S. BANACH, W. SIERPIŃSKI, W. STOŻEK

ARYTMETYKA i GEOMETRIA

DLA VI KLASY SZKOŁY POWSZECHNEJ

ERROLL PUBLISHING CO., LTD.
40 BRUNTSFIELD PLACE
EDINBURGH

S. BANACH, W. SIERPIŃSKI, W. STOŻEK

ARYTMETYKA i GEOMETRIA

DLA VI KLASY SZKOŁY POWSZECHNEJ

ERROLL PUBLISHING CO., LTD.
40 BRUNTSFIELD PLACE
EDINBURGH

Printed in Great Britain by
BISHOP & SONS, LTD., Photo-Litho Printers, EDINBURGH

Ułamki

Ułamek jako część całości

Zadania

1. Obierz odcinek jednostkowy, podziel go na 6 równych części, a następnie narysuj $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{6}$ tego odcinka!
2. Obierz odcinek jednostkowy i narysuj $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{5}$ tego odcinka!
3. Ile to jest *cm*: $\frac{9}{10}$ *m*, $\frac{3}{5}$ *m*, $\frac{1}{4}$ *m*, $\frac{29}{20}$ *m*, $\frac{51}{50}$ *m*?
4. Ile to jest *gr*: $\frac{1}{10}$ *zł*, $\frac{2}{5}$ *zł*, $\frac{7}{4}$ *zł*, $\frac{27}{25}$ *zł*, $\frac{13}{20}$ *zł*?
5. Ile to jest *kg*: $\frac{1}{100}$ *t*, $\frac{3}{50}$ *t*, $\frac{3}{200}$ *t*, $\frac{7}{125}$ *t*, $\frac{11}{500}$ *t*?
6. Ile to jest cm^2: $\frac{1}{10}$ dcm^2, $\frac{1}{100}$ dcm^2, $\frac{3}{20}$ dcm^2, $\frac{5}{4}$ dcm^2?
7. Ile to jest m^2: $\frac{3}{10}$ *ha*, $\frac{23}{100}$ *ha*, $\frac{8}{1000}$ *ha*, $\frac{7}{10\,000}$ *ha*, $\frac{7}{5}$ *ha*, $\frac{113}{100}$ *ha*?
8. Jakim ułamkiem metra jest: 12 *cm*, 20 *cm*, 75 *cm*, 150 *cm*, 81 *cm*, 220 *cm*?
9. Jakim ułamkiem kilograma jest: 100 *g*, 15 *g*, 125 *g*, 250 *g*, 600 *g*, 725 *g*?
10. Jakim ułamkiem tygodnia są: 3 dni, 4 dni, 6 dni, 12 dni?
11. Jakim ułamkiem tuzina jest: 5 sztuk, 9 sztuk, 11 sztuk, 15 sztuk, 27 sztuk?
12. Jakim ułamkiem godziny jest: 15 min., 30 min., 12 min., 25 min., 80 min., 110 min.?
13. Ile to jest:

    a) $\frac{2}{3}$ z 15 *m*; $\frac{3}{20}$ z 1 *zł*; $\frac{3}{5}$ z 2 *kg*; $\frac{11}{15}$ z 33 *zł*;

    b) $\frac{5}{6}$ z 1 tuzina; $\frac{7}{12}$ z 1 kopy; $\frac{3}{8}$ z 4 *dkg*; $\frac{9}{20}$ z 51 *zł*;

    c) $\frac{8}{5}$ z 20 *cm*; $\frac{9}{4}$ z 8 *l*; $\frac{19}{14}$ z 42 *km*; $\frac{13}{10}$ z 1 *ha*;

    d) $\frac{25}{18}$ z 15 tuzinów; $\frac{29}{20}$ z 7 kóp; $\frac{32}{25}$ z 1 *q*; $\frac{12}{5}$ z 1 m^2;

    e) $\frac{18}{5}$ z 37 *zł*; $\frac{6}{5}$ z 1 roku; $\frac{31}{18}$ z 7 *km* 380 *m*?

