. Następnie odczytujemy każdą klasę, wymieniając jednostkę najmniejszego rzędu danej klasy.

Np.: *a)* $\underbrace{53}_{\text{biljonów}}\quad \underbrace{456}_{\text{miljardów}}\quad \underbrace{714}_{\text{miljonów}}\quad \underbrace{712}_{\text{tysięcy}}\quad 342$

Czytamy: 53 biljonów, 456 miljardów, 714 miljonów, 712 tysięcy, 342.

*b)* $\underbrace{53}_{\text{biljonów}}\quad \underbrace{456714}_{\text{miljonów}}\quad 712342$

Czytamy: 53 biljonów, 456714 miljonów, 712342.

**Zadania**

1. Przeczytaj 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000, 10 000 000, 100 000 000, 1 000 000 000, 10 000 000 000!
2. Napisz: sto, dziesięć tysięcy, dziesięć miljonów, sto tysięcy, miljard, miljon, biljon!
3. Na którem miejscu w liczbie stoi cyfra oznaczająca: setki, setki tysięcy, miljony, setki miljonów, biljony, miljardy, setki miljardów?
4. Przeczytaj liczby:
   *a)* 58 624, *b)* 90 023, *c)* 125 819, *d)* 503 018, *e)* 2 684 293, *f)* 3 000 107, *g)* 15 001 394, *h)* 103 519 008, *i)* 900 000 047, *k)* 3 183 514 689, *l)* 417 583 291 743.

5. Napisz przy pomocy cyfr następujące liczby:
   *a)* sto ośm tysięcy pięćset trzy,
   *b)* pięćset ośmnaście tysięcy trzysta,
   *c)* trzy miljony sześćset dwa tysięcy sto ośmnaście,
   *d)* pięć miljonów trzy tysiące czterdzieści siedm,
   *e)* dziewięćset miljonów sześćset tysięcy cztery,
   *f)* dwa biljony trzydzieści cztery miljony siedmset tysięcy dziewięćdziesiąt pięć,
   *g)* dwadzieścia biljonów trzysta miljonów tysiąc dwa,
   *h)* tysiąc dwieście pięćdziesiąt trzy biljonów!
6. Jakie cyfry znajdują się na miejscu setek, dziesiątek tysięcy, miljonów, miljardów w liczbach: 10 367 542 798, 57 305 417 519, 84 172 300 000?
7. Umieść pomiędzy następującemi parami liczb odpowiednie znaki nierówności: 125 743 i 125 443; 8 612 004 i 8 612 014; 12 135 468 i 9 899 989; 100 001 i 99 999!

### Przykłady wielkich liczb

1. Najbliższa gwiazda stała odległa jest od ziemi o 40 000 000 000 000 *km* t. j. 40 biljonów *km*. Aby uzmysłowić sobie tę liczbę, przypuśćmy, że dziś gra tam muzyka i jest nadawana przez radjo. Otóż muzykę tę usłyszelibyśmy na ziemi po upływie przeszło 4 lat i 3 miesięcy, a pamiętać należy, że fala radjowa przebiega 300 000 *km* w ciągu sekundy.
2. Para wodna, powstała z 1 $cm^3$ (naparstka) wody, zawiera:

   33 700 000 000 000 000 000 000

   t. j. trzydzieści trzy tysiące siedmset tryljonów cząsteczek. Gdyby te cząsteczki jako ziarnka rozsypać równomiernie po wszystkich lądach ziemi, to na każdy kawałeczek powierzchni ziemi, o wielkości znaczka pocztowego, padłoby przeszło 100 000 tych ziarnek.

### Rzymska pisownia liczb

Rzymianie używali do pisania liczb siedmiu znaków: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

W układzie dziesiętnym cyfra oznaczać może jednostki rozmaitych rzędów, zależnie od tego, jakie miejsce w liczbie zajmuje. W pisowni rzymskiej natomiast jednostki różnych rzędów oznacza się różnemi znakami. Oto są reguły oznaczania jednostek t e g o s a m e g o r z ę d u:

Chcąc oznaczyć dwie lub trzy jednostki danego rzędu, piszemy odpowiedni znak dwa lub trzy razy.

Np.: II = 2, III = 3, XX = 20, XXX = 30, CCC = 300.

Sześć, siedm, ośm jednostek oznaczamy, powtarzając po znaku pięciu jednostek znak jednostki jeden raz, dwa razy, trzy razy.

Np.: VI = 6, VII = 7, VIII = 8, LX = 60, DCCC = 800.

Cztery względnie dziewięć jednostek oznaczamy, pisząc jednostkę przed znakiem pięciu takich jednostek, względnie przed jednostką rzędu bezpośrednio wyższego.

Np.: IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900.

Chcąc napisać liczbę znakami rzymskiemi, zapisujemy w powyższy sposób pokolei tysiące, setki, dziesiątki i jednostki, zaznaczone przez cyfry danej liczby.

Np.: XXXVI = 36, XLIV = 44, CCLXX = 270, CDXXIII = 423, MMMDCCCLXXXII = 3882.

### Zadania

1. Napisz znakami rzymskiemi liczby:
   315, 89, 43, 481, 629, 936, 1041, 2349, 1493, 3613.
2. Napisz znakami rzymskiemi następujące daty z historji polskiej: chrzest Polski w r. 966, bitwa pod Grunwaldem w r. 1410, śmierć Batorego w r. 1586, odsiecz Wiednia w r. 1683, pierwszy rozbiór Polski w r. 1772, drugi w r. 1793, trzeci w r. 1795, konstytucja 3 maja w r. 1791, Polska niepodległa w r. 1918, wybór pierwszego Prezydenta Rzplitej w r. 1922.
3. Napisz cyframi arabskiemi liczby:
   XXXIV, XLVII, XCIII, CXL, CCXCII, CCCXLI,

CDXLII, DCCXC, CMLXXI, MMMCDXI, LXXIV, CIX, DCCCXXVIII, MCDXIV, MDCCCLXXIII.

### Jednostki długości, pojemności i ciężaru

Metryczne jednostki linjowe. Zazwyczaj jako jednostki długości używa się odcinka, zwanego metrem.

Wzorzec metra, w kształcie sztaby, przechowywany jest w Sévres [1] pod Paryżem.

Uczeni wprowadzili metr, jako czterdziestomiljonową część południka ziemskiego.

Metr zaznaczamy w skróceniu literą *m* (bez kropki).

Dla celów praktycznych używa się jednostek bądź większych, bądź też mniejszych.

Jednostki większe od metra są:

1 dekametr (1 *dkm*) = 10 *m*
1 hektometr (1 *hm*) = 100 *m*
1 kilometr (1 *km*) = 1000 *m*.

Jednostki mniejsze od metra są:

1 decymetr (1 *dcm*); 10 *dcm* = 1 *m*
1 centymetr (1 *cm*); 100 *cm* = 1 *m*
1 milimetr (1 *mm*); 1000 *mm* = 1 *m*.

Wszystkie powyższe jednostki nazywają się metrycznemi linjowemi.

#### Zadania

1. Ile to jest metrów:
*a)* 2 *km*, *b)* 15 *km*, *c)* 2 *km* 7 *hm*, *d)* 5 *hm* 7 *dkm*, *e)* 3 *km* 5 *dkm*, *f)* 17 *km* 13 *hm*?
2. Ile to jest kilometrów i metrów:
*a)* 15200 *m*, *b)* 375 *hm*, *c)* 2536 *dkm*, *d)* 347 *hm* 4 *dkm*?
3. Ile to jest hektometrów:
a) 15 *km*, *b)* 246 *km*, *c)* 68 *km* 5 *hm*, *d)* 546 *km* 8 *hm*, *e)* 340 *dkm*, *f)* 2300 *m*, *g)* 15000 *dcm*?
4. Ile to jest centymetrów:
*a)* 3 *m*, *b)* 4 *dcm*, *c)* 13 *m* 5 *dcm*, *d)* 327 *dcm*; *e)* 8360 *mm*?

---

[1] Czytaj: Sewr.

5. Ile to jest milimetrów:
*a)* 2 *dkm*, *b)* 15 *dcm*, *c)* 15 *m*, *d)* 1 *dkm* 7 *m*?

J e d n o s t k i p o j e m n o ś c i. Jednostką objętości ciał płynnych i sypkich jest 1 litr czyli kwarta (1 *l*). Pojemność 1 *l* przedstawia naczynie w kształcie kostki o krawędzi 1 *dcm*.

Większemi jednostkami są:
1 hektolitr (1 *hl*) jest to 100 *l*.
1 kilolitr (1 *kl*) czyli 1 ster jest to 1000 *l*.

Mniejszemi jednostkami są:
1 decylitr (1 *dcl*) jest to dziesiąta część litra.
1 mililitr (1 *ml*) jest to tysięczna część litra.

A więc: 1 *kl* = 10 *hl*; 1 *hl* = 100 *l*; 1 *l* = 10 *dcl* = 1000 *ml*.

**Zadania**

1. Ile to jest litrów:
*a)* 5 *hl* 15 *l*; 27 *hl* 3 *l*; 3 *kl* 8 *hl*.
*b)* 4 *kl* 18 *hl*; 12 *kl* 15 *l*?
2. Ile to jest decylitrów:
*a)* 2 *l*, 3 *l* 4 *dcl*, 7 *l* 2 *dcl*; *b)* 1 *hl* 4 *l*, 2 *hl* 5 *dcl*?
3. Ile to jest mililitrów: 2 *dcl*, 3 *dcl* 4 *ml*, 1 *l* 2 *ml*?
4. Wyraź w hektolitrach i litrach:
203 *l*, 845 *l*, 1280 *l*, 14850 *l*.
5. Wyraź w kilolitrach i litrach:
1200 *l*, 1650 *l*, 11600 *l*, 12457 *l*.

J e d n o s t k i c i ę ż a r u. Jednostką ciężaru jest 1 kilogram (1 *kg*) t. j. ciężar 1 *l* wody. Większemi jednostkami są:
1 kwintal (1 *kwn* lub 1 *q*) t. j. 100 *kg*.
1 tonna (1 *t*) t. j. 1000 *kg*.
Mniejszemi jednostkami są:
1 gram (1 *g*) t. j. tysięczna część kilograma.
1 miligram (1 *mg*) t. j. tysięczna część grama.
1 dekagram (1 *dkg*) t. j. 10 *g*.

A więc: 1 *t* = 10 *q* = 1000 *kg*
1 *kg* = 100 *dkg* = 1000 *g*, 1 *g* = 1000 *mg*.

Do mierzenia ciężaru służy przyrząd, zwany wagą.

### Zadania

1. Ile to jest kilogramów:
   3 *q*, 4 *q* 5 *kg*, 8 *q* 17 *kg*, 15 *q* 12 *kg*, 3 *t* 18 *kg*?
2. Ile to jest gramów:
   *a)* 5 *kg*, 6 *kg* 40 *g*, 17 *kg* 135 *g*, 25 *kg* 4 *g*.
   *b)* 5 *dkg* 7 *g*, 1 *kg* 3 *g*, 8 *kg* 83 *dkg*?
3. Wyraź w tonnach i kilogramach:
   1250 *kg*, 1085 *kg*, 12614 *kg*, 10001 *kg*.
4. Wyraź w kwintalach i kilogramach:
   320 *kg*, 1150 *kg*, 1144 *kg*, 15846 *kg*.
5. Wyraź w dekagramach i gramach:
   135 *g*, 645 *g*, 1 *kg* 4 *g*, 1624 *g*.

# Dodawanie

## Określenie sumy

Wrzućmy do woreczka najpierw 5 kulek, potem 3 kulki. Razem będzie w woreczku kulek 8.

Liczbę 8 nazywamy sumą liczb 5 i 3. Liczby 5 i 3 nazywamy **składnikami** sumy.

Sumę dwóch liczb oznaczamy, pisząc jeden składnik, następnie znak $+$ (czytaj: więcej lub plus), a potem drugi składnik. Piszemy więc: $5+3=8$ lub $3+5=8$

Suma dwóch liczb, z których jedna jest zerem, równa się drugiej liczbie.

Np.: $7+0=7$; $0+9=9$; $0+0=0$.

Działanie, jakie wykonujemy, obliczając sumę, nazywamy **dodawaniem**.

Sumę kilku liczb np.: 3, 5, 7 i 2 oznaczamy:

$$3+5+7+2$$

a obliczamy, dodając do sumy liczb 3 i 5 liczbę 7, a do wyniku 2. Zatem: $3+5+7+2=17$.

## Prawo przemienności sumy

Suma $3 + 5 + 7 + 2$ oznacza liczbę kulek, którą otrzymamy, wrzucając do woreczka 3 kulki, następnie 5 kulek, potem 7 kulek, a wreszcie 2 kulki.

Wrzucając te kulki w innym porządku do woreczka, np. naprzód 5, potem 2, potem 3, a wreszcie 7 kulek, otrzymamy tę samą liczbę, co poprzednio. Możemy więc napisać:

$$3 + 5 + 7 + 2 = 5 + 2 + 3 + 7.$$

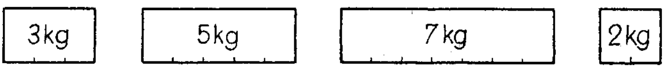
Widzimy, że suma kilku liczb nie zależy od porządku, w jakim je dodajemy.

Własność powyższą sumy nazywamy prawem przemienności sumy.

### Zadania

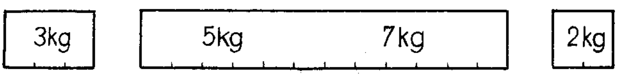
1. Oblicz sumy kilkoma sposobami:
*a)* $9 + 3 + 7 + 6$ *b)* $4 + 5 + 2 + 6$ *c)* $7 + 1 + 3 + 8$
*d)* $10 + 6 + 8 + 11 + 2$.
2. Do beczki wlano 20 *l* wina, 30 *l*, 40 *l*; ile litrów wina razem wlano? Czy musisz wiedzieć, w jakim porządku te ilości wina wlewano?

## Prawo łączności sumy



Rys. 1.

Cztery paczki (rys. 1) o ciężarze 3 *kg*, 5 *kg*, 7 *kg* i 2 *kg* ważą razem: $3\,kg + 5\,kg + 7\,kg + 2\,kg$.



Rys. 2.

Jeżeli dwie z tych paczek (rys. 2) np. paczki o ciężarze 5 *kg* i 7 *kg* spakujemy w jedną paczkę, to otrzymamy 3 paczki o ciężarze 3 *kg*, 12 *kg* i 2 *kg*, które razem ważą:

$$3\,kg + 12\,kg + 2\,kg.$$

Ponieważ tak w pierwszym, jak i w drugim wypadku paczki razem ważą to samo, więc:

$$3 + 5 + 7 + 2 = 3 + 12 + 2.$$

Podobnie, zastępując paczki o ciężarach 3 *kg* i 5 *kg* paczką o ciężarze 8 *kg*, przekonujemy się, że:

$$3 + 5 + 7 + 2 = 8 + 7 + 2.$$

Widzimy zatem, że wynik dodawania nie zmieni się, jeżeli kilka składników zastąpimy ich sumą.

Powyższą własność sumy nazywamy prawem łączności.

Dla zaznaczenia, jakie składniki mamy zastąpić ich sumą, używamy nawiasów. A więc wyrażenie:

$$3 + (5 + 7) + 2 \text{ oznacza } 3 + 12 + 2.$$

Podobnież $(3 + 5) + (7 + 2)$ oznacza $8 + 9$.

Chcąc więc obliczyć sumę, w której występują nawiasy, zastępujemy każdy nawias liczbą, jaką otrzymamy, wykonując działania zaznaczone w tym nawiasie.

### Zadania

1. Wykonaj następujące działania:
   *a)* $2 + (3 + 5) + 7$; $(3 + 5) + (8 + 4)$; $3 + (7 + 5 + 2)$.
   *b)* $6 + (3 + 9) + (4 + 11)$; $(2 + 5 + 7) + (4 + 3)$; $(3 + 2) + (4 + 7) + (5 + 6)$.
2. Zaznacz nawiasami, jak najdogodniej obliczyć sumy:
   *a)* $12 + 3 + 5 + 11 + 9 + 3 + 4 + 3$.
   Odp. $(12 + 3 + 5) + (11 + 9) + (3 + 4 + 3)$.
   *b)* $3 + 7 + 4 + 6 + 5$. *c)* $11 + 9 + 13 + 7 + 8$.
   *d)* $4 + 6 + 13 + 2 + 5 + 29 + 11 + 12$.
3. Oblicz w najdogodniejszy sposób następujące sumy:
   *a)* $6 + 2 + 4 + 8 + 3$. Odp. $(6 + 4) + (2 + 8) + 3$.
   *b)* $2 + 7 + 6 + 8 + 5 + 3 + 5 + 4$.
4. Oblicz sumę liczb od 1 do 9, jak następuje:
   $$(1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + 5.$$
   Oblicz w podobny sposób sumę liczb: *a)* od 1 do 19, *b)* od 23 do 27, *c)* od 12 do 38, *d)* od 45 do 55.

## Obliczanie sumy w układzie dziesiętnym

Mamy dodać do siebie kilka liczb, np. 437, 726 i 678.

Napiszmy wszystkie składniki pod sobą tak, by cyfry jednostek były w jednej kolumnie, podobnie cyfry dziesiątek, setek i t. d. i podkreślmy.

W naszym więc wypadku napiszemy:

$$\begin{array}{r} 437 \\ 726 \\ \underline{678} \\ 1841 \\ \scriptstyle (1\,2) \end{array}$$

Każda z tych liczb jest sumą pewnej liczby setek, dziesiątek i jednostek. Ponieważ w sumie możemy składniki dowolnie łączyć i w dowolnym porządku dodawać, więc dodajmy najpierw jednostki.

Otrzymamy jednostek: $8+6+7=21$, t. j. 2 dzies. i 1 jedn.

Otrzymane 2 dzies. dodajemy do dziesiątek.

Będziemy mieć dziesiątek: $2+7+2+3=14$, t. j. 1 setka i 4 dzies.

Otrzymaną setkę dodajemy do setek.

Będziemy mieć setek: $1+6+7+4=18$ t. j. 1 tysiąc i 8 setek. Otrzymaliśmy więc razem:

1 tysiąc 8 setek 4 dzies. 1 jedn., czyli 1841.

Rachunek powyższy wygłaszamy w następujący sposób:

8 a 6 jest 14, a 7 jest 21. Piszę 1, a 2 doliczam do dziesiątek. 2 a 7 jest 9, a 2 jest 11, a 3 jest 14. Piszę 4, a 1 doliczam do setek. 1 a 6 jest 7, a 7 jest 14, a 4 jest 18. Piszę 18.

P r ó b a  d o d a w a n i a. Przy dodawaniu dodajemy zwyczajnie cyfry tej samej kolumny pokolei bądź zdołu dogóry, bądź też zgóry nadół. Aby zbadać, czy nie popełniliśmy błędów w dodawaniu, obliczamy jeszcze raz sumę danych liczb, dodając cyfry tej samej kolumny w odwrotnym porządku, niż za pierwszym razem, a więc np. zgóry nadół, jeśli za pierwszym razem dodawaliśmy zdołu dogóry.

### Zadania

1. Oblicz sumy:
   *a)* 257 + 459, 3457 + 6543, 7896 + 455.
   *b)* 90 351 + 26 853, 52 643 + 2568, 81 052 + 37 205.
   *c)* 4578 + 312 + 5296, 5256 + 3025 + 104.
   *d)* 475 + 3083 + 7250 + 932, 5 + 5025 + 48 + 7530.
2. Oblicz: *a)* 328 + (705 + 318), *b)* 5283 + (4120 + 306),
   *c)* (10 + 563) + (923 + 2500).
   *d)* (16 835 + 23 789) + (1256 + 17 803).
3. Dodaj do siebie liczbę 378 565; otrzymaną sumę znowu dodaj do siebie i t. d., aż otrzymasz liczbę większą od 1 000 000!
4. Utwórz sumę następujących liczb mianowanych:
   235 *zł* 45 *gr* i 387 *zł* 84 *gr*.

   Rozwiązanie:

   | |
   |---|
   | 235 *zł* 45 *gr* |
   | 387 *zł* 84 *gr* |
   | 622 *zł* 129 *gr* |

   Ponieważ 129 *gr* = 1 *zł* 29 *gr*., więc dodając 1 *zł* do złotych, otrzymamy razem: 623 *zł* 29 *gr*
5. Wykonaj następujące zadania:

| *a)* | *b)* | *c)* |
|---|---|---|
| 236 *zł* 45 *gr* | 5020 *zł* 20 *gr* | 4253 *zł* 37 *gr* |
| 732 *zł* — *gr* | 428 *zł* 5 *gr* | 348 *zł* 52 *gr* |
| 58 *zł* 89 *gr* | 16 *zł* 93 *gr* | 1618 *zł* 29 *gr* |

| *d)* | *e)* | *f)* |
|---|---|---|
| 358 *kg* 732 *g* | 3768 *kg* 439 *g* | 2536 *kg* 321 *g* |
| 108 *kg* 52 *g* | 4309 *kg* 695 *g* | 532 *kg* 500 *g* |
| 932 *kg* 41 *g* | 706 *kg* 240 *g* | 3759 *kg* 418 *g* |

| *g)* | *h)* | *i)* |
|---|---|---|
| 438 *m* 4 *dcm* | 538 *m* 7 *dcm* | 53 *km* 235 *m* |
| 325 *m* 7 *dcm* | 29 *m* 6 *dcm* | 458 *km* 53 *m* |
| 768 *m* 6 *dcm* | 452 *m* 5 *dcm* | 1536 *km* 172 *m* |

| *j)* | *k)* |
|---|---|
| 13 *godz.* 25 *min.* | 34 *godz.* 45 *min.* |
| 14 *godz.* 37 *min.* | 12 *godz.* 46 *min.* |

6. Oblicz i sprawdź:
   *a)* 512 *km* 483 *m* + 95 *km* 846 *m*.
   *b)* 216 *km* 700 *m* + 409 *km* 35 *m* + 53 *km* 280 *m*.
   *c)* 15 *min*. 35 *sek*. + 28 *min*. 42 *sek*. + 35 *min*. 8 *sek*.
7. Ile to jest: *a)* 15 *t* + 78 *q* + 2632 *kg*;
   *b)* 35 *km* + 234 *km* + 12536 *dkm* + 32365 *m*.
8. Oblicz i sprawdź:
   *a)* 3 *hl* 35 *l* + 28 *hl* 75 *l*, *b)* 28 *l* 5 *dcl* + 5 *l* 7 *dcl*.
9. Obieg biletów państwowych, zdawkowych, monet i bilonu w dniu 31 sierpnia 1927 r. wynosił: bilety państwowe 723 132 180 *zł*, bilety zdawkowe 198 277 690 *zł*, monety srebrne 89 703 194 *zł*, bilon 48 515 322 *zł*.
   Ile wynosił całkowity obieg pieniędzy w tym dniu?
10. W Polsce w roku 1919 wydobyto węgla 24 976 000 *t*, a w roku 1920 o 6 071 000 *t* więcej; ile węgla wydobyto w obu latach?
11. W 1929 roku wpłynęło do Gdyni 1541 okrętów, w 1930 roku wpłynęło o 697 okrętów więcej, a w 1931 roku o 906 więcej niż w poprzednim; ile okrętów wpłynęło do Gdyni w 1931 roku?

### Rachunek pamięciowy

1. Poczynając od 0, dodawaj: *a)* po 2, *b)* po 3, *c)* po 4, *d)* po 5, *e)* po 6, *f)* po 7, *g)* po 8, *h)* po 9, *j)* po 10, tak długo, aż otrzymasz sumę większą od 100.
   Powtórz to samo, poczynając od którejkolwiek liczby z pomiędzy liczb 1, 2, ..... 10!
2. Przedstaw każdą z liczb od 2 aż do 20 jako sumę dwóch liczb na wszystkie możliwe sposoby!
3. Co należy dodać do każdej z liczb 1, 7, 3, 8, 9, 6, 5, 4, 2, *a)* aby otrzymać 10, *b)* aby otrzymać 100, *c)* aby otrzymać 415?
4. Dodaj w pamięci:

| | | |
|---|---|---|
| 20 + 40, | 200 + 500, | 2000 + 5000, |
| 40 + 50, | 700 + 800, | 3000 + 9000, |
| 30 + 70, | 600 + 900, | 8000 + 6000, |

5. Dodaj w pamięci:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $21+3$, | $14+20$, | $358+500$, | $3691+9000$, |
| $4583+5$, | $256+70$, | $11856+200$, | $417+5000$, |
| $356+7$, | $3291+30$, | $17329+300$, | $12516+4000$, |
| $12238+9$, | $85+50$, | $93+900$, | $89+6000$, |
| $87+8$, | $14351+90$, | $4516+300$, | $613+7000$, |

Aby obliczyć w pamięci sumę dwóch liczb, np. $256+387$, rozkładamy jeden z składników, np. 256 na sumę $200+50+$ $+6$ i do 387 dodajemy 200, potem 50, a wreszcie 6.

Rachunek w myśli przeprowadza się w sposób następujący: $387+200=587$, $587+50=637$, $637+6=643$.

6. 25, 49, 32, 76, 82, 41, 19, 83, 57, 38,
182, 247, 521, 413, 655, 221, 716, 902, 404, 548,
dodaj w pamięci:

*a)* w pierwszym wierszu pierwszą liczbę do drugiej; drugą do trzeciej; i t. d.
*b)* w pierwszym wierszu pierwszą liczbę do trzeciej; drugą do czwartej i t. d.
*c)* liczby w pierwszej kolumnie, drugiej i t. d.
*d)* w drugim wierszu postąp podobnie jak w *a)* i *b)*.

7. Dodaj w pamięci:

| | | |
|---|---|---|
| $15+18+5$, | $12+36+7$, | $21+19+4$, |
| $16+35+12$, | $18+40+11$, | $15+27+27$, |
| $37+28+7$, | $25+15+14$, | $325+47+18$, |

Jeśli składnik jest liczbą, kończącą się cyfrą 8 lub 9, to zaokrąglamy go do najbliższych dziesiątek, a następnie sumę pomniejszamy o tyle, o ileśmy składnik powiększyli.

Np.: *a)* $35+99$; rachujemy: $35+100=135$; otrzymana suma jest o 1 za duża, zatem: $35+99=134$.

*b)* $27+58$; rachujemy: $27+60=87$; otrzymana suma jest o 2 za duża, zatem: $27+58=85$.

8. Do liczb: 16, 45, 87, 92, 245, 567, 5234, 11127, dodawaj pokolei: 8, 9, 11, 12, 38, 39, 98, 99, 101, 102, 998, 999.

9. Robotnik miał 98 *zł*, zarobił 35 *zł;* ile ma razem?

10. Staś miał 47 znaczków pocztowych, dostał 12 znaczków i kupił sobie 8 znaczków; ile znaczków ma razem?

11. Syn ma 17 lat, a ojciec jest o 28 lat starszy; ile lat ma ojciec?
12. Staś na wycieczce w pierwszym dniu przebył 26 *km*, w drugim 18 *km*, a w trzecim 15 *km*; ile *km* przeszedł?
13. Jan ma 43 *zł*, Stanisław o 18 *zł* więcej; ile mają razem?
14. Kupcowi zostało w jednym worku 46 *kg* mąki, w drugim 32 *kg*, a w trzecim 29 *kg*; ile *kg* mąki zostało?
15. Kupiec sprzedał 17 *kg* towaru za 323 *zł* i 38 *kg* tego samego towaru za 722 *zł*; ile *kg* sprzedał i za jaką cenę?
16. Zegar wskazuje 1 godzinę i 17 minut, a spóźnił się o 39 minut; jaki jest prawdziwy czas?
17. Materjał na ubranie kosztuje 45 *zł*, dodatki 12 *zł*, a robota 25 *zł*; ile kosztuje ubranie?
18. Dłużnik zapłacił połowę swego długu, t. j. 298 *zł*; ile wynosi cały dług?
19. Radjo miało w 1929 r. 203 000 odbiorników, a w 1930 r. o 73 000 więcej; ile miało odbiorników w 1930 r.?
20. W Polsce wytworzono papieru (w przybliżeniu) w 1919 roku — 15 000 *t*, w 1920 roku — 20 000 *t*, w 1921 roku — 52 600 *t*; ile tonn papieru wytworzono w tych trzech latach?

**Ćwiczenia**

1. Archimedes umarł w r. 212 przed Chr.; ile lat upłynęło od jego śmierci?
2. Mickiewicz urodził się w r. 1798, a żył 57 lat; w którym roku umarł?
3. Ile dni upłynęło do dzisiaj od początku roku?
4. Jaką ma datę 57-my dzień po 13 maja?
5. Zegar wskazuje 4-tą godzinę 57 minut 32 sekund, a spóźnia się 2 minuty 45 sekund. Jaka jest godzina?
6. Pociąg wyjechał w sobotę o godzinie 17 min. 40 i jechał 55 godz. 45 min. Którego dnia i o której godzinie przybył na miejsce przeznaczenia?
7. Odległość księżyca od ziemi wynosi 384 400 *km*, zaś średnica słońca jest o 1 006 600 *km* większa; ile *km* wynosi średnica słońca?

8. Oś ziemska wynosi 12 712 160 *m*, zaś średnica równika jest od niej o 42 630 *m* dłuższa; ile wynosi średnica równika?
9. Kupiono towaru za 17 *zł* 35 *gr*, a sprzedano go z zyskiem 1 *zł* 85 *gr*. Za ile sprzedano towar?
10. Kupiec sprzedał towar za 46 *zł* i stracił na tej sprzedaży 3 *zł* 45 *gr*; ile zapłacił za ten towar?
11. *a)* Jeden kupiec zarobił 326 *zł*, drugi o 256 *zł* więcej, a trzeci o 165 *zł* więcej niż dwaj pierwsi razem; ile zarobił każdy z nich i ile zarobili razem?
    *b)* Fabryka w pierwszem półroczu przyniosła 56 789 *zł* dochodu, w drugim zaś o 13 895 *zł* więcej; jaki dochód przyniosła w całym roku?
12. Cenę kupna domu wpłacono w 5-ciu ratach: pierwsza wynosiła 14 500 *zł*, a każda następna była o 3200 *zł* większa od poprzedniej. Za ile kupiono dom?
13. Poszczególne części granicy Polski mają: wybrzeże morskie 146 *km*, granica z Gdańskiem 139 *km*, z Niemcami 1912 *km*, z Litwą 521 *km*, z Łotwą 103 *km*, ze Związkiem Socjalistycznych Republik Rad 1407 *km*, z Rumunją 388 *km*, z Czechosłowacją 920 *km*; jaka jest długość granic Polski?
14. Długość Odry wynosi 860 *km*; Niemen jest o 18 *km* dłuższy, Wisła jest o 189 *km* dłuższa niż Niemen, a Dniestr jest o 305 *km* dłuższy od Wisły; jak długie są te rzeki?
15. Najwyższy szczyt w Tatrach polskich, Rysy, wznosi się 2503 *m* ponad poziom morza, a najwyższy szczyt w całych Tatrach, Garłuch, jest o 160 *m* wyższy; jak wysoki jest Garłuch?
16. Najwyższy szczyt na ziemi, Mont Everest, ma wysokość 8882 *m* ponad poziom Oceanu Spokojnego, którego największa głębokość wynosi 8960 *m*; jak wysoko wznosi się ten szczyt ponad tem najgłębszem miejscem?
17. Odległość z Warszawy do Torunia wynosi 244 *km*, z Torunia do Berlina 407 *km*, z Berlina do Paryża 1081 *km*, z Paryża do Madrytu 1465 *km*; ile *km* wynosi odległość z Warszawy do Paryża przez Berlin, a ile do Madrytu?

18. Przekonaj się, że niżej podane kwadraty są t. zw. kwadratami magicznemi, to znaczy, że sumy liczb każdego wiersza, każdej kolumny i każdej przekątnej są sobie równe.

*a)*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

*b)*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 18 | 21 | 22 | 3 |
| 20 | 14 | 9 | 16 | 6 |
| 19 | 15 | 13 | 11 | 7 |
| 2 | 10 | 17 | 12 | 24 |
| 23 | 8 | 5 | 4 | 25 |

19. Utwórz kwadrat magiczny, wypełniając puste miejsca liczbami od 1 do 6 tak, by suma każdego wiersza, każdej przekątnej i każdej kolumny wynosiła 15.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | | |
| | | 7 |
| | 9 | |

20. Kamień wolno puszczony z wieży przebiegł w pierwszej sekundzie 490 *cm*, a w każdej następnej sekundzie o 980 *cm* więcej, niż w poprzedniej; jak wysoka jest wieża, jeżeli spadał 4 sekundy?
21. Opierając się na danych poprzedniego zadania, oblicz, w której sekundzie spadnie kamień z wysokości 150 *m*.
22. Zwyczajnie przy wagach są ciężarki: 1 *g*, 2 *g*, 2 *g*, 5 *g*, 10 *g*, 20 *g*, 20 *g*, 50 *g*. Ciężarkami temi możemy zważyć ciężar od 1 *g* do 110 *g*.
Jak zważysz: 17 *g*, 25 *g*, 39 *g*, 43 *g*, 58 *g*, 67 *g*, 75 *g*, 84 *g*, 99 *g*, 108 *g*?
23. Mając jeden ciężarek 1 *g*, jeden ciężarek 2 *g*, jeden ciężarek 4 *g*, wreszcie 1 ciężarek 8 *g*, przekonaj się, że każdy

ciężar od 1 $g$ do 15 $g$ potrafisz utworzyć, a więc zważyć. Np.: $10\ g = 2\ g + 8\ g$.

24. Mając 2 ciężarki po 1 $g$, 2 ciężarki po 3 $g$, 2 ciężarki po 9 $g$, można utworzyć wszelkie ciężary od 1 $g$ do 26 $g$. Utwórz ciężary od 10 $g$ do 20 $g$!

25. Staś zabawiał się z Jasiem następującą grą: Staś podał jakąś liczbę od 1 do 9. Następnie Jaś liczbę większą od poprzedniej co najwyżej o 9; potem Staś podał znowu większą od poprzedniej co najwyżej o 9 i t. d. Ten wygrywa kto pierwszy powie 99.

    Spróbuj zagrać w tę grę z kolegą. (Kto grę zaczyna, powinien wygrać).

26. W miejsca oznaczone kropkami

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & . & & . & & 1 & \\
1 & & . & & . & & . & & 1
\end{array}
$$

    należy wpisywać kolejno sumę dwóch najbliższych liczb z poprzedniego wiersza. Tak otrzymany trójkąt liczb nazywa się trójkątem Pascala.[2] Utwórz trójkąt Pascala, mający dziesięć wierszy! Oblicz sumę liczb każdego wiersza!

27. Napisz liczbę 1 i 2, obok ich sumę, następnie sumę dwóch ostatnich liczb, a potem znowu sumę dwóch ostatnich liczb, aż przekroczysz liczbę 100; otrzymane liczby, zwane liczbami Fibonacci'ego[3], spotyka się często w przyrodzie, np. liczba kwiatów w stokrótce.

# Odejmowanie

## Określenie różnicy

Jeżeli z woreczka zawierającego 9 kulek weźmiemy 5 kulek, to pozostaną 4 kulki. Liczbę 9 nazywamy odjemną, 5 odjemnikiem, 4 zaś różnicą lub resztą.

---

[2] Czytaj: Paskala. [3] Czytaj: Fibonacziego.

Różnicę dwóch liczb oznaczamy, pisząc odjemną, następnie znak — (czytaj mniej lub minus) a potem odjemnik.

A więc piszemy: $9 - 5 = 4$.

Podobnie: $16 - 9 = 7$, bo $9 + 7 = 16$.

Oczywiście możemy mówić o różnicy dwóch liczb tylko wówczas, gdy odjemna jest większa od odjemnika lub jemu co najmniej równa. Jeżeli odjemna równa się odjemnikowi, to różnica równa się zero.

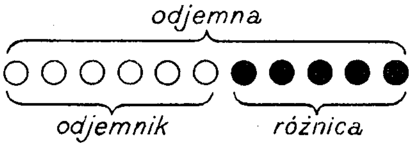
A więc: $9 - 9 = 0$, bo $9 + 0 = 9$,
$0 - 0 = 0$, bo $0 + 0 = 0$.

Jeśli odjemnik jest zerem, to różnica równa się odjemnej.

Np.: $8 - 0 = 8$, bo $0 + 8 = 8$,
$15 - 0 = 15$, bo $0 + 15 = 15$.

Działanie, jakie wykonujemy, obliczając różnicę, nazywamy odejmowaniem.

**Odjemna, odjemnik i różnica.** Na rys. 3 mamy 11 kółek, z czego 6 jest białych, a reszta czarnych. Kółek czarnych jest zatem 5, bo




$$\underset{\text{odjemna}}{11} - \underset{\text{odjemnik}}{6} = \underset{\text{różnica}}{5}$$

Rys. 3.

Z rys. 3 widzimy, że:

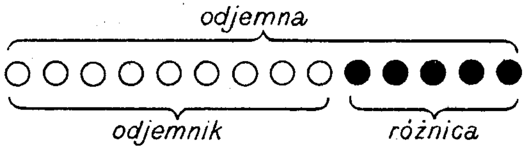
*a)* odjemną otrzymamy, dodając odjemnik do różnicy.
A więc: $11 = 6 + 5$.

Podobnie: $28 - 13 = 15$, więc: $28 = 13 + 15$.

*b)* odjemnik otrzymamy, odejmując od odjemnej różnicę.
Zatem: $6 = 11 - 5$.

Podobnie: $28 - 13 = 15$, więc: $13 = 28 - 15$.

*c)* Jeśli na rys. 3 dołączymy po lewej stronie np. 3 kółka białe (rys. 4), to odjemną i odjemnik powiększymy o 3, a liczba kółek czarnych pozostanie ta sama.

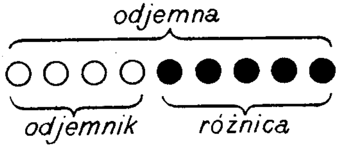



Rys. 4.

Zatem $11 - 6 = 14 - 9 = 5$.

Widzimy więc, że różnica nie zmieni się, jeśli odjemną i odjemnik o tę samą liczbę powiększymy. Podobnie różnica nie zmieni się, jeśli odjemną i odjemnik o tę samą liczbę pomniejszymy. Np.: $11 - 6 = 5$.

Jeśli odjemną i odjemnik zmniejszymy o 2 (rys. 5), to otrzymamy: $9 - 4 = 5$.




Rys. 5.

a więc różnica nie zmieniła się.

### Zadania

| | odjemna | odjemnik | różnica | odjemna | odjemnik | różnica |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | *a)* 8 | 5 | ? | *d)* 16 | ? | 9 |
| | *b)* 10 | ? | 3 | *e)* 12 | 9 | ? |
| | *c)* ? | 7 | 8 | *f)* ? | 12 | 15 |

W miejsce pytajników wstaw odpowiednie liczby!

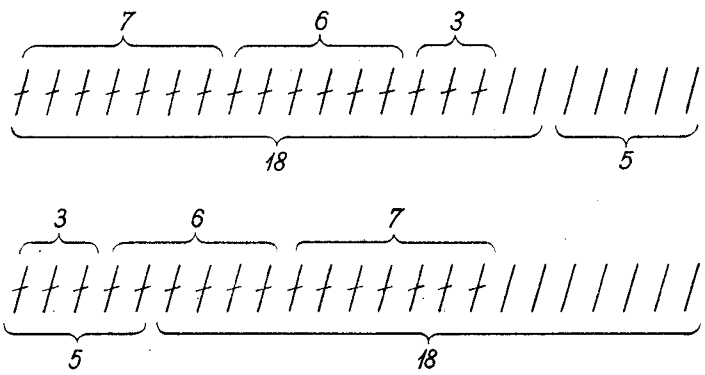
2. Wstaw zamiast pytajnika odpowiednią liczbę.
*a)* $12 + ? = 18$ *b)* $? + 16 = 28$ *c)* $24 - ? = 16$
3. W miejsce liter wstaw odpowiednie liczby: $40 - x = 30$; $15 - 12 = y$; $x - 8 = 20$; $17 - x = 8$; $z - 16 = 6$; $x + 8 = 27$; $16 + z = 30$.
4. Ile należy odjąć od liczby 32, aby otrzymać liczbę 19?
5. Do pewnej liczby dodano 21 i otrzymano liczbę 70; co to była za liczba?

## Łączne dodawanie i odejmowanie

Jeżeli mamy kilka liczb, połączonych znakami $+$ i $-$ jak np.: $18 - 7 - 6 + 5 - 3$, to wyrażenie takie obliczamy, wykonując pokolei naznaczone działania.

W naszym więc wypadku należy od 18 odjąć 7, od otrzymanej różnicy odjąć 6, do tej różnicy dodać 5 i od otrzymanej sumy odjąć 3. A więc: $18 - 7 - 6 + 5 - 3 = 7$.

Rachunek, jaki wykonujemy, obliczając powyższe wyrażenie, możemy sobie uzmysłowić, rysując najpierw 18 kresek, następnie przekreślając 7 kresek, potem przekreślając jeszcze 6 kresek, następnie dorysowując 5 nowych kresek, a wkońcu przekreślając jeszcze 3 kreski. Rys. 6 (górna figura).




Rys. 6.

Taki sam wynik otrzymamy, jeżeli będziemy w innym porządku taką samą liczbę kresek co poprzednio dopisywali i przekreślali. Moglibyśmy więc narysować najpierw 5 kresek, przekreślić 3, dorysować 18 kresek, przekreślić 6 i znowu przekreślić 7 kresek, rys. 6 (dolna figura). Zostanie taka sama liczba nieprzekreślonych kresek, jak poprzednio.

Zatem: $18 - 7 - 6 + 5 - 3 = 5 - 3 + 18 - 6 - 7$.

Widzimy stąd, że *mając zaznaczone na liczbach kolejne działania dodawania i odejmowania, możemy te działania wykonywać* w d o w o l n y m p o r z ą d k u (byle tylko odejmowania były zawsze możliwe).

**Zadania**

1. Oblicz: *a)* $15-7-8+16$, *b)* $23+12-5-7+1$,
   *c)* $35-1-3-7-10$, *d)* $17-15+3-5$,
2. Podobnie jak przy dodawaniu, dajemy nawias dla zaznaczenia, że najpierw należy wykonać działania naznaczone w nawiasie. Np.: $(12+3)-7=15-7=8$,
   $15+(8-6)+(10-3)=15+2+7=24$.
   Oblicz: *a)* $12-(7-6)+3$;
   *b)* $20+(12-5)-(10-6)$;
   *c)* $(30-15)-(40-25)$;
   *d)* $80-25+(30-20)-(15-6)$;
3. Wylicz kilkoma sposobami niżej podane wyrażenia:
   *a)* $18-15+7+15-8+3$;
   *b)* $27-15-8+1+7-6$;
   *c)* $120-35-25-40+7+15$;
   *d)* $2-1+3-2+4+2-1-3+1$;
   *e)* $8-8+8-8+8$;

## Odejmowanie w układzie dziesiętnym

Mamy obliczyć różnicę $647-432$.

Napiszmy odjemnik pod odjemną tak, by cyfry jednostek były w jednej kolumnie, podobnież cyfry dziesiątek, setek i t. d., a następnie podkreślmy.

$$\begin{array}{r} 647 \\ -432 \\ \hline 215 \end{array}$$

Dla zaznaczenia, że chodzi o odejmowanie, piszemy czasem przed odjemnikiem znak —.

Odejmujemy jednostki odjemnika od jednostek tego samego rzędu odjemnej. A więc: 7 jedn. — 2 jedn. = 5 jedn., 4 dzies. — 3 dzies. = 1 dzies., 6 set. — 4 set. = 2 set. Różnica zatem wynosi 2 set., 1 dzies., 5 jedn. tj. 215. Rachunek powyższy wygłaszamy w następujący sposób: 2 od 7 jest 5, piszę 5; 3 od 4 jest 1, piszę 1; 4 od 6 jest 2, piszę 2.

Przypuśćmy, że cyfra jednostek odjemnej jest mniejsza od cyfry jednostek odjemnika np.:

$$\begin{array}{r} 353 \\ -127 \\ \hline 226 \end{array}$$

W wypadku tym jedną dziesiątkę odjemnej zamieniamy na jednostki. Otrzymamy w ten sposób w odjemnej 4 dziesiątki i 13 jednostek. Następnie wykonujemy odejmowanie, jak poprzednio. Podobnie postępujemy, jeżeli cyfry wyższych jednostek odjemnej są mniejsze od odpowiednich cyfr odjemnika. Np.:

$$\begin{array}{r} 2576 \\ -1829 \\ \hline 747 \end{array}$$

Mamy wykonać odejmowanie:

$$\begin{array}{r} 3008 \\ -\ \ 239 \\ \hline 2769 \end{array}$$

W odjemnej cyfry setek i dziesiątek są zerami. W tym wypadku zamieniamy 1 tysiąc na jednostki rzędu niższego i otrzymujemy w odjemnej 2 tysiące, 9 setek, 9 dziesiątek i 18 jednostek. Następnie odejmujemy, jak poprzednio.

P r ó b a  o d e j m o w a n i a. Aby zbadać, czy nie popełniliśmy błędów w odejmowaniu, dodajemy różnicę do odjemnika. Oczywiście na wynik powinniśmy otrzymać odjemną.

**Zadania**

1. Oblicz różnicę i sprawdź: *a)* 538 — 227, *b)* 1457 — 738, *c)* 9235 — 4536, *d)* 10 050 — 8734, *e)* 15 327 — 12 408, *f)* 28 305 — 19 326; 36 270 — 15 006; 51 000 — 17 308; *g)* 90 513 — 21 525; 86 128 — 45 296; 154 320 — 96 381; *h)* 53 428 — 3542; 78 621 — 8219; 51 200 — 31 800.
2. Oblicz *a)* 12458 — 6407 — 3256 — 1128;
   *b)* 14653 — 7234 + 2537 — 5604.

3.

| Województwa | Ludność w 1921 r. | Ludność w 1931 r. | Przyrost ludności w ciągu 10 lat |
|---|---|---|---|
| M. Warszawa . | 937 000 | 1 178 000 | |
| Warszawa . . | 2 115 000 | 2 533 000 | |
| Łódź . . . . | 2 253 000 | 2 632 000 | |
| Kielce . . . | 2 536 000 | 2 936 000 | |
| Lublin . . . | 2 086 000 | 2 468 000 | |
| Białystok . . | 1 302 000 | 1 640 000 | |
| Wilno . . . . | 1 006 000 | 1 273 000 | |
| Nowogródek . | 801 000 | 1 055 000 | |
| Polesie . . . | 879 000 | 1 133 000 | |
| Wołyń . . . | 1 438 000 | 2 082 000 | |
| Poznań . . . | 1 968 000 | 2 213 000 | |
| Pomorze . . . | 936 000 | 1 086 000 | |
| Śląsk . . . . | 1 125 000 | 1 299 000 | |
| Kraków . . . | 1 993 000 | 2 297 000 | |
| Lwów . . . . | 2 718 000 | 3 127 000 | |
| Stanisławów . | 1 339 000 | 1 476 000 | |
| Tarnopol . . | 1 429 000 | 1 600 000 | |
| Polska . . . | | | |

Oblicz ludność Polski w r. 1921 i w r. 1931, a następnie przyrost całej ludności, jakoteż przyrost w poszczególnych województwach!

4. W roku 1931 Warszawa miała 1 178 000 mieszkańców Łódź 605 000, Lwów 316 000; o ile ludność Warszawy przewyższa ludność Łodzi i Lwowa?

5. Wzrost wkładów i liczby książeczek oszczędnościowych w Pocztowej Kasie Oszczędności (P. K. O.) wynosi:

| Rok | Liczba książeczek | Stan oszczędności w *zł* |
|---|---|---|
| 1924 | 57 793 | 7 555 000 |
| 1925 | 81 628 | 12 612 000 |
| 1926 | 113 201 | 64 640 000 |
| 1927 | 179 643 | 67 604 000 |
| 1928 | 298 343 | 122 292 000 |
| 1929 | 434 305 | 172 972 000 |
| 1930 | 605 547 | 253 703 000 |
| 1931 | 761 350 | 332 235 000 |

Oblicz wzrost liczby książeczek i stanu oszczędności w kolejnych latach, a następnie w okresie od 1924 r. do 1931 r.!

6. Mamy wykonać odejmowanie:

$$\begin{array}{rr} & {\scriptstyle (100)} \\ 5397\ \textit{zł} & 38\ \textit{gr} \\ -\ 2458\ \textit{zł} & 65\ \textit{gr} \\ \hline 2938\ \textit{zł} & 73\ \textit{gr} \end{array}$$

Ponieważ 65 *gr* nie możemy odjąć od 38 *gr*, więc 1 *zł* zamieniamy na 100 *gr* i dodajemy do groszy. Zapisujemy to, pisząc kropkę nad 7, aby pamiętać, że w odjemnej mamy 5396 *zł*, a 100 piszemy nad 38 *gr*, dla zaznaczenia, że mamy 138 *gr*.

Następnie odejmujemy grosze od groszy, złote od złotych.

7. Wykonaj następujące odejmowania:

*a)* $\begin{array}{r} 156\ \textit{zł}\ 27\ \textit{gr} \\ -\ 87\ \textit{zł}\ 60\ \textit{gr}, \\ \hline \end{array}$ *b)* $\begin{array}{r} 15\ m\ 3\ dcm \\ -\ 7\ m\ 5\ dcm, \\ \hline \end{array}$ *c)* $\begin{array}{r} 238\ km\ 521\ m \\ -\ 124\ km\ 718\ m, \\ \hline \end{array}$

*d)* $\begin{array}{r} 217\ kg\ 387\ g \\ -\ 124\ kg\ 509\ g, \\ \hline \end{array}$ *e)* $\begin{array}{r} 7\ \text{godz.}\ 18\ \text{min.} \\ -\ 4\ \text{godz.}\ 25\ \text{min.}, \\ \hline \end{array}$ *f)* $\begin{array}{r} 5\ \text{kóp}\ 3\ \text{tuz.} \\ -\ 3\ \text{kóp}\ 4\ \text{tuz.}, \\ \hline \end{array}$

### Rachunek pamięciowy. Uproszczenia

1. Odejmuj od 100 po 2, po 3, po 5 tak długo, jak można.
2. Odejmuj od 87 po 4, po 6, po 8.
3. Odejmuj od 101 po 7, po 9.
4. Wykonaj następujące odejmowania:

| | | |
|---|---|---|
| 25 — 3, | 2340 — 3, | 8013 — 9, |
| 128 — 6, | 1380 — 6, | 12325 — 7, |
| 345 — 3, | 4720 — 5, | 15647 — 9, |

5. Wykonaj następujące odejmowania:

| | | |
|---|---|---|
| 68 — 20, | 675 — 200, | 8253 — 4000, |
| 178 — 90, | 1827 — 500, | 15127 — 6000, |
| 908 — 40, | 7128 — 800, | 18000 — 9000, |

Uwaga: Oblicz różnicę 1238 — 300 w następujący sposób: 1238 równa się 12 setek i 38. 12 setek — 3 setki jest 9 setek: a więc różnica wynosi 9 setek i 38 czyli 938.

6. Obliczamy w pamięci różnicę dwóch liczb, np. 576 — 432 w następujący sposób:
576 — 400 = 176; 176 — 30 = 146; 146 — 2 = 144.
Zatem: 576 — 432 = 144.
Rachunki powyższe wykonujemy w myśli.
Oblicz w pamięci:

| | | |
|---|---|---|
| 375 — 26, | 3000 — 430, | 8200 — 4300, |
| 738 — 429, | 2321 — 1400, | 11200 — 4800, |

7. *a)* Uzupełnij do 100 (t. zn. odejmij od 100) następujące liczby: 23, 45, 58, 81.
*b)* Uzupełnij do 1000: 421, 536, 648, 796.
*c)* Uzupełnij do 10 000: 3251, 5726, 1291, 6827.
8. Odejmuj od 213 po 15, po 25 !
9. Jeżeli mamy odjąć liczbę, kończącą się cyfrą 8 lub 9, to zaokrąglamy ją do najbliższych dziesiątek, a następnie różnicę powiększamy o tyle, o ile powiększyliśmy odjemnik. Np. 357 — 99; rachujemy 357 — 100 = 257; otrzymana różnica jest o 1 za małą, zatem:

357 — 99 = 258.

Oblicz w powyższy sposób:

| | | |
|---|---|---|
| 127 — 18, | 848 — 99, | 5361 — 998, |
| 238 — 49, | 724 — 98, | 8429 — 999, |

10. Odejmuj: *a)* od 196 po 29, *b)* od 738 po 99!
11. Kupiec sprzedał towar za 5238 *zł*, a zarobił 998 *zł*; ile kosztował kupca ten towar?
12. Dostawca miał dostarczyć 2500 *kg* cukru, a dostarczył 1900 *kg*; ile ma jeszcze dostarczyć?
13. Kupiono towar za 19 000 *zł*, a sprzedano go za 26 500 *zł*. Z jakim zyskiem sprzedano towar?
14. Poziom Wisły w Krakowie wynosi 222 *m* nad poziom morza, a w Warszawie poziom Wisły jest o 101 *m* niższy, niż w Krakowie; jaki jest poziom Wisły w Warszawie?
15. Wieśniak sprzedał masło i jaja za 32 *zł*; za masło otrzymał 19 *zł* 25 *gr*. Ile otrzymał za jaja?
16. Odległość kolejowa z Warszawy do Częstochowy wynosi

230 *km*, a do Krakowa (przez Częstochowę) 364 *km*; ile *km* wynosi odległość kolejowa z Częstochowy do Krakowa?

**Ćwiczenia**

1. Na jednej szalce wagi położono 65 *g*, a na drugiej towar i 37 *g*; waga jest w równowadze. Ile waży towar?
2. Ktoś zarobił pierwszego dnia 20 *zł*, a wydał 8 *zł*, drugiego dnia zarobił 10 *zł*, a wydał 12 *zł*, trzeciego dnia zarobił 18 *zł*, a wydał 7 *zł*; ile zarobił i ile wydał w trzech dniach, ile zaoszczędził w pierwszym dniu, ile w dwóch pierwszych dniach, ile w trzech dniach?
3. W jednej sali było 30 ludzi, a w drugiej 50 ludzi. Z pierwszej sali przeszło do drugiej 15 ludzi, a potem z drugiej sali przeszło do pierwszej 18 ludzi i wreszcie jeszcze raz z drugiej sali przeszło do pierwszej 13 ludzi; ile było wkońcu osób w pierwszej, a ile w drugiej sali?
4. Woda w rzece podniosła się o 15 *cm* ponad stan normalny, opadła następnie o 18 *cm* i wzniosła się znowu o 2 *cm*; czy wkońcu poziom rzeki był powyżej, czy poniżej stanu normalnego i o ile *cm*?
5. Balon wzniósł się na 1000 *m* wgórę, następnie opadł o 50 *m*, znów wzniósł się o 60 *m* i opadł wreszcie o 80 *m*; na jakiej wysokości znajduje się balon?
6. Piechur przeszedł w pierwszym dniu 40 *km*, w drugim o 10 *km* mniej, w trzecim o 5 *km* więcej, niż w drugim, a w czwartym o 7 *km* mniej niż w trzecim; jaką drogę przebył w czwartym dniu?
7. Pociąg wyjechał w poniedziałek o godz. 21-szej min. 45, i przybył na miejsce przeznaczenia we środę o godz. 5-tej min. 30. Jak długo jechał pociąg?
8. Z dwóch stacyj, odległych od siebie o 400 *km*, wychodzą równocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi. Po pewnym czasie pierwszy przebył 120 *km*, a drugi 80 *km*; w jakiej odległości znajdują się teraz te pociągi?
9. Zegar spóźnił się o 5 minut, posunięto wskazówki na-

przód o 15 minut i wtedy zegar wskazywał 3 godzinę i 25 minut; która godzina była wtedy naprawdę?

10. Sprowadzono dwie skrzynie cukru. Jedna waży brutto 56 *kg*, druga zaś 65 *kg*; opakowanie pierwszej (tara) waży 7 *kg*, drugiej zaś 9 *kg*. W której skrzynce jest więcej cukru i o ile?
11. W pociągu jechało 418 podróżnych, z czego w trzeciej klasie jechało 238, w drugiej klasie o 119 mniej; ilu podróżnych jechało I klasą?
12. Najwyższy szczyt w Tatrach, Garłuch ma 2663 *m*, a najwyżej położony staw Furkotny leży na wysokości 2154 *m*; ile *m* wznosi się Garłuch nad stawem Furkotnym?
√13. Jadąc koleją z Warszawy przez Białystok i Grodno do Wilna, przejeżdżamy 429 *km*. Odległość z Warszawy do Grodna wynosi 272 *km*, a z Białegostoku do Wilna 240 *km*; ile jest *km* z Białegostoku do Grodna?
14. Odległość kolejowa z Warszawy do Lwowa przez Przemyśl wynosi 513 *km*, z Warszawy do Przemyśla 415 *km*, zaś z Krakowa do Lwowa (przez Przemyśl) 343 *km*; ile *km* wynosi odległość kolejowa z Krakowa do Przemyśla?
16. Ktoś spłaca dług w czterech ratach; pierwsza rata wynosi 500 *zł*, a każda następna jest o 35 *zł* mniejsza; ile wynosi całkowity dług?
17. Sumę 23 846 *zł* rozdzielić między cztery osoby tak, aby pierwsza dostała 11 907 *zł*, druga o 5369 *zł* mniej niż pierwsza, trzecia o 15 492 *zł* mniej niż pierwsze dwie razem, a czwarta resztę. Ile otrzyma czwarta osoba?
18. Dwa odcinki częściowo nakrywają się. Jeden wystaje na prawo o 3 *dcm* 5 *cm*, drugi zaś na lewo o 6 *dcm* 7 *cm*; który z nich jest dłuższy i o ile?
19. Oblicz różnicę pomiędzy najmniejszą liczbą siedmiocyfrową, a największą czterocyfrową!
20. Gdyby dłużnik miał o 86 *zł* więcej niż posiada, to zapłaciłby dług 275 *zł* i zostałoby mu 15 *zł*; ile posiada dłużnik?
21. Ile jest liczb *a)* dwucyfrowych, *b)* trójcyfrowych, *c)* czterocyfrowych, *d)* pięciocyfrowych?

22. Oblicz, ile dni (dokładnie) trwała wielka wojna, która zaczęła się 1-go sierpnia 1914 r., skończyła się 10-go listopada 1918 r.! (Rok 1916 był rokiem przestępnym).

23. Mając po jednym ciężarku: 1 *g*, 3 *g*, 9 *g*, 27 *g*, 81 *g*, możemy zważyć każdy ciężar od 1 *g* do 121 *g*, jeśli wolno kłaść ciężarki na obu szalkach. Np. przedmiot o ciężarze 95 *g* zważymy, kładąc na jednej szalce 81 *g* i 27 *g*, a na drugiej 9 *g*, 3 *g*, 1 *g* i ten przedmiot.
Mamy bowiem: $95\,g = 81\,g + 27\,g - 9\,g - 3\,g - 1\,g$.
Jakbyś zważył ciężary: *a)* wszystkie od 1 *g* do 10 *g*;
*b)* 11 *g*, 12 *g*, 18 *g*, 23 *g*, 25 *g*?

## Rachunki kupieckie

Każdy kupiec powinien prowadzić tak zwaną księgę kasową, w której zapisuje wyłącznie wpływy i wydatki w gotówce. Księgę kasową można prowadzić wedle wzoru:

**Księga kasowa**
Styczeń 1933 r.

| Data | Wyszczególnienie | Wpływy *zł* | *gr* | Wydatki *zł* | *gr* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1/I | Pozostałość z dniem 31/12 1932 r. | 113 | 50 | | |
| 1/I | Wpływ dzienny | 118 | 40 | | |
| 2/1 | Wpływ dzienny | 146 | 80 | | |
| 3/1 | Wykupienie towaru | | | 215 | 60 |
| 3/1 | Transport towaru | | | 5 | 30 |
| 3/1 | Wpływ dzienny | 96 | 20 | | |
| | i t. d. | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| 5/I | Asekuracja | | | 46 | — |
| 5/I | Wpływ dzienny | 108 | 35 | | |
| | do przeniesienia | 1146 | 25 | 963 | 10 |

Przy końcu strony dodajemy wszystkie kwoty w rubryce wpływów i podobnie w rubryce wydatków. Obok umieszczamy napis „do przeniesienia“, aby zaznaczyć, że kwoty te mają być przepisane na następnej stronie. Po przepisaniu tych kwot, umieszczamy obok napis „Z przeniesienia“.

| Data | Wyszczególnienie | Wpływy zł | Wpływy gr | Wydatki zł | Wydatki gr |
|---|---|---|---|---|---|
| | Z przeniesienia | 1146 | 25 | 963 | 10 |
| 6/I | Wpływ dzienny | 98 | 40 | | |
| | i t. d. | | | | |

Aby obliczyć stan kasy, odejmujemy od sumy wpływów sumę wydatków. Różnica ta nazywa się saldem. Dla kontroli rachunków dodajemy saldo do sumy wydatków. Jako wynik powinniśmy otrzymać sumę wpływów. Poniżej podajemy przykład obliczenia salda, czyli zamknięcia księgi kasowej:

| Data | Wyszczególnienie | Wpływy zł | Wpływy gr | Wydatki zł | Wydatki gr |
|---|---|---|---|---|---|
| | Z przeniesienia | 2649 | 75 | 1987 | 50 |
| 30/I | Wpływ dzienny | 89 | 60 | | |
| 30/I | Wykupienie towaru | | | 340 | 80 |
| 31/I | Transport towaru | | | 10 | 30 |
| 31/I | Wpływ dzienny | 102 | 70 | | |
| | | 2842 | 05 | 2338 | 60 |
| | Saldo | | | 503 | 45 |
| | | 2842 | 05 | 2842 | 05 |

Księgę kasową można zamknąć w dowolnym dniu.

**Zadania**

1. Kupiec zapisał w księdze kasowej następujące wpływy i wydatki: z przeniesienia suma wpływów 1486 *zł* 85 *gr*, wydatków 964 *zł* 15 *gr*, 1/II czynsz za lokal 200 *zł*, 1/II wpływ dzienny 64 *zł* 50 *gr*, 2/II na potrzeby domu

25 *zł*, 2/II zwrot kosztów podróży pośrednikowi 45 *zł*, 2/II wpływ dzienny 116 *zł* 20 *gr*, 3/II przekaz pieniężny za sprowadzony towar 150 *zł*, 3/II wpływ dzienny 98 *zł* 70 *gr*, 4/II wpływ dzienny 108 *zł*; oblicz saldo i zamknij księgę kasową w dniu 4/II!

2. Stolarz zapisał w księdze kasowej następujące wpływy i wydatki: saldo z zeszłego roku 208 *zł* 25 *gr*, 2/I za zakupione deski 104 *zł*, 2/I wpływ dzienny 45 *zł*, 3/I ubezpieczenie od ognia 50 *zł*, 3/I wpływ dzienny 64 *zł*, 4/I wpływ dzienny (za meble do jadalni) 950 *zł*, 5/I na potrzeby własne 35 *zł*, 5/I wpływ dzienny 56 *zł*, 6/I wykupno weksla 300 *zł*, 6/I wpływ dzienny 120 *zł*, 7/I wpływ dzienny 65 *zł* 50 *gr*; zamknij księgę kasową w dniu 7/I !
3. Aby mieć codziennie stan zapasu pewnego towaru, kupcy prowadzą wykaz jak np.

| Rodzaj towaru: flaszeczki atramentu | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Data** | **Nabyto** | **Sprzedano** | **Odpisano** | **Pozostaje** | **Uwagi** |
| 7/III | 200 | 35 | — | | |
| 8/III | — | 40 | 1 | | darowano |
| 9/III | — | 48 | — | | |
| 10/III | 200 | 52 | 1 | | dla sklepu |
| 12/III | — | 46 | — | | |
| 13/III | — | 56 | 4 | | zbiły się |
| 14/III | — | 42 | — | | |

W rubryce „odpisano“ zapisuje się ilość towaru, za który nie pobrano pieniędzy. W uwagach zapisuje się przyczynę, dla której towar odpisano. Wypełnij rubrykę „pozostaje“ i oblicz stan zapasu flaszeczek atramentu w końcu 14/III!

4. W sklepiku szkolnym zapisano następujący stan zapasu zeszytów: 1/IV nabytych 400, sprzedanych 65, 2/IV sprzedanych 40, darowanych 2, 3/IV sprzedanych 58, uszkodzonych 1, 4/IV zakupionych 200, sprzedanych 49, do użytku sklepu 1; sporządź wykaz, jak wyżej i oblicz stan zapasu z końcem 4/IV!

## Rachunki gospodarstwa domowego

Dobrze prowadzone gospodarstwo powinno mieć:

*a)* spis inwentarza, który można sporządzić wedle wzoru:

| Rodzaj | Przedmiot | Liczba | Rok nabycia | Cena | Uwagi |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) meble pokojowe i kuchenne | szafy | 2 | 1927 | 160 *zł* | |
| | stoły | 2 | 1927 | 50 „ | |
| | krzesła | 6 | 1927 | 72 „ | |
| 2) pościel i bielizna | poduszki | 4 | 1927 | 80 *zł* | |
| | materace | 6 | 1927 | 90 „ | |
| | prześcieradła | 12 | 1927 | 72 „ | |
| 3) ubrania i obuwie | ubrania męskie | 2 | 1927 | 180 *zł* | 3/II 1928 |
| | suknie | 2 | 1927 | 120 „ | 1 suknię |
| | suknia | 1 | 1928 | 70 „ | darowano |
| 4) naczynia stołowe i kuchenne | talerze | 12 | 1927 | 14 *zł* 40 *gr* | |
| | garnki | 6 | 1927 | 26 „ | |
| | i t. d. | | | | |

*b)* plan utrzymania domu, który przy dochodzie miesięcznym np. 250 *zł* można sporządzić wedle wzoru:

| Liczba | Rodzaj wydatków | Kwota |
|---|---|---|
| 1 | mieszkanie | 50 *zł* |
| 2 | opał i oświetlenie | 12 „ |
| 3 | wyżywienie | 90 „ |
| 4 | naprawa obuwia | 8 „ |
| 5 | kształcenie dzieci | 15 „ |
| 6 | podatki | 5 „ |
| 7 | ubezpieczenie | 10 „ |
| 8 | nieprzewidziane wydatki | 20 „ |
| 9 | oszczędności | 40 „ |
| | Razem . | 250 *zł* |

*c)* Księgę dochodów i rozchodów, którą można sporzą-

| 1933 | | | DOCHODY | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Miesiąc | Dzień | | Stan kasy | | Pobory | | Inne | | Suma wpływów | |
| | | | *zł* | *gr* | *zł* | *gr* | *zł* | *gr* | *zł* | *gr* |
| Luty | 1 | Pozostałość ze stycznia . . | 33 | 15 | | | | | | |
| „ | 1 | Pobory . . . . . | | | 250 | — | | | | |
| „ | 3 | Nadliczbowe godziny . . . | | | | | 25 | 60 | | |
| Luty | 28 | Suma . . . . . | 33 | 15 | 250 | — | 25 | 60 | 308 | 75 |

**Zadania**

1. *a)* Sporządź inwentarz swoich rzeczy!
   *b)* Zrób inwentarz swej klasy wedle cen miejscowych!
2. Oblicz oszczędności i sporządź plan wydatków wedle wyżej podanego wzoru, jeśli:
   *a)* dochód wynosił 325 *zł* 80 *gr*, a przewidywano następujące wydatki: mieszkanie 65 *zł*, opał i światło 18 *zł*, wyżywienie 120 *zł*, bielizna 25 *zł*, podatki 10 *zł* 50 *gr*, ubezpieczenie 15 *zł* 40 *gr*, spłata długów 15 *zł*, nadzwyczajne wydatki 20 *zł*.

dzić wedle wzoru:

| 1933 | | W Y D A T K I | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Miesiąc | Dzień | | Czynsz | | Opał i światło | | Wyżywienie | | Ubrania i bielizna | | Podatki | | Ubezpieczenie | | Spłata długów | | Nadzwyczajne | | Suma wydatków | | Oszczędności | |
| | | | zł | gr | zł | gr | zł | gr | zł | gr | zł | gr | zł | gr | zł | gr | zł | gr | zł | gr | zł | gr |
| Luty | 1 | Czynsz . . | 50 | — | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| „ | 1 | Oświetlenie i opał . . | | | 15 | 50 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| „ | 1 | Wyżywienie | | | | | 3 | 20 | | | | | | | | | | | | | | |
| „ | 1 | Podatki . . | | | | | | | | | 6 | 10 | | | | | | | | | | |
| „ | 2 | Ubezpieczenie . . . | | | | | | | | | | | 10 | 50 | | | | | | | | |
| „ | 2 | Wyżywienie | | | | | 2 | 90 | | | | | | | | | | | | | | |
| „ | 2 | Podróż . . | | | | | | | | | | | | | | | 15 | 40 | | | | |
| | | i t. d. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Luty | 28 | Suma . . | 50 | — | 15 | 50 | 102 | 40 | 28 | 50 | 6 | 10 | 10 | 50 | 25 | — | 15 | 40 | 253 | 40 | | |
| Luty | 28 | Oszczędności | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 55 | 35 |

*b)* dochód wynosił 185 *zł*, a przewidywano następujące wydatki: mieszkanie 35 *zł*, opał i światło 12 *zł*, wyżywienie 80 *zł*, naprawa bucików 8 *zł*, podatki 5 *zł* 20 *gr*, ubezpieczenie 10 *zł* 60 *gr*, nadzwyczajne wydatki 15 *zł*.

3. *a)* Sporządź tabelę dochodów i wydatków!

*b)* Rozmieść w odpowiednich rubrykach następujące dane: oszczędności z marca 1933 r. 27 *zł* 50 *gr*, 1/IV pobory 275 *zł*, 5/IV dochód (procenta) od oszczędności 12 *zł* 30 *gr*. Wydatki w kwietniu: 1 mieszkanie 55 *zł*, 1 wyżywienie 5 *zł* 20 *gr*, 1 opał i światło 22 *zł*, 2 wyżywienie 1 *zł* 50 *gr,* 3 wyżywienie 4 *zł* 20 *gr,* 3 podatki 9 *zł* 60 *gr,* 4 wyżywienie 2 *zł* 80 *gr,* 4 naprawa ubrania 5 *zł,* 5 podróż 12 *zł* 30 *gr,* 5 wyżywienie 2 *zł* 60 *gr,* 6 wyżywienie 3 *zł* 20 *gr!*

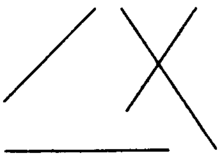
*c)* Zrób, jak wyżej, zestawienie z końcem 6/IV!

# Odcinki i kąty

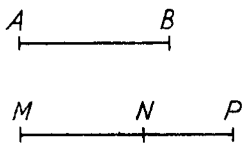
## Odcinek

Weźmy linijkę utworzoną np. przez złożenie kartki papieru i narysujmy przy jej pomocy kilka kresek: kreski te przedstawiają odcinki (rys. 7).

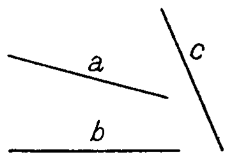
Nitka napięta, lub drut wyprostowany, przedstawiają



Rys. 7.




Rys. 8.




Rys. 9.

odcinki. Odcinkami są: krawędź sześcianu, bok prostokąta, bok jakiegokolwiek wielokąta.

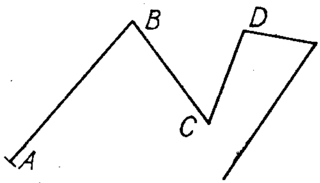
Punkty. Punktami są wierzchołki prostokąta, końce odcinka i t. p.

Punkty oznaczamy zwykle dużemi literami alfabetu. Odcinek oznaczamy dwiema literami, oznaczającemi jego końce, np. odcinki *AB, MN, NP* (rys. 8). Czasami oznaczamy odcinki jedną literą, np. *a, b, c,* jak na rys. 9.

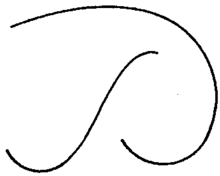
Linja łamana. Nakreślmy dowolny odcinek *AB* (rys. 10), z końca jego poprowadźmy dowolny odcinek *BC,* z końca *C* poprowadźmy znowu nowy odcinek *CD* i t. d. Postępując tak kilka razy, otrzymamy linję, zwaną łamaną.

Linję, która nie jest ani odcinkiem, ani linją łamaną, nazywamy linją krzywą (rys. 11).

*Przedłużanie odcinków.* Mając dany odcinek $AB$ możemy go przedłużyć. Chcąc go np. przedłużyć poza punkt $B$, przykładamy do odcinka $AB$ linijkę i przy jej pomocy kreślimy np. odcinek $BC$. Podobnież moglibyśmy prze-

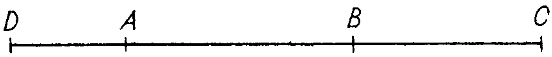



Rys. 10.



Rys. 11.

dłużyć odcinek $AB$ poza punkt $A$ w drugą stronę, np. do punktu $D$ (rys. 12).

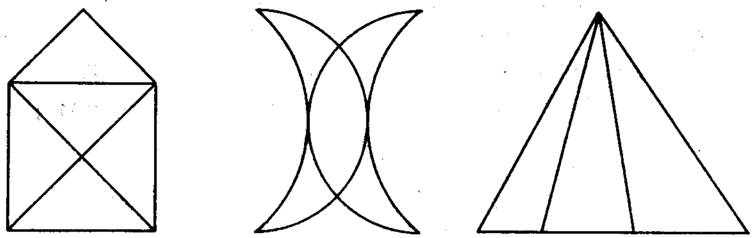



Rys. 12.

Odcinek $AB$ i jego przedłużenia tworzą linję prostą. O odcinku $AB$ mówimy, że leży na tej prostej.

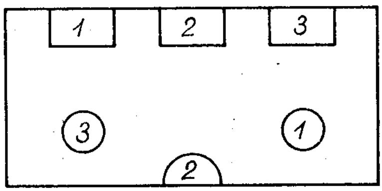
**Zadania**

1. Narysuj kilka odcinków i oznacz je!
2. Narysuj linję łamaną, złożoną *a)* z dwóch, *b)* z trzech, *c)* z czterech odcinków; oznacz każdą z nich!
3. Obierz dwa punkty i oznacz je!
   *a)* połącz te punkty odcinkiem; ile takich odcinków możesz narysować?
   *b)* połącz te punkty linją krzywą; narysuj kilka takich linij!
4. Przedłuż dowolnie obrany odcinek *a)* w jedną stronę, *b)* w obie strony!
5. Narysuj cztery odcinki, tak, by co dwa przecinały się w innym punkcie!
6. Narysuj figury jak na rys. 13, nie odrywając ołówka od kartki papieru, przyczem żadnej linji nie rysuj dwa razy!
7. Trzy domy mają wspólne podwórze, na którem znajdują



Rys. 13.

się również trzy studnie (zob. rys. 14). Połączyć ścieżką każdy dom ze studnią do niego należącą, tak, aby ścieżki biegły przez podwórze i nie przecinały się. Dom i studnia do niego należąca mają ten sam numer.




Rys. 14.

## Kąty

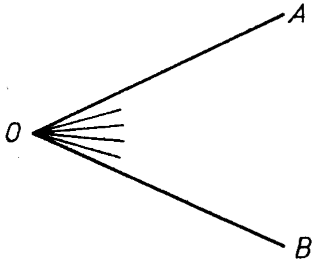
### Określenie kąta

Połóżmy złożony cyrkiel na kartce papieru. Nie zmieniając położenia jednego ramienia, odchylmy ramię drugie. Zaznaczmy teraz na kartce papieru położenia obu ramion odcinkami $OA$ i $OB$, poprowadzonemi z punktu $O$, gdzie leży główka cyrkla. Zacieniujmy jeszcze całkowicie lub częściowo tę część kartki, po której poruszało się ramię ruchome.

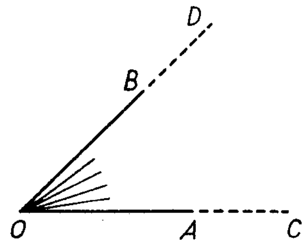
Odejmijmy teraz cyrkiel, a na kartce otrzymamy rys. 15. Rysunek powyższy pozwala nam wyobrazić sobie, jaki obrót wykonało ruchome ramię cyrkla. Gdybyśmy komuś dali taki rysunek, to mógłby on ruchomem ramieniem cyrkla wykonać taki sam obrót, jakiśmy poprzednio wykonali.

Mówimy, że ruchome ramię cyrkla przy tym obrocie opisało kąt, którego obrazem jest rys. 15.

O odcinkach $OA$ i $OB$ mówimy, że tworzą ten kąt, lub, że są pod tym kątem nachylone i nazywamy je **ramionami** tego kąta, punkt zaś $O$ jego **wierzchołkiem**.



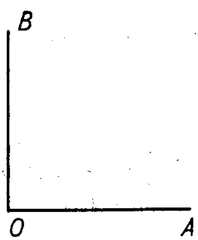

Rys. 15.



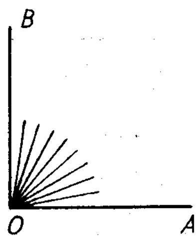

Rys. 16.

Przedłużając odcinki $OA$ i $OB$ poza punkty $A$ i $B$ (rys. 16), otrzymujemy również obraz tego samego kąta, jaki ruchome ramię cyrkla przy obrocie opisało. Zatem kąt nie zmieni się, jeżeli jego ramiona przedłużymy albo skrócimy.

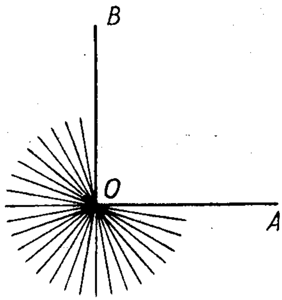
Gdybyśmy na kartce papieru zaznaczyli tylko położenia ramion cyrkla po rozchyleniu (rys. 17) (nie cieniując tej części kartki papieru, po której ramię ruchome poruszało się), to ktoś drugi nie mógłby z rysunku odczytać, jaki obrót ramię cyrkla wykonało. Rys. 18 i 19 wskazują nam bowiem dwa obroty, przy których ruchome ramię zajmuje to samo




Rys. 17.

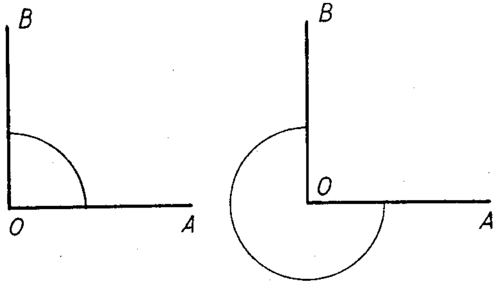



Rys. 18.

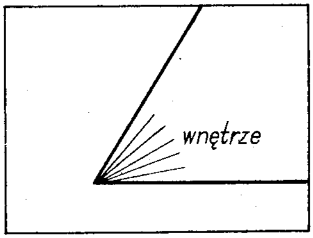



Rys. 19.

końcowe położenie. Zatem dwa odcinki wychodzące z jednego punktu (rys. 17) tworzą dwa kąty. Dla zaznaczenia, o który kąt chodzi, cieniujemy, jak na rys. 18, 19 lub też zakreślamy łuk, jak na rys. 20.




Rys. 20.

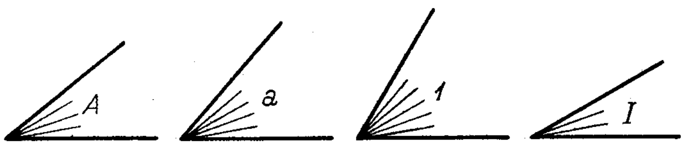



Rys. 21.

Narysujmy na kartce papieru dowolny kąt tak, żeby jego wierzchołek leżał wewnątrz kartki (rys. 21). Przedłużmy jego ramiona do brzegu kartki. Ramiona te podzielą nam kartkę na dwie części. Ta z tych części, która jest zacieniowana, nazywa się **w n ę t r z e m** lub **p o l e m** kąta.

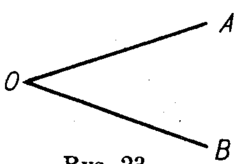
O z n a c z a n i e k ą t ó w. Zwykle kąt zaznaczamy jedną literą lub liczbą, pisząc przed tą literą lub liczbą znak: $\sphericalangle$

A więc na rys. 22 mamy kąty: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle a$, $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle I$.




Rys. 22.

Kąt utworzony przez odcinki $OA$ i $OB$ (rys. 23) oznaczamy, pisząc litery $A\,O\,B$ pokolei tak, by litera $O$, oznaczająca wierzchołek, była w środku.




Rys. 23.

A więc piszemy:

$$\sphericalangle AOB \text{ lub } \sphericalangle BOA.$$

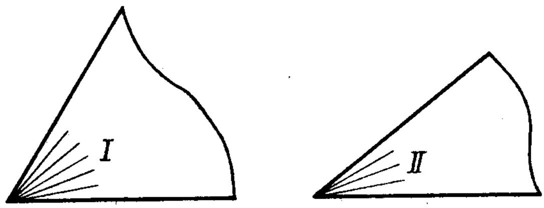
Znakowanie to ma tę niedogodność, że

na oba kąty, utworzone przez odcinki $OA$ i $OB$ mamy ten sam znak.

Używamy tego znakowania tylko wówczas, gdy skądinąd wiemy, o który z tych dwóch kątów nam chodzi.

**Porównywanie kątów**

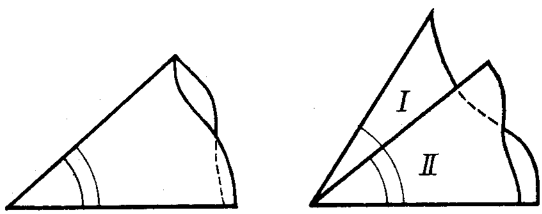
Przypuśćmy, że mamy dwa kąty, wycięte z papieru (rys. 24). Nałóżmy jeden na drugi tak, aby wierzchołek i jedno ramię jednego kąta padło na wierzchołek i jedno ramię drugiego kąta i aby wnętrza nakryły się.




Rys. 24.

Zdarzyć się mogą dwa przypadki:

1. Albo jak na rys. 25 drugie ramiona też padną na siebie. W tym przypadku mówimy, że kąty $I$ i $II$ są równe, co piszemy: $\sphericalangle I = \sphericalangle II$.




Rys. 25. Rys. 26.

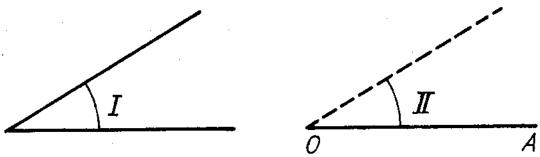
2. Albo też drugie ramiona jak na rys. 26 na siebie nie padną. Wówczas mówimy, że kąt, na którego wnętrze padło ramię drugiego kąta, jest większy od drugiego. O drugim zaś mówimy, że jest mniejszy od pierwszego. Zaznaczamy to pisząc: $\sphericalangle I > \sphericalangle II$ lub $\sphericalangle II < \sphericalangle I$.

### Zadania

1. Odchyl jedno ramię cyrkla od ramienia drugiego i narysuj kąt, który ruchome ramię opisało!
2. Narysuj kąt, jaki opisuje duża wskazówka zegara w *a)* 15 min., *b)* 20 min., *c)* 40 min., *d)* 45 min.
3. Narysuj kilka kątów, oznacz ich wierzchołki i ramiona!
4. Wytnij z papieru *a)* dwa kąty, *b)* kilka kątów i porównaj je, a następnie zanotuj wynik porównania!
5. Czy wskazówka duża w zegarku kieszonkowym i wskazówka duża na zegarze ratuszowym zakreślają w kwadransie równe kąty, czy nie?
6. Przekonaj się, że kąty, jakie tworzą sąsiednie boki prostokąta, są równe!

### Przenoszenie kątów

Niech będzie dany kąt *I* i odcinek *OA* (rys. 27). Chcemy narysować kąt *II*, równy kątowi *I* tak, by wierzchołek padł na *O*, jedno zaś ramię na *OA*. W tym celu wycinamy kąt *I*




Rys. 27.

i kładziemy go na kartce papieru tak, by jego wierzchołek padł w punkcie *O*, a jedno ramię na odcinek *OA*. Rysując z punktu *O* odcinek wzdłuż drugiego ramienia, otrzymujemy żądany kąt. Można również kąt przenosić przy pomocy kalki przeźroczystej.

### Zadania

1. Narysuj dowolny kąt i przerysuj go przy pomocy kalki!
2. Narysuj dowolny kąt i przerysuj go obok tak, by wierzchołek znalazł się na jednem z ramion danego kąta!

### Suma kątów

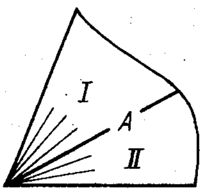
Mamy dany kąt $A$, wycięty z papieru. Przetnijmy go wzdłuż dowolnego odcinka, poprowadzonego z wierzchołka. Kąt rozpadnie się na dwa kąty $I$ i $II$ (rys. 28).

Kąt $A$ nazywamy sumą kątów $I$ i $II$ i piszemy:

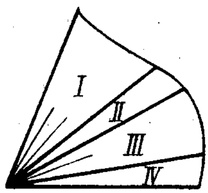
$$\sphericalangle A = \sphericalangle I + \sphericalangle II.$$

Jeżeliby ktoś dał nam te kąty $I$ i $II$, to kładąc je obok siebie tak, aby tylko wierzchołki i jedne ramiona padły na siebie, otrzymalibyśmy kąt, który jest ich sumą.

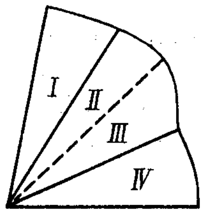
Rozetnijmy teraz dany kąt $A$ wzdłuż kilku odcinków, wychodzących z wierzchołka. Kąt ten rozpadnie się na kilka



Rys. 28.



Rys. 29.



Rys. 30.

kątów, oznaczonych na rys. 29 znakami: $I, II, III, IV$. O kącie $A$ mówimy, że jest sumą kątów $I, II, III, IV$. Piszemy to:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle I + \sphericalangle II + \sphericalangle III + \sphericalangle IV.$$

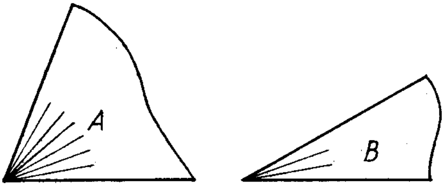
Kąt $A$ otrzymamy, dodając do kąta $I$ kąt $II$, do ich sumy kąt $III$, a wreszcie do otrzymanej sumy kąt $IV$. Dodając te kąty w innym porządku, otrzymalibyśmy również kąt $A$.

Zatem: Suma kątów nie zależy od porządku składników (prawo przemienności). Jeżeli mamy dodać kilka kątów do siebie (rys. 30), to możemy zawsze dwa z nich zastąpić ich sumą (prawo łączności).

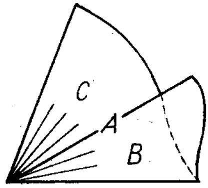
### Różnica kątów

Dane są dwa kąty $A$ i $B$, przyczem kąt $A$ jest większy od kąta $B$ (rys. 31).

Różnicą tych kątów nazywamy kąt, który dodany do mniejszego z nich, daje nam na wynik większy z nich.




Rys. 31.




Rys. 32.

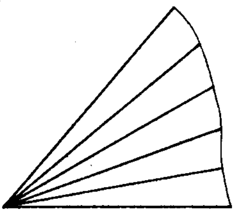
Kładąc kąt $B$ na kącie $A$ tak, jak na rys. 32, widzimy, że kąt $C$ jest różnicą kątów $A$ i $B$, co piszemy:

$$\sphericalangle C = \sphericalangle A - \sphericalangle B.$$

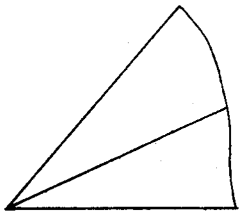
### Podział kąta na równe części

Jeżeli z wierzchołka kąta poprowadzimy kilka odcinków, tak, że rozcinając kąt wzdłuż nich, otrzymamy same kąty równe, to powiadamy, żeśmy podzielili kąt na równe części.

Na rys. 33 mamy kąt podzielony na 5 równych części.



Rys. 33.



Rys. 34.

Jeżeli kąt podzielimy na dwie równe części, to każdą z nich nazywamy połową danego kąta (rys. 34).

Połowę kąta, wyciętego z papieru, otrzymamy, zginając papier na dwoje tak, by ramiona padły na siebie.

### Zadania

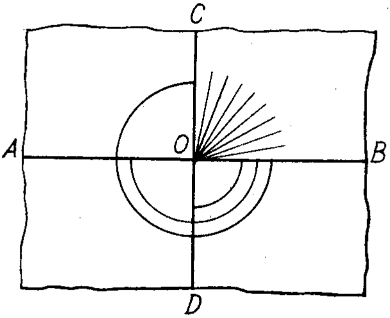
1. Wytnij dowolny kąt z papieru i przetnij go wzdłuż dwóch odcinków, przechodzących przez wierzchołek, a następnie utwórz sumę powstałych kątów! Zanotuj ich sumę!
2. Narysuj trzy kąty, każdy mniejszy od kąta, jaki tworzą sąsiednie boki kwadratu i utwórz ich sumę! Dodaj do

pierwszego sumę pozostałych! Porównaj wyniki! Powtórz to zadanie dla czterech kątów!

3. Narysuj dwa różne kąty i odejmij mniejszy od większego! Oznacz kąty i zanotuj różnicę!
4. Narysuj trzy coraz mniejsze kąty i dodaj do pierwszego różnicę drugiego i trzeciego!
5. Wyrysuj: *a)* połowę, *b)* ćwierć, *c)* ósmą część kąta, jaki tworzą dwa sąsiednie boki kwadratu!

### Rodzaje kątów

K ą t p r o s t y. Mamy dwa odcinki $AB$ i $CD$, przecinające się w punkcie $O$ (rys. 35). Jeżeli, rozcinając kartkę wzdłuż tych odcinków, otrzymamy cztery równe kąty, zaznaczone na rys. 35, wówczas każdy z nich nazywamy kątem prostym. Odcinki $AB$ i $CD$ nazywamy p r o s t o p a d ł e m i.




Rys. 35.

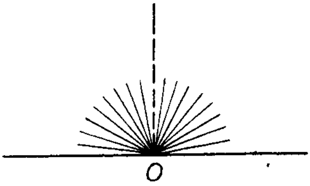
Kąt prosty można otrzymać, zginając kartkę papieru we dwoje wzdłuż odcinka $AB$, a następnie zginając ją jeszcze raz tak, aby $OA$ nakryło $OB$. Kąty proste są sobie równe.

Dwa sąsiednie boki prostokąta tworzą kąt prosty.

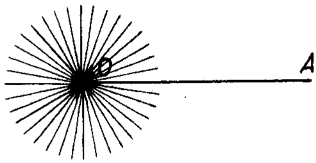
K ą t p ó ł p e ł n y. Kątem półpełnym nazywamy sumę dwóch kątów prostych (rys. 36).

Ramiona kąta półpełnego tworzą odcinek (jedno ramię jest przedłużeniem drugiego).

K ą t p e ł n y. Jeżeli odcinek $OA$ obracając się około punktu $O$ wykona całkowity obrót, a więc po obrocie zajmie

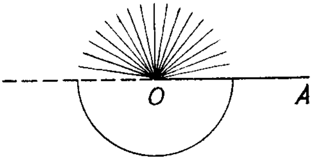



Rys. 36.

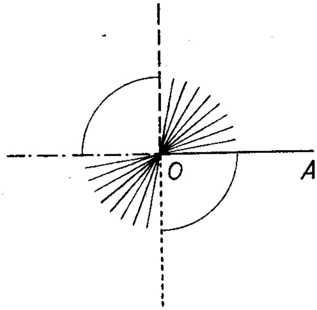



Rys. 37.

swoje początkowe położenie, to mówimy, że odcinek $OA$ opisał kąt pełny (rys. 37). Widzimy stąd, że ramiona kąta pełnego leżą na sobie. Kąt pełny jest sumą dwóch kątów półpełnych (rys. 38), lub czterech kątów prostych (rys. 39).



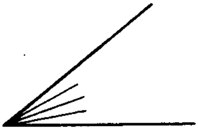

Rys. 38.



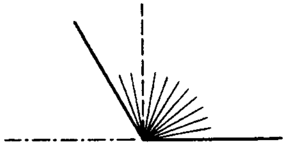

Rys. 39.

Kąt ostry. Kątem ostrym nazywamy kąt mniejszy od prostego (rys. 40).

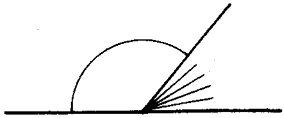
Kąt rozwarty. Kątem rozwartym nazywamy kąt większy od prostego, a mniejszy od półpełnego (rys. 41).



Rys. 40.



Rys. 41.

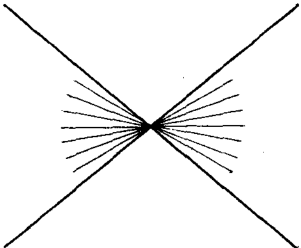


Rys. 42.

Kąty przyległe. Poprowadźmy z wierzchołka kąta półpełnego (rys. 42) dowolny odcinek. Odcinek ten podzieli kąt półpełny na dwa kąty. Kąty te mają wierzchołek i jedno ramię wspólne, pozostałe ramiona tworzą odcinek, pola zaś tych kątów nie zachodzą na siebie. Kąty takie nazywamy parą kątów przyległych.

Z rys. 42 widać, że **suma kątów przyległych jest kątem półpełnym.**

**Kąty wierzchołkowe.** Na rys. 43 mamy dwa odcinki przecinające się. Weźmy pod uwagę parę kątów zaznaczonych. Kąty te mają wspólny wierzchołek, ich pola nie zachodzą na siebie, a ramiona jednego z nich są przedłużeniem poza wierzchołek ramion drugiego. Kąty takie nazywają się wierzchołkiem przeciwległe lub wierzchołkowe.



Rys. 43.

Wycinając te kąty i nakładając na siebie, przekonujemy się, że kąty te są sobie równe. Zatem:

**Dwa kąty wierzchołkiem przeciwległe są sobie równe.**

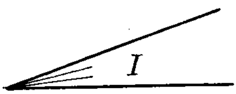
### Zadania

1. Utwórz sumę dwóch kątów prostych! Jaki kąt otrzymasz?
2. Utwórz sumę czterech kątów prostych! Jaki kąt otrzymasz? Ile wynosi suma wszystkich kątów prostokąta?
3. Narysuj kilka kątów ostrych i rozwartych!
4. Przekłuj linijkę papierową w dowolnym punkcie i obróć jedno jej ramię o jakiś kąt; przekonaj się, że drugie ramię zakreśliło również taki sam kąt!
5. Narysuj kilka par kątów wierzchołkowych i porównaj kąty każdej pary!
6. W jakim czasie duża wskazówka zegara, a w jakim cza-

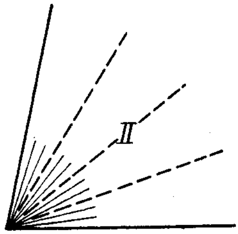
sie mała wskazówka zakreśla kąt: *a)* prosty, *b)* półpełny, *c)* pełny, *d)* ostry, *e)* rozwarty?

**Mierzenie kątów**

Obierzmy dowolny kąt *I* (rys. 44) i nazwijmy go kątem jednostkowym. Przy pomocy tego kąta będziemy mierzyli inne kąty. Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć kąt *II* (rys. 45). Widzimy, że kąt *II* jest sumą czterech kątów jednostkowych. Liczbę 4 nazywamy miarą kąta *II* przy kącie *I* jako jednostkowym. Jeżeli zatem jakiś kąt jest sumą pewnej liczby kątów jednostkowych, to liczbę tę nazywamy miarą danego kąta przy obranym kącie jednostkowym.




Rys. 44.




Rys. 45.

Kąty jednostkowe. Podzielmy kąt prosty na 90 równych części. Każdą z tych części nazywamy stopniem. Kąt prosty ma więc 90 stopni. Kąt półpełny ma 180, kąt zaś pełny 360 stopni.

Jeden stopień oznaczamy: $1^\circ$. Jeżeli kąt $1^\circ$ podzielimy na 60 równych części, to każdą z nich nazywamy jedną minutą i oznaczamy: $1'$. Kąt $1'$ podzielony na 60 równych części daje nam kąt zwany jedną sekundą, który oznaczamy: $1''$. Więc np. $52^\circ 13' 5''$ oznacza kąt wynoszący 52 stopni, 13 minut i 5 sekund.

Przyrząd do mierzenia kątów zwie się kątomierzem.

Uwaga: Jeżeli mamy dwa kąty, np. $72^\circ$ i $30^\circ$, to dla obliczenia, ile stopni zawiera kąt, będący sumą tych dwóch kątów, względnie różnicą pierwszego i drugiego kąta, nie mamy potrzeby rysowania tych kątów oraz kąta będącego ich sumą, względnie różnicą; wystarczy do siebie dodać, względnie odjąć liczby wyrażające w stopniach dane kąty. A więc w naszym przypadku suma kątów wynosi 102°, zaś różnica 42°.

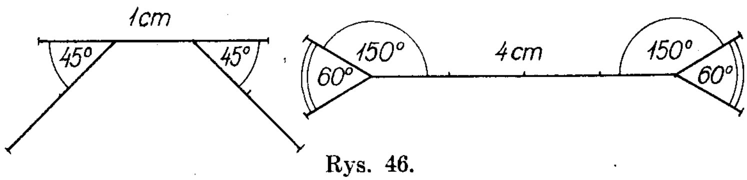
U w a g a: Nieraz przez sumę dwóch kątów rozumiemy sumę ich miar. W tym wypadku suma dwóch kątów, z których jeden ma 300°, a drugi 200°, równa się 500°.

K ą t y s p e ł n i a j ą c e i d o p e ł n i a j ą c e. Dwa kąty, np. 120° i 60°, których suma równa się kątowi półpełnemu, nazywają się s p e ł n i a j ą c e m i.

Dwa kąty, np. 40° i 50°, których suma równa się kątowi prostemu, nazywają się d o p e ł n i a j ą c e m i.

**Zadania**

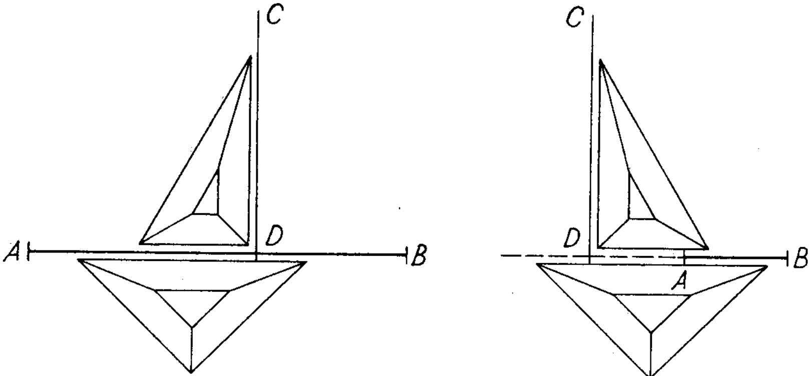
1. Narysuj kilka kątów i zmierz je kątomierzem!
2. Narysuj, posługując się kątomierzem, kąty: *a)* 45°, *b)* 60°, *c)* 135°, *d)* 180°, *e)* 225°, *f)* 270°, *g)* 315°!
3. Jeżeli jeden kąt ma: *a)* 30°, *b)* 65°, *c)* 130°, *d)* 145°, to ile wynosi kąt przyległy? Rysunek!
4. Jeśli jeden kąt ma: *a)* 15°, *b)* 20°, *c)* 35°, *d)* 60°, *e)* 72°, to ile wynosi kąt dopełniający? Rysunek!
5. Narysuj kilka par kątów wierzchołkowych i porównaj kąty każdej pary, posługując się kątomierzem!
6. Narysuj kąt, równy sumie kątów: 35°, 18°, 45°, 120° i 65°, nie rysując poszczególnych kątów!
7. Odrysuj następujące figury:




Rys. 46.

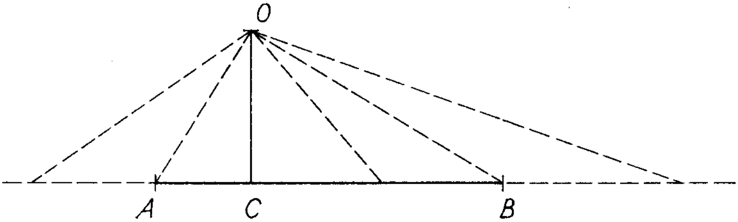
## Odcinki prostopadłe

Do rysowania odcinków prostopadłych używamy ekierki. Rys. 47 wskazuje, jak przy pomocy ekierek rysuje się prostopadłe. Odcinki prostopadłe zaznaczamy, pisząc: $CD \perp AB$ (czytaj $CD$ prostopadłe do $AB$).




Rys. 47.

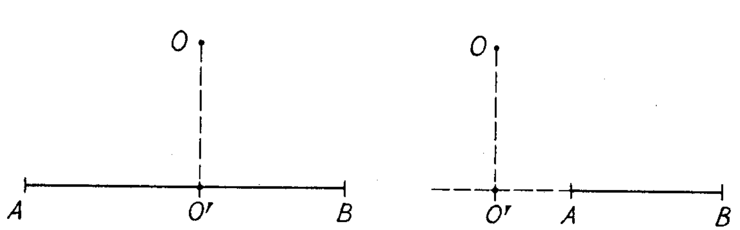
Obierzmy dowolny punkt $O$ i odcinek $AB$ rys. 48. Połączmy punkt $O$ z rozmaitemi punktami odcinka $AB$ lub jego przedłużenia. Przy pomocy cyrkla przekonamy się, że najkrótszym z tych odcinków będzie odcinek $OC$, prostopadły do $AB$. Długość odcinka $OC$ nazywamy odległością punktu $O$ od prostej, na której leży odcinek $AB$.




Rys. 48.

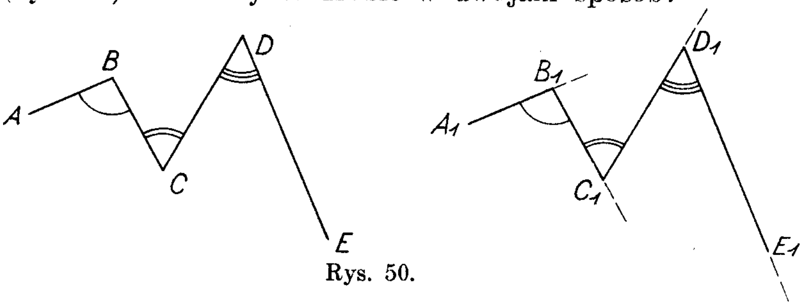
Obierzmy dowolny punkt $O$ i odcinek $AB$ (rys. 49). Poprowadźmy z punktu $O$ odcinek prostopadły do $AB$. Oznaczmy przez $O'$ punkt, w którym odcinek ten przecina $AB$ lub jego przedłużenie.

Punkt $O'$ nazywamy r z u t e m punktu $O$ na prostą, na której odcinek $AB$ leży.




Rys. 49.

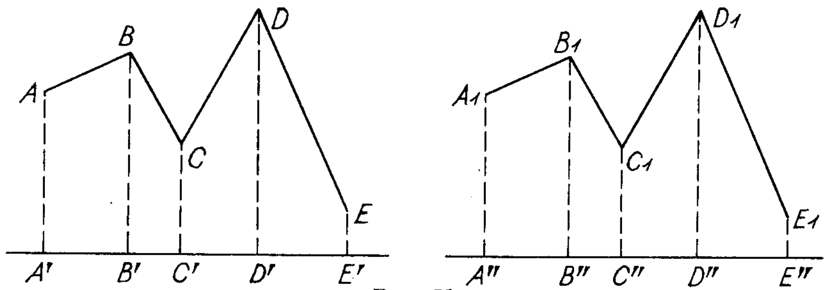
Przypuśćmy, że mamy przerysować linję łamaną $ABCDE$ (rys. 50). Możemy to zrobić w dwojaki sposób:




Rys. 50.

*a)* Rysujemy odcinek $A_1B_1$, równy $AB$ (rys. 50). Następnie rysujemy z punktu $B_1$ odcinek tak, by kąt zakreślony przy $B_1$ równał się kątowi zakreślonemu przy $B$. Na odcinku tym odcinamy odcinek $B_1 C_1$, równy $BC$. Z punktu $C_1$ rysujemy znowu odcinek tak, by kąt dwa razy zakreślony przy $C_1$ równał się kątowi dwa razy zakreślonemu przy $C$, i na odcinku tym odcinamy odcinek $C_1 D_1$, równy $CD$. Postępując tak dalej, otrzymamy szukaną linję łamaną.

*b)* Obieramy dowolną prostą i rysujemy odcinki $AA'$, $BB'$,... prostopadłe do tej prostej (rys. 51).



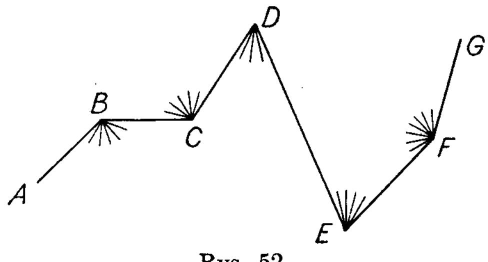

Rys. 51.

Na dowolnie obranej innej prostej zaznaczamy przy pomocy cyrkla odcinki $A'' B''$, $B'' C''$... równe odpowiednio odcinkom $A' B'$, $B' C'$... W punktach $A''$, $B''$... rysujemy odcinki $A'' A_1$, $B'' B_1$... prostopadle do danej prostej, równe odpowiednio odcinkom $A' A$, $B' B$...

Linja łamana $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ będzie linją szukaną.

**Zadania**

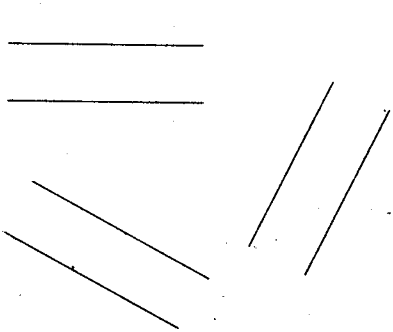
1. Narysuj prostopadłe w kilku punktach danego odcinka!
2. Narysuj z dowolnie obranego punktu prostopadłą do danej prostej!
3. Narysuj punkt $O$ i kilka różnych prostych, nieprzechodzących przez punkt $O$, a następnie poprowadź prostopadłe z punktu $O$ do tych prostych!
4. Narysuj prostopadłe do ramion kąta prostego wewnątrz tego kąta, w punktach odległych o 2 *cm* od wierzchołka. Jaką figurę w ten sposób otrzymasz? Powtórz to zadanie, rysując prostopadłą do jednego ramienia w odległości 3 *cm* od wierzchołka i prostopadłą do drugiego ramienia w odległości 5 *cm*!
5. Narysuj rzuty kilku punktów na daną prostą!
6. Przerysuj linję łamaną *ABCDEFG*: *a)* zapomocą pomiaru odcinków i kątów, *b)* zapomocą rzutów. (Rys. 52).




Rys. 52.

## Odcinki równoległe

Dwa odcinki (narysowane na kartce papieru), nazywają się **równoległe**, jeśli nie przetną się, jakkolwiek daleko przedłużylibyśmy je w jedną lub drugą stronę (rys. 53).

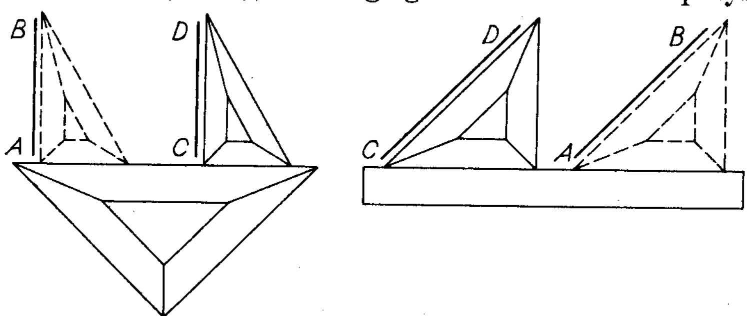


Rys. 53.

Rys. 54.

Przeciwległe boki prostokąta lub kwadratu są równoległe. Piony są równoległe (rys. 54). Szyny kolejowe, jak długo biegną prosto, wyobrażają odcinki równoległe.

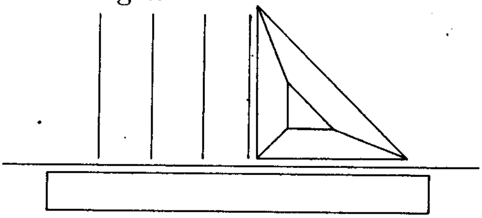
Przy pomocy ekierek (lub linijki i ekierki) możemy rysować odcinki równoległe do danego odcinka w ten sposób, że przystawiamy naprzód ekierkę jednym bokiem do danego odcinka $AB$ (rys. 55), do drugiego zaś boku ekierki przysta-




Rys. 55.

wiamy drugą ekierkę (lub linijkę). Przesuwając następnie pierwszą ekierkę wzdłuż drugiej w inne położenie i rysując odcinek $CD$ wzdłuż tego samego, co i przedtem boku ekierki, otrzymujemy odcinek równoległy do danego.

Odcinki prostopadłe do tej samej prostej (rys. 56) są między sobą równoległe.



Rys. 56.

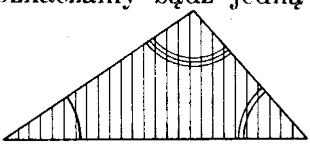
**Zadania**

1. Narysuj kilka par równoległych odcinków: *a)* na oko; *b)* zapomocą ekierki!
2. Nakreśl dwa odcinki równoległe i odcinek prostopadły do jednego z nich; sprawdź kątomierzem, że odcinek ten jest również prostopadły do drugiego odcinka!
3. Przez punkt obok odcinka nakreśl odcinek równoległy do niego!
4. Ile punktów przecięcia mogą mieć dwie pary prostych równoległych? (Rysunek!)

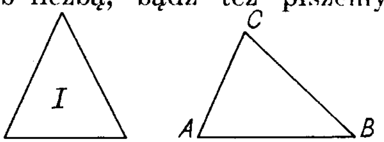
# Wielokąty

## Trójkąt

Na rys. 57 mamy trójkąt. Trójkąt ograniczony jest trzema odcinkami. Odcinki te nazywamy b o k a m i trójkąta. Punkty, w których się schodzą dwa boki, nazywamy w i e r z c h o ł k a m i trójkąta. W każdym trójkącie mamy trzy wierzchołki i trzy kąty zaznaczone na rys. 57. Trójkąty oznaczamy bądź jedną literą lub liczbą, bądź też piszemy



Rys. 57.

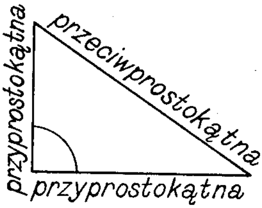



Rys. 58.

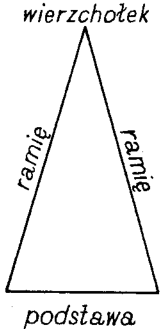
pokolei litery oznaczające jego wierzchołki. Dla podkreślenia, że chodzi nam o trójkąt, używamy znaku: △

A więc na rys. 58 mamy: △ *I* i △ *ABC.*

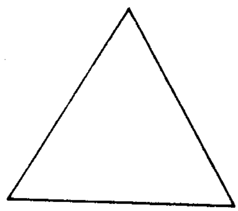
Trójkąt, w którym jeden kąt jest prosty nazywamy trójkątem prostokątnym (rys. 59). Ramiona kąta prostego nazywamy przyprostokątnemi, trzeci zaś bok (naprzeciw kąta prostego) przeciwprostokątną.




Rys. 59.




Rys. 60.



Rys. 61.

Trójkąt, który ma dwa boki równe nazywamy trójkątem równoramiennym (rys. 60). Równe boki nazywamy ramionami. Trzeci bok nazywamy zazwyczaj podstawą. Mówiąc „wierzchołek trójkąta równoramiennego“ mamy na myśli ten, który leży naprzeciw podstawy.

Trójkąt, w którym wszystkie boki są równe nazywamy trójkątem równobocznym (rys. 61).

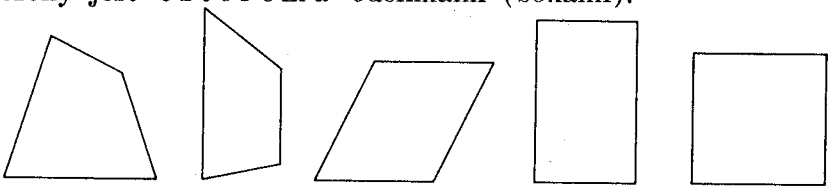
**Zadania**

1. Narysuj kilka trójkątów i oznacz je!
2. Narysuj dowolny trójkąt i porównaj *a)* sumę, *b)* różnicę dwóch boków z trzecim bokiem!
3. Narysuj trójkąt prostokątny i oznacz jego przyprostokątne i przeciwprostokątne!
4. Jedna przyprostokątna ma 6 *cm,* druga 8 *cm;* ile ma przeciwprostokątna? Odczytaj z rysunku!
5. Narysuj trójkąt prostokątny znając jego przyprostokątne: *a)* 3 *cm,* 4 *cm; b)* 2 *cm,* 5 *cm; c)* 2 *cm,* 4 *cm* 5 *mm!*

6. Z 4 trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych 3 *cm* i 5 *cm* złóż trójkąt prostokątny!
7. Podziel prostokąt o bokach 9 *cm* i 6 *cm* na 6 równych trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych 6 *cm* i 3 *cm*!
8. Narysuj kąt i na jego ramionach (od wierzchołka) odetnij równe odcinki. Łącząc końce tych odcinków otrzymasz trójkąt równoramienny. Wskaż ramiona, podstawę i wierzchołek! Zmierz kąty przypodstawne!
9. Narysuj trójkąt równoramienny a zarazem prostokątny. Zmierz kąty przypodstawne!
10. Narysuj trójkąt, a następnie przerysuj go uważając jego boki za odcinki linji łamanej. Zrób to dwoma sposobami!
11. Narysuj dowolny trójkąt, a następnie przerysuj go obok, zapomocą rzutów na jeden bok.

## Czworokąt

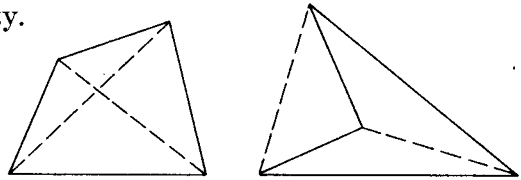
Na rys. 62 mamy kilka czworokątów. Czworokąt ograniczony jest c z t e r e m a odcinkami (bokami).



Rys. 62.

Odcinek, łączący dwa niesąsiednie wierzchołki czworokąta, nazywamy przekątną (rys. 63).

Przynajmniej jedna z przekątnych dzieli czworokąt na dwa trójkąty.



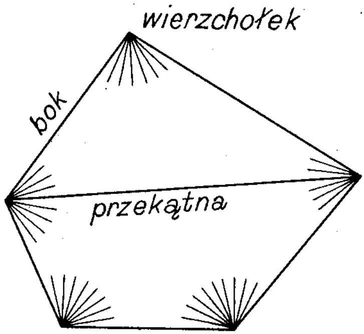
Rys. 63.

### Zadania

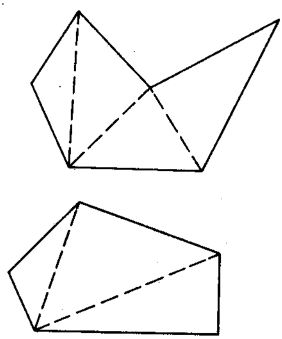
1. Narysuj czworokąt i oznacz jego boki i kąty!
2. Narysuj kilka różnych czworokątów i ich przekątne!
3. Narysuj dowolny czworokąt i przerysuj obok, uważając jego boki za odcinki linji łamanej. Zrób to dwoma sposobami!
4. Narysuj dowolny czworokąt i jedną jego przekątną. Przerysuj następnie ten czworokąt obok, przy pomocy rzutów na tę przekątną.

## Wielokąt

Część płaszczyzny ograniczoną odcinkami jak na rys. 64 nazywamy wielokątem. Odcinki ograniczające nazywamy bokami. Zależnie od liczby boków mamy: trójkąty, czworokąty, pięciokąty, ośmiokąty i t. d. Trójkąt jest wielokątem o najmniejszej liczbie boków. Końce boków wielokąta nazy-



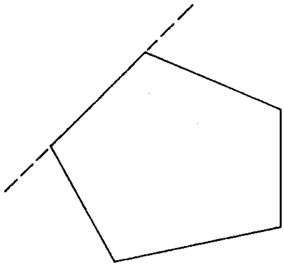
Rys. 64.


Rys. 65.

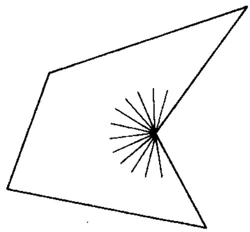
wają się wierzchołkami. Wielokąt ma tyle wierzchołków, ile boków. W każdym wielokącie mamy tyle kątów (zaznaczonych na rys. 64), ile boków. Odcinki, łączące dwa nieprzyległe wierzchołki, nazywamy przekątnemi. Przy pomocy przekątnych można każdy wielokąt podzielić na trójkąty (rys. 65).

Wielokąty wypukłe i wklęsłe. Jeżeli każdy kąt wielokąta jest mniejszy od 180°, wówczas wielokąt nazywamy **wypukłym** (rys. 66).

Jeżeli przynajmniej jeden kąt wielokąta jest większy od 180°, wówczas wielokąt nazywamy **wklęsłym** (rys. 67).



Rys. 66.

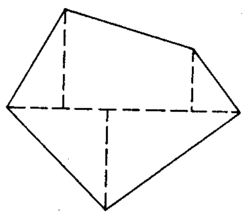


Rys. 67.

Jeżeli w wielokącie wypukłym przedłużymy w obie strony którykolwiek bok (rys. 66), to przekonamy się, że wielokąt leży całkowicie po jednej stronie tak otrzymanej prostej.

### Zadania

1. Narysuj dowolny wielokąt: *a)* wypukły, *b)* wklęsły.
2. Narysuj dowolny pięciokąt i przerysuj go obok, uważając boki tego pięciokąta za odcinki linji łamanej. Zrób to dwoma sposobami: *a)* przy pomocy przenoszenia odcinków i kątów, *b)* przy pomocy rzutów.
3. Narysuj dowolny siedmiokąt wypukły i podziel go na trójkąty przekątnemi z jednego wierzchołka.
4. Przerysuj pięciokąt zapomocą rzutów na jedną z przekątni, jak wskazuje rys. 68.



Rys. 68.

5. Narysuj wszystkie przekątne: *a)* w pięciokącie, *b)* w sześciokącie i policz, ile ich jest!
6. Narysuj wielokąt, w którym z każdego wierzchołka można poprowadzić tylko: *a)* 2, *b)* 3 przekątne.

# Mnożenie

## Określenie iloczynu

Przypuśćmy, że mamy daną sumę, której wszystkie składniki są równe, np.: $3 + 3 + 3 + 3$.

Sumę taką oznaczamy, pisząc najpierw liczbę 4 wskazującą, ile razy powtarza się składnik 3, następnie znak $\times$ lub . (czytaj razy), a potem składnik 3.

A zatem: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$. Stąd: $4 \times 3 = 12$.

Liczbę 4 nazywamy m n o ż n i k i e m, 3 m n o ż n ą, 12 i l o c z y n e m liczby 3 przez liczbę 4.

Liczby 3 i 4 nazywamy c z y n n i k a m i iloczynu.

Działanie, jakie wykonujemy, obliczając iloczyn, nazywamy m n o ż e n i e m.

W przypadku, gdy jeden z czynników równa się 1, iloczyn równa się drugiemu czynnikowi.

A więc: $7 \times 1 = 7$, $1 \times 12 = 12$, $1 \times 1 = 1$.

W przypadku, gdy jeden z czynników równa się zeru, iloczyn równa się zeru. A więc: $5 \times 0 = 0$, $0 \times 6 = 0$.

Liczby, jakie otrzymamy, mnożąc daną liczbę przez 1, 2, 3...., nazywamy w i e l o k r o t n o ś c i a m i danej liczby.

Np.: wielokrotnościami liczby 8 są liczby: 8, 16, 24...

U w a g a: Mnożna może być liczbą mianowaną np.:

$$5 \times 12\,zł = 12\,zł + 12\,zł + 12\,zł + 12\,zł + 12\,zł = 60\,zł$$

Należy pamiętać, że mnożnik nie może być liczbą mianowaną, bo mnożnik wskazuje, ile razy mnożna powtarza się, jako składnik.

Jeżeli mamy kilka liczb połączonych znakami $\times$, jak np.: $3 \times 5 \times 4 \times 2$, to wyrażenie takie obliczamy, wykonując pokolei naznaczone mnożenia.

Należy więc 3 pomnożyć przez 5, otrzymany iloczyn przez 4, a ten iloczyn przez 2. A więc: $3 \times 5 \times 4 \times 2 = 120$.

Uwaga: Jeżeli w jakiemś wyrażeniu występują nawiasy, to należy najpierw wykonać działania w nich naznaczone.

Np.: $3 \times (4 \times 7) \times 2 = 3 \times 28 \times 2$,

$3 \times (5 + 2) \times (5 - 3) = 3 \times 7 \times 2$.

### Zadania

1. Napisz w postaci iloczynu następujące sumy:
*a)* $25 + 25 + 25$, *b)* $7 + 7 + 7 + 7$,
*c)* $81 + 81 + 81 + 81 + 81$, *d)* $9\,m + 9\,m + 9\,m + 9\,m$,
*e)* $13$ *zł* $+ 13$ *zł* $+ 13$ *zł*, *f)* $3$ *kg* $250$ *g* $+ 3$ *kg* $250$ *g*.
2. Przedstaw w postaci sumy następujące iloczyny:
*a)* $7 \times 5$, *b)* $3 \times 213$, *c)* $2 \times 2863$, *d)* $6 \times 7\,m$,
*e)* $4 \times 13$ *zł* $25$ *gr*, *f)* $3 \times 5$ *kg* $300$ *g*.
3. Oblicz następujące wyrażenia:
*a)* $(2.5).(7.8)$, *b)* $3.(5.4).2$, *c)* $5.(2.3).(2.4)$,
*d)* $2.(8+7)$, *e)* $3.(2+3).(2.3)$, *f)* $(5+3).(5-3)$.

### Potęgi

Kwadratem jakiejś liczby nazywamy iloczyn tej liczby przez siebie samą.

Np. kwadratem liczby 7 jest iloczyn: $7.7$.

Kwadrat jakiejś liczby oznaczamy, pisząc u góry tej liczby małą dwójkę; a więc kwadrat liczby 7 oznaczamy: $7^2$ i czytamy: siedm do kwadratu lub siedm do drugiej potęgi.

Zatem: $1^2 = 1.1 = 1$, $2^2 = 2.2 = 4$,

$3^2 = 3.3 = 9$, $10^2 = 10.10 = 100$.

Jeżeli jakąś liczbę pomnożymy przez siebie, a otrzymany iloczyn jeszcze raz pomnożymy przez tę liczbę, to wynik nazywamy sześcianem danej liczby.

Np. sześcianem liczby 4 jest iloczyn: $4.4.4$.

Sześcian jakiejś liczby oznaczamy, pisząc u góry tej liczby małą trójkę; a więc sześcian liczby 4 oznaczamy: $4^3$ i czytamy: cztery do sześcianu lub cztery do trzeciej potęgi.

Zatem: $1^3 = 1 . 1 . 1 = 1$; $2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$;
$3^3 = 3 . 3 . 3 = 27$; $10^3 = 10 . 10 . 10 = 1000$.

### Zadania

1. Oblicz kwadraty i sześciany wszystkich liczb od 1 do 10!
2. Jakiej liczby kwadratem jest liczba: 81, 16, 49, 25?
3. Jakiej liczby sześcianem jest liczba: 64, 8, 27, 125?
4. Oblicz *a)* sumę kwadratów wszystkich liczb od 1 do 9,
   *b)* sumę sześcianów wszystkich liczb od 1 do 9.
5. Kwadrat dowolnie obranej liczby np. 4 otrzymasz, dodając do siebie 4 początkowe liczby nieparzyste; a więc

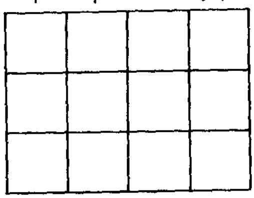
$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7.$$

Sprawdź tę regułę na kwadratach liczb od 2 do 10!

## Prawo przemienności iloczynu

Na rys. 69 widzimy szachownicę mającą cztery kolumny i trzy wiersze. Ponieważ w każdym wierszu są 4 pola, a wierszy jest 3, więc wszystkich pól mamy:

$$4 + 4 + 4 = 3 \times 4.$$



Rys. 69.

Z drugiej strony zauważmy, że w każdej kolumnie są 3 pola, a kolumn jest 4, więc wszystkich pól jest:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3.$$

Wynika stąd, że: $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Podobnie: $5 \times 7 = 7 \times 5$; $25 \times 39 = 39 \times 25$.

Widzimy zatem, że w iloczynie możemy porządek czynników dowolnie zmieniać.

Własność powyższą iloczynu nazywamy **prawem przemienności**. Stosuje się ona również do iloczynu dowolnej liczby czynników.

Mamy więc np.:

$$2 \times 7 \times 8 \times 5 = 2 \times 5 \times 8 \times 7 = 5 \times 8 \times 7 \times 2.$$

**Zadania**

1. Oblicz następujące pary iloczynów:
*a)* $3.5$ i $5.3$, *b)* $12.6$ i $6.12$, *c)* $7.4$ i $4.7$.
Do każdego zadania narysuj szachownicę, na której mógłbyś wykazać, że oba iloczyny są sobie równe!

## Prawo łączności

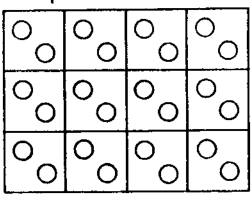
Szachownica na rys. 70 ma tak samo trzy wiersze i cztery kolumny jak na rys. 69. Na każdem polu szachownicy umieszczamy dwie kulki. Możemy obliczyć liczbę wszystkich kulek dwoma sposobami:

1. Ponieważ w jednej kolumnie jest kulek:

$$2 + 2 + 2 = 3 . 2 = 6,$$

a kolumn jest 4, przeto wszystkich kulek jest:

$$6 + 6 + 6 + 6 = 4 . 6 = 4 . (3 . 2).$$



Rys. 70.

2. Ponieważ pól jest $4 . 3 = 12$, a na każdem polu są dwie kulki, więc wszystkich kulek jest: $12 . 2 = (4 . 3) . 2$.

Widzimy stąd, że: $4 . (3 . 2) = (4 . 3) . 2$.

Zatem w iloczynie trzech czynników możemy dwa czynniki zastąpić ich iloczynem. Powyższą własność iloczynu nazywamy p r a w e m ł ą c z n o ś c i.

Można się przekonać, że w iloczynie ilukolwiek czynników możemy kilka czyników zastąpić ich iloczynem.

Np.: $5 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$.

Zastępując 6, 4, 3, ich iloczynem 72, widzimy, że:

$$5 \times 72 \times 2 = 720.$$

A więc: $5 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 = 5 \times (6 \times 4 \times 3) \times 2.$

### Zadania

1. Oblicz iloczyny niżej podane, łącząc sąsiednie czynniki w najdogodniejszy sposób:
*a)* $3 \cdot 5 \cdot 2$, *b)* $7 \cdot 8 \cdot 5$, *c)* $4 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 3$, *d)* $8 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 4$.
2. Przekonaj się, że iloczyny w *a), b)* są sobie równe, nie obliczając tych iloczynów:
*a)* $(3 \cdot 15) \cdot (27 \cdot 9)$ i $3 \cdot (15 \cdot 27) \cdot 9$,
*b)* $18 \cdot (15 \cdot 3 \cdot 26) \cdot 14$ i $18 \cdot (15 \cdot 3) \cdot (26 \cdot 14)$.
3. Przestaw i połącz czynniki następujących iloczynów w taki sposób, aby rachunek był najdogodniejszy:
*a)* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, *b)* $25 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 4$, *c)* $25 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$.

## Prawo rozdzielności iloczynu względem dodawania

Pomiędzy 7 chłopców rozdzielono pewną ilość jabłek tak, że za pierwszym razem dano każdemu po 3 jabłka, za drugim razem po 2 jabłka. Ile jabłek rozdzielono?

Możemy to obliczyć dwoma sposobami:

1. Każdy z chłopców otrzymał jabłek: $3 + 2$.
Ponieważ chłopców było 7, więc rozdzielono jabłek:
$$7 \times (3 + 2).$$
2. Za pierwszym razem rozdzielono jabłek: $7 \times 3$.
Za drugim razem rozdzielono jabłek: $7 \times 2$.
Razem więc rozdzielono jabłek: $(7 \times 3) + (7 \times 2)$.
Porównując oba wyniki widzimy, że:
$$7 \times (3 + 2) = (7 \times 3) + (7 \times 2).$$

Zatem sumę możemy tak mnożyć, że mnożymy każdy składnik zosobna i wyniki dodajemy.

Np.: $(8 + 2) \times 3 = (8 \times 3) + (2 \times 3)$,
$5 \times (7 + 6) = (5 \times 7) + (5 \times 6)$.

Podobnie postępujemy przy większej liczbie składników.

Np. $(3 + 5 + 7) \cdot 2 = (3 \cdot 2) + (5 \cdot 2) + (7 \cdot 2)$.

Własność powyższą iloczynu nazywamy prawem r o z d z i e l n o ś c i iloczynu względem dodawania.

### Prawo rozdzielności iloczynu względem odejmowania

Rozdzielono między 7 chłopców jabłka, dając każdemu po 5 jabłek. Odebrano później od każdego z nich po 2 jabłka. Ile jabłek rozdano ostatecznie?

Ilość jabłek, którą rozdzielono ostatecznie, możemy obliczyć dwoma sposobami:

1. Ponieważ każdy z chłopców otrzymał jabłek: $5 - 2$, więc rozdzielono jabłek: $7 \times (5 - 2)$.
2. Za pierwszym razem rozdano jabłek: $7 \times 5$, za drugim razem odebrano jabłek: $7 \times 2$, a więc rozdzielono jabłek: $(7 \times 5) - (7 \times 2)$.

Wynika stąd, że: $7 \times (5 - 2) = (7 \times 5) - (7 \times 2)$.

Zatem: różnicę możemy tak mnożyć, że odjemną i odjemnik mnożymy zosobna i wyniki od siebie odejmujemy.

Np.: $(8 - 3) \times 6 = (8 \times 6) - (3 \times 6)$,

$7 \times (9 - 3) = (7 \times 9) - (7 \times 3)$.

Własność powyższą iloczynu nazywamy prawem rozdzielności iloczynu względem odejmowania.

#### Zadania

√1. Sprawdź następujące równości:

*a)* $(3 + 2) . 5 = (3 . 5) + (2 . 5)$;
*b)* $(7 + 3 + 5) . 2 = (7 . 2) + (3 . 2) + (5 . 2)$;
*c)* $(6 - 2) . 5 = (6 . 5) - (2 . 5)$;
*d)* $(10 - 3 - 2 + 4) . 3 = (10 . 3) - (3 . 3) - (2 . 3) + (4 . 3)$;
*e)* $(2 . 3) + (5 . 3) = (2 + 5) . 3$;
*f)* $5 \times (3 + 7) = (5 \times 3) + (5 \times 7)$;
*g)* $3 \times (2 + 1 + 9) = (3 \times 2) + (3 \times 1) + (3 \times 9)$;
*h)* $8 \times (10 - 6) = (8 \times 10) - (8 \times 6)$.

### Mnożenie liczb w układzie dziesiętnym

Wypadek pierwszy. Mamy obliczyć iloczyn, w którym jeden z czynników jest 10 (100, 1000...) np.: $247 \times 10$.

Ponieważ iloczyn $247 \times 10$ przedstawia 247 dziesiątek t. j.

200 dzies. + 40 dzies. + 7 dzies. = 2000 + 400 + 70 = 2470
zatem: $247 \times 10 = 2470$.

Widzimy zatem, że liczbę mnożymy przez 10, dopisując jedno zero na końcu.

Przypuśćmy teraz, że mnożną jest 100, np.: 49 . 100.

Ponieważ $100 = 10 \times 10$, więc:

$$49 \times 100 = 49 \times 10 \times 10.$$

Zatem: $49 \times 100 = 490 \times 10 = 4900$.

Widzimy zatem, że liczbę mnożymy przez 100, dopisując 2 zera na końcu.

Podobnie mnożymy liczbę przez 1000, dopisując 3 zera na końcu i t. p. Np.:

$$15 \times 1000 = 15 \times 100 \times 10 = 1500 \times 10 = 15\,000.$$

### Zadania

1. Oblicz następujące iloczyny:
*a)* 21 . 100, 10 . 37, 100 . 39, 100 . 236, 1000 . 12;
*b)* 30 . 10, 10 . 200, 100 . 30; *c)* 10 . 25 . 10, 100 . 2 . 100.
2. Oblicz następujące iloczyny:
*a)* 10 . 100, 100 . 100, 1000 . 10; *c)* 10 . 10 . 10 . 10;
*b)* 10 . 10 . 10, 10 . 100 . 10; *d)* $10^2$, $10^3$, $100^2$.

W y p a d e k  d r u g i. Mamy obliczyć iloczyn, w którym mnożna jest liczbą jednocyfrową, np. $567 \times 3$.

Wiemy, że $567 \times 3 = 3 \times 567 = 567 + 567 + 567$.

Chcąc obliczyć ostatnią sumę, piszemy:

$$\begin{array}{r} 567 \\ 567 \\ 567 \\ \hline 1701 \end{array}$$

Dodawanie powyższe wygłaszamy w następujący sposób:

$7 \times 3$ równa się 21, piszę 1, a 2 doliczam;

$6 \times 3$ równa się 18, a 2 równa się 20, piszę 0, a 2 doliczam;

$5 \times 3$ równa się 15, a 2 równa się 17, piszę 17.

W praktyce nie przedstawiamy iloczynu w postaci sumy, tylko rachujemy jak wyżej, zapisując rachunek w następujący sposób:

$$\begin{array}{r} 567 \\ 3 \\ \hline 1701 \\ {\scriptstyle (22)} \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{r} 249 \\ 5 \\ \hline 1245 \\ {\scriptstyle (24)} \end{array}$$

Uwaga: Gdy w mnożnej tylko pierwsza cyfra jest różna od zera, to iloczyn otrzymamy, mnożąc mnożnik przez tę cyfrę i dopisując tyle zer, ile jest w mnożnej.

Np.: $236 \times 40 = 236 \times 4 \times 10$

lecz

$$\begin{array}{r} 236 \\ 4 \\ \hline 944 \\ {\scriptstyle (12)} \end{array}$$

więc $236 \times 40 = 944 \times 10 = 9440$.

Wypadek ogólny. Mamy obliczyć iloczyn dwóch liczb np.: 137 . 128.

Iloczyn powyższy przedstawia nam kwotę, jaką rozdzielimy pomiędzy 137 osób, dając każdej po 128 *zł*.

Wyobraźmy sobie, że każda osoba otrzymała: 8 *zł* osobno, 2 dziesiątki i 1 setkę. Razem więc otrzymały złotych:

$$(137 . 8) + (137 . 20) + (137 . 100).$$

Mamy więc:

$$\begin{array}{rcr} 137 . \ \ 8 & = & 1096 \\ 137 . \ 20 & = & 2740 \\ 137 . 100 & = & 13700 \\ \hline & & 17536 \end{array}$$

Rozdzieliliśmy więc 17 536 *zł*.

Rachunek powyższy możemy zapisać krócej tak:

$$\begin{array}{r} 137 \\ 128 \\ \hline 1096 \\ 274\phantom{0} \\ 137\phantom{00} \\ \hline 17536 \end{array}$$

Zapisujemy więc jeden czynnik pod drugim tak, by cyfry tego samego rzędu były pod sobą. Mnożymy następnie jeden czynnik pokolei przez każdą cyfrę drugiego czynnika. Iloczyn cząstkowy zapisujemy w ten sposób, by ostatnia jego cyfra była pod tą cyfrą, przez którą mnożymy. Wkońcu dodajemy poszczególne iloczyny tak, jakgdyby na opuszczonych miejscach były zera.

Jeżeli któraś cyfra drugiego czynnika jest zerem, to, iloczyn przez tę cyfrę jest oczywiście zerem. Dlatego też nie wypisujemy tego iloczynu. Np.:

$$\begin{array}{r} 127 \\ 105 \\ \hline 635 \\ 127\phantom{00} \\ \hline 13335 \end{array}$$

Jeżeli w jednym czynniku są zera na końcu, to zapisujemy rachunek w następujący sposób:

$$\begin{array}{r} 12700 \\ 205\phantom{00} \\ \hline 635\phantom{00} \\ 254\phantom{0000} \\ \hline 2603500 \end{array}$$

P r ó b a  m n o ż e n i a. Chcąc przekonać się, czy mnożenie jest dobrze wykonane, mnożymy jeszcze raz, przestawiając mnożną i mnożnik.

**Zadania**

1. Oblicz następujące iloczyny:
   *a)* 27 . 38 *b)* 459 . 38 *c)* 135 . 124 *d)* 1437 . 13
   36 . 74 136 . 59 107 . 108 1205 . 15
   *e)* 730 × 251; 836 × 427; 5321 × 196; 12 352 × 48;
   *f)* 8003 × 201; 1800 × 300; 10 001 × 5004;
   *g)* 10 000 × 100 000; 2800 × 50; 3050 × 110;
   *h)* 23 × 25 × 46; 12 × 12 × 12; 108 × 100 × 5.
2. Jaka liczba jest 25 razy większa od 31?
3. *a)* Ile to jest minut: 3 godz. 14 min.; 15 godz. 36 min.?
   *b)* Ile to jest sekund: 35 min. 12 sek.; 58 min. 2 sek.?
4. *a)* Ile godzin ma doba, ile tydzień, ile rok zwyczajny?

*b)* Ile minut ma godzina, doba, tydzień?
*c)* Ile sekund ma godzina, doba, rok zwyczajny?

5. Głos przebywa w 1 sek. 333 *m*; w jakiej odległości uderzył piorun, jeśliś usłyszał go w 15 sek. po błyskawicy?
6. Ktoś zrobił 175 kroków; jaką drogę przeszedł, licząc średnio 75 *cm* na 1 krok?
   Spróbuj zapomocą kroków obliczać rozmaite odległości!
7. Obwód koła roweru wynosi 22 *dcm;* jaką drogę odbył rowerzysta, jeśli koło obróciło się 758 razy?
8. Na jednej stronicy książki jest 43 wierszy, a w każdym wierszu średnio 36 liter; ile liter jest na jednej stronie?
9. Ile kosztuje 7 zwoi sukna, jeśli każdy zwój ma 75 *m*, przyczem za 1 *m* płacono 24 *zł*?
10. W Polsce w r. 1929/30 wypadło przeciętnie na jednego człowieka 26 *zł* podatku bezpośredniego; ile wynosił cały bezpośredni podatek?
11. Na 1000 mieszkańców w Polsce wypada 126 koni, 311 sztuk bydła rogatego, 86 sztuk owiec, 204 sztuk nierogacizny; ile mamy zwierząt z każdego gatunku (ludność Polski 32 000 000)?
12. Mamy wykonać mnożenie: $53 \times 12\,m\ 4\,dcm$.
    W tym celu obliczamy najpierw iloczyny: $53 \times 12\,m$ i $53 \times 4\,dcm$, a następnie wyniki dodajemy.
    Ponieważ $53 \times 12\,m = 636\,m$, $53 \times 4\,dcm = 212\,dcm = 21\,m\ 2\,dcm$, zatem: $53 \times 12\,m\ 4\,dcm = 636\,m + 21\,m\ 2\,dcm = 657\,m\ 2\,dcm$.
13. Oblicz: *a)* $47 \times 9\,m\ 7\,dcm$; *b)* $25 \times 23\,m\ 5\,dcm$; *c)* $43 \times 27\,zł\ 35\,gr$; *d)* $12 \times 28\,km\ 854\,m$; *e)* $27 \times 425\,kg\ 320\,g$.

### Mnożenie pamięciowe i ułatwienia

Liczbę kilkucyfrową przez liczbę jednocyfrową mnożymy w pamięci w ten sposób, że mnożymy osobno tysiące, setki, dziesiątki i jednostki przez liczbę jednocyfrową, a następnie wyniki do siebie dodajemy.

Np.: $528 \times 3$ liczymy:
$500 \times 3 = 1500$, $20 . 3 = 60$, razem 1560; $8 \times 3 = 24$, razem więc 1584.

1. Pomnóż przez 2 liczby: 12, 24, 49, 96, 135, 458, 736, 845.
2. Pomnóż przez 4 liczby: 11, 36, 45, 77, 305, 622.
3. Pomnóż przez 8 liczby: 13, 25, 52; możesz liczyć, mnożąc trzy razy zkolei przez 2.
4. Pomnóż przez 3 liczby: 18, 32, 57, 346, 512.
5. Pomnóż przez 6 liczby: 15, 32, 54, 456, 712.
6. Pomnóż przez 5 liczby: 26, 45, 386, 534; mnóż przez 10, a wynik podziel przez 2!
7. Pomnóż przez 9 liczby: 35, 48, 52, 32, 81; mnóż liczbę przez 10, a od wyniku odejmij tę liczbę!
   Np.: $27 . 9 = 270 - 27 = 243$.
8. Pomnóż przez 11 liczby: 26, 49, 51, 69, 75; mnóż liczbę przez 10, a do wyniku dodaj tę liczbę!
   Np.: $47 . 11 = 470 + 47 = 517$.
9. Pomnóż przez 25 liczby: 16, 28, 36, 51 77, 126; mnóż przez 100 i wynik dziel przez 4!
   Np.: $32 . 25 = 3200 : 4 = 800$.
10. Wykonaj mnożenia: $250 . 20$, $50 . 87$, $250 . 44$, $320 . 60$; mnóż liczby, opuszczając końcowe zera, a do wyniku dopisz tyle zer, ile odrzuciłeś. Np. $340 . 20$; ponieważ $34 . 2 = 68$, zatem wynik jest: 6800.
11. Pomnóż: $11 . 15$, $19 . 35$, $39 . 52$, $32 . 101$, $36 . 12$, $14 . 19$, $21 . 46$, $87 . 99$, $45 . 51$, $28 . 22$.
    jeżeli mnożna lub mnożnik niewiele się różnią od liczby kończącej się na 0, to iloczyn obliczamy jak wskazują przykłady:

    $64 . 29 = 64 . (30-1) = (64 . 30) - 64 = 1920 - 64 = 1856$,
    $23 . 41 = 23 . (40+1) = (23 . 40) + 23 = 920 + 23 = 943$.

12. Arkusz papieru kosztuje 3 *gr*; ile kosztuje 500 arkuszy?
13. Kilogram soli kosztuje 25 groszy; ile kosztuje 36 *kg*?
14. Ktoś wydaje dziennie 12 *zł*; ile wydaje miesięcznie?
15. Ile jest dni w 52 tygodniach?

16. Koszta wycieczki obliczone na jedną osobę wynoszą 268 *zł*; ile kosztowała wycieczka złożona z 50 osób?
17. Dolar złoty kosztuje 9 *zł*; ile kosztuje 86 dolarów?
18. Pociąg składa się z 14 wagonów, a w każdym wagonie jest 50 miejsc; ile jest miejsc w tym pociągu?
19. Zegarek przyśpiesza 25 sekund na godzinę; ile przyśpieszy po 24 godzinach?
20. Człowiek robi 17 oddechów na minutę; ile oddechów robi w ciągu godziny?
21. Puls człowieka uderza przeciętnie 70 razy na minutę; ile razy uderza na godzinę?
22. Pociąg pośpieszny przebiega przeciętnie 57 *km* na godzinę; jaką drogę zrobi w 9 godzinach?

**Ćwiczenia**

1. W ciągu minuty wypływa kurkiem 14 *l* wody; ile wody wypłynie w ciągu 12 godzin?
2. Ktoś zarabia 239 *zł* miesięcznie; ile zarobi w ciągu roku?
3. W fabryce pracowało przez 25 dni 27 robotników, zarabiających po 4 *zł* dziennie, i 13 robotników, zarabiających po 5 *zł* dziennie; ile zapłacił fabrykant tym robotnikom?
4. Pułk ma 3 bataljony, bataljon 3 kompanje, kompanja 3 plutony, pluton 4 sekcje, sekcja 9 ludzi; ilu ludzi liczy pułk?
5. Maszyna zużywa 25 *kg* węgla na godzinę. Ile kosztował węgiel, który zużyła w 12 godzinach, jeśli za 10 *kg* węgla płaci się 45 *gr*?
6. W piwnicy ustawiono w rzędy beczki, z których każda zawierała 120 *l* wina. Ile wynosił zapas wina, jeśli było 6 rzędów po 25 beczek?
7. Pompa studni dostarcza 4 *l* wody przy jednem poruszeniu dźwigni; ile wody można wydobyć w ciągu 25 min., robiąc 12 poruszeń dźwigni na 1 min.?
8. Wiedząc, że samolot w 2 minutach przelatuje przeciętnie 5 *km*, oblicz, ile przeleci w dwu godzinach!
9. Ktoś sprowadził 10 000 *kg* ziemniaków, płacąc 4 gr za

1 *kg*. Ile zarobił, jeśli sprzedawał 1 *kg* po 6 *gr*, a zepsuło mu się 350 *kg*?

10. Oblicz, ile dni (dokładnie) miał wiek XIX, skoro wiadomo, że co czwarty rok był przestępny, z wyjątkiem ostatniego roku wieku, który był zwyczajny!
11. Światło przebiega 300 000 *km* w sekundzie; jaka jest odległość ziemi od słońca, jeśli światło przebiega tę przestrzeń w 500 sekundach?
12. Promień ziemi ma 6370 *km*, zaś promień słońca jest 109 razy większy. Ile *km* ma promień słońca?
13. Planeta Jowisz jest 1295 razy większa (na objętość) od ziemi; słońce zaś jest 1005 razy większe od Jowisza. Obliczyć, ile razy słońce jest większe od ziemi!
14. Oblicz odległość księżyca i słońca od ziemi, jeżeli wiadomo, że odległość księżyca od ziemi jest 60 razy większa od promienia ziemi, odległość zaś słońca od ziemi jest 391 razy większa od odległości księżyca od ziemi, a promień ziemi ma 6370 *km*!
15. Chłopiec miał kupić 5 książek; gdyby za nie zapłacił po 2 *zł* 35 *gr*, brakłoby mu 3 *zł* 75 *gr;* ile miał złotych?
16. Ktoś mierzył złym metrem, mianowicie o 2 *cm* krótszym i wymierzył 17 metrów; jaka jest prawdziwa długość?
17. Z dwóch stacyj biegną naprzeciw siebie dwa pociągi, jeden z szybkością 58 *km* na godzinę, a drugi z szybkością 43 *km* na godzinę. Spotykają się po 8 godzinach; jaka jest odległość tych stacyj?
18. Dwa samoloty wyruszyły równocześnie w dwóch przeciwległych kierunkach; jeden przelatuje w 1 sekundzie 42 *m*, drugi zaś 39 *m*. Jaka będzie między niemi odległość po upływie 2 godz. 18 min. 15 sek.?
19. Kamień spadający przebiega w pierwszej sekundzie 4 *m* 9 *dcm*, w drugiej trzy razy więcej niż w pierwszej, w trzeciej 5 razy więcej niż w pierwszej, a w czwartej 7 razy więcej niż w pierwszej; z jakiej wysokości spadł, jeśli spadał 4 sekundy?

20. Taryfa pocztowa i telegraficzna

O b r ó t m i e j s c o w y.

| | zł | gr |
|---|---|---|
| Listy zwykłe do 20 *g* | — | 15 |
| Listy zwykłe ponad 20 *g* — 250 *g* | — | 30 |
| Listy zwykłe ponad 250 *g* — 500 *g* | — | 40 |
| Kartki pocztowe | — | 10 |

O b r ó t z a m i e j s c o w y.

| | zł | gr |
|---|---|---|
| Listy zwykłe do 20 *g* | — | 30 |
| Listy zwykłe ponad 20 *g* — 250 *g* | — | 60 |
| Listy zwykłe ponad 250 *g* — 500 *g* | — | 80 |
| Listy polecone do 20 *g* | — | 90 |
| Listy polecone ponad 20 *g* — 250 *g* | 1 | 20 |
| Listy polecone ponad 250 *g* — 500 *g* | 1 | 40 |
| Kartki pocztowe | — | 20 |
| Druki zwykłe do 25 *g* | — | 5 |
| Druki zwykłe ponad 25 *g* — 50 *g* | — | 10 |
| Druki zwykłe ponad 50 *g* — 100 *g* | — | 15 |
| Druki zwykłe ponad 100 *g* — 250 *g* | — | 25 |
| Druki zwykłe ponad 250 *g* — 500 *g* | — | 50 |
| Druki zwykłe ponad 500 *g* — 1000 *g* | — | 60 |
| Druki zwykłe ponad 1000 *g* — 2000 *g* | — | 70 |
| Próbki towarowe do 100 *g* | — | 15 |
| Próbki towarowe ponad 100 *g* — 250 *g* | — | 25 |
| Próbki towarowe ponad 250 *g* — 500 *g* | — | 50 |
| Przekazy pocztowe do 10 *zł* | — | 20 |
| Przekazy pocztowe ponad 10 *zł* — 25 *zł* | — | 35 |
| Przekazy pocztowe ponad 25 *zł* — 50 *zł* | — | 50 |
| Przekazy pocztowe ponad 50 *zł* — 100 *zł* | — | 70 |
| Przekazy pocztowe ponad 100 *zł* — 250 *zł* | — | 95 |
| Przekazy pocztowe ponad 250 *zł* — 500 *zł* | 1 | 35 |
| Przekazy pocztowe ponad 500 *zł* — 750 *zł* | 1 | 80 |
| Przekazy pocztowe ponad 750 *zł* — 1000 *zł* | 2 | 20 |

Telegramy od wyrazu 15 *gr* i opłata zasadnicza 50 *gr*.

**Taryfa opłat od paczek**

| S t r e f a | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| W A G A | do 100 *km* | ponad 100 do 300 *km* | ponad 300 do 600 *km* | ponad 600 *km* |
| | z ł o t y c h | | | |
| do 1 *kg* | 0,70 | 0,90 | 1,10 | 1,30 |
| od 1—3 „ | 0,90 | 1,30 | 1,70 | 2,10 |
| „ 3—5 „ | 1,30 | 1,90 | 2,50 | 3,10 |
| „ 5—10 „ | 1,90 | 2,70 | 4,10 | 6,10 |
| „ 10—15 „ | 2,60 | 4,10 | 6,10 | 8,10 |
| „ 15—20 „ | 3,60 | 6,10 | 8,10 | 10,10 |

Ile wynosi opłata pocztowa za przesyłkę: *a)* 25 listów zwykłych miejscowych, każdy wagi do 20 *g*, *b)* 8 listów zwykłych zamiejscowych, każdy wagi ponad 20 *g* — 250 *g*, *c)* 3 listów poleconych zamiejscowych, każdy wagi do 20 *g*, *d)* 1 książki wagi 650 *g*.

21. Kupiec przesłał 1250 próbek towarowych, każda do 100 *g* wagi, 350 próbek, każda ponad 100 *g* — 250 *g* wagi, i 75 próbek, każda ponad 250 *g* — 500 *g* wagi; ile kosztowała przesyłka?
22. Księgarz wysłał 2500 druków, każdy do 25 *g* wagi, 1150 druków, każdy ponad 25 *g* — 100 *g* wagi, 140 druków, każdy ponad 100 *g* — 250 *g* wagi, i 15 druków każdy ponad 500 *g* — 1000 *g* wagi; ile kosztowała przesyłka?
23. Wysłano: 15 przekazów po 7 *zł* 50 *gr*, 3 przekazy po 125 *zł* i 1 przekaz na 540 *zł*; ile wynosiła opłata?
24. Syn posłał ojcu telegram następujący: „Pan Wilczyński Warszawa ulica Marszałkowska l. 73. Szczęśliwie zajechałem. Serdeczne ucałowania. Mieczysław“; ile zapłacił za ten telegram?
25. Wysłano 4 telegramy po 12 słów, 9 telegramów po 10 słów i 2 telegramy po 15 słów; ile wynosiła opłata?
26. Wysłano pocztą paczkę ważącą:
    *a)* 3 *kg* 500 *g* do miejscowości odległej o 185 *km*,
    *b)* 10 *kg* 20 *g* do miejscowości odległej o 415 *km*,
    *c)* 13 *kg* — *g* do miejscowości odległej o 299 *km*;
    ile wynosiła opłata za każdą paczkę?
27. Kupiec ma wysłać 15 *kg* 400 *g* towaru do miejscowości odległej o 550 *km*; w jaki sposób ma ten towar rozdzielić na paczki, aby opłata była najmniejsza?
28. Do Austrji, Czechosłowacji, Rumunji i Węgier opłata za list zwykły wagi do 20 *g* wynosi 50 *gr*, do innych krajów 60 *gr*; jeśli list waży więcej niż 20 *g*, to aż do wagi 40 *g* (o 20 *g* więcej) dopłata wynosi 30 *gr* i t. d. Kupiec wysłał 1 list do Węgier wagi 27 *g*, 1 do Francji wagi 43 *g* i 1 do Anglji wagi 18 *g*; ile wynosiła opłata za te listy?

29. Wykonaj obliczenia w następującym rachunku:

Firma Miejscowość dnia ............ 193..... r.

Rachunek

dla ..............................................................

w ..............................................

| Ilość | Jednostek | Wyszczególnienie towaru | Cena jedn. | zł | gr |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | tuzinów | ołówków . . . . . | 84 gr | | |
| 125 | sztuk | zeszytów . . . . . | 20 „ | | |
| 50 | sztuk | gumy . . . . . . | 15 „ | | |
| 24 | tuzinów | piór . . . . . . . . | 36 „ | | |
| 50 | flaszek | atramentu . . . . . | 40 „ | | |
| 20 | składek | papieru . . . . . . | 25 „ | | |
| 100 | arkuszy | bibuły . . . . . . | 20 „ | | |
| 100 | sztuk | rączek . . . . . . | 10 „ | | |
| | | Razem | | | |

30. Kupiec dostarczył: 15 *kg* czekolady po 7 *zł* za 1 *kg*, 120 *kg* cukru po 1 *zł* 60 *gr* za 1 *kg*, 10 *kg* kawy palonej po 9 *zł* 50 *gr* za 1 *kg*, 3 beczki śledzi po 210 *zł* beczka, 30 *kg* mydła po 1 *zł* 50 *gr* za 1 *kg* i 3 skrzynki zapałek po 180 *zł* skrzynka; jaki rachunek wystawił?
31. Rolnik dostarczył do sklepu: 30 *l* mleka po 18 *gr* za 1 *l*, 10 *kg* masła po 3 *zł* za 1 *kg*, 2 kopy jaj po 6 *gr* za sztukę, 5 *kg* sera po 70 *gr* za 1 *kg*; wystaw rachunek!
32. Handlarz ryb dostarczył do sklepu: 30 *kg* karpia po 1 *zł* 50 *gr* za 1 *kg*, 25 *kg* szczupaka po 2 *zł* 80 *gr* za 1 *kg*, 50 *kg* śledzi solonych po 1 *zł* 20 *gr* za 1 *kg*, 80 *kg* śledzi wędzonych po 1 *zł* za 1 *kg*, 20 *kg* szprotów po 1 *zł* 25 *gr* za 1 *kg*; wystaw rachunek!
33. Na każdym rachunku na kwotę powyżej 20 *zł* umieszcza się stempel. Wysokość opłaty stemplowej wynosi 10 *gr* od każdych 50 *zł*. Jeśli kwota nie jest wielokrotnością 50 *zł*, to od reszty płaci się także 10 *gr*. Np. od 15 *zł* nie opłaca się stempla, od 150 *zł* opłata wynosi 30 *gr*, a od 134 *zł* także 30 *gr*.

    Ułóż tabelę opłat stemplowych na rachunki do 500 *zł*. Jakie opłaty stemplowe należało umieścić na rachunkach w zadaniach 29 do 32.

34. Wartość towaru w sklepie oblicza się, sporządzając inwentarz wedle następującego wzoru:

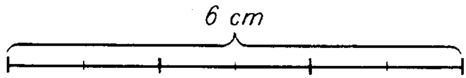
| Ilość | Opakowanie | Dział | Kg | Cena | | Wartość | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | zł | gr | zł | gr |
| 50 | *kg* | podkowy . . . . | 50 | 1 | 80 | | |
| 18 | *kg* | gwoździe . . . . | 18 | — | 80 | | |
| 100 | sztuki | gwoździe do podków | — | — | 6 | | |
| 50 | „ | „ „ „ | — | — | 12 | | |
| 20 | „ | motyki . . . . . | — | 2 | 50 | | |
| 30 | „ | widły . . . . . | — | 1 | 50 | | |
| 10 | „ | obcęgi . . . . . | — | 2 | — | | |
| 2 | beczki | śledzie . . . . . | — | 210 | — | | |
| 100 | *kg* | sól . . . . . . | 100 | — | 40 | | |
| 2 | skrzynie | zapałki . . . . . | — | 180 | — | | |
| 5 | 1 | ocet . . . . . . | 5 | — | 60 | | |
| | | Razem | | | | | |

*a)* Oblicz wartość towaru w tym sklepie!
*b)* Oblicz wartość towaru w sklepiku szkolnym!

# Dzielenie

## Podział

Odcinek 6 *cm* podzieliliśmy na 3 równe części. Jak wielka jest każda z tych części?




Rys. 71.

Z rys. 71 widać, że mamy znaleźć odcinek, który dodany do siebie 3 razy daje odcinek 6 *cm*. Zadanie nasze możemy tak zaznaczyć: $3 \times ?\ cm = 6\ cm$.

Mamy więc wyszukać mnożną, znając mnożnik i iloczyn.

Szukana mnożna jest 2 *cm*, albowiem: $3 \times 2\ cm = 6\ cm$. 6 *cm*, t. j. wielkość, którą dzielimy, nazywamy **dzielną**, 3, t. j. liczbę wskazującą, na ile części dzielimy — **dzielnikiem**, 2 *cm*, t. j. wynik podziału — **ilorazem**.

Widzimy, że iloraz, pomnożony przez dzielnik, daje dzielną. Iloraz oznaczamy, pisząc dzielną, następnie dwukropek : a potem dzielnik. A więc: 6 *cm* : 3 = 2 *cm*, co czytamy: 6 *cm* podzielone przez 3 równa się 2 *cm*.

### Zadania

1. 5 . ? *cm* = 15 *cm*; 7 . ? *kg* = 56 *kg*; 8 . ? *kg* = 48 *kg*; 9 . ? *l* = 63 *l*; 6 . ? *gr* = 54 *gr*; 4 . ? godz. = 20 godz. Przedstaw szukane mnożne w postaci ilorazu!

### Mieszczenie

Ile sztuk 3-metrowych można odciąć z 12-tu metrowego zwoja sukna t. j. ile sztuk 3-metrowych mieści się w 12 *m*?

Szukamy więc liczby, która wskazuje, ile należy wziąć sztuk 3-metrowych, aby otrzymać 12 *m*, czyli szukamy liczby, przez którą pomnożone 3 *m* daje 12 *m*. Zadanie nasze możemy tak zaznaczyć: ? × 3 *m* = 12 *m*.

Widzimy, że zadanie sprowadza się do wyszukania mnożnika, przyczem znamy mnożną i wartość iloczynu.

Szukany mnożnik jest 4, albowiem: 4 . 3 *m* = 12 *m*. 12 *m* nazywamy dzielną, 3 *m* — dzielnikiem, liczbę 4 wskazującą, ile razy dzielnik mieści się w dzielnej — ilorazem.

Widzimy, że dzielnik, pomnożony przez iloraz, daje dzielną. Iloraz oznaczamy jak poprzednio: 12 *m* : 3 *m* = 4.

Czytaj: 3 *m* mieści się w 12 *m* 4 razy.

### Zadania

1. ? × 5 *cm* = 20 *cm*; ? × 7 *cm* = 42 *cm*; ? × 12 *kg* = 36 *kg*; ? × 18 *g* = 54 *g*; ? × 9 *l* = 36 *l*; ? × 15 *zł* = 60 *zł*; ? × 25 *g* = 75 *g*; ? × 3 godz. = 24 godz; ? × 16 min. = 48 min.

Przedstaw szukane mnożniki w postaci ilorazu!

## Iloraz liczb niemianowanych

Przypuśćmy, że wartość iloczynu jest 24, a jeden jego czynnik jest 6; ile wynosi drugi czynnik?

Jeśli szukany czynnik jest mnożnikiem, to zadanie to możemy tak zaznaczyć $? \times 6 = 24$;

Jeśli szukany czynnik jest mnożną, to tak zaznaczymy: $6 \times ? = 24$.

W obu wypadkach odpowiedź jest ta sama, t. j. 4, albowiem: $4 \times 6 = 6 \times 4 = 24$.

Widzimy więc, że dla liczb niemianowanych obojętną jest rzeczą, czy szukany czynnik jest mnożną, czy mnożnikiem.

24 nazywamy *dzielną*, znany wynik 4 (względnie 6) *dzielnikiem*, szukany czynnik 6 (względnie 4) *ilorazem*. Iloraz oznaczamy, pisząc: $24 : 4 = 6$; $24 : 6 = 4$.

Widzimy, że i teraz iloraz, pomnożony przez dzielnik, daje dzielną.

Podobnie: $14 : 7 = 2$, bo $2 . 7 = 14$;
$25 : 1 = 25$, bo $1 . 25 = 25$.

W zagadnieniach, które prowadzą do dzielenia, dzielnik nigdy nie jest zerem (np. nic nie znaczy: podzielić wielkość na 0 części), dlatego też o dzieleniu będziemy mówić tylko wówczas, gdy dzielnik nie jest zerem. Jeżeli dzielna jest zerem, to iloraz zawsze równa się zeru. Np.:

$$0 : 5 = 0, \quad \text{bo } 0 \times 5 = 0.$$

*Uwaga.* Niezawsze możemy mówić o ilorazie dwóch liczb. Nie możemy np. 7 piór rozdzielić równo między 3 chłopców.

Jeżeli istnieje iloraz dwóch liczb, to mówimy, że dzielna jest *podzielna* przez dzielnik; o ilorazie zaś mówimy, żeśmy go otrzymali, pomniejszając dzielną *tyle razy*, ile wskazuje dzielnik; oczywiście, że w tym wypadku dzielna jest wielokrotnością dzielnika. Np.: $18 : 3 = 6$.

A więc 18 jest podzielne przez 3; 18 zmniejszone 3 razy daje na wynik 6.

### Zadania

1. Wstaw w miejsce liter odpowiednie liczby:

$x \cdot 3 = 15$, $6 \cdot y = 18$, $z \cdot 12 = 36$,
$3 \cdot y = 96$, $x \cdot 9 = 45$, $z \cdot 19 = 38$.

2. Ile razy należy 8 do siebie dodać, aby otrzymać 40?
3. Ile razy można 5 odjąć od 30?

### Dzielna, dzielnik, iloraz

Jeżeli odcinek 6 *cm* rys. 71 podzielimy na 3 równe części, to każda część ma: 6 *cm* : 3 = 2 *cm*.

Wynika stąd, że 2 *cm* mieści się w 6 *cm* 3 razy; więc: 6 *cm* : 2 *cm* = 3.

Zatem dzielnik (pierwszego ilorazu) otrzymujemy, dzieląc dzielną przez iloraz.

### Zadania

1. Ile wynosi dzielna, jeżeli:
   *a)* dzielnik wynosi 6 a iloraz 5;
   *b)* dzielnik wynosi 9 a iloraz 2;
2. Ile wynosi dzielnik, jeżeli:
   *a)* dzielna wynosi 8 a iloraz 2;
   *b)* dzielna wynosi 27 a iloraz 3.
3. Rozwiąż następujące zadania:
   *a)* ? : 5 = 7; *b)* 84 : ? = 4; *c)* 65 : ? = 13;
   *d)* ? : 17 = 5; *e)* ? : 9 = 11; *f)* 72 : ? = 2.

### Rozdzielność ilorazu względem dodawania

Pomiędzy 4 chłopców rozdzielono równo za pierwszym razem 12 piór, za drugim razem 20 piór. Ile piór razem otrzymał każdy chłopiec? Możemy to obliczyć dwoma sposobami.

1. Rozdzielono razem 12 + 20 piór pomiędzy 4 chłopców, a więc każdy otrzymał piór: (12 + 20) : 4.

2. Za pierwszym razem każdy chłopiec otrzymał piór: 12 : 4, a za drugim razem otrzymał piór: 20 : 4, a więc razem otrzymał: (12 : 4) + (20 : 4).

Widzimy zatem, że

$$(12 + 20) : 4 = (12 : 4) + (20 : 4).$$

Sumę więc możemy podzielić w ten sposób, że dzielimy każdy składnik zosobna i wyniki dodajemy.

Np.: $(18 + 6) : 3 = (18 : 3) + (6 : 3)$;

$$(15 + 20 + 35) : 5 = (15 : 5) + (20 : 5) + (35 : 5).$$

Oczywiście regułę możemy tylko wówczas stosować, gdy dzielnik mieści się bez reszty w każdym ze składników.

Prawo powyższe nazywamy prawem r o z d z i e l n o ś c i dzielenia względem dodawania.

## Rozdzielność ilorazu względem odejmowania

Pomiędzy 4 chłopców rozdzielono 32 piór w ten sposób, że najpierw rozdzielono 20 piór, a potem resztę. Ile piór otrzymał każdy chłopiec za drugim razem? Możemy to obliczyć dwoma sposobami:

1. Za drugim razem rozdzielono piór 32 — 20 pomiędzy 4 chłopców, a więc każdy chłopiec otrzymał (za drugim razem) piór: $(32 - 20) : 4$.
2. Każdy chłopiec otrzymał razem piór: $32 : 4$.

Ponieważ najpierw otrzymał piór: $20 : 4$,

a więc za drugim razem otrzymał piór: $(32 : 4) - (20 : 4)$.

Widzimy zatem, że: $(32 - 20) : 4 = (32 : 4) - (20 : 4)$.

Różnicę możemy więc podzielić w ten sposób, że dzielimy zosobna odjemną i odjemnik, a wyniki odejmujemy.

Oczywiście regułę powyższą możemy tylko wówczas stosować, gdy dzielnik mieści się bez reszty w odjemnej i w odjemniku.

Prawo powyższe nazywamy prawem r o z d z i e l n o ś c i dzielenia względem odejmowania.

A więc mamy: $(18 - 6) : 3 = (18 : 3) - (6 : 3)$.

### Zadania

1. Przekonaj się o prawdziwości następujących równości:
   *a)* $(120 + 80) : 20 = (120 : 20) + (80 : 20)$;

*b)* $(27 + 36 + 42) : 3 = (27 : 3) + (36 : 3) + (42 : 3)$;
*c)* $(85 - 50) : 5 = (85 : 5) - (50 : 5)$.

## Iloraz niedokładny

Ile sztuk 4-metrowych możemy odciąć z 14-metrowego zwoju sukna?

Ponieważ na 3 sztuki 4-metrowe potrzeba 12 *m*, a na 4 sztuki 16 *m*, więc ze zwoju 14-metrowego możemy odciąć 3 sztuki 4-metrowe i zostanie reszta 2 *m*.

Liczbę 3 nazywamy ilorazem niedokładnym, powstałym z dzielenia liczby 14 przez liczbę 4.

Jak poprzednio, liczbę 14 nazywamy dzielną, liczbę zaś 4 dzielnikiem. Liczbę 2 nazywamy resztą.

Iloraz niedokładny 3 wskazuje, ile razy dało się odciąć 4 *m* od 14 *m*, lub jak krócej mówimy, ile razy 4 *m* mieści się w 14 *m*. Reszta 2 wskazuje, ile metrów sukna zostanie, jeżeli od sztuki 14-metrowej odetniemy 3 razy po 4 *m* sukna.

Iloraz niedokładny oznaczamy, pisząc:

$$14\,m : 3 = 4\,m \text{ i reszta } 2\,m.$$

Z podanego na początku przykładu widzimy, że dodając do reszty 2 *m* to, cośmy odcięli, t. j. $3 \times 4\,m$, otrzymamy 14 *m*, czyli: $14\,m = (3 \times 4\,m) + 2\,m$.

Podobnie:

$$13 : 5 = 2 \text{ i reszta } 3, \text{ zatem } 13 = (2 \,.\, 5) + 3,$$
$$17 : 3 = 5 \text{ i reszta } 2, \text{ zatem } 17 = (3 \,.\, 5) + 2.$$

Uwaga. Jeżeli reszta jest zerem, to znaleziony iloraz jest ilorazem dokładnym.

### Zadania

1. Znaleźć iloraz niedokładny i resztę dzielenia w następujących przykładach:
*a)* $12 : 5$; *b)* $14 : 3$; *c)* $19 : 2$; *d)* $17 : 7$; *e)* $30 : 8$;
*f)* $35 : 9$; *g)* $47 : 6$; *h)* $55 : 8$; *i)* $69 : 8$; *j)* $71 : 9$;

2. Jaka liczba, podzielona przez 3, daje:
*a)* iloraz niedokładny 5, a resztę 1;

*b)* iloraz niedokładny 7 a resztę 2;

*c)* iloraz 12 a resztę 0.

3. Przez jaką liczbę należy podzielić:

*a)* 56, aby otrzymać na iloraz 9 a na resztę 2;

*b)* 63, aby otrzymać na iloraz 10 a na resztę 3.

## Dzielenie w układzie dziesiętnym

Mamy 4 sztuki dziesięciozłotówek, 5 pojedyńczych złotych, 8 dziesięciogroszówek i 3 grosze, a więc razem 4583 groszy, i chcemy tę kwotę rozdzielić równo pomiędzy 67 ludzi. Ile groszy każdy otrzyma i jaka zostanie reszta?

Zadanie to możemy rozwiązać, wykonując dzielenie:

$$4583 : 67$$

Aby wykonać to dzielenie, wyobrażamy sobie, że 4 sztuki dziesięciozłotówek zamieniliśmy na 40 sztuk jednozłotowych. Będziemy mieli zatem razem 45 sztuk jednozłotowych. Ponieważ sztuk jednozłotowych jest za mało nato, żeby każdy otrzymał po 1 *zł*, więc zmienimy 45 *zł* na 450 sztuk dziesięciogroszówek. Razem będzie 458 sztuk dziesięciogroszowych.

Chcąc teraz obliczyć, ile dziesięciogroszówek każda osoba otrzyma, wykonujemy dzielenie: $458 : 67$.

Drogą prób przekonujemy się, że iloraz ten wynosi 6. Aby otrzymać resztę, obliczamy iloczyn $67 . 6$; mamy $67 . 6 = 402$. Resztę otrzymamy, wykonując odejmowanie:

$$\begin{array}{rr} & 458 \\ & -402 \\ \hline \text{reszta} & 56 \end{array}$$

Każdy otrzyma więc 6 dziesięciogroszówek i zostanie do podzielenia 56 dziesięciogroszówek i 3 grosze.

Zamieniając teraz 56 dziesięciogroszówek na pojedyncze grosze, będziemy mieli 560 groszy, a więc razem 563 groszy.

Wykonujemy zatem dzielenie: $563 : 67$.

Drogą prób przekonujemy się, że iloraz ten równa się 8.

Ponieważ $67 \times 8 = 536$, więc reszta wynosi:

$$\begin{array}{rr} & 563 \\ & -536 \\ \cline{2-2} \text{reszta} & 27 \end{array}$$

Przy drugim podziale każda osoba otrzyma 8 groszy i zostanie 27 groszy reszty. Razem więc każda osoba otrzyma 6 dziesięciogroszówek i 8 groszy t. j. 68 groszy.

Rachunek powyższy zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{rrl} & 68 & \\ \cline{2-2} & 4583 & : 67 \\ & 402\phantom{3} & \\ \cline{2-2} & 563 & \\ & 536 & \\ \cline{2-2} \text{reszta} & 27 & \end{array}$$

W praktyce przeprowadzamy więc dzielenie tak:

Odcinamy z dzielnej (od lewej ręki ku prawej) tyle cyfr, ile jest w dzielniku. Jeśli utworzona z tych cyfr liczba jest mniejsza od dzielnika, to odcinamy jeszcze następną cyfrę.

Wykonujemy teraz pierwsze dzielenie liczby utworzonej z cyfr odciętych przez dzielnik.

Otrzymany iloraz zapisujemy nad ostatnią cyfrą części odciętej. Będzie to najwyższa cyfra szukanego ilorazu.

Do otrzymanej reszty dopisujemy następującą cyfrę dzielnej i wykonujemy dzielenie jak poprzednio.

Nowo znaleziony iloraz będzie drugą cyfrą ilorazu.

Tak postępujemy dalej, aż wyczerpiemy wszystkie cyfry dzielnej. Ostatnia otrzymana reszta, będzie szukaną resztą.

Np.:

$$\begin{array}{rrl} & 12 & \\ \cline{2-2} & 3235 & : 258 \\ & 258\phantom{5} & \\ \cline{2-2} & 655 & \\ & 516 & \\ \cline{2-2} \text{reszta} & 139 & \end{array}$$

U w a g a. Jeśli, dopisując do którejś z kolejnych reszt odpowiednią cyfrę dzielnej, otrzymujemy mniej niż dzielnik, to dopisujemy jeszcze następną cyfrę dzielnej, a na odpowiedniem miejscu szukanego ilorazu piszemy cyfrę zero; następnie wykonujemy dzielenie, jak poprzednio.

$$\begin{array}{rr} & \underline{105}\phantom{:27} \\ & 2848 : 27 \\ & \underline{27\phantom{48}}\phantom{:27} \\ & 148\phantom{:27} \\ & \underline{135}\phantom{:27} \\ \text{reszta} & 13\phantom{:27} \end{array}$$

### Zadania

1. Oblicz następujące ilorazy i wyznacz reszty dzielenia:

| | | |
|---|---|---|
| *a)* 406 : 8 | *b)* 8352 : 9 | *c)* 14 008 : 5 |
| 875 : 25 | 1256 : 34 | 12 384 : 18 |
| 900 : 21 | 6005 : 403 | 10 500 : 205 |

| | |
|---|---|
| *d)* 49 611 : 1228 | *e)* 702 030 : 52 367 |
| 54 502 : 1947 | 8 325 091 : 23 005 |
| 85 325 : 2025 | 13 025 032 : 405 003. |

2. Ile kroków zrobisz na przestrzeni 100 *m*? (Jeden krok przeciętnie 75 *cm*).
3. Pociąg pośpieszny przejeżdża średnio 52 *km* na godzinę. Ile metrów przejeżdża średnio w min., a ile w sek.?
4. Człowiek przejdzie szybkim krokiem na godzinę 6 *km*; ile minut idzie 1 *km*? ile *m* przechodzi w jednej minucie?
5. Pociąg wyjeżdża z Moskwy w niedzielę o godz. 1-szej popołudniu i jedzie do Władywostoku 239 godzin. Kiedy pociąg ten przybywa do Władywostoku?
6. Prędkość głosu wynosi 333 *m* na sekundę. Po jakim czasie usłyszy człowiek, odległy od armaty o 10 *km*, huk wystrzału z tej armaty?
7. Człowiek idzie średnio 5 *km* na godzinę; ile dni szedłby z Warszawy do Krakowa, jeśliby dziennie szedł 6 godzin? (Odległość z Warszawy do Krakowa wynosi 365 *km*).

8. Odległość księżyca od ziemi wynosi 384 395 *km*; ile to jest promieni ziemi? (Promień ziemi 6370 *km*).
9. Mieszkańcy Warszawy zużywają w ciągu roku około 175 000 *t* ziemniaków. Ile potrzeba pociągów, liczących po 40 wagonów, do zwiezienia tych ziemniaków, jeśli 1 wagon mieści 10 *t* ziemniaków?
10. Mamy wykonać dzielenie: 3548 *zł* 35 gr : 27.

Rozwiązanie: Wykonujemy naprzód dzielenie 3548 *zł* : 27

$$3548 : 27 = 131 \text{ reszta } 11$$

Otrzymaliśmy więc iloraz 131 *zł* i resztę 11 *zł*. Resztę 11 *zł* zamieniamy na grosze i dodajemy do tego grosze dzielnej; otrzymujemy 1135 *gr*. Wykonujemy teraz dzielenie 1135 *gr* : 27.

$$1135 : 27 = 42 \text{ reszta } 1$$

Otrzymaliśmy wynik 42 *gr* i resztę 1 *gr*. Ostateczny więc wynik naszego dzielenia jest 131 *zł* 42 *gr* i reszta 1 *gr*.

Wykonaj w ten sposób następujące dzielenia:

| | |
|---|---|
| *a)* 45 *m* 2 *dcm* : 17 | *b)* 78 *kg* 345 *g* : 36 |
| 345 *km* 735 *m* : 63 | 2495 *kg* 328 *g* : 236 |
| 3528 *km* 518 m : 327 | 8926 *kg* 5 *g* : 785 |
| *c)* 36 *zł* 52 *gr* : 6 | *d)* 8 godz. 35 min. : 3 |
| 2360 *zł* 80 *gr* : 354 | 45 min. 17 sek. : 7 |
| *e)* 326 *q* 35 *kg* : 7 | 325 *t* 6 *q* : 15 |

11. *a)* Ile to jest minut: 580 sek., 732 sek., 1596 sek.?
    *b)* Ile to jest godz., min. i sek.: 27 365 sek., 380 min., 52 sek.?
12. *a)* Ile to jest stopni i minut: 85′, 270′, 1345′?
    *b)* Ile to jest minut i sekund: 436″, 386″, 1364″?
13. Oblicz a) $90^\circ : 16$, *b)* $40^\circ 32' : 7$, *c)* $32^\circ 15' 14'' : 9$.
14. Jeżeli mamy podzielić przez siebie dwie liczby wielorakie tego samego gatunku, wówczas sprowadzamy je najpierw do wspólnego miana, a następnie wykonujemy dzielenie. Np.: Książka kosztuje 3 *zł* 25 *gr*; ile kupić możemy książek za 175 *zł* 37 *gr*?

    Aby zadanie rozwiązać, musimy obliczyć, ile razy

3 *zł* 25 *gr* mieści się w 175 *zł* 37 *gr*. W tym celu zamieniamy złote na grosze i wykonujemy dzielenie 17 537 : 325.

$$\begin{array}{rl} & \overline{53} \\ 17537 & : 325 \\ 1625 & \\ \hline 1287 & \\ 975 & \\ \hline \text{reszta} \quad 312 & \end{array}$$

Otrzymaliśmy więc iloraz niedokładny 53 i resztę 312; możemy więc kupić 53 książek i zostanie nam reszta 312 *gr*, t. j. 3 *zł* 12 *gr*.

Wykonaj w podobny sposób następujące dzielenia:

*a)* 3 *km* 256 *m* : 18 *m*
15 *km* 235 *m* : 2 *km* 325 *m*
328 *m* 7 *dcm* : 5 *dcm*

*b)* 5 *kg* 325 *g* : 36 *g*
9 *kg* 26 *g* : 1 *kg* 325 *g*
10 *kg* : 2 *kg* 5 *g*

*c)* 53 *zł* 35 *gr* : 18 *gr*
8 *zł* 29 *gr* : 1 *zł* 12 *gr*
138 *zł* 50 *gr* : 3 *zł* 27 *gr*

*d)* 8 godz. 17 min. : 15 min.
7 godz. : 25 min.
3 dni 12 godz. : 3 godz. 30 min.

*e)* 358 *hl* 25 *l* : 5 *l*
796 *hl* 50 *l* : 3 *hl* 12 *l*
734 *t* 6 *q* : 2 *q*
520 *t* 7 *q* : 5 *q* 30 *kg*

### Rachunek pamięciowy i ułatwienia

1. Podziel przez 2 następujące liczby: *a)* 12, 28, 36, 44, 56; *b)* 15, 25, 37, 43, 53.
2. Podziel przez 4 następujące liczby: *a)* 12, 28, 36, 48, 56; *b)* 15, 23, 38, 46, 50.

U w a g a. Dziel przez 2, i otrzymany iloraz (bez zwracania uwagi na resztę) dziel znowu przez 2. Np.: 65 : 4; 65 dzielone przez 2 jest 32 (reszta 1); 32 dzielone przez 2 jest 16.

3. Podziel przez 3 następujące liczby: *a)* 15, 27, 33, 45, 54; *b)* 17, 25, 32, 47, 53.
4. Podziel przez 9 następujące liczby: *a)* 18, 45, 63, 108, 189; *b)* 15, 33, 56, 82, 185.
5. Podziel przez 6 następujące liczby: 24, 42, 66, 84, 96!
6. Podziel przez 10 następujące liczby: 20, 35, 350, 736, 528!

U w a g a. 10 mieści się tyle razy w danej liczbie, ile dziesiątek ta liczba zawiera. Iloraz otrzymamy, odrzucając cyfrę jednostek; cyfra jednostek będzie resztą.

Np.: $5286 : 10 = 528$, reszta 6.

7. Podziel przez 100 następujące liczby: 235, 836, 4527, 5345, 9250, 15327.

U w a g a. Podobnie jak w zadaniu 6, iloraz otrzymujemy, odcinając dwie ostatnie cyfry; liczba utworzona z tych dwóch ostatnich cyfr, jest resztą dzielenia.

8. Podziel przez 5 następujące liczby: 25, 57, 73, 92, 256, 520, 600, 880.

   U w a g a. Mnóż przez 2, a wynik dziel przez 10. Np.: $76 : 5$; $76 \times 2 = 152$; 152 dzielone przez 10 jest 15.

9. Podziel przez 25 następujące liczby: 65, 75, 90, 460, 625.

   U w a g a. Mnóż przez 4, a wynik dziel przez 100.

10. Jeżeli dzielnik jest liczbą jednocyfrową, to możemy otrzymać iloraz bez dopisywania częściowych iloczynów. Np.: $8325 : 7 = 1189$, reszta 2.

    Rachujemy w myśli w następujący sposób:

    7 w 8 mieści się 1 raz, zostaje 1; dopisuję 3 i mam 13;

    7 w 13 mieści się 1 raz, zostaje 6; dopisuję 2 i mam 62;

    7 w 62 mieści się 8 razy; $8 \times 7 = 56$, $62 - 56 = 6$, dopisuję 5 i mam 65;

    7 w 65 mieści się 9 razy; $7 \times 9 = 63$, $65 - 63 = 2$.

    Iloraz jest 1189, reszta 2.

    Wykonaj w ten sposób następujące dzielenia: $3256 : 2$, $853 : 2$, $736 : 3$, $1254 : 3$, $4527 : 5$, $8326 : 6$, $354 : 7$.

11. Ile utworzysz bataljonów z 5323 żołnierzy, jeśli bataljon liczy 300 ludzi?

12. 172 uczniów ustawiło się w czwórki; ile czwórek utworzyli ci uczniowie?

13. Ile metrów na minutę przejeżdża pociąg osobowy, skoro w godzinie przejeżdża 36 *km*? (Oblicz, ile w 10 minutach, a następnie, ile w jednej minucie).

14. Bilet 3-ciej klasy z Warszawy do Krakowa kosztuje

16 *zł* 80 *gr*, bilet zaś drugiej klasy o połowę drożej. Ile kosztuje bilet 2-giej klasy z Warszawy do Krakowa?
15. Koło u wozu robi 200 obrotów na 1 *km*; jaki jest jego obwód?
16. Ile trzeba banknotów 20 *zł*, aby mieć 7360 *zł*?
17. Księgarz sprzedał po jednakowej cenie 3 tuziny książek za 720 *zł*; po ile sprzedawał tuzin? Po ile jedną książkę?

**Ćwiczenia**

1. Kupiec sprzedał jednemu z kupujących 7 *m* sukna, drugiemu 5 *m* sukna tego samego gatunku i otrzymał 204 *zł*. Ile zapłacił każdy z kupujących?
2. *a)* Kupiec za 1275 *kg* kawy zapłacił 60 562 *zł*; ile zapłacił za 1 *kg*?
   *b)* Ile kg cukru można kupić za 348 *zł*, płacąc 1 *zł* 50 *gr* za 1 *kg*?
3. Z dwóch stacyj, odległych o 320 *km*, wyjechały równocześnie ku sobie dwa pociągi, jeden z szybkością 30 *km*, a drugi 50 *km* na godzinę. Po ilu godzinach spotkały się?
4. Z miasta wyjechał samochód o 12-tej godzinie, jadąc z szybkością 40 *km* na godzinę, a w godzinę później wyjechał drugi samochód, jadąc z szybkością 50 *km* na godzinę; o której godzinie i w jakiej odległości od miasta drugi samochód dopędzi pierwszy?
5. Zegar przyspiesza 12 min. na dobę; jaką godzinę wskaże w środę o 9 rano, jeśli w niedzielę w południe wskazywał dokładną godzinę?
6. Zegar spóźnia się. O godzinie 12 pokazuje 11 godz. 50 min., a o godzinie 18 pokazuje 17 godz. 35 min.; która jest naprawdę godzina, gdy zegar pokazuje 20 godz.?
7. Od jednej pełni księżyca do następnej upływa 29 dni 12 godz. 44 min. 3 sek. Ile razy w ciągu: *a)* roku, *b)* 10 lat mamy pełnię?
8. Słońce jest 1 301 200 razy większe od ziemi. Jeśli ziemię wyobrazimy sobie jako ziarnko zboża, to ile *l* zboża po-

trzeba, aby wyobrazić sobie wielkość słońca, jeśli 1 *l* zawiera 10 000 ziarnek?

9. Tor, po którym ziemia obiega słońce, nazywa się ekliptyką. Długość ekliptyki wynosi 936 250 000 *km*. Jaką drogę przebiega ziemia po ekliptyce w ciągu: *a)* doby, *b)* godziny, *c)* minuty, *d)* sekundy?
10. Odległość ziemi od słońca wynosi 149 501 000 *km*.
    *a)* Ile lat jechalibyśmy na słońce, jadąc z szybkością samolotu, t. j. 200 *km* na godzinę?
    *b)* Ile sekund biegnie światło ze słońca na ziemię (w 1 sek. przebiega 300 000 *km*)?
    *c)* Odległość najbliższej gwiazdy od ziemi jest 226 665 razy większa, niż słońca od ziemi; ile czasu potrzebuje światło, aby z tej gwiazdy przyjść na ziemię?
11. Średnica pięciogroszówki wynosi 2 *cm*; *a)* jaką kwotę przedstawiałyby pięciogroszówki, ustawione obok siebie na przestrzeni 1 *km*; *b)* ile *km* zajęłyby ustawione one obok siebie, gdyby ich było za 1 miljon *zł*?
12. Jedną rurą wpływa do basenu w przeciągu 12 minut 300 *l* wody, drugą w przeciągu 15 minut 225 *l* wody. W jakim czasie zbierze się w basenie 600 *l* wody, gdy woda wpływa jednocześnie obiema rurami?
13. Księgarz, zakupując tuzin egzemplarzy tej samej broszury, otrzymywał 13-ty egzemplarz za darmo. Przesłano mu 650 egzemplarzy po 5 *zł* 40 *gr* za tuzin. Ile tuzinów zamówił? Ile ma zapłacić? Ile zarobi, sprzedając egzemplarz po 60 *gr*?
14. Dwie sztuki płótna mają razem 50 *m*; ile metrów ma każda z nich, jeżeli jedna z nich jest o 16 *m* dłuższa, niż druga?
15. Dwóch robotników zarobiło razem 234 *zł*; ile zarobił każdy z nich, jeśli zarabiali dziennie to samo, a pierwszy pracował 15 dni, drugi zaś 24 dni?
16. Kupiec zmieszał 20 *kg* herbaty po 40 *zł* za 1 *kg*, z 12 *kg* herbaty po 30 *zł* za 1 *kg*; ile zarabiał na 1 *kg*, jeśli sprzedawał 1 *kg* mieszaniny po 38 *zł*?

17. Do sporządzenia konfitur użyto 35 *kg* porzeczek po 85 *gr* za 1 *kg*, 18 *kg* poziomek po 1 *zł* 15 *gr* za 1 *kg* i 27 *kg* cukru po 1 *zł* 50 *gr* za 1 *kg*; ile kosztuje 1 *kg* konfitury, jeśli z 10 *kg* mieszaniny otrzymujemy 6 *kg* konfitury?

18. Ile kosztuje szklanka kawy, jeśli na 5 szklanek użyto 60 *g* kawy po 24 *zł* za 1 *kg* i 10 kawałków cukru, ważących po 5 *g*, przyczem za 1 *kg* cukru płacono 1 *zł* 50 *gr*?

19.

ROZKŁAD JAZDY KOLEJOWEJ

**401 WARSZAWA — DĘBLIN**

| Km | | Warszawa-Dęblin=Dyr. Warszawska<br>Dęblin-Rozwadów=Dyr. Radomska<br>Rozwadów-Lwów=Dyr. Lwowska | | 915<br>1.2 3 | 921<br>1.2.3 | 901<br>1.2.3 | 951<br>2.3 | 913<br>911<br>1.2.3 | 911A<br>1.2.3 | 905<br>1.2 3 | 903<br>1.2.3 | 961<br>1.2.3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | ✕ | | ✕ | | | | | | | | |
| 0 | | **Główna** ✕ | o | 8 20 | — | **15 10** | — | 19 00 | 19 50 | **22 00** | **22 20** | — | — | — |
| 9 | | **WARSZAWA Gdańsk.** ✕ | o | 8 35 | 14 30 | | — | 19 14 | | | | — | — | — |
| * | | **Wschod.** ✕ | o | | | | 15 35 | | | | | 23 50 | — | — |
| 22 | | Wawer | | | | | 15 47 | | | | | 0 05 | — | — |
| 27 | | Radość (p. o.) | | | | | 15 53 | | | | | | — | — |
| 29 | | Miedzeszyn (p. o.) | | | | | 15 57 | | | | | | — | — |
| 30 | | Falenica | | | | | 16 01 | | | | | 0 17 | — | — |
| 32 | | Michalin (p. o.) | | | | | 16 04 | | | | | | — | — |
| 33 | | Józefów (p. o.) | | | | | 16 08 | | | | | | — | — |
| 35 | | Świder (p. o.) | | | | | 16 12 | | | | | | — | — |
| 37 | | **Otwock** | | 9 05 | 15 02 | | 16 19 | 19 44 | | | | 0 29 | — | — |
| 39 | | Śródborów (p. o.) | | 9 10 | 15 07 | | 16 24 | 19 48 | | | | 0 36 | — | — |
| 44 | | Stara Wieś (p. o.) | | 9 17 | 15 15 | | 16 32 | 19 55 | | | | 0 45 | — | — |
| 48 | | Celestynów | | 9 23 | 15 21 | | 16 38 | 20 01 | | | | 0 54 | — | — |
| 56 | | Zabieżki (p. o.) | | 9 32 | 15 30 | | 16 48 | 20 10 | | | | 1 07 | — | — |
| 63 | | Pilawa | | 9 41 | 15 40 | | 16 59 | 20 19 | | | | 1 18 | — | — |
| 70 | | Garwolin | | 9 49 | 15 48 | | 17 08 | 20 26 | | | | 1 29 | — | — |
| 75 | | Rada Tałubska | | 9 57 | 15 56 | | 17 16 | 20 33 | | | | 1 41 | — | — |
| 83 | | Łaskarzew | | 10 06 | 16 06 | | 17 26 | 20 43 | | | | 1 54 | — | — |
| 90 | | Sobolew | | 10 15 | 16 17 | | 17 47 | 20 52 | | | | 2 07 | — | — |
| 102 | | Życzyn | | 10 29 | 16 32 | | 18 02 | 21 07 | | | | 2 31 | — | — |
| 112 | a | **Dęblin** ✕ 339, 404, 516 | p | 10 38 | 16 43 | **16 58** | 18 13 | 2 16 | 21 48 | **23 48** | **0 08** | 2 45 | — | — |
| | | | o | 10 44 | 17 20 | **17 04** | — | 21 35 | 22 00 | **23 53** | **0 13** | 4 25 | — | — |
| | | | | | | | | | 1.VI do 15.IX. Bezp. poc. Warszawa—Worochta od | Bezp. poc. Warszawa Gł.—Zdołbunów | | | | |

*A)* Ile czasu potrzebuje pociąg nr. *a)* 915, *b)* 921, *c)* 951 na przebycie drogi z Otwocka do Dęblina? Jaka jest przeciętna prędkość w 1 min. każdego z tych pociągów?

*B)* Jaka jest przeciętna prędkość w min. pociągu nr. *a)* 901, *b)* 913 na drodze Warszawa-Dęblin?

*C)* Ile czasu przeciętnie potrzebuje pociąg nr. *a)* 901, *b)* 915 na przebycie 10 *km*?

*D)* Porównaj przeciętne prędkości w min. pociągów o nr. 915, 901, 911 A na drodze Warszawa-Dęblin!

20. Rok kalendarzowy może być zwykły, lub przestępny. Rok

zwykły ma 365 dni, przestępny 366 dni. Rok, który nie przypada na koniec wieku, jest przestępny, jeśli liczba lat jest przez 4 podzielna. Np. r. 1884 jest przestępny, zaś r. 1887 nie jest przestępny. Rok, który przypada na koniec wieku, jest wtedy przestępny, jeśli liczba wieków jest przez 4 podzielna. Np. r. 2000 jest przestępny, zaś r. 1900 nie jest przestępny.

*a)* Wypisz lata przestępne od r. 1582 — r. 1610.

*b)* Wypisz lata przestępne od r. 1793 — r. 1824.

*c)* Wypisz lata zwykłe od r. 1996 — r. 2005.

21. Dzień tygodnia, przypadający na datę pomiędzy 1900 r. a 1999 r. np. 5/XII 1933, można tak obliczyć:

*a)* dodajemy do liczby, utworzonej z cyfry jednostek i dziesiątek danego roku, iloraz niedokładny tej liczby przez 4; otrzymamy: $33 + (33 : 4) = 33 + 8 = 41$

*b)* do wyniku dodajemy liczbę dni miesiąca i liczbę z niżej podanej tabeli:

| Miesiąc | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rok zwykły. . . | 1 | 4 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 |
| Rok przestępny | 0 | 3 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 |

Znajdziemy: $41 + 5 + 6 = 52$

*c)* ostatni wynik dzielimy przez 7. Otrzymana reszta wskazuje dzień tygodnia (niedziela ma numer 1).

W naszym przykładzie: $52 : 7 = 7$ i zostaje reszta 3, zatem 5/XII 1933 r. przypada na wtorek.

Uwaga. Dzień tygodnia daty zawartej między 1800 r. a 1899 r. oblicza się w ten sam sposób, należy tylko do ostatniej reszty dodać 2. Np. 6/V 1881.

Mamy: $81 + (81 : 4) = 101$; $101 + 6 + 0 = 107$; $107 : 7 = 15$ i zostaje reszta 2.

Ponieważ $2 + 2 = 4$; więc 6/IV 1881 przypada na środę.

22. Oblicz dzień tygodnia, w którym:

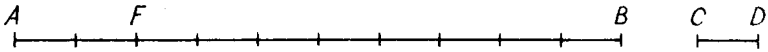
*a)* urodziłeś się; *b)* wybuchło powstanie listopadowe

(29/XI 1830); *c)* zginął ks. Józef Poniatowski w Elsterze (19/X 1813); *d)* wcielono ziemię wileńską do Polski (24/III 1922); *e)* umarł Adam Mickiewicz (26/XI 1855 r.); *f)* urodził się (4/IX 1809) i umarł (3/IV 1849) Juljusz Słowacki; *g)* Polska odzyskała niepodległość (11/XI 1918).

# Plan i skala

## Plan i skala odcinka

Jeżeli zamiast odcinka $AB$ narysujemy odcinek $CD$ dziesięć razy mniejszy (rys. 72), to mówimy, że odcinek $CD$ przedstawia odcinek $AB$ w skali jeden do dziesięciu, co oznaczamy 1 : 10. Odcinek $CD$ nazywamy planem odcinka $AB$ w skali 1 : 10.




Rys. 72.

O odcinku zaś $AB$ dziesięć razy większym od odcinka $CD$ mówimy, że przedstawia odcinek $CD$ w skali dziesięć do jednego (10 : 1).

Przykłady

*a)* Odcinek o długości 1 *dcm* przedstawia odcinek o długości 1 *m* w skali 1 : 10.

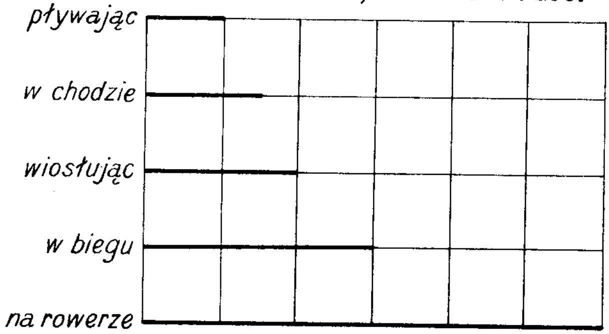
*b)* Odcinek o długości 2 *mm* przedstawia odcinek o długości 1 *cm* w skali 1 : 5.

*c)* Odcinek o długości 1 *cm* przedstawia odcinek o długości 1 *mm* w skali 10 : 1.

*d)* $AF$ przedstawia odcinek $FB$ w skali 1 : 4 (rys. 72).

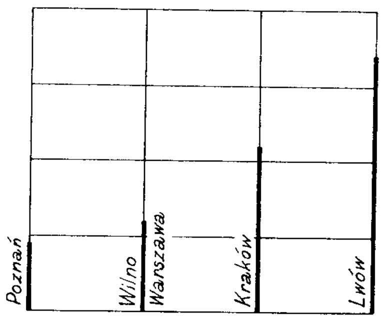
*e)* Człowiek w ciągu jednej sekundy przebywa średnio: chodem 15 *dcm,* biegiem 30 *dcm,* pływając 10 *dcm,* wiosłując 20 *dcm,* na rowerze 60 *dcm.*

Na rys. 73 mamy przedstawione powyższe drogi, jakie człowiek przebywa w 1 sekundzie, w skali 1 : 100.




Rys. 73.

*f)* Wysokości ponad poziom morza najważniejszych miast Polski są następujące (zaokrąglone): Kraków 220 *m*, Lwów 340 *m*, Poznań 90 *m*, Warszawa i Wilno 120 *m*. Na rys. 74 mamy podane powyższe wzniesienia ponad poziom morza w skali 1 : 10 000.




Rys. 74.

**Zadania**

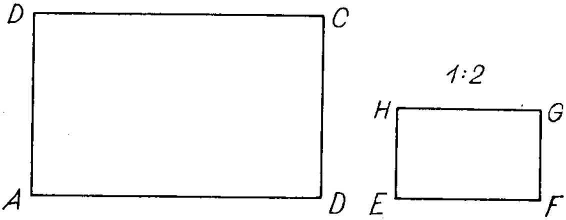
1. Przedstaw:
   *a)* odcinki 4 *dcm*, 6 *dcm*, 7 *dcm* w skali 1 : 10,
   *b)* odcinki 5 *m*, 9 *m*, 3 *m* w skali 1 : 100,
   *c)* odcinki 2 *mm*, 5 *mm*, 4 *mm* w skali 10 : 1,
   *d)* odcinki 1 *km*, 2 *km*, 4 *km* w skali *1* : 20 000!
2. Podaj odcinek, którego plan:

*a)* w skali 1 : 10 000 jest odcinkiem 2 *cm*, 4 *cm*, 15 *cm*,
*b)* w skali 1 : 5000 jest odcinkiem 3 *cm*, 6 *cm*, 9 *cm*,
*c)* w skali 10 : 1 jest odcinkiem 2 *cm*, 5 *cm*, 7 *cm*.

3. Jakiej skali użyjesz, chcąc narysować w zeszycie plan odcinka: *a)* 2 *km*, *b)* 17 *m*, *c)* 3 *dkm*, *d)* 9 *hm*, *e)* 8 *dcm*?
4. Przedstaw odcinkami, w skali 1 : 20 000, wysokości następujących szczytów tatrzańskich: Garłucha 2663 *m*, Świnicy 2306 *m* i Giewontu 1900 *m*!
5. Czterech chłopców ścigało się. W tym samym czasie jeden przebiegł 250 *m*, drugi 230 *m*, trzeci 260 *m*, a czwarty 190 *m*; zaznacz ich drogi odcinkami w skali 1 : 10 000!

## Plan i skala prostokąta

Jeżeli zamiast prostokąta *ABCD* narysujemy inny prostokąt *EFGH*, którego boki są dwa razy mniejsze (rys. 75), to mówimy, że prostokąt *EFGH* jest planem prostokąta *ABCD*



Rys. 75.

w skali jeden do dwóch (1 : 2). O prostokącie zaś *ABCD*, którego boki są dwa razy większe od boków prostokąta *EFGH*, mówimy, że jest planem prostokąta *EFGH* w skali dwa do jednego (2 : 1).

Przykłady:

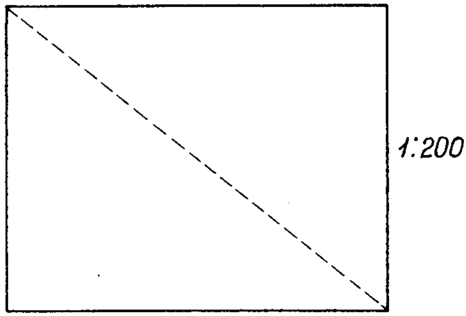
*a)* Kwadrat o boku 1 *dcm* jest planem kwadratu o boku 1 *m* w skali 1 : 10.

*b)* Prostokąt o bokach 3 *cm* i 5 *cm* jest planem prostokąta o bokach 12 *cm* i 20 *cm* w skali 1 : 4.

*c)* Sala szkolna prostokątna o bokach 10 *m* i 8 *m*. Na rys. 76 mamy plan tej sali w skali 1 : 200.

Mając plan możemy odczytywać długości takich odcinków, których zmierzenie wprost byłoby czasami niewygodne.

Chcąc np. zmierzyć odległość przeciwległych rogów sali, podanej w przykładzie poprzednim, mierzymy odległość tych rogów w planie (t. j. długość odcinka kreskowanego). Długość tego odcinka (zmierzona miarką) wynosi około 6 *cm*

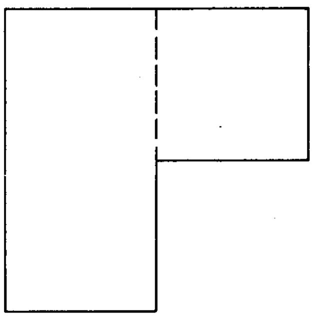



Rys. 76.

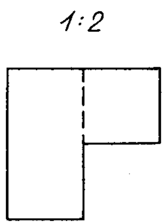
4 *mm*. Ponieważ odcinki na planie są 200 razy krótsze, niż w rzeczywistości, więc odległość rogów wynosi 12 *m* 8 *dcm*.

Jeżeli jakaś figura da się złożyć z samych prostokątów, to plan tej figury w skali (1 : 2) otrzymamy, rysując poszczególne prostokąty w skali (1 : 2) w takiem wzajemnem rozmieszczeniu, jak na danej figurze. Np. rys. 78 przedstawia plan figury podanej na rys. 77 w skali (1 : 2).

Uwaga 1. Czasami w planie nie podajemy skali, tylko rzeczywiste wymiary.



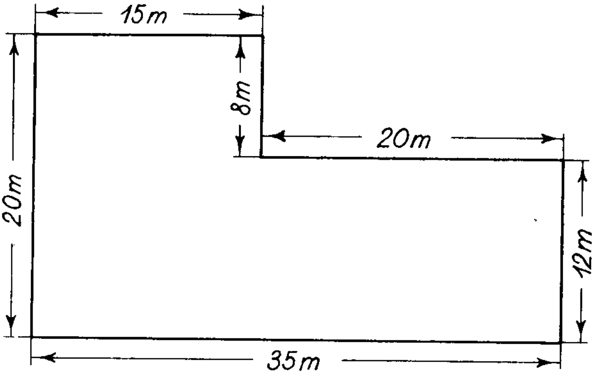
Rys. 77.




Rys. 78.

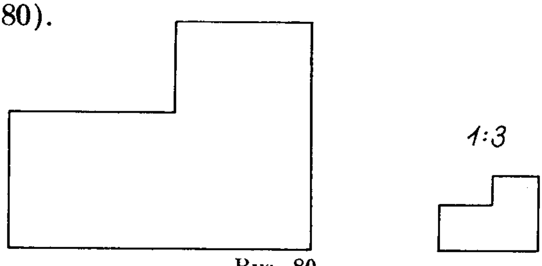
Np. rys. 79 podaje plan parceli i rzeczywiste wymiary.

Uwaga 2. Bardzo często (szczególnie na mapach) podaje się obok skali jakąś jednostkę metryczną linjową w tej skali. Robi się to w tym celu, aby można było zapomocą cyrkla oceniać rozmaite odległości.




Rys. 79.

Obwód: Jeżeli jakaś figura przedstawia drugą figurę w skali np. 1: 3, to obwód figury na planie jest 3 razy mniejszy (rys. 80).




Rys. 80.

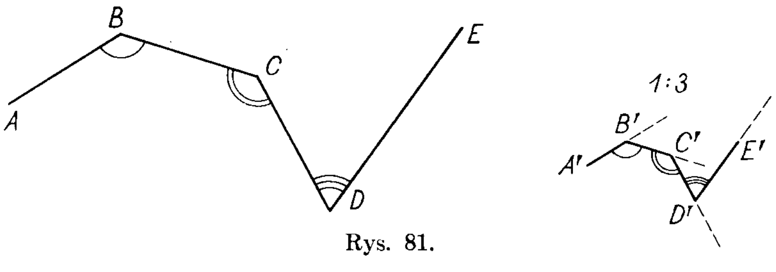
## Zadania

1. Narysuj dowolny prostokąt, a obok plan jego w skali: *a)* 1 : 3, *b)* 1 : 4, *c)* 2 : 1. Porównaj obwód każdego z nich z obwodem obranego prostokąta!
2. Jaki jest obwód kwadratu, którego plan:
   *a)* w skali 1 : 10 jest kwadratem o boku 1 *cm*,
   *b)* w skali 1 : 100 jest kwadratem o boku 1 *dcm*?

3. Jakiej skali użyjesz, chcąc narysować w zeszycie plan: *a)* podłogi pokoju, *b)* arkusza papieru, *c)* kartki z książki? Podaj przykłady liczbowe!
4. Oblicz odległość niesąsiednich wierzchołków kwadratu o boku: *a)* 5 *m*, *b)* 7 *dcm*, *c)* 1 *hm*, *d)* 2 *dkm*, mierząc długość odpowiedniego odcinka planu w skali *a)* 1 : 100, *b)* 1 : 10, *c)* 1 : 500, *d)* 1 : 200!
5. Narysuj plan swego mieszkania w skali 1 : 100 i zaznacz na rysunku rzeczywiste wymiary!
6. Narysuj plan ściany pokoju, na której są okna lub drzwi, w skali 1 : 100. Na rysunku zaznacz okna lub drzwi!
7. Odczytaj z planu miasta odległości rozmaitych punktów, długości ulic i t. p.!
8. Ile *m* ma ogrodzenie ogrodu, którego plan w skali 1 : 1000 jest prostokątem o bokach 3 *cm* i 5 *cm*?
9. Dom o długości 14 *m* 5 *dcm*, a szerokości 8 *m* 2 *dcm* otoczono parkanem; jaki jest obwód parkanu, jeżeli go budowano w odległości 8 *m* od dłuższego boku domu, w odległości zaś 5 *m* 5 *dcm* od krótszego boku? (Wykonaj plan w skali 1 : 100!).

### Rysowanie linji łamanej i wielokąta w skali

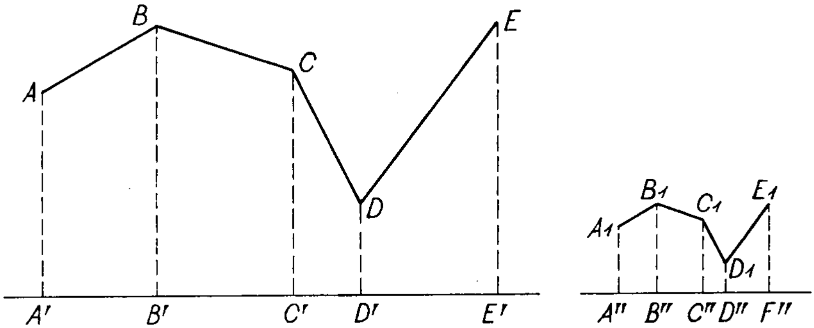
Mamy narysować linję łamaną *ABCDE* w skali 1 : 3. Możemy to zrobić w dwojaki sposób:




Rys. 81.

*a)* Rysujemy odcinek *A' B'* (rys. 81) trzy razy mniejszy od odcinka *AB*. Z punktu *B'* rysujemy następnie odcinek tak, by kąt zakreślony przy *B'* równał się kątowi zakreślonemu przy *B*, i odcinamy na nim odcinek *B' C'*, trzy razy mniejszy od $BC$. Z punktu $C'$ znowu rysujemy odcinek tak, by kąt dwa razy zakreślony przy $C'$ równał się kątowi dwa razy zakreślonemu przy $C$, i odcinamy na nim odcinek $C'D'$ trzy razy mniejszy od $CD$. Postępując tak dalej, otrzymamy linję łamaną $A'B'C'D'E'$, przedstawiającą linję łamaną $ABCDE$ w skali 1 : 3.

*b)* Obieramy dowolny odcinek (rys. 82) i rysujemy:




Rys. 82.

odcinki $AA'$, $BB'$... prostopadłe do obranego odcinka.

Na dowolnie obranym innym odcinku zaznaczamy odcinki $A''B''$, $B''C''$... trzy razy mniejsze od odpowiednich odcinków $A'B'$, $B'C'$... W punktach $A''B''$ rysujemy odcinki prostopadłe $A''A_1$, $B''B_1$... trzy razy mniejsze od odpowiednich odcinków $A'A$, $B'B$...

Linja łamana $A_1B_1C_1D_1E_1$ przedstawia linję łamaną $ABCDE$ w skali 1 : 3.

Uwaga. Jeżeli mamy plan jakiejś figury w skali np. 1 : 10, to należy pamiętać, że w planie wszystkie odcinki są 10 razy pomniejszone, kąty zaś są niezmienione. Kąty zatem możemy odczytywać z planu (mapy) zapomocą kątomierza.

## Zadania

1. Narysuj linję łamaną, a obok plan jej w skali: *a)* 1 : 2; *b)* 1:3; zrób to dwoma sposobami!
2. Narysuj: *a)* trójkąt, *b)* czworokąt, a obok plan jego

w skali 1 : 2, uważając boki za odcinki linji łamanej; zrób to dwoma sposobami!

3. Narysuj pięciokąt, a obok plan jego w skali: *a)* 1 : 2, *b)* 1 : 4, przyjmując jedną z przekątnych za odcinek, na który rzutujemy. (Patrz rys. 68).

# Długości i pola

## Długości

1. Dwa miasta, odległe o 3 *km* 800 *m*, połączone są sześcioma przewodami telegraficznemi; ile metrów drutu zużyto?
2. Na drodze długości 8 *km* 364 *m* zasadzono drzewka w odległości 1 *hm* jedno od drugiego; ile drzewek zasadzono?
3. Ulicę o długości 1 *km* 530 *m* brukują robotnicy, średnio 75 *m* dziennie; ile zostało do wybrukowania po 14 dniach?
4. Pociąg osobowy przebiega średnio 30 *km* 360 *m* na godzinę; ile przebiega średnio na minutę, ile na sekundę?
5. Do pomiaru długości pola użyto taśmy 10-ciometrowej i przyłożono 27 razy. Jaka jest długość pola, jeśli taśma okazała się o 5 *cm* za krótka?
6. Posłaniec, który postanowił na godzinę robić 7 *km* 420 *m*, ma przejść 24 *km* 625 *m*; o której godzinie ma wyjść, aby być u celu o godzinie 2 minut 30 popołudniu?
7. Jeżeli 35 *cm* materji kosztuje 5 *zł* 95 *gr*, to ile kosztuje 3 *m* 1 *dcm* tej materji?
8. Koło u wozu, mające 2 *m* 3 *dcm* 5 *cm* obwodu, obróciło się 2343 razy; jaką drogę wóz przejechał? Ile razy koło obróci się na przestrzeni 10 *km*?
9. Lokomotywa przebiega 45 *km* na godzinę; jej koła mają 6 *m* 3 *dcm* obwodu. Ile obrotów wykonują w minucie?
10. Ktoś przechodząc przestrzeń 100 *m* zrobił 133 kroków; jak długi jest jego krok? Ile kroków zrobi na przestrzeni 500 *m*? Jaką przestrzeń przeszedł, jeśli zrobił 850 kroków?
11. Policz, ile kroków zrobisz na przestrzeni 100 *m*! Jak długi jest twój krok?

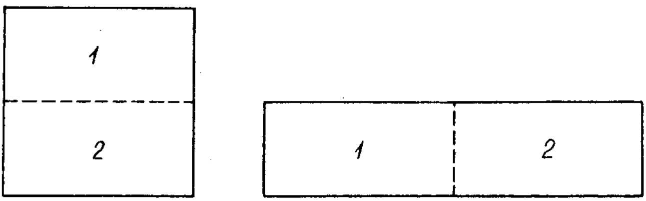
Zmierz przy pomocy kroków: *a)* długość i szerokość sali szkolnej, *b)* długość i szerokość podwórza, *c)* odległość domu od szkoły!

12. Ogród w kształcie prostokąta ma 41 *hm* 3 *m* długości, a 39 *m* szerokości; ile wynosi obwód ogrodu?
13. Otoczono murem teren kształtu prostokąta o bokach 7 *hm* 2 *dkm* i 236 *m*; ile kosztowało postawienie tego muru, jeśli metr kosztował 25 *zł*?
14. Prostokąt o bokach 3 *cm*, 7 *cm* przedstawia plan parceli w skali 1 : 1000; jakie są wymiary i obwód parceli?
15. Trójkąt o bokach 2 *cm*, 3 *cm*, 2 *cm* 5 *mm* przedstawia plan pola w kształcie trójkąta w skali 1 : 1000; oblicz obwód tego pola!
16. Mila geograficzna ma około 7420 *m*; ile mil geograficznych wynosi długość: *a)* Wisły (1092 *km*), *b)* granic Polski (5536 *km*)?
17. Mila morska ma 1852 *m*; ile *km* i *m* wynosi droga okrętu, który przejechał 683 mil morskich?
18. Mila polska ma 8534 *m*; ile mil polskich wynosi długość: *a)* Wisły, *b)* granic Polski?
19. Wiorsta ma około 1067 *m*; jaka jest odległość: *a)* Warszawy od Wilna (430 *km*), *b)* Warszawy od Lwowa (518 *km*), wyrażona w wiorstach?

## Pola

### Porównywanie powierzchni figur

Na rys. 83 kwadrat składa się z dwóch części; z tych części złożono obok prostokąt.

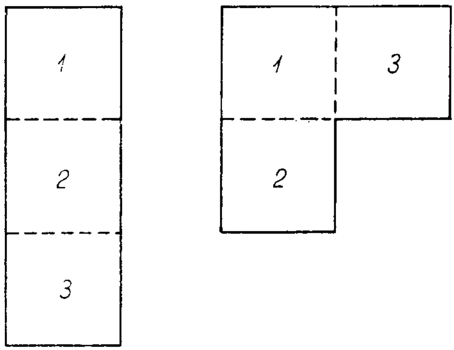



Rys. 83.

O figurach takich mówimy, że mają równą powierzchnię.

Jeśli sporządzimy z papieru figurę I (rys. 84) i rozetniemy wzdłuż poprzerywanych linij, to z otrzymanych części zbudujemy figurę, narysowaną obok. Obie te figury mają zatem równą powierzchnię.

I

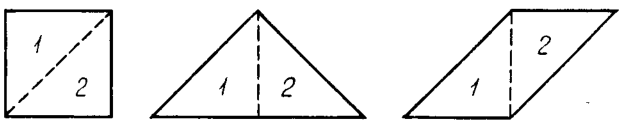



Rys. 84.

Podobnie postępując, przekonamy się, że figury na rys. 85, 86, 87, 88, 89, mają równą powierzchnię.

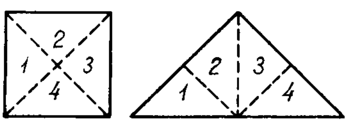
Aby więc przekonać się, czy dwie figury mają równą powierzchnię, staramy się jedną z nich podzielić na takie części z których da się złożyć druga figura.

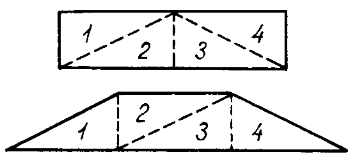
I




Rys. 85.

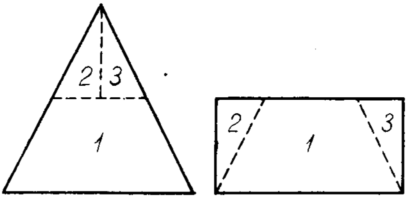
I



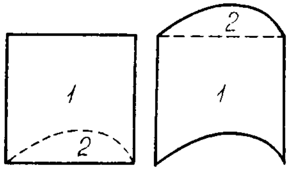




Rys. 86.

Rys. 87.

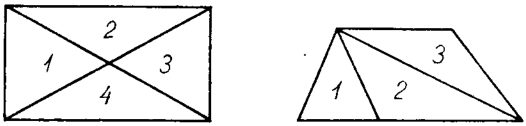



Rys. 88.




Rys. 89.

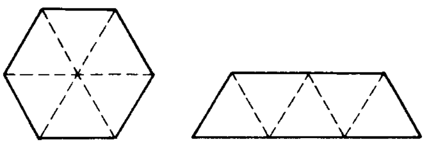
Na rys. 90 widzimy dwie figury. Pierwsza z nich składa się z czterech części, druga zaś tylko z trzech z pośród tych części. Mówimy, że figura pierwsza ma powierzchnię większą od powierzchni figury drugiej.




Rys. 90.

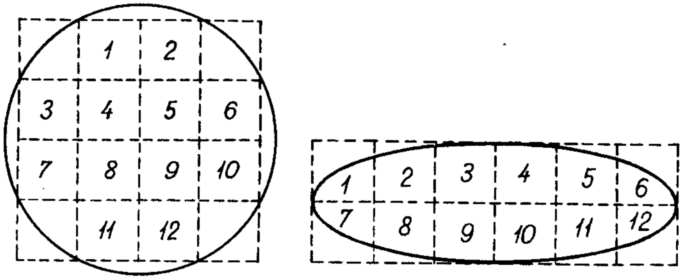
Podobnież na rys. 91 pierwsza figura ma powierzchnię większą od drugiej, ponieważ składa się z sześciu części, z których pięć wystarcza do zbudowania drugiej.

Aby więc przekonać się, czy jedna figura ma większą powierzchnię, niż druga, staramy się pierwszą podzielić na takie części, z których po odrzuceniu jednej lub więcej, da się złożyć druga figura.



Rys. 91.

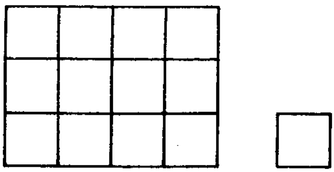
Możemy również przekonać się w inny sposób, że jedna figura ma większą powierzchnię, niż druga. Wycinamy w tym celu z papieru pewną ilość jednakowych małych kwadratów i układamy je obok siebie wewnątrz pierwszej figury, jak na rys. 92. Jeżeli ta sama ilość kwadracików wystarczy do zupełnego pokrycia drugiej figury, to figura pierwsza ma powierzchnię większą od drugiej.




Rys. 92.

### Mierzenie pól

Obierzmy dowolny kwadrat (rys. 93) i nazwijmy go kwadratem jednostkowym. Przy pomocy tego kwadratu będziemy mierzyli pola figur. Przypuśćmy, że chcemy zmie-

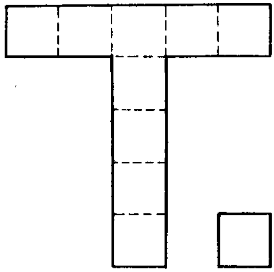


Rys. 93.

rzyć pole prostokąta (rys. 93). Prostokąt nasz da się zbudować z 12 kwadratów jednostkowych. Liczbę 12 nazywamy miarą pola naszego prostokąta, przy obranym kwadracie jednostkowym. Mówimy również, że pole prostokąta wynosi 12 kwadratów jednostkowych.

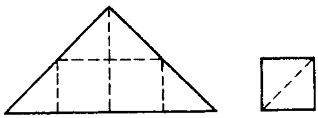
Jeżeli zatem jakaś figura da się zbudować z pewnej liczby kwadratów, równych obranemu kwadratowi jednostkowemu, to liczbę tę nazywamy miarą pola tej figury, przy obranym kwadracie jednostkowym.

Na rys. 94 mamy figurę i obok kwadrat jednostkowy. Ponieważ nasza figura da się zbudować z 9 kwadratów jed-



Rys. 94.

nostkowych, więc miarą pola tej figury jest 9. Aby zbudować daną figurę z kwadratów jednostkowych, należy nieraz kwadraty te odpowiednio porozcinać. Np. pole figury (rys. 95) wynosi 4 kwadraty jednostkowe.



Rys. 95.

**Zadania**

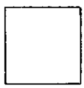
1. Narysuj: *a)* kwadrat i prostokąt, *b)* dwa różne prostokąty, *c)* dwie dowolne figury o różnych polach!
2. Narysuj kwadrat o boku 4 *cm* i prostokąt o bokach 2 *cm* i 8 *cm*! Przekonaj się, że dany kwadrat i prostokąt mają równą powierzchnię!
3. Narysuj dwie różne figury, takie, aby jedną można było podzielić na części, z których dałaby się zbudować druga. Co powiesz o powierzchniach tych figur?
4. Na kratkowanym papierze narysuj dwie figury tak, aby w jednej z nich mieściło się 18 kratek i aby równocześnie ta ilość kratek pokrywała zupełnie drugą figurę. Co powiesz o powierzchniach tych figur?

5. Obierz kwadrat jednostkowy i narysuj kwadrat, którego bok jest: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 5 razy większy od boku kwadratu jednostkowego. Oblicz pole każdego kwadratu!
6. Narysuj prostokąt, którego boki są odpowiednio: *a)* 2 i 3, *b)* 3 i 4, *c)* 2 i 5 razy większe od boku kwadratu jednostkowego. Oblicz pole każdego prostokąta!
7. Narysuj prostokąt, którego miara byłaby: *a)* 6, *b)* 15, *c)* 7, *d)* 10 przy obranym kwadracie jednostkowym!
8. Narysuj kwadrat, którego pole wynosi: *a)* 9, *b)* 16, *c)* 25, *d)* 36 kwadratów jednostkowych!
9. Narysuj 3 różne prostokąty tak, aby pole każdego z nich wynosiło 12 kwadratów jednostkowych!
10. Narysuj figurę (nie prostokąt), której pole przy obranej jednostce ma miarę: *a)* 5, *b)* 9, *c)* 12.
11. Figura dała się rozbić na trzy części, których pola odpowiednio wynoszą 3, 5, 7 kwadratów jednostkowych; jakie jest pole danej figury?

## Miary metryczne kwadratowe

Jednostkami metrycznemi (kwadratowemi) pola są kwadraty o bokach 1 *m*, 1 *dcm*, 1 *cm*, 1 *mm* lub 1 *km*.

Nazywamy je odpowiednio: metrem kwadratowym (1 $m^2$), decymetrem kwadratowym (1 $dcm^2$), centymetrem kwadra-



Rys. 96.

towym (1 $cm^2$), milimetrem kwadratowym (1 $mm^2$), kilometrem kwadratowym (1 $km^2$). Na rys. 96 mamy 1 $cm^2$.

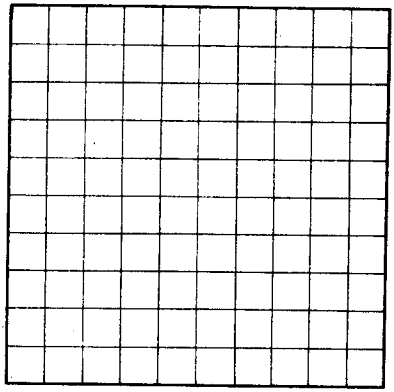
Oprócz tego używa się jeszcze następujących jednostek metrycznych kwadratowych:

Ar, t. j. kwadrat o boku 1 *dkm*, który oznaczamy 1 *a*.

Hektar, t. j. kwadrat o boku 1 *hm*, który oznaczamy 1 *ha*.

Na rys. 97 mamy 1 $dcm^2$, podzielony na 100 kwadracików, o bokach równych 1 $cm$. Zatem:

$$1\ dcm^2 = 100\ cm^2.$$



(1dcm² w skali 1:2)

Rys. 97.

Podobnie postępując, przekonamy się, że:
$1\ m^2 = 100\ dcm^2$; $1\ cm^2 = 100\ mm^2$;
$1\ km^2 = 100\ ha$; $1\ ha = 100\ a$; $1\ a = 100\ m^2$.

**Zadania**

1. Narysuj 1 $dcm^2$, obok 1 $cm^2$, a wreszcie 1 $mm^2$; ile $mm^2$ ma $cm^2$; ile $dcm^2$?
2. Ile *a)* $m^2$; *b)* $dcm^2$ zawiera 1 $a$?
3. Ile *a)* $ha$; *b)* $a$ zawiera 1 $km^2$?
4. W jakiej skali *a)* 1 $cm^2$, *b)* 1 $mm^2$ jest planem 1-go $dcm^2$?
5. Przedstaw 1 $ha$ i 1 $a$ w skali 1 : 1000, podobnie 1 $km^2$ i $ha$ w skali 1 : 10 000!
6. Ile to jest metrów kwadratowych:
   *a)* 2 $ha$; *b)* 1 $ha$ 15 $a$; *c)* 1 $ha$ 15 $m^2$; *d)* 76 $a$ 93 $m^2$?
7. Ile to jest arów: *a)* 1200 $m^2$; *b)* 5 $ha$ 3 $a$; *c)* 87 $ha$ 4 $a$?
8. Ile to jest hektarów, arów i metrów kwadratowych:
   *a)* 1273 $m^2$; *b)* 12 976 $m^2$; *c)* 125 $a$ 18 $m^2$?

9. Ile to jest decymetrów kwadratowych:
*a)* 2 $m^2$; *b)* 10 500 $cm^2$; *c)* 151 $m^2$ 4 $dcm^2$; *d)* 18 500 $cm^2$?
10. Ile to jest milimetrów kwadratowych?
*a)* 1 $dcm^2$ 5 $cm^2$; *b)* 67 $cm^2$ 34 $mm^2$; *c)* 1 $dcm^2$ 78 $mm^2$?
11. Oblicz: *a)* 45 *ha* 7 *a* + 41 *ha* 19 *a*;
*b)* 49 *ha* 93 *a* + 93 *ha* 14 *a*; *c)* 183 *ha* 18 *a* — 141 *ha* 23 *a*;
*d)* 157 $km^2$ 27 *ha* — 98 $km^2$ 23 *ha*!
12. Oblicz: *a)* 4 . 15 $km^2$ 8 *ha*; *b)* 24 . 17 *ha* 19 *a*;
*c)* 87 . 3 $km^2$ 26 *ha*; *d)* 28 *ha* 71 *a* : 3; *e)* 1 $km^2$ 91 *ha* : 14!
13. Ile potrzeba kostek, aby pokryć podłogę o polu 17 $m^2$ 84 $dcm^2$, jeśli jedna kostka pokrywa 4 $dcm^2$?
14. Ktoś za 1 *ha* 35 *a* ziemi zapłacił 6750 *zł*, a sprzedał za 8100 *zł*; ile zarobił na 1 $m^2$?
15. W ogrodzie o powierzchni 1 *ha* 24 *a* przypada przeciętnie na 80 $m^2$ jedno drzewo owocowe; ile drzew owocowych rośnie w tym ogrodzie?

## Pole prostokąta

Niech w prostokącie *ABCD* bok *AB* ma długość 3 *cm*, zaś bok *AD* ma 4 *cm*. Podzielmy bok *AB* na 3 równe części, zaś *AD* na cztery równe części. Każda z tych części ma długość 1 *cm*. Z punktów podziału boku *AD* poprowadźmy równoległe do boku *AB*. Prostokąt rozpadł się na cztery równe paski. Z punktów podziału boku *AB* poprowadzimy teraz równoległe do boku *AD*. Prostokąt rozpadł się na równe kwadraty o boku 1 *cm*. Ponieważ pasków pionowych jest cztery, a każdy z nich składa się z trzech kwadratów, zatem nasz prostokąt zawiera: 4 . 3 = 12 kwadratów.

Jeżeli więc taki kwadrat (który nazwaliśmy centymetrem kwadratowym) przyjmiemy za jednostkę powierzchni, to możemy powiedzieć, że powierzchnia naszego prostokąta wynosi 12 $cm^2$. Liczba 12 jest więc miarą pola naszego prostokąta, przy $cm^2$ jako jednostce pola.

Podobnież prostokąt, którego jeden z boków ma np. 5 *cm*, a drugi 6 *cm*, ma powierzchnię 5 . 6 czyli 30 $cm^2$. Widzimy zatem, że *miara powierzchni prostokąta przy $cm^2$ jako jednostce, równa się iloczynowi liczb, wyrażających w $cm$ długości dwóch sąsiednich boków.*

Gdybyśmy pomnożyli przez siebie liczby wyrażające w $m$ ($km$, lub $dcm$, lub $mm$) długości dwóch sąsiednich boków, to otrzymalibyśmy miarę powierzchni prostokąta przy $m^2$ ($km^2$, lub $dcm^2$, lub $mm^2$) jako jednostce.

Uwaga. Jeżeli długości boków wyrażone są w różnych jednostkach, to należy wyrazić je przy pomocy tej samej jednostki, a następnie otrzymane liczby przez siebie pomnożyć.

Np. Prostokąt, którego jeden bok ma 2 $m$, a drugi 6 $dcm$, ma pole 20 . 6 czyli 120 $dcm^2$.

### Pole kwadratu

Aby obliczyć, ile centymetrów kwadratowych zawiera pole kwadratu, którego długość boku jest podana w centymetrach, należy liczbę, wyrażającą tę długość, pomnożyć przez siebie samą, czyli podnieść do kwadratu. Więc np. kwadrat, którego bok ma 7 $cm$ zawiera 7 . 7 $cm^2$ czyli 49 $cm^2$.

### Zadania

1. Oblicz pole prostokąta o bokach *a)* 4 $cm$ i 6 $cm$; *b)* 5 $m$ i 8 $m$; *c)* 4 $dcm$ i 6 $dcm$ 8 $cm$; *d)* 12 $m$ i 26 $m$ (w $a$ i $m^2$); *e)* 140 $km$ i 144 $km$ (w $km^2$).
2. Oblicz pole kwadratu o boku *a)* 2 $cm$, 3 $cm$, 4 $cm$, 5 $cm$, 6 $cm$, 7 $cm$, 8 $cm$, 9 $cm$; *b)* 2 $dcm$ 5 $cm$; *c)* 3 $m$ 5 $dcm$!
3. Pole kwadratu wynosi: *a)* 4 $cm^2$; *b)* 9 $m^2$; *c)* 16 $mm^2$; *d)* 25 $dcm^2$; *e)* 36 $km^2$; oblicz obwód!
4. Pole prostokąta wynosi: *a)* 48 $cm^2$; *b)* 108 $dcm^2$; *c)* 207 $m^2$; *d)* 8 $a$; jeden zaś z boków *a)* 6 $cm$; *b)* 9 $dcm$; *c)* 15 $m$; *d)* 20 $m$; oblicz obwód prostokąta!
5. Obwód kwadratu wynosi: *a)* 36 $m$; *b)* 6 $m$ 8 $dcm$; ile wynosi jego powierzchnia?
6. Obwód prostokąta wynosi: *a)* 30 $cm$; *b)* 17 $cm$; a jeden z boków *a)* 7 $cm$; *b)* 4 $cm$ 5 $mm$; ile wynosi pole?

7. Europa ma 9 887 000 $km^2$, Azja 44 219 000 $km^2$, Afryka 29 825 000 $km^2$, Ameryka 39 595 000 $km^2$, Australja 8 963 000 $km^2$, lądy podbiegunowe 18 210 000 $km^2$; oblicz powierzchnię całkowitą lądu!
8. Powierzchnia Niemiec wynosi 404 000 $km^2$, Francji zaś jest o 147 000 $km^2$ większa; ile $km^2$ ma powierzchnia Francji?
9. W Polsce na 1000 $km^2$ powierzchni przypada przeciętnie 44 *km* 600 *m* kolei; ile *km* kolei jest w całej Polsce (powierzchnia Polski 388 000 $km^2$)?
10. Zaludnienie Polski wynosi 32 120 000 mieszkańców. Jaka jest gęstość zaludnienia w Polsce t. j. ile mieszkańców wypada średnio na 1 $km^2$?
11. Wieśniak zapłacił 2500 *zł* za pole w kształcie prostokąta o podstawie 145 *m*, płacąc 20 *gr* za 1 $m^2$; jaka jest powierzchnia i wysokość tego prostokąta?
12. Narysuj plan jednego ara, a w nim (w rogu) plan prostokąta o bokach 2 *m* i 5 *m* w skali 1 : 100. Porównaj powierzchnię tego prostokąta z powierzchnią 1 *a*!
13. Willa ma 10 *m* długości, a 6 *m* szerokości i otoczona jest ogrodzeniem w kształcie prostokąta; boki tego prostokąta odległe są od ścian willi o 9 *m*. Oblicz długość ogrodzenia i powierzchnię niezabudowaną! Wykonaj plan w odpowiedniej skali!
14. Z 12 kwadratów o boku 8 *mm* ułóż prostokąt *a)* o najdłuższym obwodzie, *b)* o najkrótszym obwodzie!
15. *a)* Ogród ma kształt prostokąta o bokach 30 *m* i 50 *m*. Środkiem, równolegle do dłuższego boku biegnie ścieżka o szerokości 1 *m* 5 *dcm*. Przy końcu ścieżki jest altana 2 *m* 5 *dcm* szeroka i tyleż głęboka. Narysuj plan tego ogrodu w skali 1 : 500 i oblicz uprawną powierzchnię ogrodu!

    X *b)* Ogród miał 40 *m* długości, 25 *m* szerokości. Poprowadzono w nim jedną ścieżkę o szerokości 1 *m* 5 *dcm*, równoległą do dłuższego boku, i drugą ścieżkę o szerokości 1 *m* 2 *dcm*, równoległą do krótszego boku.

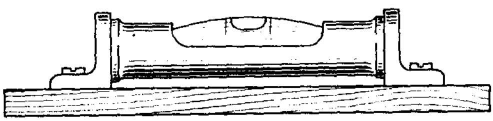
Jaką powierzchnię ma uprawna część ogrodu?

16. Niemetrycznemi jednostkami pola są: mórg i włóka. Mórg ma około 56 arów, włóka zaś 30 morgów. Ile arów, ile $m^2$ ma włóka? Przekonaj się, że pole prostokąta o bokach 70 *m* i 80 *m* wynosi 1 mórg. Narysuj ten prostokąt!
17. Przekonaj się, że pole prostokąta o bokach 40 *dkm* i 42 *dkm* wynosi 1 włókę! Narysuj ten prostokąt w skali 1 : 10 000!
18. Wyraź w morgach pole prostokąta o bokach 140 *m* i 80 *m*!
19. Wieśniak kupił 3 morgi za 8400 *zł*. Po ile płacił 1 $m^2$?
20. Wiedząc, że mórg daje 10 *hl* zboża, a 1 *hl* zboża waży 75 *kg*, oblicz ciężar zboża, zebranego z pola prostokątnego o wymiarach 1505 *m* i 992 *m*! (Mórg równa się 56 *a*).

# Objętości

## Poziom i pion

P o z i o m. Powierzchnia wody w naczyniu ustawia się p o z i o m o. Podobnie poziomo ustawia się powierzchnia wody w stawie, gdy staw jest spokojny. Zwyczajnie podłoga, sufit, powierzchnia stołu bywa poziomą.



Rys. 98.

Do badania, czy powierzchnia jest ustawiona poziomo, służy przyrząd, zwany libellą lub śródwagą (rys. 98).

P i o n. Nitka, obciążona ciężarkiem, tak zwany pion, ustawia się p i o n o w o. Zazwyczaj pionowo ustawione są słupy telegraficzne, krawędzie pokoju (idące od podłogi do sufitu), niektóre rynny kamienicy i t. p.

Jeśli wzdłuż pionu ustawimy kartkę papieru, to mówimy, że kartka jest pionowa, lub, że jest ustawiona pionowo. Mury kamienicy, ściany pokoju są ustawione pionowo.

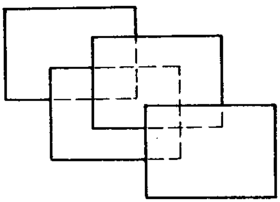
### Zadania

1. Ustaw pionowo przy pomocy pionu: *a)* kartkę papieru, *b)* książkę.
2. Zbadaj, czy ściany pokoju są pionowe!
3. Wbij, przy pomocy pionu patyk pionowo do ziemi!
4. Sprawdź, że kamyk wolno puszczony spada wzdłuż pionu!

### Powierzchnie płaskie i krzywe

Takie powierzchnie, jak kartka papieru, powierzchnia stołu, powierzchnia wody spokojnej w stawie i t. p., nazywamy powierzchniami płaskiemi.

Powierzchnię płaską możemy przedłużać na wszystkie strony. Kładąc np. na kartce papieru drugą kartkę tak, by



Rys. 99.

częściowo nakrywały się, (rys. 99), przedłużamy powierzchnię płaską, przedstawioną przez pierwszą kartkę.

Powierzchnia płaska ma tę własność, że każdy odcinek, mający z nią dwa punkty wspólne, leży całkowicie na niej lub na jej przedłużeniu. Takie powierzchnie, jak powierzchnia kuli, powierzchnia rur i t. p. nazywamy powierzchniami krzywemi.

Dwie powierzchnie płaskie nazywamy równoległemi, jeżeli się nie przetną, jakkolwiekbyśmy je przedłużali.

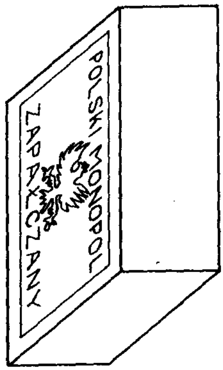
Np. Przeciwległe ściany pokoju są równoległe, dwie płaszczyzny poziome np. podłoga i sufit są równoległe i t. p.

### Zadania

1. Podaj kilka przykładów powierzchni płaskich!
2. Jak zapomocą brzegu linijki można przekonać się, czy powierzchnia jest płaską, czy też nie?
3. Podaj kilka przykładów powierzchni krzywych!
4. Wskaż do każdej ściany pokoju drugą do niej równoległą!

## Prostopadłościan

Na rys. 100 mamy pudełko zapałek. Bryły kształtu pudełka zapałek nazywamy *prostopadłościanami*.

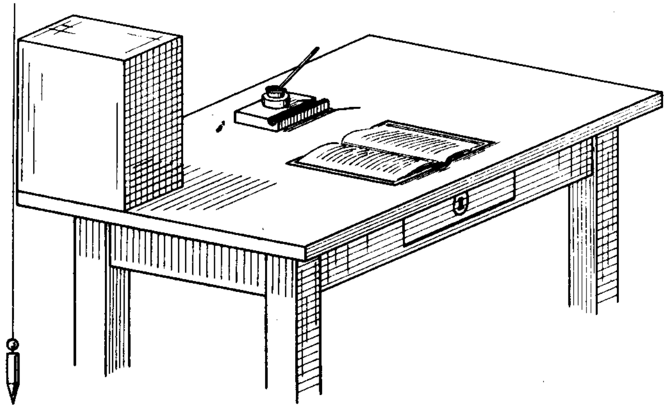



Rys. 100.

Pokoje, skrzynie, pudełka mają zazwyczaj kształt prostopadłościanu. Prostopadłościan ograniczony jest sześcioma ścianami. Dwie przyległe ściany stykają się wzdłuż *krawędzi* prostopadłościanu. W *wierzchołkach* (rogach) schodzą się trzy krawędzie.

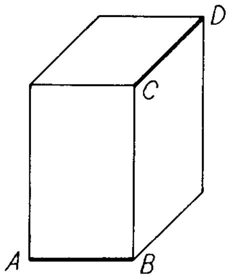
Postawmy pudełko zapałek na kartce papieru i oprowadźmy ołówek dokoła jego podstawy. Otrzymamy *prostokąt*. Wytnijmy ten prostokąt i przyłóżmy go do przeciwległej ściany pudełka zapałek. Przekonamy się, że prostokąt nasz będzie do tej ściany przystawał. Widzimy zatem, że prostopadłościan ograniczony jest sześcioma prostokątami, z których co dwa przeciwległe są sobie równe.

Jeśli jedną ze ścian prostopadłościanu ustawimy poziomo (np. postawimy prostopadłościan na stole) (rys. 101), to przeciwległa ściana ustawi się poziomo, a krawędzie łączące



Rys. 101.

te ściany ustawią się pionowo. Przeciwległe więc ściany prostopadłościanu są równoległe; krawędzie, łączące przeciwległe ściany, są równoległe. Krawędzie, nie wychodzące z jednego wierzchołka i nie leżące na jednej ścianie (np. *AB* i *CD* rys. 102), nie są równoległe.




Rys. 102.

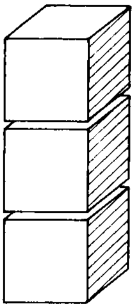
Przez takie krawędzie nie przeprowadzimy powierzchni płaskiej. Mówimy, że krawędzie takie są w i c h r o w a t e.

P r o s t o p a d ł o ś c i a n k w a d r a t o w y. Jeżeli w prostopadłościanie jedna ze ścian jest kwadratem, wówczas i przeciwległa jest kwadratem. Prostopadłościan taki nazywamy kwadratowym.

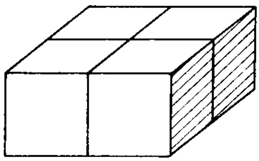
Pokoje o podłodze kwadratowej, belki do budowy, pudełka o dnie kwadratowem i t. p. mają kształt prostopadłościanu kwadratowego.

Sześcian. Jeżeli wszystkie ściany prostopadłościanu są kwadratami, wówczas prostopadłościan taki nazywamy sześcianem. Sześcian ma wszystkie krawędzie i ściany równe. Kształt sześcianu ma kostka do gry.

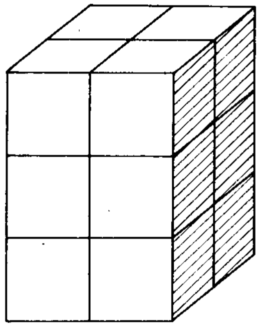
Ustawmy kilka równych sześcianów na sobie jak rys. 103, a otrzymamy prostopadłościan kwadratowy.



Rys. 103.



Rys. 104.



Rys. 105.

Prostopadłościan kwadratowy otrzymamy, ustawiając kilka równych sześcianów obok siebie tak, aby podstawami wypełniały większy kwadrat (rys. 104).

Prostopadłościan kwadratowy otrzymamy również, ustawiając kilka takich warstw na sobie (rys. 105).

## Zadania

1. Podaj przedmioty w kształcie prostopadłościanu!
2. *a)* Ile ścian prostopadłościanu zbiega się w jednym wierzchołku? *b)* Ile krawędzi zbiega się w jednym wierzchołku? *c)* Na ilu ścianach leży każda krawędź? Wyjaśnij odpowiedzi na modelu!

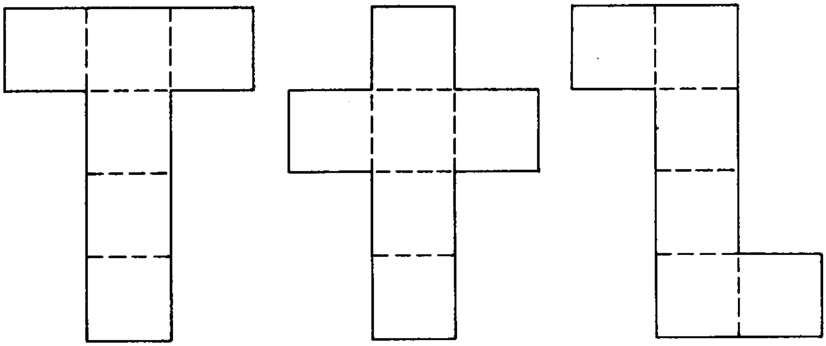
3. Ile ścian, krawędzi, wierzchołków ma prostopadłościan?
4. Z iloma ścianami każda ściana prostopadłościanu sąsiaduje, a z iloma nie sąsiaduje?
5. Ustaw jedną ścianę prostopadłościanu poziomo; ile wówczas będzie krawędzi pionowych, a ile poziomych?
6. Obierz krawędź prostopadłościanu i wskaż wszystkie krawędzie: *a)* do niej równoległe, *b)* z nią wichrowate, *c)* z nią przecinające się.
7. Jak przekonasz się, że przeciwległe ściany prostopadłościanu są sobie równe?
8. Czy można zbudować prostopadłościan tak, aby w nim tylko jedna ściana była kwadratem?
9. Dwa prostopadłościany mają dwie ściany odpowiednio równe; zlep je wzdłuż tych ścian. Jaką bryłę otrzymasz?
10. Wskaż w prostopadłościanie kwadratowym ściany, które są prostokątami; czy wszystkie są między sobą równe?
11. Ustaw przed sobą sześcian i wskaż ścianę przednią, tylną, prawą, lewą, górną i dolną.
12. Rozwiąż zadania 2 *a)*, *b)*, *c)*, 3, 4, 5 i 6 odnośnie do sześcianu!
13. Zbuduj z 8 równych sześcianów nowy sześcian!
14. Ile prostopadłościanów kwadratowych można zbudować: *a)* z 2, *b)* z 8, *c)* z 9 równych sześcianów?

### Siatki

Postawmy sześcian na kartce papieru i oprowadźmy ołówek dookoła jego podstawy. Otrzymamy kwadrat. Wyrysujmy w ten sposób sześć takich kwadratów, tworzących figurę w kształcie litery T (rys. 106).

Figura ta nazywa się siatką sześcianu.

Wykrójmy tę figurę z papieru i przegnijmy ją według linij kropkowanych. Nałóżmy ją następnie na sześcian tak, aby jej kwadraty przylegały do odpowiednich ścian sześcianu. Zdejmijmy ją teraz z sześcianu i ustawmy znowu w ten sam sposób (obok sześcianu), w jaki była ułożona na sześcia-

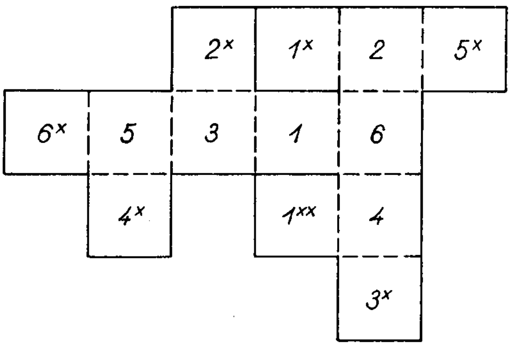


Rys. 106.

nie. Używając do sklejenia przylegających ścian papieru gumowego, utworzymy w ten sposób nowy sześcian.

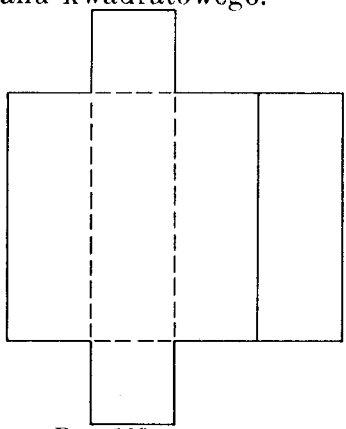
Inną siatkę sześcianu możemy otrzymać, układając kwadraty np. tak, aby utworzyły figurę kształtu krzyża, albo też figurę kształtu litery Z (rys. 106).

Możemy otrzymać sześcian papierowy **b e z  k l e j e n i a**. W tym celu rysujemy 13 kwadratów, tworzących figurę na rys. 107. Figurę tę wycinamy wzdłuż linij zakreślonych



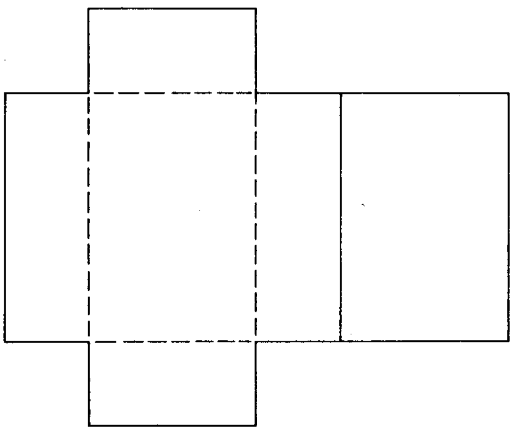

Rys. 107.

grubo, zginamy zaś według linij kropkowanych. Następnie spód kwadratu 1* przykładamy do wierzchu kwadratu 1 tak, aby się nakryły, a dalej spód kwadratu 1** przykładamy do wierzchu kwadratu 1*. W dalszym ciągu spód kwadratu 2* przykładamy do wierzchu kwadratu 2, podobnież spód kwadratu 3* do wierzchu kwadratu 3, spód kwadratu 4* do wierzchu kwadratu 4, spód kwadratu 5* do wierzchu kwadratu 5 i wreszcie spód kwadratu 6* do wierzchu kwadratu 6. (Wierzchem kwadratu nazywamy tę stronę, na której napisana jest cyfra, spodem zaś stronę odwrotną). Sześcian nasz będzie się teraz trzymał bez klejenia. Na rys. 108 mamy siatkę prostopadłościanu kwadratowego.



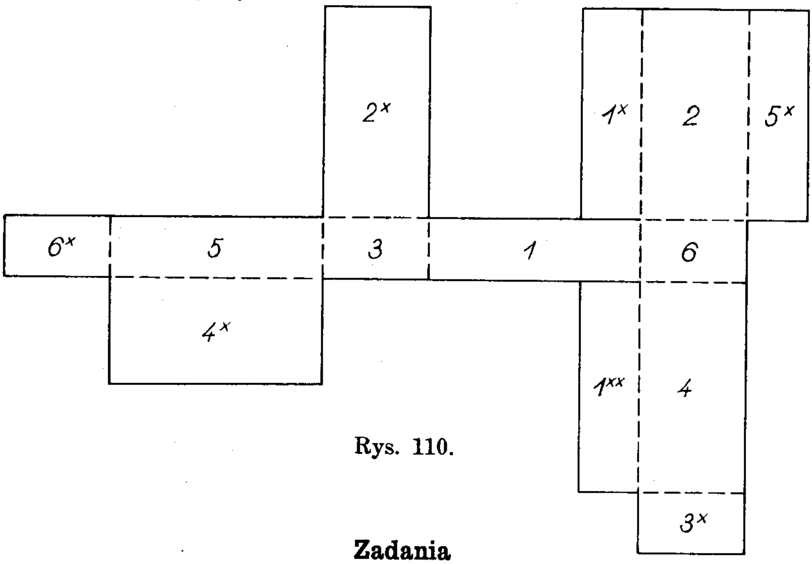
Rys. 108.

Na rys. 109 mamy siatkę prostopadłościanu.



Rys. 109.

Wykrójmy ją z papieru i przegnijmy wzdłuż linij kropkowanych. Sklejając teraz odpowiednie krawędzie papierem gumowym, otrzymamy prostopadłościan. Chcąc otrzymać bryłę tę bez klejenia, posługujemy się figurą na rys. 110, postępując, jak przy sześcianie.




Rys. 110.

**Zadania**

1. Narysuj siatkę sześcianu o krawędzi 3 *cm*!
2. Narysuj siatkę prostopadłościanu o krawędziach 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*!
3. Narysuj siatkę prostopadłościanu kwadratowego o krawędziach 2 *cm*, 2 *cm*, 5 *cm*!
4. Narysuj plan siatki pokoju w skali 1:100!
5. Opierając się na zadaniu poprzedniem, zaznacz na planie siatki drzwi i okna, wykonując odpowiednie pomiary!

## Powierzchnia prostopadłościanu

Całkowitą powierzchnię prostopadłościanu otrzymujemy, dodając do siebie pola poszczególnych ścian.

Całkowita powierzchnia prostopadłościanu równa się zatem polu siatki prostopadłościanu.

Aby obliczyć całkowitą powierzchnię prostopadłościanu, wystarczy znać długości trzech jego krawędzi, schodzących się w jednym wierzchołku. Długości te nazywamy w y m i a r a m i prostopadłościanu, lub odpowiednio szerokością, wysokością i długością prostopadłościanu.

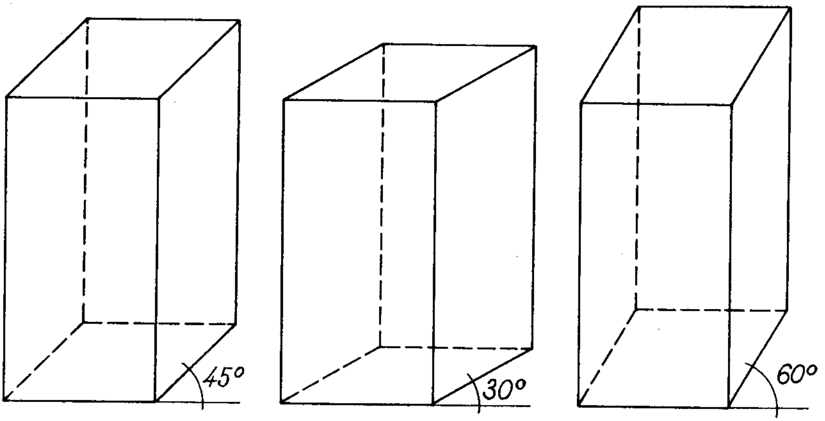
### Zadania

1. Zbuduj prostopadłościan o wymiarach 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm* i jego siatkę, a następnie oblicz całkowitą powierzchnię tego prostopadłościanu!
2. Oblicz powierzchnię prostopadłościanu o wymiarach: *a)* 2 *m*, 3 *m*, 4 *m* 5 *dcm*; *b)* 1 *dcm* 5 *cm*, 2 *dcm*, 3 *dcm* 5 *cm*!
3. Oblicz powierzchnię sześcianu o krawędzi: *a)* 2 *cm*; *b)* 7 *dcm*; *c)* 5 *dcm* 2 *cm*; *d)* 3 *m* 7 *dcm*!
4. Oblicz krawędź sześcianu, którego powierzchnia równa się: *a)* 54 $cm^2$; *b)* 6 *a*; *c)* 7 *a* 26 $m^2$?
5. Oblicz powierzchnię bryły, jaką otrzymasz, kładąc na sześcianie o krawędzi 5 *cm*, sześcian o krawędzi 2 *cm*!
6. Pomalowano pokój o wymiarach: 6 *m*, 5 *m*, 4 *m*, płacąc 6 *zł* za pomalowanie 1 $m^2$. Ile kosztowało pomalowanie pokoju (bez podłogi)?
7. Na polakierowanie 1 $m^2$ ściany potrzeba 200 *g* farby. Ile farby potrzeba na polakierowanie ścian 3 pokoi, które są 4 *m* wysokie, a z których pierwszy jest 6 *m* długi, 5 *m* szeroki, drugi 4 *m* 5 *dcm* długi 3 *m* 7 *dcm* szeroki, a trzeci 5 *m* 2 *dcm* długi 4 *m* 8 *dcm* szeroki?
8. Prostopadłościan, którego podstawa jest kwadratem o boku 1 *cm* 4 *mm*, zanurzono pionowo w wodzie do wysokości 8 *dcm* 5 *cm*; oblicz powierzchnię zwilżonej części prostopadłościanu!
9. Jeden prostopadłościan ma krawędzie 2 *m*, 4 *m*, 5 *m*, drugiego zaś krawędzie są dwa razy większe; ile razy powierzchnia drugiego jest większa od powierzchni pierwszego? Podaj inne przykłady liczbowe!

10. Pomierz krawędzie pudełka zapałek i oblicz jego powierzchnię! Oblicz w ten sposób powierzchnię rozmaitych pudełek, kształtu prostopadłościanu!
11. Oblicz całkowitą powierzchnię sali szkolnej (i t. p.)!

### Kreślenie prostopadłościanu

Postaw przed sobą na stole prostopadłościan. Rysunek takiego prostopadłościanu otrzymujemy w następujący sposób (rys. 111):




Rys. 111.

Rysujemy najpierw ścianę przednią w naturalnej wielkości. Z wierzchołków narysowanej ściany kreślimy odcinki równolegle, tworzące z bokiem poziomym kąt (zaznaczony na rys. 111 a) 45° [możemy też kreślić pod innym kątem np. 30° lub 60°, jak wskazuje rys. 111 *b), c)*]. Odcinki te (mające przedstawiać krawędzie, łączące ścianę przednią ze ścianą tylną) rysujemy w skróceniu, zazwyczaj dwa razy mniejsze niż w rzeczywistości.

Łącząc odpowiednio końce narysowanych odcinków, otrzymujemy ścianę tylną również naturalnej wielkości. Rysunek będzie bardziej wyrazisty, jeżeli krawędzie niewidoczne, narysujemy przerywane, pozostałe zaś pogrubimy. Na rys. 111 prostopadłościan ma wymiary 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*.

Widzimy, że dwie równoległe krawędzie prostopadłościanu są i na rysunku równoległe.

Krawędzie ściany przedniej i tylnej są na rysunku naturalnej wielkości. Krawędzie łączące te ściany są skrócone.

Taki rysunek prostopadłościanu możemy otrzymać w następujący sposób:

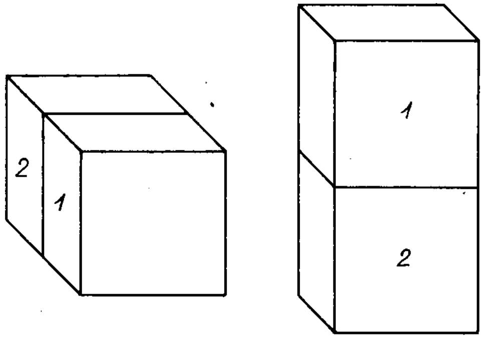
Przyłóżmy do ściany pokoju szkielet prostopadłościanu (z drutu). Jeżeli teraz umieścimy dość daleko i w odpowiedniej wysokości lampę, to cień tego prostopadłościanu na ścianie przedstawi się jak rys. 111.

### Zadania

1. Narysuj prostopadłościan o wymiarach:
   *a)* 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm*; *b)* 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*; *c)* 2,5 *cm*, 5 *cm*, 7 *cm*, obierając dowolną ścianę jako przednią. Krawędzie łączące ścianę przednią z tylną skróć na rysunku 2 razy, kąt zaś między krawędziami podstawy (na rysunku) przyjmij: *a)* 30°, *b)* 45°, *c)* 60°.
2. Narysuj prostopadłościan o wymiarach:
   *a)* 8 *m*, 10 *m*, 16 *m*, w skali 1 : 200;
   *b)* 45 *m*, 55 *m*, 90 *m*, w skali 1 : 1000
   jak w zadaniu (1). Zaznacz na rysunku przekątną *a)* ściany przedniej, *b)* ściany bocznej, *c)* ściany dolnej.
3. Narysuj sześcian o krawędzi: *a)* 5 *cm*, *b)* 4 *cm*, *c)* 8 *cm*, jak w zadaniu (1); zaznacz na rysunku *a)* przekątną ściany tylnej, *b)* przekątną łączącą 2 wierzchołki nie leżące w jednej ścianie sześcianu.
4. Narysuj prostopadłościan kwadratowy o wymiarach: *a)* 3 *cm*, 3 *cm*, 5 *cm*; *b)* 2 *cm*, 2 *cm*, $3\frac{1}{2}$ *cm*; *c)* 5 *cm*, 5 *cm*, 8 *cm*; obierz jako podstawę raz kwadrat, raz prostokąt!

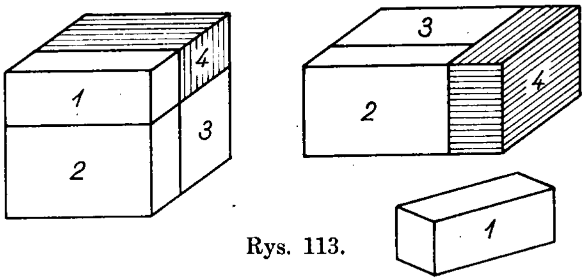
## Porównywanie objętości brył

Jeżeli mamy dwie bryły i jedna z nich da się podzielić na części, z których można zrobić drugą, to te bryły mają równą objętość. Np. sześcian przedstawiony na rys. 112 ma tę samą objętość, co stojący obok prostopadłościan, gdyż daje się podzielić na części 1 i 2, z których można złożyć prostopadłościan.




Rys. 112.

Jeżeli jedna bryła da się podzielić na części, z których, po odrzuceniu jednej lub więcej, da się złożyć druga bryła, to ta pierwsza ma objętość większą od drugiej (rys. 113).



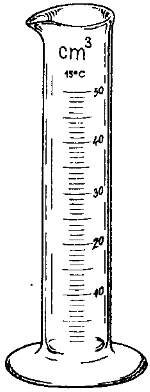

Rys. 113.

Jeżeli dwie bryły zrobione są z tego samego jednolitego materjału (np. sześcian żelazny i kula żelazna), to ważeniem możemy porównać ich objętości. Jeżeli mają równy ciężar, to mają równe objętości, w przeciwnym razie ta bryła ma objętość większą, która jest cięższą.

U w a g a. Naczynia porównujemy zazwyczaj wedle ich pojemności, np. wedle ilości wody, którą mogą pomieścić. Aby przekonać się, które naczynie ma większą pojemność, przelewamy wodę z jednego naczynia w drugie.

## Menzurka

Do mierzenia objętości niewielkich przedmiotów służy t. zw. menzurka (rys. 114). Jest to naczynie szklane, kształtu

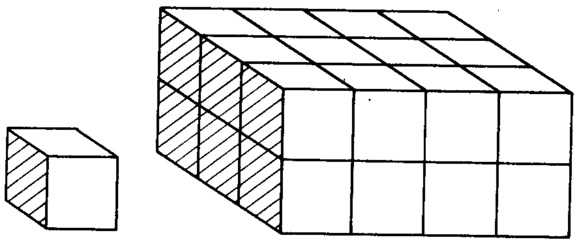



Rys. 114.

walca, z podziałką, podającą liczbę $cm^3$, jaką posiada płyn w naczyniu nalany do danej kreski. Menzurkę możemy otrzymać, jeżeli będziemy wlewali do naczynia pokolei po 1 $cm^3$ wody i zaznaczali za każdym razem kreskę oraz liczbę, wskazującą, ile $cm^3$ wody już wlaliśmy. Chcąc zmierzyć objętość przedmiotu zapomocą menzurki, wlewamy do niej wody, np. do kreski, która wskazuje 27 $cm^3$. Następnie wrzucamy przedmiot, którego objętość chcemy zmierzyć. Przypuśćmy, że poziom wody podniósł się do kreski 45 $cm^3$. Wówczas objętość przedmiotu wynosi: $45\ cm^3 - 27\ cm^3 = 18\ cm^3$.

## Mierzenie objętości

Obierzmy dowolny sześcian i nazwijmy go sześcianem jednostkowym. Jeżeli teraz mamy prostopadłościan (rys. 115), dający się podzielić np. na 24 sześcianów, z których każdy jest równy sześcianowi jednostkowemu, to liczbę 24 nazywamy m i a r ą objętości danego prostopadłościanu przy danym sześcianie jako jednostce objętości.



Rys. 115.

Mówimy również, że objętość prostopadłościanu wynosi 24 sześcianów jednostkowych.

### Zadania

1. Weź dwie szklanki i porównaj ich pojemność!
2. Zbuduj sześcian jednostkowy i prostopadłościan, którego objętość wynosi *a)* 6, *b)* 8 sześcianów jednostkowych!
3. Zbuduj sześcian jednostkowy i drugi sześcian, którego objętość wynosi *a)* 8, *b)* 27 sześcianów jednostkowych!
4. Zbuduj sześcian jednostkowy i cztery różne prostopadłościany tak, aby objętość każdego z nich wynosiła 12 sześcianów jednostkowych!
5. Z beczki spuszczono wino do flaszek i napełniono 300 flaszek. W każdej flaszce mieszczą się 3 szklanki wina; jaka jest pojemność beczki, jeśli szklankę przyjmiemy za jednostkę pojemności?
6. Naczynie możemy napełnić, wlewając 5 dzbanków wody, albo też 60 szklanek wody; jaka jest pojemność dzbanka przy szklance jako jednostce pojemności?

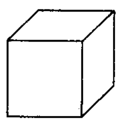
### Miary metryczne sześcienne

Jednostkami metrycznemi objętości czyli sześciennemi są sześciany o bokach 1 *m*, 1 *dcm*, 1 *cm* lub 1 *mm*.

Nazywamy je odpowiednio: metrem sześciennym (1 $m^3$), decymetrem sześciennym (1 $dcm^3$), centymetrem sześciennym (1 $cm^3$), milimetrem sześciennym (1 $mm^3$).

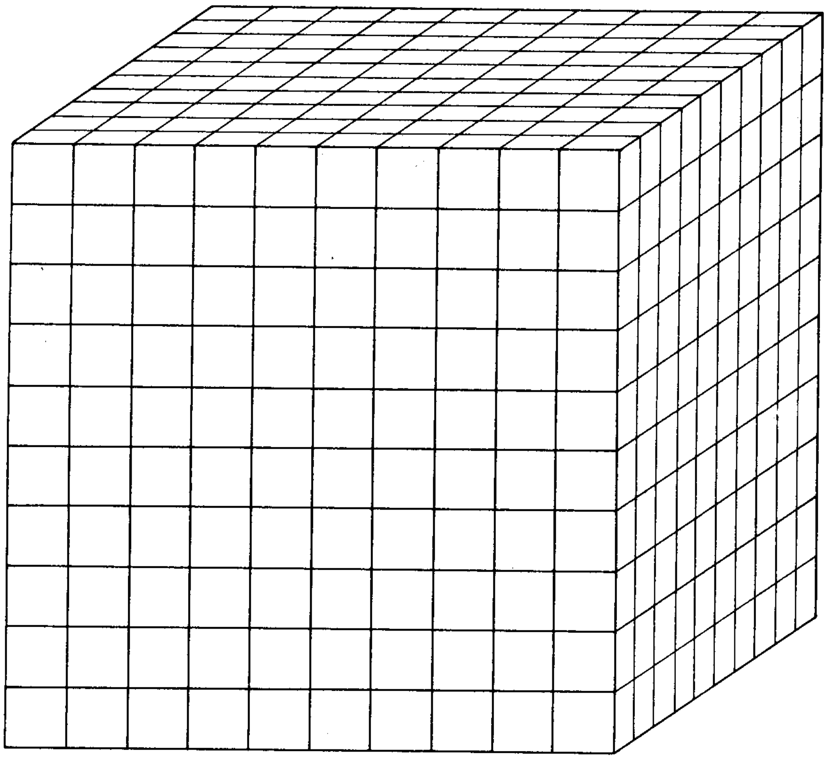
Rys. 116 przedstawia 1 $cm^3$.

Ustawiając na decymetrze kwadratowym (rys. 117) 100 sześcianików, z których każdy jest centymetrem sześciennym,



Rys. 116.

otrzymamy warstwę w formie deseczki kwadratowej o grubości 1 *cm*. Ustawiając 10 takich warstw na sobie, otrzymamy sześcian o boku 1 *dcm*.



Rys. 117.

Ponieważ sześcian nasz (1 $dcm^3$) składa się z 10 warstw, a każda warstwa zawiera 100 $cm^3$, zatem: 1 $dcm^3 = 1000$ $cm^3$.

Podobnie można przekonać się, że:

$$1\ m^3 = 1000\ dcm^3; \quad 1\ cm^3 = 1000\ mm^3.$$

### Zadania

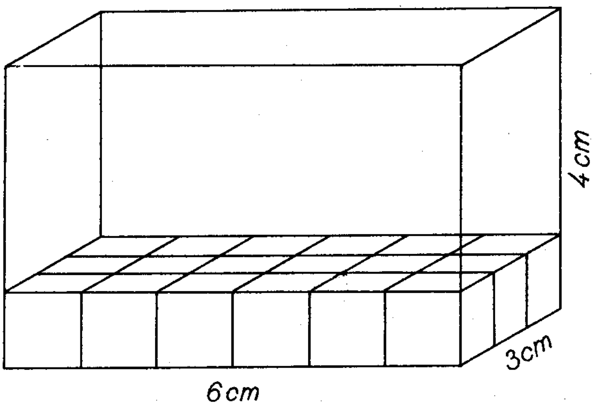
1. Ile $mm^3$ zawartych jest w $dcm^3$; ile $cm^3$ w $dcm^3$; ile $dcm^3$ *w* $m^3$?
2. Ile to jest centymetrów sześciennych: *a)* 1 $dcm^3$ 27 $cm^3$, *b)* 17 $dcm^3$ 5 $cm^3$, *c)* 9 $dcm^3$ 231 $cm^3$?
3. Ile to jest milimetrów sześciennych: *a)* 3 $cm^3$ 17 $mm^3$, *b)* 5 $cm^3$ 136 $mm^3$, *c)* 13 $cm^3$ 23 $mm^3$?

4. Jak się nazywa jednostka tysiąc razy mniejsza od: *a)* $m^2$, *b)* $dcm^3$, *c)* $cm^3$?
5. Ile to jest $m^3$ i $dcm^3$: *a)* 1236 $dcm^3$, *b)* 15 346 $dcm^3$?
6. Oblicz: *a)* 2 $m^3$ 36 $dcm^3$ + 9 $m^3$ 752 $dcm^3$;
   *b)* 15 $m^3$ 236 $dcm^3$ — 7 $m^3$ 342 $dcm^3$;
   *c)* 25 × 3 $m^3$ 264 $dcm^3$;
   *d)* 15 $m^3$ 345 $dcm$ : 18;
   *e)* 19 $m^3$ 416 $dcm^3$ : 3 $m^3$ 236 $dcm^3$!
7. Handlarz drzewa zakupił 246 $m^3$ sosny po 32 *zł* 40 *gr* za 1 $m^3$, 709 $m^3$ olchy po 31 *zł* 35 *gr* za 1 $m^3$, 343 $m^3$ brzozy po 30 *zł* 75 *gr* za 1 $m^3$. Ile zapłacił za zakupione drzewo?
8. Zbiornik zawiera 2 $m^3$ wody; ile zostanie wody po 30 dniach, jeśli dziennie zużywa się 60 $dcm^3$ wody?
9. Podwórze w kształcie prostokąta o bokach 32 *m* i 46 *m* posypano piaskiem; ile piasku wypada na 1 $m^2$, jeśli rozsypano 22 $m^3$ 80 $dcm^3$ piasku?
10. Lód, powstały z 1 $dcm^3$ wody ma 1 $dcm^3$ 95 $cm^3$ objętości; jaką objętość ma lód, powstały z 1 $m^3$ wody?
11. Próżne naczynie o pojemności 4 $dcm^3$ waży 2 *kg*; ile waży napełnione wodą?
12. Litr oliwy waży 915 *g*; ile waży flaszka oliwy, jeśli flaszka waży 250 *g*, a ma pojemność 75 *cl*?
13. Zbiornik zawiera 50 *hl* wody; jaki jest ciężar wody?
14. *a)* Próżna flaszka waży 16 *dkg*, napełniona zaś wodą 66 *dkg*; jaka jest pojemność flaszki?
    *b)* Flaszka napełniona alkoholem waży 3 *kg* 200 *g*, próżna zaś 1 *kg* 200 *g*. Jaka jest pojemność flaszki, jeśli 1 $cm^3$ alkoholu waży 800 *mg*?
15. Beczułka pełna wody waży 42 kg. Jeśli do niej nalejemy tylko 10 *l* wody, to waży 22 *kg*; jaki jest ciężar i jaka pojemność beczułki?

### Objętość prostopadłościanu

Niech będzie dany prostopadłościan np. o wymiarach 3 *cm*, 4 *cm* i 6 *cm*. Podstawą tego prostopadłościanu jest prostokąt o wymiarach 6 *cm* i 3 *cm*, a więc o polu $6 \times 3$ t. j. 18 $cm^2$. Podstawę tę możemy zatem podzielić na 18 kwadratów, z których każdy jest centymetrem kwadratowym.

Na każdym z tych kwadratów ustawiamy jeden centymetr sześcienny, co da nam razem 18 centymetrów sześciennych, tworzących dolną w a r s t w ę (rys. 118). Aby otrzy-



Rys. 118.

mać cały prostopadłościan, musimy takich warstw ułożyć na sobie cztery, gdyż wysokość jednej warstwy jest 1 *cm*, całego zaś prostopadłościanu 4 *cm*.

Widzimy stąd, że prostopadłościan nasz składa się z $4 \times 18$ t. j. 72 sześcianów, z których każdy jest równy centymetrowi sześciennemu. Zatem objętość naszego prostopadłościanu wynosi: $4 \times 6 \times 3 = 4 \times 18$ t. j. 72 $cm^3$. Aby więc obliczyć, ile $cm^3$ ma objętość prostopadłościanu, należy:

a l b o u t w o ż y ć i l o c z y n t r z e c h l i c z b, w y r a ż a j ą c y c h w *cm* j e g o w y m i a r y,

a l b o p o m n o ż y ć l i c z b ę, w y r a ż a j ą c ą w $cm^2$ p o l e p o d s t a w y, p r z e z l i c z b ę, w y r a ż a j ą c ą w *cm* w y s o k o ś ć.

O b j ę t o ś ć s z e ś c i a n u. W sześcianie wszystkie trzy wymiary są sobie równe. Zatem objętość sześcianu o krawędzi np. 2 *cm* wynosi 2 . 2 . 2 t. j. $2^3$ $cm^3 = 8$ $cm^3$.

Widzimy stąd, że objętość sześcianu otrzymujemy, podnosząc do trzeciej potęgi liczbę, wyrażającą długość krawędzi.

### Zadania

1. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach: *a)* 3 *cm*, 5 *cm* i 6 *cm*, *b)* 4 *dcm*, 5 *dcm* i 8 *dcm*, *c)* 5 *m*, 7 *m* i 9 *m*!
2. Oblicz objętość sześcianu o boku: *a)* 2 *cm*, *b)* 3 *dcm*, *c)* 4 *m*, *d)* 5 *mm*, *e)* 6 *cm*, *f)* 7 *dcm*, *g)* 8 *m*, *h)* 11 *dcm*!
3. Ile wynosi bok sześcianu, który ma objętość: *a)* 8 $cm^3$, *b)* 27 $mm^3$, *c)* 64 $dcm^3$, *d)* 125 $m^3$, *e)* 216 $cm^3$, *f)* 343 $dcm^3$?
4. Klasa, w której znajduje się 31 uczniów i profesor, ma wymiary 12 *m*, 8 *m* i 4 *m*; ile $m^3$ powietrza wypada przeciętnie na 1 osobę?
5. Podstawa pudełka jest prostokątem o bokach 8 *cm* i 6 *cm*, wysokość zaś pudełka wynosi 9 *cm*. Jeśli w tem pudełku ułożysz warstwami 240 kostek o boku 1 *cm*, to jak wysoko one będą sięgać? Ile kostek jeszcze potrzeba, aby napełnić pudełko?
6. Zbuduj prostopadłościan, którego objętość wynosi 6 $cm^3$!
7. Podaj wymiary trzech różnych prostopadłościanów, z których każdy ma objętość 12 $cm^3$!
8. Wykopano dół 5 *m* szeroki, 6 *m* długi i 2 *m* głęboki; ile należało zapłacić, jeśli wykopanie 1 $m^3$ ziemi kosztuje 2 *zł*?
9. Korytarz o szerokości 4 *m*, a wysokości 5 *m* przedzielono murem grubości 3 *dcm*. W murze tym wybito drzwi o szerokości 1 *m*, a wysokości 2 *m*; jaka jest objętość muru?
10. Zmierz wymiary pudełka zapałek i oblicz jego objętość w $mm^3$! Policz następnie zapałki w pełnem pudełku i oblicz z tego przeciętną objętość zapałki!
11. Naczynie ma kształt prostopadłościanu, którego podstawa jest kwadratem o boku 5 *cm*. Do naczynia wlano wody, a następnie rzucono kamień, przyczem powierzchnia wody podniosła się o 2 *cm*; oblicz objętość kamienia!
12. Kasa żelazna w kształcie prostopadłościanu ma wymiary

zewnętrzne 1 *m*, 6 *dcm*, 1 *m* 4 *dcm*, grubość zaś ścian wynosi 1 *dcm*; jaka jest pojemność kasy?

13. Ile wynosi różnica objętości pomiędzy sześcianem o krawędzi 1 *m*, a sześcianem o krawędzi 9 *dcm*?
14. Blok kamienny o objętości 4 $m^3$ 200 $dcm^3$ kosztował 240 *zł*; ile należało zapłacić za blok o wymiarach 8 *dcm*, 7 *dcm*, 2 *m* 5 *dcm*?
15. Podwórze o wymiarach 30 *m* i 40 *m* posypano piaskiem na wysokość 3 *cm*; ile piasku użyto?
16. Podczas burzy zebrało się w basenie deszczówki na wysokość 9 *cm*; ile wody spadło na 1 $dcm^2$, 1 $m^2$, 1 *ha*?
17. Jeden $dcm^3$ dębu waży 950 *g*. Oblicz ciężar drzewa, otrzymanego z lasu, zawierającego 5000 sztuk, jeśli przyjmiemy, że przeciętnie jedno drzewo ma 8 $m^3$ objętości?
18. Metr sześcienny ziemi waży 1700 *kg*. Ile waży ziemia, którą wydobyto pod fundamenta, głębokie na 3 *m*, długie na 24 *m*, a szerokie na 12 *m*?
19. Płyta marmurowa o wymiarach 1 *m* 5 *dcm*, 8 *dcm*, 3 *cm* waży 108 *kg*. Ile waży 1 $cm^3$ tej płyty?
20. Ile waży płytka żelazna o wymiarach 1 *cm*, 1 *dcm* 5 *cm*, 1 *dcm* 1 *cm*, jeśli 1 $cm^3$ żelaza waży 7 *g* 800 *mg*?
21. Jeden $cm^3$ złota waży 19 *g*. Ile kosztuje sztaba o wymiarach 1 *dcm*, 2 *cm*, 3 *cm*, jeśli 1 *g* złota kosztuje 6 *zł*?
22. 15 *dcl* rtęci waży 20 *kg* 40 *dkg*; ile waży 1 *ml*? Jaka musi być pojemność naczynia, aby pomieściło 61 *kg* 20 *dkg*?
23. Metr sześcienny powietrza waży 1 *kg* 293 *g*; ile waży powietrze w sali o wymiarach 8 *m*, 6 *m*, 5 *m*?

# Własności liczb całkowitych

## Podzielnik

Liczba 4 mieści się w 8 bez reszty. Liczbę 4 nazywamy podzielnikiem liczby 8. Podobnie 6 jest podzielnikiem 12, bo 6 mieści się w 12 bez reszty. Podzielnikiem więc jakiejś liczby nazywamy liczbę, która mieści się w niej bez reszty. Np. podzielnikami liczby 6 są: 1, 2, 3, 6.

Każda liczba jest wielokrotnością każdego swojego podzielnika. Np. 2 jest podzielnikiem 12; 12 jest wielokrotnością 2.

### Zadania

1. Podaj z pomiędzy liczb od 1 do 50 te, które posiadają: *a)* podzielnik 2, *b)* podzielnik 3, *c)* podzielnik 5, *d)* podzielnik 2 oraz podzielnik 3, *e)* podzielnik 6.
2. Podaj z pomiędzy liczb od 20 do 70 te, które posiadają: *a)* podzielnik 7, *b)* podzielnik 9.
3. Podaj kolejno wielokrotności: *a)* liczby 2, nieprzewyższające 30, *b)* liczby 5 nieprzewyższające 100.
4. Podaj podzielniki liczb: 12, 32, 60, 96, 125.
5. Podaj kilka wielokrotności liczb: 25, 40, 15, 60.
6. Przekonaj się, że suma liczb: *a)* od 1 do 4 jest wielokrotnością 5, *b)* od 1 do 6 jest wielokrotnością 7, *c)* od 1 do 10 jest wielokrotnością 11, *d)* od 1 do 12 jest wielokrotnością 13, *e)* od 1 do 16 jest wielokrotnością 17.
7. Napisz wszystkie podzielniki liczb: 1, 2, 3... aż do 30.
8. Napisz dowolną liczbę trzycyfrową, następnie liczbę, otrzymaną z pierwszej przez wypisanie cyfr w odwrotnym porządku; odejm od większej z nich mniejszą i przekonaj się, że różnica ma podzielniki 9 i 11.
9. Dodaj wszystkie podzielniki liczby: *a)* 6, *b)* 28; z wyjątkiem samej liczby; co zauważysz?
10. Podaj wspólne podzielniki liczb: *a)* 4 i 6, *b)* 9 i 12, *c)* 16 i 18, *d)* 12 i 24, *e)* 36 i 54, *f)* 64 i 72. Wypisz wszystkie podzielniki każdej liczby danej pary i porównaj!
11. Podaj wspólne podzielniki następujących liczb: *a)* 2, 4 i 6; *b)* 6, 9 i 15; *c)* 12, 18 i 24; *d)* 15, 30, 45 i 60.
12. Podaj wszystkie podzielniki liczby 24 oraz wszystkie podzielniki liczby 30. Które z pośród nich są wspólnemi podzielnikami obu liczb? Który z tych wspólnych podzielników jest największy?

To samo zadanie dla następujących par liczb: *a)* 18 i 27, *b)* 14 i 21, *c)* 14 i 35, *d)* 18 i 33, *e)* 7 i 25.

13. *a)* Ojciec rozdzielił równo pomiędzy synów najpierw 15 zeszytów, a następnie 20 piór; ilu miał synów?
*b)* Ojciec rozdzielił równo pomiędzy dzieci najpierw 15 ołówków czarnych, następnie 12 niebieskich, a wkońcu 6 czerwonych; ile miał dzieci?

## Cechy podzielności

Poznamy sposoby łatwego wyznaczania reszty przy dzieleniu danej liczby przez 2, 3, 4, 5, 9, 10 i 25. Wskutek tego będziemy mogli szybko przekonać się, czy dana liczba jest przez którąś z wypisanych liczb podzielna, czy też nie.

### Cecha podzielności przez 10

Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś liczby, np. 957 przez 10. W tym celu zauważmy, że liczba 957 zawiera 95 dziesiątek i 7 jednostek. Wynika stąd, że 10 w 957 mieści się 95 razy i zostaje reszta 7. Zatem cyfra jednostek danej liczby przedstawia nam resztę z dzielenia przez 10. Liczba jest więc podzielna przez 10, jeżeli cyfra jednostek jest 0.

Np. 690 jest przez 10 podzielne.

Podobnie liczba, utworzona z dwóch, trzech i t. d. ostatnich cyfr, przedstawia nam odpowiednio resztę dzielenia danej liczby przez 100, 1000 i t. d.

Np. 1857 podzielone przez 100 daje resztę 57;
38 246, podzielone przez 1000, daje resztę 246.

Zatem liczba jest podzielna przez 100 (1000 i t. d.), jeżeli dwie (trzy i t. d.) ostatnie cyfry są zerami.

Np. 1500 jest podzielne przez 100;
3000, 25 000 są podzielne przez 1000.

### Zadania

1. Które z liczb: 310, 15 200, 22 300, 18 000, 1 240 000, 657 140 są podzielne przez *a)* 10, *b)* 100, *c)* 1000?
2. Nie obliczając ilorazu, podaj reszty dzielenia przez: *a)* 10, *b)* 100, *c)* 1000 następujących liczb: 2583, 64 219, 576 290, 1 263 856.

### Cecha podzielności przez 2

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś liczby, np. 689 przez 2. Gdybyśmy chcieli 689 groszy rozdzielić równo pomiędzy 2 osoby, to podział ten moglibyśmy uskutecznić, rozdzielając równo najpierw każdą setkę, następnie każdą dziesiątkę. Zostałaby nam wkońcu do rozdzielenia liczba groszy wyrażona ostatnią cyfrą t. j. 9 groszy.

Resztę więc dzielenia przez 2 otrzymamy, dzieląc cyfrę jednostek przez 2. U nas reszta dzielenia przez 2 jest 1.

Zatem: l i c z b a  j e s t  p o d z i e l n a  p r z e z  2, jeżeli c y f r a  j e d n o s t e k  j e s t  p r z e z  2  p o d z i e l n a.

Np. liczby 628, 540 są podzielne przez 2.

### Zadania

1. Które z liczb: 108, 615, 8649, 15 964 są podzielne przez 2?
2. Ile wynosi reszta dzielenia liczby nieparzystej przez 2?
3. Przekonaj się, że suma dwóch liczb nieparzystych jest przez 2 podzielna!

### Cecha podzielności przez 5

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś liczby, np. 748 przez 5. Możemy 748 groszy rozdzielić równo pomiędzy 5 osób w następujący sposób: rozdzielamy najpierw równo każdą setkę, a następnie każdą dziesiątkę.

Zostanie nam wkońcu do rozdzielenia liczba groszy, wyrażona ostatnią cyfrą, t. j. 8 groszy. Resztę więc dzielenia przez 5 otrzymamy, dzieląc cyfrę jednostek przez 5. W naszym wypadku reszta dzielenia jest 3.

Zatem: **liczba jest podzielna przez 5, jeżeli cyfra jednostek jest przez 5 podzielna.** (t. j. jeżeli cyfra jednostek jest 0 lub 5).

Np. liczby 785, 350 są podzielne przez 5.

### Zadania

1. Które z liczb: 6215, 8610, 23 481, 64 565, 124 500 są przez 5 podzielne?
2. Ile wynosi reszta dzielenia przez 5, następujących liczb: 421, 720, 893?
3. Jaka musi być ostatnia cyfra liczby podzielnej przez 2 i przez 5?

### Cecha podzielności przez 4 i 25

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś liczby, np. 2618 przez 4. Podobnie jak poprzednio, rozdzielmy 2618 groszy równo pomiędzy 4 osoby, rozdzielając najpierw każdy tysiąc, a następnie każdą setkę. Pozostanie nam wkońcu liczba groszy, wyrażona przez ostatnie dwie cyfry, t. j. 18 groszy. Resztę więc dzielenia przez 4 otrzymamy, dzieląc przez 4 liczbę utworzoną przez dwie ostatnie cyfry. W naszym wypadku reszta dzielenia jest 2.

Zatem: **liczba jest podzielna przez 4, jeżeli dwie ostatnie jej cyfry tworzą liczbę, podzielną przez 4.**

Np. liczby: 8116, 728 są podzielne przez 4.

Podobnie postępując przekonamy się, że resztę dzielenia przez 25 otrzymamy, dzieląc przez 25 liczbę utworzoną z dwóch ostatnich cyfr. Np. reszta dzielenia liczby 832 przez 25 wynosi tyle, ile reszta z dzielenia 32 : 25 t. j. 7. Zatem: **liczba jest przez 25 podzielna, jeśli dwie ostatnie jej cyfry tworzą liczbę, podzielną przez 25.**

### Zadania

1. Które z liczb: 68, 100, 216, 322. 584, 764, 974, 1236 są podzielne przez 4?
2. Podaj reszty dzielenia przez 4, następujących liczb: 154, 225, 531, 1203, 2642!
3. Jakie mogą być 2 ostatnie cyfry liczby, podzielnej przez 4 i 5?
4. Które z liczb: 80, 175, 180, 750, 900, są podzielne przez 25?
5. Podaj reszty dzielenia przez 25 następujących liczb: 130, 154, 202, 179, 364, 2181.
6. Jakie mogą być 2 ostatnie cyfry liczby, podzielnej przez 25?

### Cecha podzielności przez 3 i 9

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć resztę dzielenia jakiejś iczby, np. 854 przez 3. W tym celu rozdzielamy 854 *gr* równo pomiędzy 3 osoby. Podział rozpoczynamy od setek. Ponieważ 100 *gr* = 99 *gr* + 1 *gr*, to, rozdzielając równo setkę pomiędzy 3 osoby, otrzymamy resztę 1 *gr*. Rozdzielając w ten sposób 800 *gr*, otrzymamy resztę 8 *gr*. Podobnie rozdzielamy dziesiątki. Ponieważ 10 *gr* = 9 *gr* + 1 *gr*, więc, rozdzielając równo 50 *gr*, otrzymamy resztę 5 *gr*.

Uwzględniając jeszcze 4 *gr*, wyrażone ostatnią cyfrą danej liczby, mamy wkońcu do podziału: 8 *gr* + 5 *gr* + 4 *gr*.

Widzimy stąd, że, aby wyznaczyć resztę dzielenia przez 3, należy sumę cyfr danej liczby podzielić przez 3; reszta, otrzymana przy tem dzieleniu, jest szukaną resztą. W naszym wypadku reszta wynosi 2.

Zatem: liczba jest podzielna przez 3, jeżeli suma jej cyfr jest przez 3 podzielna.

Np. liczby 750, 1245 są podzielne przez 3.

Postępując podobnie jak wyżej, przekonamy się, że resztę dzielenia przez 9 otrzymamy, dzieląc sumę cyfr przez 9.

Np. reszta dzielenia liczby 862 przez 9 jest 7, ponieważ $(8+6+2):9=1$, reszta 7.

Zatem: liczba jest podzielna przez 9, jeżeli suma jej cyfr jest przez 9 podzielna.

Np. liczby 342 i 1845 są podzielne przez 9.

### Zadania

1. Które z liczb: 135, 234, 525, 486, 672, 1236, 4527, 52 572 są podzielne: *a)* przez 3, *b)* przez 9?
2. Zastąp w następujących liczbach gwiazdkę cyfrą tak, by otrzymać liczbę podzielną przez 9: *a)* 1*1; *b)* 1*5; *c)* 21*; *d)* *43; *e)* 53*; *f)* 45*; *g)* 2*7. Na ile sposobów można rozwiązać zadania *f)* i *g)*?
3. Jakie liczby jednocyfrowe należy dodać do liczb 682, 583, 1252, 2684, aby otrzymać liczby podzielne przez 9?
4. Każda liczba, otrzymana z liczby podzielnej przez 3 (9), przez dowolne przestawienie cyfr, jest też przez 3 (9) podzielna; dlaczego?
5. Dlaczego każda liczba trzycyfrowa, której wszystkie cyfry są te same, jest podzielna przez 3? Wypisz te z pośród nich, które są podzielne przez 9!

## Liczby pierwsze

Liczbą pierwszą (lub prostą) nazywamy liczbę większą od jedności, która oprócz jedności i samej siebie nie posiada innych podzielników.

Np. liczby 2, 3, 5, 7, 11, 13, są to liczby pierwsze.

Natomiast liczba 6 nie jest liczbą pierwszą, bo oprócz podzielników 1 i 6 posiada podzielnik 3.

Liczby, które nie są pierwsze (z wyjątkiem 1), nazywamy liczbami złożonemi.

Liczby pierwsze, mniejsze od 100, są następujące:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

### Zadania

1. Wypisz liczby pierwsze, zawarte między 100 a 110!
2. Która z liczb parzystych jest pierwsza?
3. Przedstaw (przynajmniej w jeden sposób) każdą liczbę parzystą od 4 do 30, jako sumę dwóch liczb pierwszych!
4. Przedstaw 24 jako sumę dwóch liczb pierwszych; na ile sposobów możesz to uczynić, jeśli nie zwracasz uwagi na porządek składników?
5. Przedstaw 2 jako różnicę dwóch liczb pierwszych mniejszych od 40; na ile sposobów możesz to uczynić?
6. Przedstaw 4 jako różnicę dwóch liczb pierwszych mniejszych od 40; na ile sposobów możesz to uczynić?
7. Czy wśród liczb pierwszych, mniejszych od 100, są takie, których różnica wynosi *a)* 6, *b)* 8, *c)* 10, *d)* 12?
8. Ile liczb pierwszych jest między 15 a 40?
9. Nauczyciel rozdzielił równo 17 piór pomiędzy uczniów w klasie; ilu było uczniów?

### Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Przypuśćmy, że chcemy jakąś liczbę np. 30, przedstawić w postaci iloczynu samych liczb pierwszych. W tym celu dzielimy daną liczbę pokolei przez liczby pierwsze 2, 3, 5... tak długo, aż znajdziemy liczbę pierwszą, która jest podzielnikiem danej liczby. W naszym wypadku tą liczbą pierwszą jest 2.

Mamy więc: $30 = 2 \times 15.$

Z liczbą 15 postępujemy znowu jak poprzednio z liczbą 30 i przekonujemy się, że 3 jest podzielnikiem liczby 15.

A więc: $15 = 3 \times 5.$

5 jest już liczbą pierwszą. Mamy zatem:

$$30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5.$$

Przedstawiliśmy więc liczbę 30 w postaci iloczynu samych liczb pierwszych.

Rachunek powyższy zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

Po prawej stronie kreski pionowej piszemy liczby pierwsze, a po lewej stronie ilorazy, otrzymane z dzielenia przez odpowiednie liczby pierwsze.

Przedstawienie danej liczby w postaci iloczynu samych liczb pierwszych nazywamy **rozkładem** danej liczby na czynniki pierwsze!

Przykład: Rozłożyć liczbę 3960 na czynniki pierwsze!

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$3960 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11.$$

**Uwaga.** Aby otrzymać podzielniki jakiejś liczby, np. 30 rozkładamy ją na czynniki pierwsze. Mamy: $30 = 2 . 3 . 5$.

Iloczyn którychkolwiek czynników powyższego rozkładu jest podzielnikiem liczby 60. Tworząc wszystkie takie iloczyny, otrzymamy wszystkie podzielniki liczby 30 (z wyjątkiem 1): 2, 3, 5, $2 . 3$, $2 . 5$, $3 . 5$, $2 . 3 . 5$.

### Zadania

1. Rozłóż następujące liczby na czynniki pierwsze:
   *a)* 18; *b)* 32; *c)* 60; *d)* 100; *e)* 75; *f)* 144; *g)* 150; *h)* 320; *j)* 500; *k)* 840; *l)* 5142; *m)* 9180; *n)* 27 852; *o)* 54 648.
2. Iloma sposobami można przedstawić liczbę 28 jako iloczyn dwóch liczb całkowitych?
3. Posługując się rozkładem na czynniki pierwsze, wypisz wszystkie podzielniki liczb: *a)* 12; *b)* 18; *c)* 24; *d)* 36.

4. Ile jest różnych prostopadłościanów o objętości 70 $cm^3$, których krawędzie wynoszą całkowitą liczbę *cm*?
5. Na zakupno podręcznika dla każdego ucznia w klasie złożono 84 *zł*. Ilu było uczniów i ile kosztowała jedna książka, jeśli cena książki wyraża się całkowitą liczbą *zł*, a uczniów było więcej niż 30, a mniej niż 45?

# Ułamki

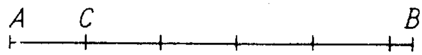
## Ułamek jako część jedności

### Podział odcinka

Poznamy sposoby dzielenia odcinków na równe części, zapomocą cyrkla, lub miarki.

Podział odcinka zapomocą cyrkla

Mamy podzielić odcinek *A B* (rys. 119) na kilka równych części, np. na 5. Obieramy najpierw taki odcinek *A C*, który wydaje się nam piątą częścią odcinka *A B*. Następnie odkładamy przy pomocy cyrkla 5 razy odcinek *A C* od punktu *A*

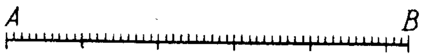



Rys. 119.

w kierunku punktu *B*. Jeśli, tak postępując, otrzymamy odcinek, mniejszy od odcinka *A B* (względnie większy od odcinka *A B*), to zwiększamy rozwartość cyrkla o piątą część reszty (względnie zmniejszamy o piątą część nadwyżki) i postępujemy znowu jak poprzednio. Po kilku próbach znajdujemy dość dokładnie piątą część odcinka *A B*.

Podział odcinka zapomocą miarki

Mamy podzielić, jak poprzednio, odcinek *A B* (rys. 120) na 5 równych części. Przy pomocy miarki odczytujemy licz-



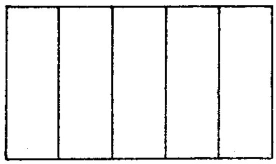

Rys. 120.

bę milimetrów, jaka mieści się w odcinku $AB$. Przypuśćmy, że odczytana liczba milimetrów wynosi 53 *mm*.

Ponieważ: 53 *mm* : 5 = 10 *mm* (reszta 3 *mm*), więc dodając do odcinka 10 *mm* jedną piątą odcinka 3 *mm*, otrzymamy piątą część odcinka $AB$. Piątą część reszty (3 *mm*) wyznaczamy na oko.

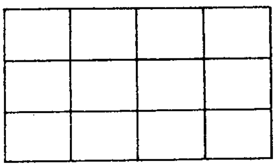
## Podział prostokąta

Aby podzielić prostokąt na kilka równych części, np. na 5, dzielimy na 5 równych części dwa przeciwległe jego boki i łączymy odcinkami odpowiednie punkty podziału (rys. 121).

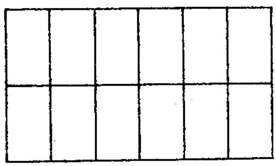


Rys. 121.

U w a g a. Chcąc podzielić prostokąt na 12 równych części, moglibyśmy postąpić jeszcze inaczej, np. tak, jak wskazuje rys. 122 i 123.



Rys. 122.



Rys. 123.

## Zadania

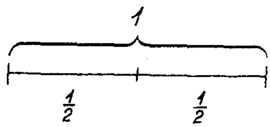
1. Narysuj odcinek i podziel go zapomocą cyrkla na *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 5, *e)* 6 równych części!
2. Narysuj odcinek i podziel go zapomocą cyrkla na 2 równe części; każdą z otrzymanych części podziel znowu na *a)* 2, *b)* 3 równe części! Jaka to będzie część danego odcinka?

3. Podziel dowolnie obrany odcinek na 2 równe części; każdą z tych części podziel znowu na 2 równe części i t. d.! Na ile równych części dzielisz za każdym razem dany odcinek?
4. Narysuj odcinek i zapomocą miarki podziel go na *a)* 2, *b)* 3, *c)* 5 równych części!
5. Podziel dowolnie obrany odcinek na *a)* 4, *b)* 6, *c)* 8 równych części, raz zapomocą cyrkla, drugi raz zapomocą miarki i porównaj wyniki!
6. Podziel dowolnie obrany prostokąt na *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 5 równych części!
7. Iloma sposobami możesz podzielić dany prostokąt na *a)* 6, *b)* 12, *c)* 15, *b)* 18 równych prostokątów?
8. Wytnij z papieru 4 równe prostokąty. Ile różnych prostokątów złożysz z tych 4 prostokątów?

## Określenie ułamka

### Połówka

Obierzmy dowolny odcinek jednostkowy i podzielmy go na 2 równe części (rys. 124). Każda z tych części nazywa się **p o ł o w ą** odcinka jednostkowego, lub połową jedności. Połowę jedności oznaczamy: $\frac{1}{2}$ jedności.

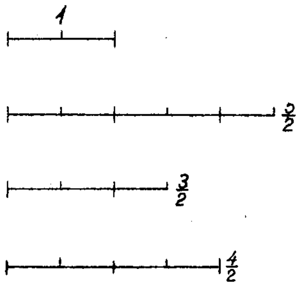



Rys. 124.

Odcinek, składający się z kilku połówek, np. z 5 połówek jedności (rys. 125), oznaczamy: $\frac{5}{2}$ jedności, co czytamy: pięć drugich jedności.

Na rys. 125 mamy zaznaczone również: $\frac{3}{2}$ jedności, $\frac{4}{2}$ jedności, co czytamy: trzy drugie jedności, cztery drugie jedności.

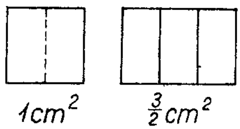
Jeżeli np. *cm* jest odcinkiem jednostkowym, to $\frac{5}{2}$ *cm* oznacza odcinek, składający się z pięciu połówek centymetra.




Rys. 125.

Podobnie $\frac{3}{2}$ $cm^2$ oznacza nam pole, składające się z trzech połówek $cm^2$ (rys. 126).

Uwaga. Z rys. 125 widzimy, że $\frac{3}{2}$ *cm* jest 1 *cm* i $\frac{1}{2}$ *cm*, dlatego $\frac{3}{2}$ *cm* oznaczamy również $1\frac{1}{2}$ *cm*, co czytamy: jeden i pół (lub półtora) centymetra. Podobnie $\frac{5}{2}$ *cm* (rys. 125) oznaczamy $2\frac{1}{2}$ *cm* (czytaj: dwa i pół *cm*!).




Rys. 126.

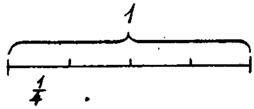
**Zadania**

1. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i narysuj *a)* $\frac{1}{2}$, *b)* $\frac{3}{2}$, *c)* $\frac{4}{2}$, *d)* $\frac{7}{2}$ jedności!
2. Narysuj odcinek *a)* $\frac{2}{2}$ *cm*, *b)* $\frac{3}{2}$ *cm*, *c)* $\frac{5}{2}$ *cm*!
3. Ile *cm* zawiera: $\frac{2}{2}$ *cm*, $\frac{4}{2}$ *cm*, $\frac{6}{2}$ *cm*? Sporządź odpowiedni rysunek!
4. Ile całych metrów zawiera: $\frac{3}{2}$ *m*, $\frac{5}{2}$ *m*, $\frac{7}{2}$ *m*, $\frac{9}{2}$ *m*?
5. Obierz odcinek jednostkowy i przekonaj się, że: $\frac{7}{2}$ jedności $= 3\frac{1}{2}$ jedności!
6. Ile połówek kilograma zawiera: $2\frac{1}{2}$ *kg*, $3\frac{1}{2}$ *kg*, $4\frac{1}{2}$ *kg*?
7. Ile to jest *cm*: $\frac{5}{2}$ *m*, $3\frac{1}{2}$ *m*, $\frac{17}{2}$ *m*?

8. Ile min., ile sek. zawiera: $\frac{1}{2}$ godz., $1\frac{1}{2}$ godz., $\frac{5}{2}$ godz.?
9. Ile sekund zawiera: $\frac{1}{2}$ kwadransa, $1\frac{1}{2}$ kwadransa?
10. Ile minut zawiera: $\frac{15}{2}^\circ$, $36\frac{1}{2}^\circ$?
11. Jaką długość ma odcinek, który jest sumą dwóch odcinków o długościach: *a)* $\frac{3}{2}$ *m* i $\frac{5}{2}$ *m*, *b)* 2 *m* i $\frac{7}{2}$ *m*?
12. Z worka, zawierającego $\frac{7}{2}$ *kg* cukru, wyjęto 2 *kg*. Ile cukru pozostało?

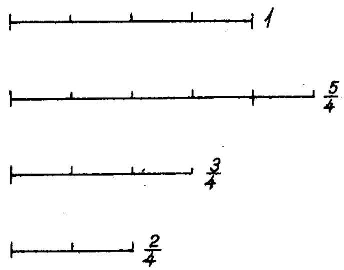
## Ćwiartka

Podzielmy jedność na 4 równe części (rys. 127). Każda z tych części nazywa się **ć w i a r t k ą**, albo czwartą częścią jedności. Ćwiartkę jedności oznaczamy: $\frac{1}{4}$ jedności.




Rys. 127.

Odcinek, składający się z kilku ćwiartek, np. z 5 ćwiartek jedności (rys. 128), oznaczamy: $\frac{5}{4}$ jedności, co czytamy: pięć czwartych jedności.




Rys. 128.

Na rys. 128 mamy zaznaczone również: $\frac{3}{4}$ jedności, $\frac{2}{4}$ jedności, co czytamy: trzy czwarte jedności, dwie czwarte jedności.

Odcinek $\frac{5}{4}$ *dcm* składa się z pięciu ćwiartek decymetra. Podobnie $\frac{3}{4}$ *kg* cukru jest to trzy ćwierci kilograma cukru.

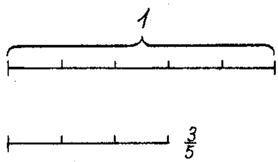
U w a g a. Z rys. 128 widzimy, że $\frac{5}{4}$ *dcm* jest 1 *dcm* i $\frac{1}{4}$ *dcm*, dlatego $\frac{5}{4}$ *dcm* oznaczamy również $1\frac{1}{4}$ *dcm*, co czytamy: jeden i jedna czwarta *dcm*. Podobnie $\frac{10}{4}$ *cm* jest 2 *cm* i $\frac{2}{4}$ *cm*, dlatego też $\frac{10}{4}$ *cm* oznaczamy $2\frac{2}{4}$ *cm*.

### Zadania

1. Narysuj odcinki, które zawierają: $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$; $\frac{9}{4}$ dowolnie obranej jedności!
2. Narysuj odcinki $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{4}$ obranej jedności!
3. Ile całych metrów zawiera: $\frac{15}{4}$ *m*, $\frac{17}{4}$ *m*, $\frac{57}{4}$ *m*?
4. Ile ćwierci *kg* zawiera: $3\frac{1}{4}$ *kg*, $15\frac{3}{4}$ *kg*, $4\frac{1}{2}$ *kg*, $\frac{7}{2}$ *kg*?
5. Ile połówek *kg* zawiera: $\frac{6}{4}$ *kg*, $\frac{10}{4}$ *kg*, $\frac{14}{4}$ *kg*, $\frac{54}{4}$ *kg*?
6. Ile to jest dekagramów: $\frac{1}{4}$ *kg*, $\frac{3}{4}$ *kg*, $\frac{7}{4}$ *kg*, $2\frac{3}{4}$ *kg*?
7. Ile minut, ile sekund zawiera: $\frac{1}{4}$ godz., $3\frac{3}{4}$ godz., $\frac{7}{4}$ godz.?
8. Ile sekund zawiera: $\frac{1}{4}$ kwadransa, $\frac{3}{4}$ kwadransa?
9. Jaką długość ma odcinek, który jest sumą dwóch odcinków: *a)* $1\frac{1}{4}$ *m* i $\frac{3}{4}$ *m*, *b)* 2 *m* i $\frac{15}{4}$ *m*, *c)* $2\frac{3}{4}$ *m* i $3\frac{1}{4}$ *m*, *d)* $2\frac{1}{2}$ *m* i $3\frac{1}{4}$ *m*, *e)* $\frac{5}{2}$ *m* i $\frac{7}{4}$ *m*?
10. Z naczynia, zawierającego 8 *l* mleka, odlano $3\frac{1}{4}$ *l* mleka. Ile pozostało?

### Ułamek

Obierzmy odcinek jednostkowy i podzielmy go na kilka równych części, np. na 5. Utwórzmy teraz odcinek, który składa się z trzech takich części (rys. 129).

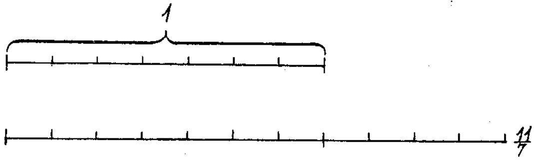



Rys. 129.

Otrzymany odcinek oznaczamy: $\frac{3}{5}$ jedności, co czytamy: trzy piąte jedności.

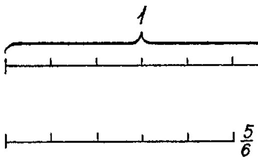
Podobnie, dzieląc jedność na 7 równych części i rysując odcinek, składający się z 11 takich części (rys. 130), otrzymamy odcinek: $\frac{11}{7}$ jedności.

Wyrażenia: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{11}{7}$ nazywamy ułamkami.




Rys. 130.

Liczbę, znajdującą się pod kreską poziomą, nazywamy mianownikiem, liczbę zaś, znajdującą się nad kreską, nazywamy licznikiem.




Rys. 131.

Ułamki oznaczają nam liczby, zwane liczbami ułamkowemi. Jeśli mamy jakiś ułamek jedności, np. $\frac{5}{6}$ jedności (rys. 131), to mianownik wskazuje nam, na ile równych części podzieliliśmy jedność, licznik zaś, z ilu takich części utworzyliśmy odcinek.

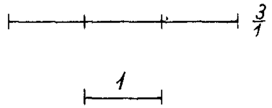
**Zadania**

1. Wskaż licznik i mianownik w następujących ułamkach: $\frac{5}{7}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{25}{36}$, $\frac{11}{7}$.
2. Napisz słowami następujące ułamki: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{47}{100}$, $\frac{57}{10}$, $\frac{13}{67}$.
3. Napisz następujące ułamki: dwie trzecie, pięć siódmych, cztery piąte, pięć dziesiątych, sześć dziesiątych, siedm piętnastych, jedenaście trzynastych, dziewiętnaście setnych, dziewięć dziesiątych, dziewiętnaście dwudziestych.
4. Narysuj odcinek i podziel go na 8 równych części; narysuj też odcinki, które mają: $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{10}{8}$ tego odcinka!

5. Narysuj następujące ułamki dowolnie obranego odcinka jednostkowego: $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{32}{10}$!
6. Ile to jest *cm*: $\frac{1}{2}$ *m*, $\frac{3}{4}$ *m*, $\frac{7}{25}$ *m*, $\frac{19}{20}$ *m*, $\frac{13}{50}$ *m*?
7. Ile to jest *m*: $\frac{1}{4}$ *km*, $\frac{1}{5}$ *km*, $\frac{1}{10}$ *km*, $\frac{7}{20}$ *km*, $\frac{36}{50}$ *km*?

**Szczególne postacie ułamka**

*a)* Odcinek, będący wielokrotnością jedności, np. 3 jedności (rys. 132), oznaczać będziemy również $\frac{3}{1}$ jedności (czytaj: trzy pierwsze jedności).

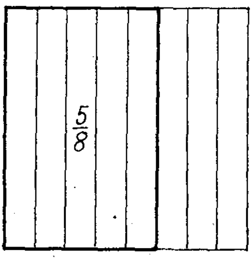



Rys. 132.

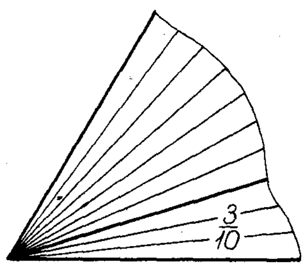
Podobnie 5 jedności oznaczamy: $\frac{5}{1}$ jedności.
Widzimy zatem, że: $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{8}{1} = 8$ i t. d.
Jedność oznaczamy również: $\frac{1}{1}$ jedności. Zatem $\frac{1}{1} = 1$.

*b)* Ułamek, którego licznik jest zerem, równy jest zeru.
Mając np. $\frac{0}{8}$ jedności, możemy sobie wyobrazić, żeśmy jedność podzielili na 8 równych części i nie wzięli żadnej takiej części, a więc mamy zero.
Zatem: $\frac{0}{8} = 0$, $\frac{0}{1} = 0$, $\frac{0}{11} = 0$ i t. d.

Uwaga 1. Należy pamiętać, że w ułamku mianownik nie może być zerem.
Zatem $\frac{8}{0}$, $\frac{3}{0}$ i t. d. nic nie oznacza.




Rys. 133.




Rys. 134.

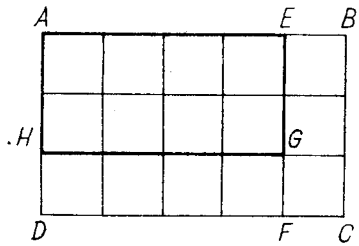
U w a g a 2. Jeśli mamy odcinek np. $\frac{5}{4}$ jedności, to ułamek $\frac{5}{4}$ nazywamy jego m i a r ą przy obranej jedności.

U w a g a 3. Możemy tworzyć również ułamki kwadratu jednostkowego, kąta jednostkowego, kilograma i t. p.

Na rys. 133 zaznaczone mamy $\frac{5}{8}$ kwadratu jednostkowego, a na rys. 134 mamy $\frac{3}{10}$ kąta jednostkowego.

## Zadania

1. Narysuj następujące ułamki dowolnie obranego odcinka jednostkowego: $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$!
2. Napisz w postaci ułamka o mianowniku 1 następujące liczby: 1, 5, 11, 18!
3. Napisz liczbę 0 w postaci ułamka o mianowniku 3, 7!
4. Narysuj następujące ułamki dowolnie obranego kwadratu jednostkowego: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{6}$!
5. Narysuj dowolny prostokąt, a następnie $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{10}$ tego prostokąta!
6. *a)* Wskaż $\frac{1}{5}$ prostokąta $ABCD$ (rys. 135)!

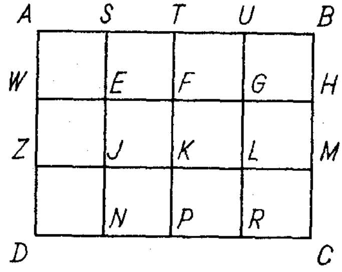



Rys. 135.

*b)* Wskaż $\frac{2}{3}$ prostokąta $AEFD$!

*c)* Wskaż $\frac{4}{5}$ prostokąta $ABCD$, a z tego wskaż $\frac{2}{3}$!

7. Jakim ułamkiem prostokąta $ABCD$ (rys. 135) jest prostokąt $AEGH$?
8. Wskaż na prostokącie $ABCD$ (rys. 136) prostokąty, które stanowią jego $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ części!
9. Wskaż $\frac{1}{3}$ prostokąta $ABCD$ (rys. 136), a z tego, co otrzymasz, wskaż *a)* $\frac{3}{4}$, *b)* $\frac{1}{4}$, *c)* $\frac{1}{2}$!




Rys. 136.

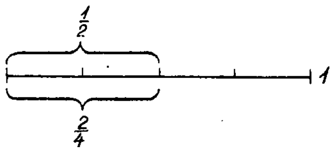
10. Ile to jest: *a)* gramów: $\frac{3}{2}$ *kg*, $\frac{7}{8}$ *kg*, $\frac{11}{8}$ *kg*, $\frac{7}{10}$ *kg*?
*b)* sekund: $\frac{1}{5}$ min., $\frac{2}{5}$ min., $\frac{12}{15}$ min., $\frac{15}{30}$ min.?
*c)* groszy: $\frac{5}{2}$ *zł*, $\frac{11}{4}$ *zł*, $\frac{19}{20}$ *zł*, $\frac{27}{25}$ *zł*, $\frac{239}{50}$ *zł*?
*d)* sztuk: $\frac{1}{2}$ tuzina, $\frac{2}{3}$ tuz., $\frac{5}{6}$ tuz., $\frac{3}{10}$ kopy, $\frac{7}{20}$ kopy?
11. Kupiec sprowadził 200 *l* octu i sprzedał z tego $\frac{4}{5}$; ile sprzedał?
12. Zwrócono $\frac{3}{4}$ długu, wynoszącego 128 *zł*; ile zwrócono?
13. Skaut przebył $\frac{7}{15}$ drogi z Krakowa do Zakopanego; ile przebył (odległość tych miejscowości wynosi 135 *km)*?
14. Koło robi 3 obroty na sekundę; jakiego ułamka sekundy potrzebuje na 1 obrót?
15. Kwotę 1200 *zł* rozdzielono między trzy osoby w ten sposób, że jedna otrzymała $\frac{1}{3}$, druga $\frac{1}{4}$ tej kwoty, a trzecia resztę; ile otrzymała każda osoba?
16. Ktoś kupił auto za 12 000 *zł* i po pewnym czasie sprzedał je za $\frac{2}{3}$ tej kwoty. Nabywca wydał na naprawę $\frac{1}{8}$ tej kwoty, którą zapłacił; ile go auto kosztowało?
17. Rolnik miał 10 morgów ziemi, z czego $\frac{1}{5}$ było łąki, $\frac{3}{4}$ uprawnej ziemi, a reszta lasu; oblicz, ile miał morgów łąki, uprawnej ziemi i lasu?
18. Jakim ułamkiem: *a)* metra jest: 1 *cm*, 25 *cm*, 50 *cm*?
*b)* godziny jest: 1 min., 10 min., 15 min., 45 min.?
19. Jakim ułamkiem *dcm*, a jakim ułamkiem *m* jest 25 *mm*?
20. Jakim ułamkiem kwoty 10 *zł* jest: 1 *zł*, 3 *zł*, 8 *zł*?
21. Robotnik wykonał pracę w 5 dniach; jaki ułamek tej pracy wykonał w ciągu: *a)* 1 dnia, *b)* 2 dni?

22. Sztuka płótna ma 24 *m* długości. Jakim ułamkiem tej sztuki płótna jest 1 *m*, 3 *m*, 4 *m*, 8 *m*, 12 *m*?
23. Odkręcając kurek, opróżnimy cały zbiornik wody w 12 godz.; jaki ułamek zbiornika opróżni się w ciągu 5 godz.?
24. Kupiec sprzedał $\frac{5}{6}$ sztuki sukna, mającej 36 *m*; ile otrzymał, jeśli metr sprzedawał po 20 *zł*?
25. Mniejsze naczynie zawiera 3 szklanki wody, większe zaś 5 takich samych szklanek wody. Jakim ułamkiem wyraża się objętość większego naczynia, jeśli za jednostkę pojemności obierzemy mniejsze naczynie?

## Porównywanie ułamków

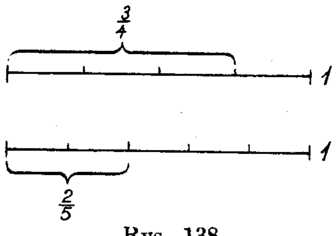
Odcinki $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$ tej samej jedności są równe (rys. 137).

O ułamkach $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$ mówimy, że są r ó w n e, co piszemy: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.




Rys. 137.

Odcinek $\frac{3}{4}$ jest większy od odcinka $\frac{2}{5}$ tej samej jedności (rys. 138).




Rys. 138.

O ułamku $\frac{3}{4}$ mówimy, że jest w i ę k s z y od ułamka $\frac{2}{5}$. co piszemy: $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$.

Mówimy również, że ułamek $\frac{2}{5}$ jest mniejszy od ułamka $\frac{3}{4}$. co piszemy: $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$.

## Zadania

1. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i przekonaj się o następujących równościach: *a)* $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, *b)* $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$, *c)* $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, *d)* $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.
2. Przekonaj się, że następujące pary ułamków, wzięte z metra, kilograma, lub dowolnie obranego odcinka, dają równe wyniki: *a)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$, *b)* $\frac{2}{5}$ i $\frac{4}{10}$, *c)* $\frac{1}{5}$ i $\frac{2}{10}$, *d)* $\frac{3}{4}$ i $\frac{6}{8}$, *e)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{4}{8}$, *f)* $\frac{1}{10}$ i $\frac{2}{20}$. Odp. $\frac{1}{2}\ m = 5\ dcm$, $\frac{2}{4}\ m = 50\ cm$, więc $\frac{1}{2}\ m = \frac{2}{4}\ m$.
3. Przekonaj się, że następujące pary ułamków, wzięte z godziny, stopnia, lub dowolnie obranego odcinka, dają równe wyniki: *a)* $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{6}$, *b)* $\frac{1}{12}$ i $\frac{4}{48}$, *c)* $\frac{5}{6}$ i $\frac{10}{12}$.
4. Wstaw zamiast liter odpowiednie liczby: $\frac{1}{3}=\frac{x}{6}$, $\frac{y}{3}=\frac{4}{12}$, $\frac{a}{4}=\frac{6}{8}$, $\frac{1}{4}=\frac{b}{12}$.
5. Oblicz, ile sztuk otrzymasz, biorąc następujące ułamki tuzina: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$.
   Połącz znakami równości ułamki równe!
   Np.: $\frac{9}{12}$ tuz. $=9$ sztuk, $\frac{3}{4}$ tuz. $=9$ sztuk. Zatem: $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$.
6. Obierz dowolny odcinek jednostkowy i przekonaj się o następujących nierównościach:
   *a)* $\frac{7}{5}>\frac{3}{8}$, *b)* $\frac{3}{6}<\frac{2}{3}$, *c)* $\frac{4}{6}>\frac{5}{8}$, *d)* $\frac{5}{12}<\frac{4}{9}$, *e)* $\frac{3}{4}>\frac{5}{7}$, *f)* $\frac{5}{4}>\frac{4}{5}$.
7. Porównaj następujące pary ułamków, biorąc je z metra, kilograma: *a)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{4}$, *b)* $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{8}$, *c)* $\frac{3}{10}$ i $\frac{5}{20}$, *d)* $\frac{12}{25}$ i $\frac{9}{20}$.
8. Porównaj następujące ułamki: *a)* $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$; *b)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$, *c)* $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$.
   Obliczaj, ile sztuk otrzymasz, biorąc te ułamki z tuzina!
9. Uporządkuj następujące ułamki według wielkości: $\frac{1}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{29}{30}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$.
   Obliczaj, ile sztuk otrzymasz, biorąc te ułamki z kopy!
10. Porównaj następujące ułamki o równych mianownikach: *a)* $\frac{5}{8}$ i $\frac{3}{8}$, *b)* $\frac{2}{4}$ i $\frac{3}{4}$, *c)* $\frac{3}{5}$ i $\frac{7}{5}$, *d)* $\frac{4}{10}$ i $\frac{7}{10}$, *e)* $\frac{5}{11}$ i $\frac{3}{11}$.
    Rozumuj: $\frac{5}{8}$ jedn. zawiera więcej ósmych części niż $\frac{3}{8}$ jedn. Zatem: $\frac{5}{8}>\frac{3}{8}$.
11. Porównaj następujące ułamki: *a)* $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$, *b)* $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{8}$, *c)* $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{9}$, *d)* $\frac{1}{11}$ i $\frac{1}{12}$. Sporządź rysunek!
12. Porównaj następujące ułamki o równych licznikach: *a)* $\frac{4}{3}$ i $\frac{4}{5}$, *b)* $\frac{4}{5}$ i $\frac{4}{8}$, *c)* $\frac{7}{4}$ i $\frac{7}{9}$, *d)* $\frac{9}{11}$ i $\frac{9}{12}$, *e)* $\frac{6}{10}$ i $\frac{6}{8}$, *f)* $\frac{4}{15}$ i $\frac{4}{9}$.

Rozumuj: Trzecia część jedności jest większa, niż piąta część jedności. A więc $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$.

13. Uporządkuj następujące ułamki według wielkości, poczynając od najmniejszego:
*a)* $\frac{19}{30}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{29}{30}$, $\frac{23}{30}$; *b)* $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{7}{22}$.

14. Napisz wszystkie ułamki: *a)* o mianowniku 8, mniejsze od $\frac{5}{8}$; *b)* o liczniku 5, większe od $\frac{5}{8}$!

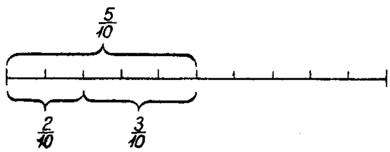
15. Który z dwóch ułamków jest większy: *a)* $\frac{7}{5}$ i $\frac{3}{8}$, *b)* $\frac{13}{15}$ i $\frac{25}{9}$, *c)* $\frac{12}{7}$ i $\frac{13}{6}$, *d)* $\frac{27}{15}$ i $\frac{30}{13}$, *e)* $\frac{11}{8}$ i $\frac{9}{10}$, *f)* $\frac{4}{5}$ i $\frac{5}{4}$?
Odp. $\frac{7}{5} > \frac{3}{5}$, $\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$, zatem $\frac{7}{5} > \frac{3}{8}$.

## Dodawanie i odejmowanie ułamków o wspólnym mianowniku

### Dodawanie ułamków

Przypuśćmy, że mamy dwa ułamki o tych samych mianownikach, np. $\frac{2}{10}$ i $\frac{3}{10}$.

Utwórzmy odcinki $\frac{2}{10}$ i $\frac{3}{10}$ jedności (rys. 139). Suma tych odcinków ma długość $\frac{5}{10}$ jedności.




Rys. 139.

Ułamek $\frac{5}{10}$ nazywamy sumą ułamków $\frac{2}{10}$ i $\frac{3}{10}$, co piszemy: $\frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$.

Wynika stąd, że ułamki o równych mianownikach dodajemy w ten sposób, że dodajemy liczniki, a wspólny mianownik pozostawiamy.

### Zadania

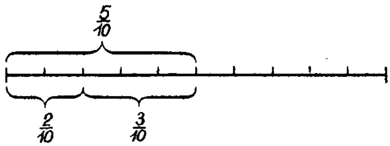
1. Oblicz: *a)* $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$, $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$, $\frac{4}{9} + \frac{3}{9}$, $\frac{6}{5} + \frac{2}{5}$, $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$, $\frac{5}{10} + \frac{4}{10}$;
*b)* $\frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10}$, $\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12}$, $\frac{4}{20} + \frac{3}{20} + \frac{7}{20}$, $\frac{3}{50} + \frac{12}{50} + \frac{10}{50}$;

c) $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}+\frac{7}{9}$, $\frac{11}{21}+\frac{12}{21}+\frac{1}{21}$, $\frac{7}{25}+\frac{2}{25}+\frac{3}{25}+\frac{10}{25}$;
d) $\frac{2}{19}+\frac{3}{19}+\frac{1}{19}$, $\frac{1}{13}+\frac{5}{13}+\frac{9}{13}+\frac{2}{13}$, $\frac{17}{50}+\frac{13}{50}+\frac{9}{50}+\frac{23}{50}$;

2. Dodaj wszystkie ułamki o mianowniku 10 mniejsze od $\frac{1}{2}$.
3. Dodaj wszystkie ułamki o mianowniku 12, które są większe od $\frac{7}{12}$, a mniejsze od 1.
4. Dodaj wszystkie ułamki mniejsze od 2 o mianowniku 8, a liczniku nieparzystym.

### Odejmowanie ułamków

Przypuśćmy, że mamy dwa ułamki o tych samych mianownikach, np. $\frac{5}{10}$ i $\frac{2}{10}$. Utwórzmy odcinki $\frac{5}{10}$ i $\frac{2}{10}$ jedności (rys. 140). Różnica ma długość $\frac{3}{10}$ jedności.




Rys. 140.

Ułamek $\frac{3}{10}$ nazywamy **r ó ż n i c ą**, $\frac{5}{10}$ **o d j e m n ą**, $\frac{2}{10}$ **o d j e m n i k i e m**. Różnicę zapisujemy: $\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{3}{10}$. Widzimy stąd, że ułamki o wspólnym mianowniku odejmujemy w ten sposób, że odejmujemy liczniki, a wspólny mianownik pozostawiamy.

Oczywiście, odejmowanie jest tylko wtedy możliwe, jeśli odjemna jest większa lub równa odjemnikowi.

### Zadania

1. Oblicz: a) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$, $\frac{7}{15}-\frac{2}{15}$, $\frac{17}{20}-\frac{11}{20}$, $\frac{28}{39}-\frac{15}{39}$;
b) $\frac{10}{7}-\frac{5}{7}-\frac{3}{7}$, $\frac{16}{11}-\frac{2}{11}-\frac{4}{11}$, $\frac{24}{25}-\frac{3}{25}-\frac{6}{25}-\frac{8}{25}$;
c) $1-\frac{1}{2}$, $1-\frac{1}{4}$, $1-\frac{3}{4}$, $1-\frac{7}{8}$, $1-\frac{1}{10}$, $1-\frac{9}{10}$.
2. Odejmuj od $\frac{14}{15}$ po $\frac{2}{15}$ aż otrzymasz 0.
3. Uzupełnij do $\frac{10}{11}$ ułamki: $\frac{1}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{8}{11}$.
4. Ile brakuje do $\frac{24}{25}$ następującym ułamkom:

$$\frac{3}{25},\ \frac{4}{25},\ \frac{6}{25},\ \frac{9}{25},\ \frac{11}{25}.$$

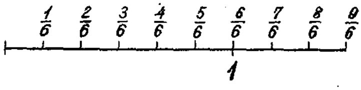
5. Ile należy dodać do $\frac{7}{30}$, aby otrzymać: $\frac{11}{30}$, $\frac{13}{30}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{19}{30}$?

### Ułamki właściwe i niewłaściwe

Podzielmy jedność na kilka równych części, np. na 6 (rys. 141). Biorąc takich części mniej niż 6, otrzymamy mniej niż jedność.

Zatem: $\frac{2}{6} < 1$, $\frac{3}{6} < 1$, $\frac{5}{6} < 1$.

Biorąc szóstych części 6, lub więcej niż 6, otrzymamy jedność, lub więcej niż jedność. Zatem: $\frac{6}{6} = 1$, $\frac{7}{6} > 1$.




Rys. 141.

Ułamki mniejsze od jedności, jak: $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ i t. p., nazywamy **ułamkami właściwemi**. W ułamkach właściwych licznik jest mniejszy od mianownika.

Ułamki równe lub większe od jedności, jak: $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{11}{6}$ i t. p., nazywamy **ułamkami niewłaściwemi**.

W ułamkach niewłaściwych licznik jest równy, lub większy od mianownika.

### Zadania

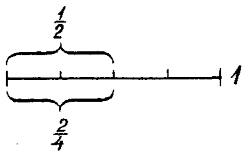
1. Wskaż, które z następujących ułamków są właściwe, a które niewłaściwe: $\frac{27}{11}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{11}{11}$, $\frac{49}{52}$, $\frac{101}{102}$, $\frac{75}{25}$, $\frac{45}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{19}{12}$, $\frac{55}{63}$, $\frac{49}{49}$, $\frac{128}{32}$, $\frac{112}{61}$.
2. Wypisz ułamki właściwe o mianowniku: *a)* 2, *b)* 5, *c)* 9.
3. Napisz wszystkie ułamki niewłaściwe o mianowniku: *a)* 10, *b)* 13, *c)* 15, których liczniki są mniejsze od 20.
4. Napisz ułamek równy jedności o mianowniku: *a)* 8, *b)* 11, *c)* 13.
5. Które z następujących ułamków godziny są większe od godziny, a które mniejsze: $\frac{2}{5}$ godz., $\frac{7}{3}$ godz., $\frac{12}{4}$ godz., $\frac{8}{15}$ godz., $\frac{120}{30}$ godz., $\frac{2}{3}$ godz.?

### Zmiana postaci ułamka

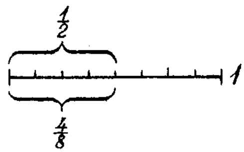
*Rozszerzanie ułamka.* Z rys. 142 widzimy, że połówka ma dwie czwarte części jedności. Zatem: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Ułamek $\frac{2}{4}$ otrzymamy, mnożąc przez 2 licznik i mianownik ułamka $\frac{1}{2}$, czyli:

$$\frac{1}{2}=\frac{1\,.\,2}{2\,.\,2}.$$

Podobnie z rys. 143 widzimy, że: $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$.




Rys. 142.




Rys. 143.

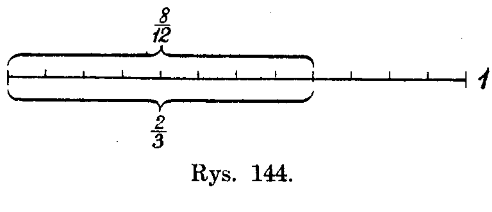
Ułamek $\frac{4}{8}$ otrzymamy, mnożąc przez 4 licznik i mianownik ułamka $\frac{1}{2}$, czyli:

$$\frac{1}{2}=\frac{1\,.\,4}{2\,.\,4}.$$

Wynika stąd, że: *Wartość ułamka nie zmieni się, jeśli licznik i mianownik pomnożymy przez tę samą liczbę.*

Np. $$\frac{2}{3}=\frac{2\,.\,4}{3\,.\,4}=\frac{8}{12}.$$

Równość powyższą łatwo stwierdzamy na rys. 144.




Rys. 144.

To postępowanie, pozwalające z ułamka otrzymać ułamki danemu równe, nazywamy *rozszerzaniem* ułamka.

**Zadania**

1. Utwórz z następujących ułamków ułamki odpowiednio im równe, mnożąc licznik i mianownik każdego z nich przez 2, 3, 4, 5: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$.
2. Utwórz kilka ułamków (o różnych mianownikach) równych ułamkowi $\frac{5}{12}$.
3. Uzupełnij liczniki tak, aby: $\frac{1}{3} = \frac{\ }{12}$, $\frac{1}{2} = \frac{\ }{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{\ }{12}$, $\frac{5}{4} = \frac{\ }{8}$.
4. Uzupełnij mianowniki tak, aby: $\frac{2}{3} = \frac{4}{\ }$, $\frac{3}{2} = \frac{12}{\ }$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{\ }$.
5. Jakie to są ułamki równe ułamkowi $\frac{2}{3}$, mające mianowniki mniejsze od 20?
6. Zamień ułamki: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{3}{2}$ na ułamki o mianowniku 12, i uporządkuj je wedle wielkości!
7. Zamień ułamki: $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{5}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{27}{25}$, $\frac{41}{50}$ na ułamki odpowiednio im równe o mianowniku 100!
8. Zamień każdą parę ułamków: $\frac{3}{2}$ i $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{7}$ i $\frac{11}{14}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{8}$, $\frac{9}{11}$ i $\frac{1}{33}$ na parę ułamków o wspólnym mianowniku.

*Upraszczanie ułamka.* Poprzednio przekonaliśmy się (rys. 142), że $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Ułamek $\frac{1}{2}$ otrzymamy, dzieląc przez 2 licznik i mianownik ułamka $\frac{2}{4}$.

Zatem: $$\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2}.$$

Podobnie z rys. 143 widzimy, że $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Ułamek $\frac{1}{2}$ otrzymamy, dzieląc przez 4 licznik i mianownik ułamka $\frac{4}{8}$.

Zatem: $$\frac{4}{8} = \frac{4:4}{8:4}.$$

Wynika stąd, że: *Wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik podzielimy przez tę samą liczbę.*

Np. $$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}.$$

Równość powyższą łatwo stwierdzamy z rys. 144.

To postępowanie nazywamy skracaniem lub upraszczaniem ułamka.

Uprościć ułamek przez 2, 3, 4, ... to znaczy podzielić licznik i mianownik odpowiednio przez 2, 3, 4, ...

Uwaga. Jeśli ułamek nie da się uprościć przez liczbę większą od jedności, wówczas powiadamy, że dany ułamek jest ułamkiem nieprzywiedlnym.

Np. $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{12}{13}$ są ułamkami nieprzywiedlnemi.

### Zadania

1. Uprość ułamki:
   *a)* $\frac{6}{8}$, $\frac{16}{12}$, $\frac{28}{18}$, $\frac{36}{24}$ przez 2; *b)* $\frac{6}{9}$, $\frac{27}{30}$, $\frac{63}{81}$, $\frac{126}{321}$ przez 3.
2. Uprość ułamki: *a)* $\frac{2}{4}$, *b)* $\frac{3}{9}$, *c)* $\frac{5}{15}$, *d)* $\frac{6}{9}$, *e)* $\frac{9}{15}$, *f)* $\frac{21}{24}$, *g)* $\frac{36}{27}$.
3. Przedstaw w postaci nieprzywiedlnej ułamki: $\frac{90}{120}$, $\frac{96}{120}$, $\frac{30}{45}$, $\frac{45}{75}$.
4. Uzupełnij liczniki tak, aby: $\frac{8}{12}=\frac{\ }{3}$, $\frac{20}{15}=\frac{\ }{3}$, $\frac{5}{10}=\frac{\ }{2}$, $\frac{18}{48}=\frac{\ }{8}$.
5. Uzupełnij mianowniki tak, aby: $\frac{18}{8}=\frac{2}{\ }$, $\frac{16}{10}=\frac{8}{\ }$, $\frac{3}{6}=\frac{1}{\ }$.
6. *a)* Obierz dowolny odcinek i narysuj $\frac{120}{180}$ tego odcinka! Czy będziesz dzielił obrany odcinek na 180 równych części?
   *b)* Narysuj kąt, który wynosi $\frac{540}{2160}$ kąta pełnego!
   *c)* Narysuj kwadrat o boku $\frac{50}{1000}$ *m!*
   *d)* Narysuj prostokąt o bokach $\frac{40}{1000}$ *m* i $\frac{60}{1000}$ *m!*
7. Zamień ułamki:
   *a)* $\frac{2}{3}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{20}{48}$, $\frac{50}{120}$, $\frac{5}{6}$ na ułamki o mianowniku 12 i porównaj;
   *b)* $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{72}$, $\frac{27}{108}$, $\frac{7}{18}$ na ułamki o mianowniku 36 i porównaj.
8. Napisz ułamki, równe ułamkowi $\frac{24}{60}$, mające mianowniki mniejsze od 60.
9. Sprowadź do postaci nieprzywiedlnej następujące ułamki: *a)* $\frac{2}{72}$, $\frac{3}{72}$, $\frac{9}{72}$, $\frac{18}{72}$, $\frac{36}{72}$; *b)* $\frac{75}{90}$, $\frac{195}{270}$, $\frac{78}{90}$, $\frac{104}{144}$, $\frac{84}{96}$, *c)* $\frac{68}{78}$, $\frac{108}{180}$, $\frac{108}{117}$, $\frac{108}{189}$; *d)* $\frac{180}{252}$, $\frac{336}{462}$, $\frac{560}{420}$, $\frac{1080}{810}$, $\frac{1512}{1008}$; *e)* $\frac{99}{702}$, $\frac{165}{225}$, $\frac{495}{1089}$, $\frac{84}{357}$, $\frac{270}{702}$.
10. Sprowadź do postaci nieprzywiedlnej następujące ułamki:

a) $\frac{63\times78}{42\times36}$; b) $\frac{56\times63}{35\times48}$; c) $\frac{88\times128}{77\times64}$; d) $\frac{9\times4\times12\times5}{10\times18\times7\times4}$;

e) $\frac{95\times105\times150}{19\times35\times50}$; f) $\frac{44\times49\times56}{33\times42\times48}$; g) $\frac{8\times48\times56\times52}{78\times112\times32}$.

Uwaga. Ułamek $\frac{13\,.\,2\,.\,9}{4\,.\,3\,.\,11}$,
w którym licznik i mianownik jest iloczynem kilku liczb, upraszczamy najdogodniej w następujący sposób: jakikolwiek czynnik licznika i jakikolwiek czynnik mianownika dzielimy przez ich wspólny podzielnik. Upraszczamy ten ułamek przez 2, dzieląc 2 i 4 przez 2, a następnie upraszczamy przez 3, dzieląc 9 i 3 przez 3.

Powyższy rachunek zaznaczamy w następujący sposób:

$$\frac{13\,.\,\overset{1}{\cancel{2}}\,.\,\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{4}}\,.\,\underset{1}{\cancel{3}}\,.\,11}=\frac{13\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,1\,.\,11}=\frac{39}{22}.$$

11. Sprowadź do postaci nieprzywiedlnej następujące ułamki:

a) $\frac{9\,.\,14\,.\,8}{5\,.\,14\,.\,12\,.\,6}$, $\frac{4\,.\,9\,.\,25\,.\,11}{27\,.\,125\,.\,7\,.\,16}$, $\frac{24\,.\,21\,.\,11}{4\,.\,9\,.\,121\,.\,7}$;

b) $\frac{8\,.\,3\,.\,25\,.\,27}{12\,.\,75\,.\,28\,.\,11}$, $\frac{2^2\,.\,3^2\,.\,5}{2^3\,.\,3\,.\,5^2}$, $\frac{3^4\,.\,5^2\,.\,7^3}{3^2\,.\,5^3\,.\,7^2}$;

c) $\frac{2^3\,.\,5^4\,.\,7^2\,.\,11}{2^2\,.\,125\,.\,49\,.\,11^2}$, $\frac{2\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,11}{2^2\,.\,3^2\,.\,5^2\,.\,7^2\,.\,11^2}$.

## Najmniejsza wspólna wielokrotność

Wspólną wielokrotnością kilku liczb nazywamy każdą liczbę, w której dane liczby mieszczą się bez reszty.

Wspólną wielokrotnością liczb: 8, 12, 15 jest np. liczba 240.

Mamy np. liczby: 6, 10, 15. Wypiszmy wielokrotności każdej z nich. Wielokrotności:

liczby 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, ...
liczby 10: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, ...
liczby 15: 15, 30, 45, 60, 75, ...

Widzimy stąd, że *najmniejszą wspólną wielokrotnością* liczb 6, 10 i 15 jest 30.

Najmniejszą wspólną wielokrotność oznaczamy N W W, więc: N W W (6, 10, 15) = 30.

*Wyznaczanie NWW zapomocą rozkładu na czynniki pierwsze.*

Mamy znaleźć: NWW (12, 30, 50).

Rozkładamy te liczby na czynniki pierwsze:

12 = 2 . 2 . 3; 30 = 2 . 3 . 5; 50 = 2 . 5 . 5.

W tych rozkładach występują liczby pierwsze: 2, 3, 5.

Patrzymy, w którym rozkładzie liczba 2 występuje najwięcej razy. Widzimy, że 2 występuje najwięcej razy, t. j. *dwa* razy w pierwszym rozkładzie Patrzymy teraz, w którym rozkładzie liczba 3 występuje najwięcej razy. Widzimy, że liczba 3 występuje tylko *raz* w rozkładzie pierwszym (i drugim). Wkońcu liczba 5 występuje najwięcej razy w rozkładzie trzecim, t. j. *dwa* razy.

Utwórzmy teraz iloczyn złożony z dwóch dwójek, jednej trójki i dwóch piątek, t. j. 2 . 2 . 3 . 5 . 5 = 300. Iloczyn ten jest wspólną wielokrotnością danych liczb, gdyż każda z nich w nim się mieści. Iloczyn ten jest N W W danych liczb. Gdybyśmy bowiem opuścili w nim jedną dwójkę, to 12 nie mieściłoby się w tym iloczynie. Gdybyśmy opuścili 3 lub 5, to liczba 30, względnie 50 nie mieściłaby się w tym iloczynie.

Wynika stąd, że:

N W W (12, 30, 50) = 2 . 2 . 3 . 5 . 5 = 300.

Podobnie, chcąc znaleźć N W W (60, 350, 245), rozkładamy te liczby na czynniki pierwsze. Otrzymamy:

60 = 2 . 2 . 3 . 5; 350 = 2 . 5 . 5 . 7; 245 = 5 . 7 . 7.

Zatem:

N W W (60, 350, 245) = 2 . 2 . 3 . 5 . 5 . 7 . 7 = 14 700.

*Uwaga.* Jeżeli dwie liczby nie mają wspólnego podzielnika, to N W W tych liczb jest ich iloczynem. Np.:

N W W (5, 11) = 5 . 11 = 55.

Jeżeli szukamy N W W kilku liczb, to możemy opuścić te liczby, które mieszczą się w innych bez reszty.

Np. N W W (8, 15, 16, 30, 24) = N W W (16, 30, 24).

D r u g i s p o s ó b w y z n a c z a n i a N W W. Podamy jeszcze inny sposób obliczania N W W kilku liczb. Aby np. znaleźć N W W (6, 10, 15, 35, 40, 162, 175), sporządzamy tabelkę następującą:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~6~~ | ~~10~~ | 15 | ~~35~~ | 40 | 162 | 175 | 2 |
| | | 15 | | 20 | 81 | 175 | 3 |
| | | ~~5~~ | | 20 | 27 | 175 | 5 |
| | | | | 4 | 27 | 35 | |

N W W (6, 10, 15, 35, 40, 162, 175) =
= 4 . 27 . 35 . 5 . 3 . 2 = 113 400.

W pierwszym wierszu, na lewo od kreski pionowej, przekreślamy każdą liczbę, która jest podzielnikiem drugiej, a więc np. 6, ponieważ jest podzielnikiem 162. Po prawej stronie kreski pionowej piszemy jakąkolwiek liczbę pierwszą, która jest podzielnikiem przynajmniej dwóch liczb nieprzekreślonych, w naszym przykładzie 2. W drugim wierszu przepisujemy te liczby, które nie są podzielne przez 2, a następnie ilorazy pozostałych liczb przez 2.

Z drugim wierszem postępujemy tak, jak z pierwszym i otrzymujemy trzeci wiersz.

Postępując w ten sposób dalej, dochodzimy do wiersza, w którym każde dwie liczby są względem siebie pierwsze.

Iloczyn liczb ostatniego wiersza i kolumny po prawej stronie kreski pionowej jest N W W danych liczb.

## Zadania

1. Oblicz N W W liczb:

*a)* 5 i 7; 8 i 12; 40 i 60; 45 i 60; 75 i 225;
*b)* 2, 3, 4, 5 i 6; 12, 18 i 15; 8, 10, 12, 16 i 20;
*c)* 50, 90 i 110; 288, 516 i 800; 45, 60, 210 i 315;

*d)* 125, 75 i 55; 10, 12, 15, 20 i 30; 54, 32, 48, 64 i 72;
*e)* 8, 11, 72, 88, 36, 99 i 198.

2. Znaleźć możliwie mały kwadrat, który dałby się podzielić na równe kwadraty o boku 4 *cm*, a także na równe kwadraty o boku 6 *cm*.
3. Dwaj cykliści wyruszyli z tego samego miejsca areny i w tym samym kierunku. Jeden okrąża arenę w 18 minutach, a drugi w 24. Kiedy po raz pierwszy obaj znajdą się równocześnie w początkowem miejscu?
4. Większe koło u wozu ma 36 *dcm*, mniejsze zaś 30 *dcm* obwodu; jaka jest najkrótsza droga, na której oba koła wykonają całkowitą liczbę obrotów?

## Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika

Jeżeli mamy dwa ułamki, np. $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$ i chcemy je porównać, to przedstawiamy te ułamki w postaci ułamków o tym samym mianowniku, czyli, jak mówimy, sprowadzamy do wspólnego mianownika. Jako wspólny mianownik obieramy liczbę, w której oba mianowniki mieszczą się bez reszty. Liczbą taką jest np. iloczyn mianowników t. j. 24.

Zatem: $\frac{3}{4}=\frac{3\,.\,6}{4\,.\,6}=\frac{18}{24};\quad \frac{5}{6}=\frac{5\,.\,4}{6\,.\,4}=\frac{20}{24}$

ponieważ $\frac{18}{24}<\frac{20}{24}$, więc $\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$.

Uwaga. Przy sprowadzaniu ułamków do wspólnego mianownika obieramy często jako wspólny mianownik najmniejszą wspólną wielokrotność danych mianowników.

Np. sprowadzić do wspólnego mianownika ułamki: $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$.
Szukamy N W W (12, 18).

$$\begin{array}{cc|c} 12 & 18 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & \end{array}$$

Zatem N W W (12, 18) $= 2\,.\,2\,.\,3\,.\,3 = 36$.

Ponieważ mianownik ułamka $\frac{5}{12}$ mieści się w 36 — 3 razy, więc mnożymy licznik i mianownik tego ułamka przez 3.

A więc: $\frac{5}{12}=\frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3}=\frac{15}{36}$.

Podobnie otrzymujemy:

$$\frac{7}{18}=\frac{7 \cdot 2}{18 \cdot 2}=\frac{14}{36}.$$

### Zadania

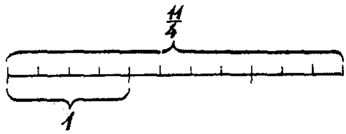
1. Następujące pary ułamków sprowadź do wspólnego mianownika i porównaj: *a)* $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$; *b)* $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{5}$; *c)* $\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{7}$; *d)* $\frac{7}{12}$ i $\frac{5}{8}$; *e)* $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{8}$; *f)* $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{9}$; *g)* $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{6}$, *h)* $\frac{4}{6}$ i $\frac{5}{8}$; *i)* $\frac{7}{15}$ i $\frac{3}{10}$.
2. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika i porównaj, przyjmując jako wspólny mianownik iloczyn mianowników: *a)* $\frac{2}{3}$, $\frac{12}{17}$; *b)* $\frac{4}{5}$, $\frac{11}{13}$; *c)* $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{11}$; *d)* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$; *e)* $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{5}$.
3. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika i porównaj: *a)* $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$; *b)* $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$; *c)* $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$; *d)* $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{6}$; *e)* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.
4. Który z ułamków $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{9}{16}$ ma najmniejszą, a który największą wartość?
5. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika, obierając jako wspólny mianownik NWW mianowników, a następnie porównaj: *a)* $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{18}$; *b)* $\frac{4}{21}$, $\frac{8}{84}$; *c)* $\frac{6}{14}$, $\frac{9}{21}$; *d)* $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{8}{27}$; *e)* $\frac{7}{18}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{5}{24}$; *f)* $\frac{5}{156}$, $\frac{7}{182}$; *g)* $\frac{8}{369}$, $\frac{5}{246}$; *h)* $\frac{11}{342}$, $\frac{13}{456}$; *i)* $\frac{5}{8}$, $\frac{21}{24}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{11}{14}$, $\frac{37}{40}$.
6. Uprość następujące ułamki, a następnie sprowadź do wspólnego mianownika: *a)* $\frac{6}{10}$, $\frac{21}{33}$; *b)* $\frac{6}{18}$, $\frac{7}{15}$; *c)* $\frac{8}{32}$, $\frac{7}{21}$; *d)* $\frac{9}{51}$, $\frac{40}{46}$; *e)* $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{32}$, $\frac{21}{72}$; *f)* $\frac{21}{36}$, $\frac{36}{216}$, $\frac{90}{396}$.

## Liczby mieszane

### Zamiana ułamka na liczbę mieszaną

Ułamek niewłaściwy zawiera jedną lub więcej jedności. Zapytajmy się, ile jakiś ułamek niewłaściwy, np. $\frac{11}{4}$, zawiera jedności (rys. 145). Ponieważ $\frac{4}{4}$ dają jedność, a $11:4$ daje na iloraz 2, a na resztę 3, więc $\frac{11}{4}$ jedności to są 2 jedności i $\frac{3}{4}$ jedności. Mamy zatem: $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$.

Ułamek niewłaściwy $\frac{11}{4}$ oznaczamy również $2\frac{3}{4}$.



Rys. 145.

Tak napisany ułamek nazywamy **liczbą mieszaną**.

Liczba mieszana składa się z **części całkowitej** (2) i z **części ułamkowej** ($\frac{3}{4}$).

Podobnie $\frac{23}{7} = 3\frac{2}{7}$, gdyż $23 : 7$ daje na iloraz 3 i resztę 2.

Uwaga. Jeżeli mianownik mieści się bez reszty w liczniku, to ułamek taki jest równy liczbie całkowitej.

Np.: $\frac{8}{4} = 2$, gdyż $8 : 4 = 2$.

Ułamki równe liczbom całkowitym nazywamy **ułamkami pozornemi**. W ułamku pozornym licznik jest wielokrotnością mianownika.

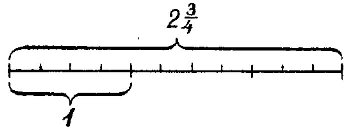
### Zadania

1. Zamień następujące ułamki na liczby mieszane:
   *a)* $\frac{41}{5}$, $\frac{61}{8}$, $\frac{58}{7}$, $\frac{69}{11}$, $\frac{36}{14}$, $\frac{77}{9}$, $\frac{117}{12}$, $\frac{155}{16}$;
   *b)* $\frac{121}{13}$, $\frac{256}{78}$, $\frac{211}{15}$, $\frac{123}{14}$, $\frac{375}{21}$, $\frac{235}{19}$, $\frac{240}{29}$;
   *c)* $\frac{225}{13}$, $\frac{580}{99}$, $\frac{1025}{78}$, $\frac{625}{32}$, $\frac{1861}{191}$, $\frac{1214}{103}$.
2. *a)* Ile to jest godzin i kwadransów: $\frac{9}{4}$ godz., $\frac{9}{2}$ godz.?
   *b)* Ile to jest kóp i tuzinów: $\frac{12}{5}$ kopy, $\frac{36}{5}$ kopy, $\frac{72}{5}$ kopy?
   *c)* Ile to jest *kg* i *g*: $\frac{1270}{1000}$ *kg*, $\frac{5238}{1000}$ *kg*, $\frac{12328}{1000}$ *kg*?
3. Napisz możliwie największą liczbę całkowitą, mniejszą od ułamka: *a)* $\frac{100}{7}$, *b)* $\frac{59}{12}$, *c)* $\frac{813}{25}$!
4. Zamień na liczby całkowite następujące ułamki pozorne: *a)* $\frac{21}{3}$, *b)* $\frac{125}{5}$, *c)* $\frac{546}{7}$, *d)* $\frac{2184}{24}$, *e)* $\frac{2214}{18}$!
5. Licznik ułamka wynosi 12; dobierz mianownik tak, by powstały ułamek był pozorny. Ile takich ułamków otrzymasz?

6. Mianownik ułamka wynosi 5; dobierz licznik tak, by powstały ułamek był pozorny. Czem są wtedy liczniki w stosunku do mianownika?

## Zamiana liczby mieszanej na ułamek

Mamy zamienić liczbę mieszaną, np. $2\frac{3}{4}$, na ułamek. Jedność zawiera 4 ćwiartki, zatem 2 jedności zawierają




Rys. 146.

2 . 4, t. j. 8 ćwiartek. Ponieważ mamy jeszcze 3 ćwiartki, więc razem jest 11 ćwiartek (rys. 146).

Zatem: $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$.

Podobnie:

$$5\frac{3}{4} = \frac{(5 \,.\, 4) + 3}{4} = \frac{23}{4};\quad 3\frac{2}{7} = \frac{(3 \,.\, 7) + 2}{7} = \frac{23}{7}.$$

### Zadania

1. Zamień na ułamki następujące liczby mieszane:
   *a)* $1\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{4}$, $6\frac{1}{8}$, $4\frac{5}{6}$, $7\frac{2}{9}$, $6\frac{5}{11}$, $9\frac{4}{7}$;
   *b)* $25\frac{3}{8}$, $10\frac{3}{15}$, $12\frac{7}{11}$, $15\frac{7}{12}$, $16\frac{19}{20}$, $4\frac{13}{23}$;
   *c)* $12\frac{5}{60}$, $12\frac{14}{125}$, $68\frac{21}{35}$, $2\frac{17}{99}$, $13\frac{25}{31}$, $36\frac{45}{59}$.
2. *a)* Przedstaw w postaci ułamka godziny: 3 godz. 35 min.; 5 godz. 17 min., 12 godz. 56 min.;
   *b)* Przedstaw w postaci ułamka metra: 8 *m* 5 *dcm*, 15 *m* 3 *dcm*, 7 *m* 1 *cm*.
3. Która z dwóch liczb jest większa: *a)* $3\frac{2}{5}$ i $2\frac{3}{5}$, *b)* $5\frac{2}{7}$ i $5\frac{3}{7}$, *c)* $\frac{11}{5}$ i $2\frac{2}{5}$, *d)* $3\frac{4}{7}$ i $\frac{24}{8}$, *e)* $5\frac{3}{8}$ i $\frac{43}{7}$?

## Dodawanie ułamków o różnych mianownikach

Jeżeli mamy dwa ułamki o różnych mianownikach, np. $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$, to, aby te ułamki do siebie dodać, sprowadzamy je najpierw do wspólnego mianownika. Wspólnym mianownikiem jest 15, więc:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\,.\,5}{3\,.\,5}+\frac{4\,.\,3}{5\,.\,3}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{22}{15}.$$

## Zadania

1. Oblicz: *a)* $\frac{4}{7}+\frac{5}{7}$, $\frac{8}{11}+\frac{9}{11}$, $\frac{7}{20}+\frac{5}{20}$, $\frac{4}{19}+\frac{11}{19}$;
   *b)* $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$, $\frac{1}{21}+\frac{7}{21}+\frac{11}{21}$, $\frac{16}{19}+\frac{17}{19}+\frac{18}{19}$;
   *c)* $\frac{9}{13}+\frac{1}{13}+\frac{5}{13}+\frac{8}{13}+\frac{4}{13}$, $\frac{17}{50}+\frac{31}{50}+\frac{1}{50}+\frac{49}{50}+\frac{13}{50}$.
2. Oblicz: *a)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$, $\frac{3}{10}+\frac{2}{5}$;
   *b)* $\frac{3}{2}+\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}+\frac{5}{12}$, $\frac{2}{15}+\frac{1}{3}$, $\frac{5}{2}+\frac{3}{8}$;
   *c)* $\frac{5}{4}+\frac{7}{12}$, $\frac{6}{7}+\frac{9}{14}$, $\frac{3}{10}+\frac{13}{30}$, $\frac{8}{17}+\frac{9}{85}$;
   *d)* $\frac{9}{13}+\frac{11}{39}$, $\frac{17}{60}+\frac{1}{300}$, $\frac{29}{18}+\frac{13}{72}$, $\frac{11}{18}+\frac{17}{108}$.
3. Oblicz: *a)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$;
   *b)* $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{1}{9}$, $\frac{5}{6}+\frac{1}{2}+\frac{7}{12}$, $\frac{3}{5}+\frac{11}{10}+\frac{17}{20}$, $\frac{4}{9}+\frac{11}{36}+\frac{13}{18}$;
   *c)* $\frac{5}{6}+\frac{11}{15}+\frac{4}{3}+\frac{29}{30}$, $\frac{9}{8}+\frac{7}{11}+\frac{13}{44}+\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}+\frac{1}{2}+\frac{3}{14}+\frac{5}{4}$;
   *d)* $\frac{5}{7}+\frac{2}{3}+\frac{1}{49}+\frac{11}{21}+\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}+\frac{13}{24}+\frac{23}{3}+\frac{7}{8}+\frac{23}{36}$;
   *e)* $\frac{7}{15}+\frac{13}{21}+\frac{4}{7}$, $\frac{25}{48}+\frac{37}{72}+\frac{5}{8}+\frac{11}{9}$, $\frac{19}{30}+\frac{7}{12}+\frac{4}{15}+\frac{11}{6}$;
   *f)* $\frac{11}{40}+\frac{5}{72}+\frac{13}{24}+\frac{5}{8}$, $\frac{11}{20}+\frac{9}{28}+\frac{3}{35}+\frac{7}{40}+\frac{9}{10}+\frac{11}{21}$;
   *g)* $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{1}{3}+\frac{7}{6}+\frac{9}{10}$, $\frac{5}{7}+\frac{1}{2}+\frac{9}{14}+\frac{1}{3}+\frac{19}{21}+\frac{8}{9}$.
4. Oblicz: *a)* $2\frac{1}{4}+3$, $2+3\frac{5}{6}$, $1+1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{5}+2$;
   *b)* $2\frac{1}{7}+3\frac{2}{7}$, $3\frac{1}{8}+4\frac{3}{8}$, $6\frac{5}{12}+8\frac{1}{12}$, $3\frac{1}{9}+4\frac{5}{9}$;
   *c)* $3\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}$, $1\frac{5}{7}+4\frac{3}{7}$, $2\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{6}+2\frac{5}{6}$;
   *d)* $5\frac{4}{11}+7\frac{8}{11}$, $4\frac{6}{13}+15\frac{2}{13}$, $8\frac{5}{21}+13\frac{1}{21}$, $12\frac{1}{19}+18\frac{5}{19}$.
   Np.: $3\frac{4}{7}+2\frac{5}{7}$, $3+2=5$, $\frac{4}{7}+\frac{5}{7}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$.
   Zatem: $3\frac{4}{7}+2\frac{5}{7}=5+1\frac{2}{7}=6\frac{2}{7}$.
5. Oblicz: *a)* $4\frac{1}{2}+5\frac{3}{8}$, $2\frac{1}{2}+3\frac{7}{10}$, $2\frac{1}{4}+1\frac{5}{6}$, $3\frac{1}{4}+4\frac{5}{12}$;
   *b)* $1\frac{2}{3}+7\frac{5}{12}$, $12\frac{19}{30}+5\frac{1}{6}$, $24\frac{5}{14}+3\frac{19}{21}$, $15\frac{17}{30}+18\frac{4}{15}$;
   *c)* $8\frac{1}{2}+4\frac{4}{5}+5\frac{1}{10}$, $\frac{11}{20}+4\frac{3}{5}+13\frac{7}{15}$, $2+5\frac{1}{2}+3\frac{2}{6}$;
   *d)* $121\frac{7}{32}+13\frac{11}{12}+\frac{5}{6}$, $18\frac{7}{60}+84\frac{1}{36}+7\frac{1}{150}$;
   *e)* $5+23\frac{1}{16}+284\frac{19}{32}+54\frac{11}{80}$, $19\frac{7}{12}+8+145\frac{11}{42}+93\frac{13}{54}$.
   Licz, jak w zadaniu (4), sprowadzając części ułamkowe do wspólnego mianownika.
6. Zamień następujące liczby mieszane na ułamki, przed-

stawiając je w postaci sumy części całkowitej i ułamkowej: $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$, $4\frac{2}{5}$, $3\frac{1}{8}$.
Licz: $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{2}{1} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

7. Oblicz: *a)* $2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{5} + \frac{7}{12}$, $2\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6}$, $3\frac{1}{2} + 4\frac{5}{9}$;
*b)* $3\frac{1}{10} + 4\frac{2}{5} + 7\frac{1}{2}$, $2\frac{7}{11} + 1\frac{3}{22} + 4\frac{7}{44}$, $12\frac{1}{2} + 3\frac{5}{8} + 2\frac{1}{4}$;
*c)* $8 + 5\frac{3}{10} + 4\frac{1}{15} + \frac{19}{20}$, $5\frac{7}{8} + 1\frac{11}{12} + 4 + \frac{1}{3}$.
U w a g a. Zamieniaj liczby mieszane na ułamki!

8. W sumie $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ przestaw składniki na wszystkie możliwe sposoby i za każdym razem oblicz sumę!

9. Oblicz w najdogodniejszy sposób sumy:
*a)* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$, odp. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3})$;
*b)* $1\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 3\frac{1}{2} + \frac{4}{5}$; *c)* $5 + \frac{4}{7} + 1\frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{3}{5}$.

10. Oblicz kilkoma sposobami każdą z sum:
*a)* $\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$; *b)* $2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$;
*c)* $1\frac{5}{6} + 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; *d)* $1\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} + 1 + 3\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

11. *a)* Wyraź w ułamkach godziny: 20 minut i 30 sekund. (Odp. $\frac{20}{60} + \frac{30}{3600} = \frac{1}{3} + \frac{1}{120} = \frac{41}{120}$);
*b)* Wyraź w ułamkach doby: 6 godzin 20 minut;
*c)* Wyraź w ułamkach metra: 3 *cm* i 5 *mm*;
*d)* Wyraź w ułamkach kilograma: 750 *g*;
*e)* Wyraź w ułamkach kilometra: 350 *m*.

12. Jasiowi po kupieniu zeszytu za $\frac{1}{4}$ *zł* zostało $\frac{2}{5}$ *zł*; ile miał pieniędzy?

13. Towar waży $1\frac{1}{4}$ *kg*, opakowanie $\frac{1}{8}$ *kg*; ile waży towar z opakowaniem?

14. Kupiec sprzedał $\frac{1}{8}$ *kg* herbaty, potem $\frac{1}{4}$ *kg*, a wreszcie $\frac{1}{16}$ *kg*; ile herbaty sprzedał?

15. Jaś dostał $2\frac{1}{2}$ *zł*, Staś o $\frac{1}{4}$ *zł* więcej; ile otrzymali razem?

16. Do naczynia wlano $\frac{3}{2}$ *l* mleka, $\frac{5}{4}$ *l* mleka, $\frac{5}{2}$ *l* mleka i 4 *l* mleka. Oblicz, ile *l* mleka razem wlano!

17. Wieśniak ma dwa stogi siana. W jednym jest $8\frac{3}{4}$ tonny, a w drugim $6\frac{1}{2}$ tonny. Ile tonn siana posiada?

18. Kupiec sprzedał jednego dnia $1\frac{1}{2}$ *kg* herbaty i $3\frac{1}{4}$ *kg* kawy, drugiego zaś dnia $\frac{3}{4}$ *kg* herbaty i $2\frac{1}{2}$ *kg* kawy.
*a)* Ile *kg* towaru sprzedał pierwszego dnia, a ile drugiego?

*b)* Ile *kg* herbaty, a ile *kg* kawy sprzedał w obu dniach?

19. Jak długa jest linja łamana, która składa się z czterech odcinków: $2\frac{3}{4}$ *cm*, $\frac{1}{2}$ *cm*, $1\frac{3}{8}$ *cm* i $5\frac{5}{16}$ *cm*.

20. Oblicz obwód prostokąta o bokach:
*a)* $2\frac{3}{4}$ *cm* i $3\frac{1}{2}$ *cm*; *b)* $5\frac{2}{5}$ *dcm* i $8\frac{3}{4}$ *dcm*.

21. Odlano z beczki $17\frac{1}{5}$ *l* nafty, następnie $8\frac{1}{2}$ *l*, potem $24\frac{3}{4}$ *l*, a wreszcie $36\frac{3}{8}$ *l*; ile litrów nafty beczka zawierała, jeśli zostało $13\frac{7}{40}$ *l*?

22. Kupiec sprzedał $2\frac{1}{2}$ *kg* towaru, potem o $\frac{1}{2}$ *kg* więcej, a wreszcie o $\frac{1}{4}$ *kg* więcej niż za pierwszym razem; ile kilogramów towaru razem sprzedał?

23. Pewien murarz wystawił mur w 20 dniach, inny wystawiłby ten sam mur w 16 dniach. Jaką część muru wystawi w jednym dniu pierwszy murarz, a jaką drugi? Jaką część muru wystawią obaj w jednym dniu?

## Odejmowanie ułamków o różnych mianownikach

Jeśli mamy utworzyć różnicę ułamków o różnych mianownikach, to sprowadzamy je do wspólnego mianownika.

Np.: $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$. Wspólnym mianownikiem jest 12, przeto:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}.$$

### Zadania

1. Oblicz: *a)* $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{5} - \frac{2}{5}$, $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$, $\frac{7}{10} - \frac{5}{10}$, $\frac{11}{12} - \frac{7}{12}$;
*b)* $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, $\frac{4}{3} - \frac{5}{6}$, $\frac{3}{5} - \frac{1}{10}$, $\frac{17}{15} - \frac{2}{3}$, $\frac{11}{8} - \frac{1}{2}$;
*c)* $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$, $\frac{4}{3} - \frac{3}{5}$, $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}$, $\frac{5}{6} - \frac{2}{5}$:
*d)* $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$, $\frac{5}{7} - \frac{1}{8}$, $\frac{5}{8} - \frac{7}{12}$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{11}$;
*e)* $1 - \frac{5}{7}$, $3 - \frac{4}{5}$, $9 - \frac{11}{15}$, $17 - \frac{3}{5}$, $26 - \frac{4}{11}$;
*f)* $\frac{16}{49} - \frac{17}{63}$, $\frac{18}{35} - \frac{19}{45}$, $\frac{39}{54} - \frac{17}{32}$, $\frac{41}{48} - \frac{27}{64}$, $\frac{17}{121} - \frac{4}{33}$.

2. Oblicz: *a)* $4 - \frac{7}{3}$, $3 - \frac{3}{4}$, $4 - \frac{2}{5}$, $2 - \frac{1}{6}$, $1 - \frac{7}{12}$;
*b)* $5 - \frac{1}{11}$, $4 - \frac{3}{14}$, $1 - \frac{1}{60}$, $8 - \frac{13}{18}$;
*c)* $14 - \frac{12}{19}$, $23 - \frac{17}{31}$, $18 - \frac{1}{99}$, $29 - \frac{99}{100}$.
Licz: $4 - \frac{7}{3} = \frac{4}{1} - \frac{7}{3} = \frac{12}{3} - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$.

3. Oblicz, zamieniając liczby mieszane na ułamki:
*a)* $6\frac{2}{3} - 2\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{6} - 2\frac{5}{6}$, $8\frac{1}{9} - 4\frac{7}{9}$, $7\frac{1}{12} - 5\frac{11}{24}$;

*b)* $1\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$, $1\frac{1}{2}-1\frac{1}{12}$, $1\frac{2}{5}-\frac{7}{15}$, $5\frac{1}{12}-2\frac{2}{3}$;
*c)* $27\frac{1}{5}-\frac{2}{15}$, $9\frac{3}{15}-2\frac{1}{3}$, $10\frac{2}{7}-2\frac{7}{10}$, $18\frac{5}{6}-11\frac{7}{12}$;
*d)* $7\frac{3}{5}-(2\frac{1}{25}+3\frac{7}{75})$, $8-(3\frac{5}{12}-1\frac{17}{18})$;
*e)* $(2\frac{23}{49}+5\frac{1}{7})-(4\frac{3}{7}-3\frac{5}{9})$; $(11\frac{4}{30}-3\frac{5}{60})-(8\frac{13}{45}-2\frac{7}{15})$.

4. Oblicz następujące wyrażenia:
*a)* $\frac{3}{7}-\frac{1}{7}+\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}-\frac{6}{9}-\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$;
*b)* $\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\frac{7}{12}$, $3-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}$, $2\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$;
*c)* $2\frac{3}{5}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}+4-3\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+3\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{15}-\frac{1}{2}+2\frac{7}{30}$.
Liczby mieszane zamień na ułamki, a następnie sprowadź wszystkie ułamki do wspólnego mianownika!

5. Oblicz następujące wyrażenia:
*a)* $\frac{5}{11}-\frac{3}{11}+\frac{2}{11}-\frac{1}{11}$, $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}+\frac{5}{9}-\frac{1}{18}$, $\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{5}{16}+\frac{1}{8}$;
*b)* $\frac{7}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}-\frac{5}{16}$;
*c)* $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{4}+\frac{7}{8}-\frac{2}{3}$, $\frac{14}{15}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{1}{2}$.

6. Oblicz następujące wyrażenia:
*a)* $41\frac{3}{17}-25\frac{1}{17}$, $25\frac{7}{64}-18\frac{5}{96}$, $124\frac{19}{98}-108\frac{13}{196}$;
*b)* $5\frac{3}{4}+12\frac{5}{6}-9\frac{7}{12}$, $3\frac{4}{5}+2\frac{1}{10}-\frac{9}{20}$, $6-2\frac{2}{3}+4\frac{1}{6}$;
*c)* $5\frac{7}{9}-2\frac{1}{3}+5-3\frac{1}{6}$, $8\frac{1}{4}-1\frac{1}{3}+3-1\frac{1}{6}-\frac{3}{10}+1\frac{1}{25}$;
*d)* $14\frac{2}{3}+\frac{7}{8}-1\frac{15}{24}$, $19\frac{3}{4}-\frac{5}{7}+2\frac{2}{3}$, $12\frac{14}{15}-10\frac{1}{2}+\frac{3}{10}$;
*e)* $20\frac{13}{25}+4\frac{11}{15}-2\frac{1}{2}+5\frac{1}{6}$, $11\frac{4}{5}-2\frac{1}{3}+5\frac{7}{8}-2\frac{11}{12}$;
*f)* $16\frac{3}{8}+2\frac{4}{5}-6\frac{5}{12}+4\frac{1}{15}$, $24\frac{23}{56}-3\frac{11}{35}+2\frac{1}{4}+10\frac{3}{5}$;
*g)* $10\frac{5}{8}+8\frac{11}{18}-4\frac{1}{6}-10\frac{13}{36}$, $11\frac{5}{6}-4\frac{1}{4}+8\frac{3}{8}-5\frac{11}{12}$.

7. Wstaw zamiast litery $x$ odpowiednią liczbę:
*a)* $2\frac{1}{5}+x=\frac{5}{2}$, $x+13\frac{11}{15}=18\frac{1}{20}$, $20-x=3\frac{1}{4}$;
*b)* $(14\frac{2}{3}-x)+\frac{2}{5}=10\frac{1}{6}$, $(x-8\frac{1}{16})+2\frac{1}{3}=4\frac{1}{12}$,
$(14\frac{1}{9}+x)-8\frac{1}{4}=25\frac{5}{6}$.

8. Oblicz odjemną, wiedząc, że odjemnik wynosi: *a)* $\frac{3}{4}$; *b)* $\frac{2}{3}$; *c)* $\frac{5}{9}$; różnica zaś *a)* $\frac{5}{16}$; *b)* $\frac{5}{8}$; *c)* $\frac{4}{5}$.

9. Oblicz odjemnik, wiedząc, że odjemna wynosi: *a)* 8; *b)* $\frac{5}{7}$; *c)* $\frac{1}{5}$; różnica zaś *a)* $\frac{5}{7}$; *b)* $\frac{11}{28}$; *c)* $\frac{1}{6}$.

10. Jaka liczba jest o $\frac{8}{3}$ mniejsza od $\frac{21}{5}$?

11. Jaką liczbę należy odjąć od $\frac{49}{64}$, aby otrzymać $\frac{1}{4}$?

12. Jaką liczbę należy dodać do $\frac{10}{7}$, aby otrzymać $\frac{31}{14}$?

13. Które z podanych wyrażeń jest większe i o ile:
*a)* $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{8}-\frac{1}{6}$; *b)* $\frac{5}{2}-\frac{7}{4}$ i $3-\frac{4}{3}$?

14. W ułamku $\frac{15}{23}$ zwiększono licznik i mianownik o 7; o ile dany ułamek się zwiększył?
15. Jaś przebiegł $\frac{3}{5}$ *km*, a Staś $\frac{1}{2}$ *km*. Który z nich przebiegł większą drogę i o ile?
16. Towar z opakowaniem waży $3\frac{1}{4}$ *kg*, opakowanie zaś $\frac{1}{8}$ *kg*; ile waży sam towar?
17. Towar waży brutto $13\frac{2}{5}$ *kg*, tara (opakowanie) $1\frac{1}{4}$ *kg*; ile waży towar netto?
18. Jeden odcinek ma $5\frac{3}{4}$ *m*, drugi zaś $2\frac{1}{8}$ *m*; o ile pierwszy odcinek jest dłuższy od drugiego?
19. Obwód trójkąta wynosi $5\frac{3}{8}$ *dcm*, dwa boki zaś mają $1\frac{1}{2}$ *dcm* i $2\frac{1}{4}$ *dcm*; ile wynosi trzeci bok?
20. Na jednej szalce leży $1\frac{1}{2}$ *kg*, a na drugiej $\frac{9}{10}$ *kg*; jaki ciężar należy dodać do drugiej szalki, aby obie zrównoważyły się?
21. Podróżny miał zrobić $5\frac{3}{4}$ godziny marszu; ile pozostało mu godzin marszu, jeśli był już w drodze $2\frac{4}{5}$ godziny?
22. Ktoś miał dług $7\frac{3}{10}$ *zł*, a zwrócił $3\frac{1}{5}$ *zł*; ile winien?
23. Dwaj robotnicy zarabiają to samo.
Pierwszy wydaje $\frac{4}{5}$, drugi zaś $\frac{11}{15}$ swego zarobku; o jaką część zarobku jeden wydaje więcej od drugiego?
24. Pomiędzy trzech chłopców rozdzielono pewną kwotę pieniędzy. Pierwszy otrzymał $\frac{1}{5}$, drugi $\frac{1}{3}$; jaki ułamek tej kwoty otrzymał trzeci?
25. Kupiec zapłacił za 11 *kg* towaru 17 *zł*, sprzedał zaś ten towar za 23 *zł*. Wyrachuj, ile zarobił na 1 *kg*, obliczając: *a)* ile zapłacił za 1 *kg*, za ile sprzedał 1 *kg*; *b)* zysk na 11 *kg* i stąd zysk na 1 *kg*.
26. Waga jest w równowadze, jeśli na jednej szalce położymy towar i $\frac{13}{100}$ *kg*, a na drugiej $\frac{158}{1000}$ *kg*; ile waży towar?
27. Do beczki wlano $35\frac{3}{4}$ *l* wina, sprzedano z tego $27\frac{2}{5}$ *l*, a potem $6\frac{1}{2}$ *l*, dolano następnie $15\frac{1}{4}$ *l*, a sprzedano znowu $12\frac{3}{5}$ *l*; ile litrów wina zostało?

28. Jeden piechur przeszedł w 5 minutach 407 *m*, drugi zaś w 4 minutach 383 *m*; który z nich szedł prędzej i o ile dłuższą drogę robił w minucie?
29. Staś, wyszedłszy z miejscowości *A*, uszedł $3\frac{1}{2}$ *km* w kierunku miejscowości *B*, następnie cofnął się o $1\frac{1}{4}$ *km* zpowrotem ku *A*, a potem znów przeszedł $2\frac{2}{5}$ *km* w kierunku *B*. Jak daleko znajduje się od *A*?
30. Wysokość wieży od podstawy do szczytu wynosi $78\frac{4}{5}$ *m*, wysokość zaś od podstawy wieży do podstawy kopuły $72\frac{1}{2}$ *m*; ile wynosi wysokość kopuły?

# Liczby dziesiętne

## Ułamki dziesiętne

Ułamkiem dziesiętnym nazywamy ułamek, którego mianownikiem jest 10, 100, 1000 i t. d.

Np. ułamkami dziesiętnemi są:

$\frac{9}{10}$, $\frac{357}{100}$, $\frac{25}{1000}$, $\frac{19}{10000}$, i t. p.

### Zadania

1. Przedstaw następującą sumę w postaci ułamka dziesiętnego:
   *a)* $4+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}$; *b)* $\frac{7}{10}+\frac{5}{100}+\frac{4}{1000}$; *c)* $2+\frac{3}{100}$.
2. Zamień na ułamki dziesiętne następujące ułamki:
   $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{3}{50}$, $\frac{47}{200}$.
3. Przedstaw w postaci ułamka dziesiętnego metra:
   *a)* 2 *m* 5 *dcm*, *b)* 3 *dcm*, *c)* 2 *m* 1 *dcm* 2 *cm*, *d)* 3 *cm*, *e)* 2 *mm*, *f)* 5 *m* 4 *dcm* 7 *cm*.
4. Zamień na liczby mieszane ułamki dziesiętne:
   *a)* $\frac{13}{10}$, $\frac{132}{10}$, $\frac{1328}{10}$; *b)* $\frac{271}{100}$, $\frac{5714}{100}$, $\frac{32153}{100}$; *c)* $\frac{3275}{1000}$, $\frac{6288}{1000}$.
5. Przyjmując za jednostkę 1 *zł*, napisz w postaci ułamka dziesiętnego wartości następujących monet zdawkowych: 50 *gr*, 20 *gr*, 10 *gr*, 5 *gr*, 2 *gr*, 1 *gr*.

### Jednostki dziesiętne

Przy mierzeniu obraną jednością zachodzi nieraz potrzeba użycia większych lub mniejszych jednostek.

Zazwyczaj większemi jednostkami są:

10 jedn., 100 jedn., 1000 jedn. i t. d.

Mniejszemi jednostkami są:

$\frac{1}{10}$ jedn., $\frac{1}{100}$ jedn., $\frac{1}{1000}$ jedn. i t. d.

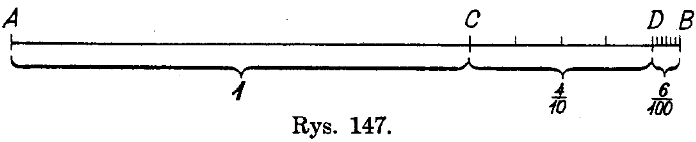
Powyższe jednostki nazywamy **jednostkami dziesiętnemi** obranej jedności.

### Zadania

1. Jakie są jednostki dziesiętne metra, kilograma, litra?
2. Ile razy mieści się:
   *a)* $\frac{1}{10}$ jedn. w 1 jedn.; *b)* $\frac{1}{100}$ jedn. w $\frac{1}{10}$ jedn.;
   *c)* $\frac{1}{1000}$ jedn. w $\frac{1}{100}$ jedn.; *d)* $\frac{1}{10000}$ jedn. w $\frac{1}{1000}$ jedn.?
3. Ile razy mieści się: *a)* $\frac{1}{100}$ jedn. w 1 jedn.;
   *b)* $\frac{1}{1000}$ jedn. w $\frac{1}{10}$ jedn.; *c)* $\frac{1}{10000}$ jedn. w $\frac{1}{100}$ jedn.?
4. Które jednostki dziesiętne są 100 razy większe, niż
   *a)* $\frac{1}{1000}$ jedn.; *b)* $\frac{1}{1000000}$ jedn.?

### Liczby dziesiętne

**Określenie i pisanie.** Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć odcinek np. $AB$ przy pomocy jednostek dziesiętnych obranej jedności. W tym celu odkładamy na odcinku $AB$ naj-




Rys. 147.

pierw całe jedności, na otrzymanej reszcie dziesiąte części jedności, na nowej reszcie setne części jedności i t. d. zawsze tyle razy, ile razy się da.

Z rys. 147 widzimy, że tak postępując, odłożyliśmy na odcinku $AB$: 1 jedność, 4 dziesiąte jedności, a wkońcu 6 setnych jedności.

Miara zatem odcinka $AB$ przy obranej jedności wynosi:

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} = \frac{146}{100}.$$

Postępując jak wyżej z dowolnym odcinkiem, odłożymy zawsze co najwyżej $\frac{9}{10}$ jedności, bo pierwsza reszta jest mniejsza od jedności. Podobnie setnych części jedności odłożymy również co najwyżej 9, bo druga reszta jest mniejsza od $\frac{1}{10}$ jedności i t. d.

Miarę odcinka $AB$ zapisujemy w układzie dziesiętnym w następujący sposób:

Piszemy najpierw liczbę całkowitych jedności, potem przecinek, a następnie kolejno liczby odłożonych dziesiątych, setnych, tysięcznych i t. d. części jedności.

Miarę odcinka $AB$ zapisujemy więc: 1,46.

Widzimy zatem że: $1{,}46 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} = \frac{146}{100}$.

Podobnie: $25{,}354 = 25 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} = \frac{25354}{1000}$.

Gdybyśmy przy pomiarze nie otrzymali osobno bądź całych jednostek, bądź dziesiątych, setnych, tysięcznych i t. d. części jedności, to brak ten zaznaczamy, pisząc na odpowiednich miejscach 0. Naprzykład: $0{,}25 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100}$,

$$1{,}0206 = 1 + \frac{2}{100} + \frac{6}{10000} = \frac{10206}{10000}.$$

Wyrażenia takie, jak: 1,46 25,954 i t. d. nazywamy **liczbami dziesiętnemi**.

Liczba dziesiętna składa się z **części całkowitej** przed przecinkiem i z **części dziesiętnej** po przecinku. Cyfry części dziesiętnej nazywamy **cyframi dziesiętnemi**. Widzimy, że liczba dziesiętna da się zawsze przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego.

**Uwaga.** Jeżeli ostania cyfra dziesiętna jest 0, to możemy ją opuścić. Np.: $14{,}280 = 14 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100} = 14{,}28$.

Naodwrót wartość liczby dziesiętnej nie zmieni się, jeśli na prawo od ostatniej cyfry dziesiętnej dopiszemy kilka zer.

Np. $7{,}4 = 7{,}400$.

Czytanie liczb dziesiętnych. Cyfry, znajdujące się w liczbie dziesiętnej po przecinku, nazywamy kolejno (postępując od lewej ręki ku prawej) cyfrą dziesiątych, setnych, tysięcznych, dziesięciotysięcznych i t. d. Cyfry, znajdujące się przed przecinkiem, nazywamy (jak przy liczbach całkowitych) kolejno cyfrą jednostek, dziesiątek i t. d.

Następująca tabelka wskazuje nazwę cyfr w liczbie dziesiętnej:

| Część całkowita | | | | | | Część dziesiętna | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| setki tysięcy | dziesiątki tysięcy | tysiące | setki | dziesiątki | jednostki | dziesiąte | setne | tysięczne | dziesięcio-tysięczne | stu-tysięczne | miljonowe |

Liczbę dziesiętną czytamy, wygłaszając najpierw część całkowitą, a następnie pokolei liczbę dziesiątych, setnych, tysięcznych i t. d., wskazanych przez cyfry danej liczby.

Naprzykład: 25,4075 czytamy: 25 całych, 4 dziesiąte, 0 setnych, 7 tysięcznych, 5 dziesięciotysięcznych.

Czytamy liczby dziesiętne jeszcze w inny sposób.

Mamy: $25{,}4075 = 25 + \frac{4}{10} + \frac{7}{1000} + \frac{5}{10000} = 25\frac{4075}{10000}$;

czytamy: 25 całych, 4075 dziesięciotysięcznych.

Zatem odczytujemy najpierw część całkowitą, a następnie część ułamkową, napisaną w postaci ułamka dziesiętnego.

## Zadania

1. Napisz w postaci liczby dziesiętnej następujące sumy:
*a)* $12 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100}$; *b)* $\frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1000}$; *c)* $2 + \frac{3}{100}$;
*d)* $1 + \frac{4}{400} + \frac{5}{10000}$; *e)* $\frac{3}{100} + \frac{1}{10}$; *f)* $\frac{5}{100} + \frac{8}{10000} + \frac{7}{10}$.
2. Napisz następujące ułamki w postaci liczby dziesiętnej;
$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$.

3. Zamień na ułamki następujące liczby dziesiętne:
*a)* 3,045; 7,5; 0,507; *b)* 25,36; 1,3; 0,0075;
*c)* 4,506; 3,00701; 0,000301; *d)* 0,00012; 3,1415; 2,7182.
4. Odczytaj dwoma sposobami liczby dziesiętne:
0,001001; 0,3333; 2,01037; 3594,01; 27,365;
0,012; 1,301; 3,05; 3657,209; 301,006; 4,0000007.
5. Napisz cyframi następujące liczby dziesiętne:
*a)* pięć całych dwie dziesiąte — trzydzieści pięć całych siedm dziesiątych dwie setne — trzy całe jedna dziesiąta cztery setne — zero całych trzy setne — zero całych dwie tysięczne trzy dziesięciotysięczne — sto dwadzieścia jeden całych dwie tysięczne siedm dziesięciotysięcznych — dwie całe trzy tysięczne siedm miljonowych — jedna cała pięć dziesięciomiljonowych siedm stumiljonowych;
*b)* dwie całe dwadzieścia trzy setne — piętnaście całych dwadzieścia pięć tysięcznych — jedna cała dwadzieścia pięć miljonowych — zero całych pięćset trzy dziesięciotysięcznych — sto całych dwieście sześć miljonowych — zero całych trzysta dwadzieścia siedm tysięcznych — trzy całe trzysta czternaście miljonowych — zero całych siedmdziesiąt jeden tysięcznych.
6. Napisz w postaci liczby dziesiętnej następujące ułamki:
$\frac{13}{100}$, $\frac{2}{1000}$, $\frac{325}{1000}$, $\frac{15}{10000}$, $\frac{657}{10000}$, $\frac{257}{10}$, $\frac{305}{10}$, $\frac{457}{100}$, $\frac{2867}{100}$,
$\frac{203}{100}$, $\frac{507}{1000}$, $\frac{3270}{10000}$, $\frac{2007}{10000}$.
7. *a)* Ile dziesiątych, setnych, tysięcznych, miljonowych zawiera w sobie jednostka? *b)* Ile setnych, tysięcznych, dziesięciotysięcznych zawiera jedna dziesiąta? *c)* Ile tysięcznych, dziesięciotysięcznych, miljonowych zawiera jedna setna?
8. Ile *a)* dziesiątych, *b)* setnych, *c)* tysięcznych, zawiera liczba: 3,207; 0,4281; 2,35; 15,027; 0,103?
Np. liczba 25,361 zawiera setnych:
$25 . 100 + 3 . 10 + 6 = 2536$; całe zawierają bowiem po 100 setnych, dziesiąte po 10 setnych.

9. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *m*: *a)* 67 *m* 25 *mm*; *b)* 4 *dcm* 7 *mm*; *c)* 27 *mm*; *d)* 1 *m* 374 *mm*.
10. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *kg*: *a)* 2 *kg* 52 *dkg*; *b)* 36 *dkg*; *c)* 235 *g*; *d)* 15 *kg* 26 *dkg* 5 *g*.
11. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *zł*: 5 *gr*, 20 *gr*, 36 *gr*, 165 *gr*, 208 *gr*, 3586 *gr*, 1 *gr*.
12. Wyraź w *m*, *dcm*, *cm*, *mm*: 0,3 *km*; 0,75 *km*; 2,507 *km*; 0,08 *km*; 0,001 *km*; 0,0525 *km*; 0,7008 *km*; 0,0002 *km*; 1,3824 *km*; 5,0609 *km*; 50,6 *km*.
13. Wyraź w gramach: 0,25 *kg*; 2,008 *kg*; 3,2 *kg*; 5,736 *kg*.
14. Ile to jest godzin, minut i sekund: 2,5 godz., 0,5 godz., 0,25 godz., 0,05 godz.?
15. Napisz w postaci ułamków nieprzywiedlnych następujące liczby dziesiętne: *a)* 0,25, 0,875, 0,132, 0,0825; *b)* 0,4, 0,95, 0,9514, 0,3996, 0,08375.

### Porównywanie liczb dziesiętnych

Mamy porównać dwie liczby dziesiętne, np.:

$$54{,}36 \text{ i } 35{,}875.$$

Pierwsza liczba zawiera 54 jednostek, a druga tylko 35; zatem: $54{,}36 > 35{,}875.$

Widzimy więc, że z dwóch liczb dziesiętnych ta jest większa, której część całkowita jest większa.

Podobnie: $102{,}14 > 101{,}95.$

Jeżeli chcemy porównać dwie liczby dziesiętne, których części całkowite są równe, to porównujemy części dziesiętne.

Np. liczby 15,62 i 15,43 zawierają po 15 jednostek; pierwsza z nich zawiera nadto 6 dziesiątych, druga zaś tylko 4 dziesiąte, więc: $15{,}62 > 15{,}43.$

Liczby 25,4682 i 25,4654 zawierają po 25 jednostek, 4 dziesiąte, 6 setnych; pierwsza z nich zawiera nadto 8 tysięcznych, druga zaś tylko 5 tysięcznych, więc:

$$25{,}4682 > 25{,}4654.$$

Jeżeli zatem dwie liczby dziesiętne mają równe części całkowite, to ta z nich jest większa, w której cyfra dziesiątych jest większa; jeśli cyfry te są równe, to ta liczba jest większa, której cyfra setnych jest większa i t. d. Gdyby jedna liczba miała mniej miejsc dziesiętnych, niż druga, to brakujące miejsca możemy zastąpić cyfrą 0.

Np.: $12{,}36 < 12{,}3658$, gdyż $12{,}36 = 12{,}360$;
$5{,}003 < 5{,}003001$, gdyż $5{,}003 = 5{,}003000$.

### Zadania

1. Porównaj liczby:
*a)* 8,2 i 8,5; 7,1 i 7,01; 0,306 i 0,36;
*b)* 8,354 i 8,3147; 0,007 i 0,012; 8,75634 i 8,756304;
*c)* 29,35768 i 29,36; 2,00301 i 2,0301; 35,0001 i 35,001.
2. Uporządkuj wedle wielkości liczby dziesiętne:
*a)* 3; 1,01; 2,101; 2,121; 3,789; 3,0789; 1,1; 0,01;
*b)* 27,01; 27,013; 27,1035; 27,9; 27,113; 27,1108.
3. Napisz w porządku rosnącym następujące liczby dziesiętne: 3,141; 3,1; 3,14159; 3,1415; 3; 3,14.
4. Co jest większe: $\frac{357}{100}$ czy 3,56?

### Zamiana ułamka zwyczajnego na liczbę dziesiętną

Mamy: $10 = 2 . 5$, $100 = 10 . 10 = 2 . 5 . 2 . 5$,
$1000 = 10 . 10 . 10 = 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5$ i t. d.

Widzimy więc, że mianownik ułamka dziesiętnego jest iloczynem tej samej liczby dwójek i piątek. Przypuśćmy, że mamy zamienić na liczbę dziesiętną ułamek, którego mianownik jest iloczynem samych dwójek i piątek (przyczem dwójek i piątek nie jest równa liczba).

Np. $\frac{7}{40} = \frac{7}{2 . 2 . 2 . 5}$.

Aby liczba dwójek i piątek była ta sama, należy licznik i mianownik pomnożyć przez iloczyn dwóch piątek.

Mamy: $\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{175}{1000} = 0{,}175.$

Podobnie: $\frac{3}{25} = \frac{3}{5 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{12}{100} = 0{,}12.$

### Zadania

1. Zamień następujące ułamki na liczby dziesiętne:
   *a)* $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{11}{50}$; *b)* $\frac{3}{16}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{64}$, $\frac{9}{80}$, $\frac{11}{250}$;
   *c)* $\frac{1}{256}$, $\frac{3}{160}$, $\frac{7}{400}$, $\frac{27}{625}$, $\frac{1}{3125}$.
2. Zamień następujące ułamki na liczby dziesiętne (najpierw sprowadź je do postaci nieprzywiedlnej):
   $\frac{9}{6}$, $\frac{18}{120}$, $\frac{27}{72}$, $\frac{63}{105}$, $\frac{55}{176}$, $\frac{12}{75}$.
3. Napisz wszystkie liczby z pomiędzy liczb od 1 do 30, które są iloczynami tylko dwójek i piątek! Obierz takie ułamki właściwe, których mianownikami są znalezione liczby, i zamień te ułamki na liczby dziesiętne!

## Mnożenie i dzielenie liczb dziesiętnych przez 10, 100, 1000

W układzie dziesiętnym 10 jednostek pewnego rzędu równa się jednostce rzędu bezpośrednio wyższego.

Np. 10 tysięcznych wynosi 1 setną, 10 setnych wynosi 1 dziesiątą i t. d.

Zauważmy, że 2,35 t. j. 2 jednostki 3 dziesiąte 5 setnych. Przypuśćmy, że mamy obliczyć iloczyn $10 \times 2{,}35$.

Zatem $10 \times 2{,}35$ otrzymamy, biorąc 10 razy po 2 jednostki, 10 razy po 3 dziesiąte i 10 razy po 5 setnych. Lecz 10 całych t. j. 1 dziesiątka, 10 dziesiątych t. j. 1 cała, 10 setnych t. j. 1 dziesiąta. Więc $10 \times 2{,}35 = 2$ dziesiątki 3 jednostki i 5 dziesiątych. Zatem: $10 \times 2{,}35 = 23{,}5$.

Widzimy stąd, że liczbę dziesiętną mnożymy przez 10, przesuwając przecinek o jedno miejsce na prawo.

A więc: $10 \times 51{,}23 = 512{,}3$; $10 \times 0{,}053 = 0{,}53$.

Jeżeli mamy liczbę pomnożyć przez 100, to mnożymy ją przez 10 i jeszcze raz przez 10, czyli przesuwamy przecinek o dwa miejsca na prawo.

Np. $1000 \times 2{,}5789 = 2578{,}9$; $10\,000 \times 0{,}005\,678 = 56{,}78$.

Naodwrót liczbę dzielimy przez 10 (100, 1000, i t. d.), przesuwając przecinek o jedno (dwa, trzy i t. d.) miejsca na lewo.

Np. $13{,}65 : 10 = 1{,}365$; $231{,}5 : 100 = 2{,}315$.

Uwaga. Jeżeli w dzielnej brakuje miejsc całkowitych, to brakujące miejsca zastępujemy zerami.

Np. $5 : 10 = 0{,}5$; $3 : 100 = 0{,}03$; $0{,}05 : 100 = 0{,}0005$ i t. d.

## Zadania

1. Pomnóż przez 10, 100, 1000, 10 000 następujące liczby:
*a)* 2586,4; 4,0821; 0,2361; 0,000 423;
*b)* 0,0003; 0,000008; 5,0001; 8,0102004.

2. Podziel przez 10, 100, 1000, 10 000 następujące liczby:
*a)* 264,3; 48,2; 6,8; 0,4; *b)* 0,004; 0,0008; 6,0102.

3. Zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne *a) km*, *b) kg*, *c)* $m^2$, oblicz:
*a)* $10 \,.\, 4\,km\ 223\,m$; $100 \,.\, 2\,km\ 35\,m$; $1000 \,.\, 8\,m\ 4\,dcm$;
*b)* $10 \,.\, 16\,kg\ 325\,g$; $1000 \,.\, 9\,kg\ 12\,g$; $10\,000 \,.\, 2\,kg\ 4\,dkg$;
*c)* $10 \,.\, 4\,m^2\ 18\,dcm^2$; $100 \,.\, 5\,m^2\ 18\,dcm^2$; $1000 \,.\, 14\,m^2\ 25\,dcm^2$.

4. Zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne *a) km*, *b)* $m^2$, *c)* $m^3$ oblicz:
*a)* $14\,km\ 124\,m : 10$; $8\,km\ 16\,m : 100$; $15\,km\ 6\,m : 1000$;
*b)* $26\,m^2\ 5\,dcm^2 : 10$; $12\,m^2\ 64\,dcm^2 : 100$; $2\,m^2\ 3\,dcm^2 : 1000$;
*c)* $5\,m^3\ 445\,dcm^3 : 10$; $8\,m^3\ 65\,dcm^3 : 100$; $1\,m^3\ 5\,dcm^3 : 1000$.

5. Ile to jest *m*: 2,325 *km*; 0,035 *km*; 0,2 *km*; 0,0005 *km*; 23 *dcm*; 32,5 *cm*; 5,6 *dcm*?

6. Ile to jest *dcm*:
12,53 *m*; 0,05 *m*; 3,25 *cm*; 536,25 *mm*; 0,000536 *km*.
7. Ile to jest *g*: 0,053 *kg*; 3,256 *dkg*; 0,000007 *t*.
8. Wstaw zamiast litery x odpowiednią liczbę dziesiętną:
32,5 *m* = x *km*; 0,0053 *m* = x *dcm*; 2,35 *ha* = x *a*;
2,00053 *m* = x *dcm*; 53 *cm* = x *dcm*; 8,75 *a* = x $m^2$;
3,257 *kg* = x *dkg*; 0,0057 *kg* = x *g*; 1,25 *kg* = x *t*.

## Dodawanie liczb dziesiętnych

Mamy obliczyć sumę: 7,956 + 9,21 + 0,047.

Napiszmy wszystkie składniki pod sobą tak, by przecinki były pod sobą. W naszym więc przykładzie napiszemy:

$$\begin{array}{r} 7{,}956 \\ 9{,}21\phantom{0} \\ 0{,}047 \\ \hline 17{,}213. \end{array}$$

(1 1 1)

Każda z tych liczb jest sumą pewnej liczby całych, dziesiątych, setnych i tysięcznych. Ponieważ w sumie możemy składniki dowolnie łączyć i w dowolnym porządku dodawać, więc dodajemy najpierw tysięczne. Otrzymamy tysięcznych: 7 + 6 = 13 t. j. 1 setna i **3** tysięczne. Otrzymaną **1** setną dodajemy do setnych.

Będziemy mieli setnych: **1** + 4 + 1 + 5 = 11 t. j. 1 dziesiąta i **1** setna. Otrzymaną **1** dziesiątą dodajemy do dziesiątych. Będziemy mieli dziesiątych: **1** + 2 + 9 = 12 t. j. 1 cała i **2** dziesiąte. Otrzymaną **1** całą dodajemy do całych. Mamy całych 1 + 9 + 7 = **17**. Otrzymaliśmy więc: 17,213.

Widzimy zatem, że sumę liczb dziesiętnych oblicza się w podobny sposób, jak sumę liczb całkowitych.

Podobnie mamy:

$$\begin{array}{l} 2{,}561 \\ 0{,}0062 \\ 1{,}05 \\ \hline 3{,}6172. \end{array}$$

(1)

**Zadania**

Oblicz następujące sumy:

*a)* 2,8 + 3,5; 2,5 + 3,07; 3,8 + 0,36; 5,4 + 3,41;

*b)* 5,384 + 3,75 + 0,406; 0,5 + 1,23 + 3,27;

*c)* 3,71 + 4,07 + 3,005; 1,567 + 4,836 + 9,41;

0,238 + 0,762 + 2,004; 3,9 + 85 + 15,04 + 0,1.

2. Wykonaj następujące dodawania i sprawdź:

| *a)* | *b)* | *c)* | *d)* |
|---|---|---|---|
| 6,57 | 5,74 | 0,5 | 1,8564 |
| 4,37 | 2,693 | 0,02 | 2,0081 |
| 6,23 | 3,6 | 0,37 | 17,02 |

3. Oblicz następujące sumy, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne, lub liczby dziesiętne na ułamki:

*a)* $5{,}37 + \frac{156}{1000}$, $2{,}43 + \frac{19}{100} + 1{,}53 + \frac{54}{100}$;

*b)* $3{,}71 + \frac{2}{5} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{20} + \frac{3}{40} + 0{,}01$; $2 + 6{,}73 + \frac{9}{25}$;

*c)* $24{,}73 + \frac{21}{12} + 3\frac{11}{32} + 2{,}008$; $\frac{7}{40} + \frac{11}{80} + 2{,}471 + 0{,}32$.

4. Oblicz następujące sumy, zamieniając liczby dziesiętne na ułamki dziesiętne:

$\frac{2}{7} + 0{,}3 + 2\frac{3}{5}$, $\frac{1}{8} + 2{,}54 + 4\frac{1}{9}$, $0{,}01 + 2\frac{3}{11} + \frac{14}{100}$.

5. Co jest większe: *a)* 3,54 + 2,57; czy 4,57 + 0,96;
*b)* 5,08 + 2,97 + 3,54; czy 6,93 + 4,57;
*c)* 0,57 + 0,23; czy 0,4 + 0,5?

6. Nie wykonując dodawania, rozstrzygnij, która z sum jest większa: *a)* 5,36 + 2,42; czy 2,93 + 1,57;
*b)* 2,17 + 1,5; czy 0,75 + 1,9; *c)* 0,17 + 0,05; czy 0,4 + 0,1?

7. *a)* W r. 1931 wywieziono z Polski w tysiącach tonn: węgla 13 827; drzewa 1757; wyrobów z drzewa 52,6; zboża 409,8; cukru 345,8; przetworów ropy 186,6; wyrobów tkackich 5,8; ile tonn razem wywieziono?

*b)* W r. 1931 przywieziono do Polski w tysiącach tonn: rudy metali 561,3; nawozów sztucznych 177,1; żelaza 372,4; maszyn 17,8; zboża 45,4; surowców dla fabryk tkackich 98,6; wyrobów tkackich 3,2; oblicz całkowity przywóz!

8. Oblicz światową produkcję diamentów w r. 1929, jeśli poszczególne kraje wyprodukowały: Afryka południowa 732,2 *kg*, Kongo Belgijskie 381,5 *kg*, Wybrzeże Złote 132,1 *kg*, Afryka zachodnia 119,4 *kg*,Angola 62,4 *kg*, Gujana Brytyjska 25,2 *kg*, inne kraje 15,2 *kg*.
9. Oblicz światową produkcję złota w r. 1930, jeśli poszczególne kraje wyprodukowały w tonnach: Afryka Południowa 333,3; Stany Zjednoczone 69,4; Kanada 65,5; Z. S. R. R. 31,1; Meksyk 20,8; Rodezja 17,3; Australja 13,6; Indje Brytyjskie 11,3; Japonja 10,4; Afryka Zachodnia 6,2; inne kraje 57,5.
10. Długość brzegu lądów wynosi w tysiącach *km*: Europy 37,2; Azji 70,6; Afryki 30,6; Ameryki 103,7; Australji 19,5; ile wynosi długość brzegu wszystkich lądów?
11. Jeden z boków prostokąta wynosi 6,54 *m*, drugi zaś jest o 4,59 *m* dłuższy; ile wynosi obwód tego prostokąta?
12. Dom ma 16,5 *m* długości, a 9,25 *m* szerokości. Płot ustawiono w odległości 7 *m* od dłuższego boku i 5,5 *m* od krótszego; oblicz długość płotu! (Plan w skali 1:100!)
13. Koło rozpędowe zrobiło w pierwszej sekundzie 0,3 obrotu, w drugiej 1 obrót, w trzeciej 1,6 obrotu, w czwartej 2,5 obrotu, w piątej 3,2 obrotu. Ile obrotów zrobiło w tych 5 sekundach? O jaki kąt odchyliło się od początkowego położenia?
14. W latach od 1921 do 1929 polska komunikacja lotnicza wykazuje następujące dane:

    *a)* przebyto drogę w tysiącach *km*: 66,2; 185,3; 263,1; 465,7; 905,9; 918,4; 1133,8; 1189,7; 1152,2.

    *b)* przewieziono bagażu w *q*: 7,7; 17,2; 26,9; 76; 100,3; 159,1; 288,6; 247,8; 439,2.

    *c)* przewieziono pocztę w *q*: 9,4; 22,2; 12,3; 12,8; 22,5; 15; 141,1; 361,4; 536,1.

    Oblicz: *a)* całkowitą drogę w tym czasie, *b)* ciężar przewiezionego bagażu i poczty w tym czasie!

## Odejmowanie liczb dziesiętnych

Mamy od liczby 157,431 odjąć liczbę 69,753.
Oczywiście: $157{,}431 = \frac{157431}{1000}$; $69{,}753 = \frac{69753}{1000}$.
A zatem: $157{,}431 - 69{,}753 = \frac{157431}{1000} - \frac{69753}{1000}$.

Ponieważ:
$$\begin{array}{r} 157431 \\ -\ 69753 \\ \hline 87678, \end{array}$$

przeto $157{,}431 - 69{,}753 = \frac{87678}{1000} = 87{,}678$.

Ten sam wynik otrzymamy, podpisując pod odjemną odjemnik tak, aby przecinki były pod sobą, następnie wykonując odejmowanie, jak w przypadku liczb całkowitych, a w wyniku umieszczając przecinek w kolumnie przecinków.

W naszym więc przykładzie otrzymamy:
$$\begin{array}{r} 157{,}431 \\ -\ 69{,}753 \\ \hline 87{,}678. \end{array}$$

Uwaga. Przy obliczaniu różnicy przyjmujemy, że składniki mają równą liczbę miejsc dziesiętnych. Wyobrażamy bowiem sobie, że brakujące cyfry dziesiętne są zerami.

Np.:
$$\begin{array}{r} 12{,}1\emptyset\emptyset \\ 3{,}457 \\ \hline 8{,}643. \end{array}$$

### Zadania

1. Wykonaj odejmowania i sprawdź:
*a)* $38{,}3 - 3{,}865$; $203 - 5{,}847$; $2 - 0{,}0042$; $9{,}436 - 8{,}679$;
*b)* $0{,}47 - 0{,}294$; $0{,}5 - 0{,}05$; $3{,}008 - 2{,}949$; $23{,}7 - 15{,}8$.

2. Oblicz następujące wyrażenia: *a)* $4{,}56 + 2{,}37 - 5{,}94$;
*b)* $2{,}57 - 1{,}43 - 0{,}57 - 0{,}34 - 0{,}12 + 0{,}34 - 0{,}45$;
*c)* $0{,}52 + 0{,}23 - 0{,}71 - 0{,}01 - 0{,}02 + 0{,}23$.

3. Oblicz następujące różnice, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne, lub liczby dziesiętne na ułamki:
$3{,}7 - \frac{2}{5}$; $16{,}031 - \frac{4}{25}$; $5{,}32 - \frac{5}{40}$; $\frac{171}{32} - 3{,}21$; $\frac{192}{16} - 7{,}32$.

4. Oblicz następujące różnice, zamieniając liczby dziesiętne na ułamki: $2{,}5 - \frac{1}{6}$; $\frac{17}{3} - 2{,}71$; $2\frac{3}{7} - 0{,}01$.
5. Oblicz następujące wyrażenia:
   *a)* $2{,}73 + \frac{4}{5} - 0{,}01 + \frac{1}{8}$; *b)* $14\frac{2}{5} - 3{,}21 + \frac{1}{25} - \frac{1}{16}$;
   *c)* $15\frac{1}{16} - 8{,}26 - 2\frac{3}{4} + \frac{1}{10}$; *d)* $21{,}42 - \frac{1}{6} + 3\frac{8}{9} - 0{,}41$;
   *e)* $28\frac{14}{7} - 9{,}06 + 2{,}3 + \frac{3}{16}$; *f)* $4\frac{2}{11} - \frac{1}{32} + 0{,}14 - 0{,}04$.
6. Oblicz następujące różnice, zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne:
   *a)* 16 *m* 37 *cm* — 2 *m* 28 *cm*; 2 *m* 4 *dcm* 7 *cm* — 8 *dcm* 9 *cm*;
   *b)* 13 *ha* 41 *a* — 8 *ha* 2 *a*; 121 $km^2$ 84 *ha* — 83 $km^2$ 46 *ha*;
   *c)* 214 $m^3$ 411 $dcm^3$ — 108 $m^3$ 603 $dcm^3$.
7. Wstaw zamiast litery x odpowiednią liczbę:
   *a)* $287{,}23 + x = 321{,}49$;
   *b)* $x - 28{,}19 = 36{,}294$;
   *c)* $(65{,}23 + x) - 8{,}01 = 75{,}26$;
   *d)* $(264{,}21 - x) + 0{,}8 = 2{,}1$;
   *e)* $(x - 16{,}29) + 43{,}18 = 96{,}001$;
   *f)* $(18{,}24 - x) + 9{,}05 = 12{,}41$.
8. Oblicz następujące wyrażenia:
   *a)* $54{,}26 - 18{,}31 + 0{,}004 - 2{,}315 - 0{,}16 + 21{,}18$;
   *b)* $104{,}008 - 63{,}0108 + 13{,}402 - 11{,}60001$.
9. Uczeń dostał na wydatki 7,5 *zł*, z czego zaoszczędził 1,75 *zł*; ile wydał?
10. Kupiec kupił 5,73 tonn zboża i sprzedał 3,07 tonny; ile mu zostało?
11. Z dwóch chłopców jeden ma 1,56 *m* wzrostu, drugi zaś jest o 19 *cm* niższy; ile wynosi wzrost niższego chłopca?
12. Z zapasu herbaty 18,5 *kg* kupiec sprzedał: $\frac{1}{2}$ *kg*; 0,05 *kg*; 0,1 *kg*; 1,25 *kg*; 0,07 *kg*; $\frac{1}{4}$ *kg*; ile mu zostało?
13. Las miał 1,95 $km^2$ powierzchni, z czego wycięto 25,4 *ha*; ile lasu zostało?
14. Z beczki, zawierającej 2 *hl* piwa, odlano: $25\frac{1}{2}$ *l*, 0,75 *hl* i 48 *l*; ile *hl* piwa zostało w beczce?
15. Oblicz obwód prostokąta, którego dłuższy bok wynosi 2,35 *m*, krótszy zaś ma o 0,48 *m* mniej!

16. Staś miał o 5,45 *zł* więcej, niż Stefek, Wacek zaś o 16,04 *zł* więcej, niż Stefek; o ile więcej pieniędzy miał Wacek, niż Staś?

17. Z posiadanej kwoty 10 000 *zł* zapłacono za budowę domu w maju 6375,57 *zł*, w czerwcu 1487,59 *zł*, w lipcu 2114,21 *zł*; ile pieniędzy brakuje w sierpniu do wypłacenia 1438 *zł*?

18. Z worka 100-kilowego mąki usypano najpierw $27\frac{1}{2}$ *kg*, a potem 16,3 *kg*. Następnie dosypano 41 *kg*; ile *kg* mąki brakuje, aby worek był pełny?

19. Porównaj produkcję ziemniaków w Polsce w r. 1930 z produkcją innych krajów, wiedząc, że produkcja ta w miljonach tonn wyraża się następującemi liczbami: Polska 309; Stany Zjednoczone 98,3; Czechosłowacja 81,8; Wielka Brytanja 45,3; Belgja 27,5; Holandja 25,8; Włochy 19,5; Niemcy 471.

20. Przeciętne zużycie żyta w latach 1928—30 wynosiło rocznie dla jednego człowieka: w Polsce 217,8 *kg;* w Austrji 93,3 *kg,* w Czechosłowacji 122,2 *kg,* w Danji 136,8 *kg,* w Niemczech 125,3 *kg,* w Z. S. R. R. 130,6 *kg;* ile *kg* żyta więcej zużył przeciętnie w ciągu roku mieszkaniec Polski, niż innych krajów?

21. Wywóz zboża z Polski, wyrażony w tysiącach tonn, wynosił: w 1927 r. 134,2; w 1928 r. 208,2; w 1929 r. 506,8, w 1930 r. 789,2; oblicz, ile co roku wynosił przyrost wywozu zboża?

# SPIS RZECZY

## Układ dziesiętny



## Dodawanie



## Odejmowanie

## Odcinki i kąty



## Wielokąty



## Mnożenie

## Dzielenie



## Plan i skala



## Długości i pola

## Objętości



## Własności liczb całkowitych

## Ułamki

## Liczby dziesiętne