14. Wyraź w metrach $\frac{1}{5}$ część z: *a)* 1 *km*, *b)* 3 *km*, *c)* $\frac{1}{2}$ *km*, *d)* $\frac{1}{4}$ *km*, *e)* $\frac{5}{4}$ *km*, *f)* $\frac{7}{20}$ *km*!
15. Wyraź w sekundach $\frac{3}{2}$ części z: *a)* 1 minuty, *b)* $\frac{1}{5}$ min., *c)* $\frac{7}{30}$ godz., *d)* $\frac{1}{4}$ godz. 2 min.!
16. Wyraź w stopniach $\frac{2}{3}$ części z: *a)* kąta prostego, *b)* kąta półpełnego, *c)* kąta pełnego, *d)* kąta 120^0, *e)* połowy kąta prostego, *f)* dwóch trzecich kąta półpełnego!
17. Podróż ze Lwowa do Krakowa pociągiem pośpiesznym trwa 5 godzin i 30 minut, z czego na postoje wypada 45 minut; jaką część okresu podróży pociąg jest w ruchu?
18. Jak długi jest odcinek, jeśli $\frac{1}{2}$ tego odcinka wynosi 7 *cm*?
19. Kupiec, zamawiając towar, złożył tytułem zadatku 46 *zł*, t. j. $\frac{1}{5}$ ceny towaru. Ile kosztuje towar?
20. Cyklista w 35 minutach przebył $\frac{1}{3}$ drogi; w jakim czasie przebędzie całą drogę, jadąc z tą samą prędkością?
21. Jak duże jest pole, jeśli $\frac{2}{3}$ tego pola wynosi 12 *ha*?
22. Ktoś, mając złożoną w P. K. O. kwotę 836 *zł*, powiększył ją o $\frac{1}{4}$ tej kwoty. Ile razem wynosi złożona kwota?
23. Urzędnik zarabia 270 *zł* miesięcznie, z czego oszczędza $\frac{1}{9}$ tej kwoty. Jaką kwotę zaoszczędza w ciągu roku?
24. Kupiono dom za 27 000 *zł*. Na odnowienie wydano $\frac{17}{300}$ tej kwoty. Ile kosztował dom razem z odnowieniem?
25. Ktoś kupił dom za 23 400 *zł* i zapłacił gotówką $\frac{7}{8}$ tej kwoty. Ile został winien?
26. Kupiec sprzedał $\frac{1}{5}$ zwoju sukna o długości 90 *m*, poczem sprzedał jeszcze $\frac{1}{3}$ reszty; ile sukna mu zostało?
27. Łódź podwodna wypuściła torpedę przeciw statkowi nieprzyjacielskiemu. Torpeda, przebiegłszy $\frac{2}{7}$ drogi, eksplodowała. W jakiej odległości od statku eksplodowała torpeda, jeżeli odległość statku od łodzi podwodnej wynosiła 2100 *m*?
28. Kierowca samochodu przejechał trasę wyścigową w przeciągu 48 minut; w następnym roku przebył tę trasę w czasie o $\frac{1}{12}$ krótszym. Ile minut zużył wówczas na przebycie trasy?

29. Z 56 uczniów V klasy $\frac{7}{8}$ otrzymało świadectwa, pozwalające przejść do klasy VI. Ilu uczniów zostało w klasie V-tej?
30. Z kwoty 150 *zł*, przeznaczonej na miesięczne wyżywienie rodziny, gospodyni wydaje $\frac{1}{6}$ na mięso, $\frac{1}{3}$ na mleko, chleb i ziemniaki. Ile pozostaje pieniędzy na inne artykuły spożywcze?
31. Właściciel obszaru, obejmującego 60 *ha*, przeznaczył $\frac{3}{8}$ pod zasiew pszenicy, $\frac{1}{4}$ pod zasiew żyta, $\frac{1}{12}$ pod zasiew jęczmienia, $\frac{1}{6}$ pod zasiew owsa, a resztę na uprawę jarzyn. Jaki obszar pola przeznaczył na każdy gatunek zboża, a jaki na jarzyny?
32. Jaś rozdzielił 150 orzechów między 4 kolegów w ten sposób, że pierwszemu dał $\frac{1}{5}$ wszystkich orzechów, drugiemu $\frac{1}{4}$ reszty, trzeciemu $\frac{1}{3}$ z tego, co pozostało, czwartemu $\frac{1}{2}$ tego, co mu dalej pozostało. Pozostałą resztę wziął sobie. Ile orzechów otrzymał każdy z kolegów, a ile Jaś?
33. Górnik, chcąc z dna szybu wydostać się na powierzchnię ziemi, przebył po drabinach $\frac{1}{5}$ część drogi. Następnie $\frac{1}{3}$ drogi jechał windą, wreszcie $\frac{1}{8}$ szedł schodami. Jak głęboko znalazł się wówczas pod powierzchnią ziemi, jeżeli szyb jest głęboki na 1200 *m*? Jaka część drogi pozostaje mu do przebycia?
34. Polska posiada 388 390 km^2, z czego $\frac{1}{2}$ przypada na pola orne, $\frac{1}{10}$ na łąki, $\frac{2}{25}$ na pastwiska, $\frac{1}{4}$ na lasy, a reszta na nieużytki. Ile km^2 przypada na nieużytki?

Ułamki właściwe i niewłaściwe, liczby mieszane

Zadania

1. Wypisz ułamki właściwe, niewłaściwe i pozorne z pośród następujących ułamków:
$\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{28}{7}$, $\frac{7}{28}$, $\frac{351}{117}$, $\frac{605}{55}$, $\frac{730}{97}$, $\frac{85}{96}$.
2. Przedstaw jako liczby całkowite następujące ułamki pozorne: $\frac{6}{3}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{75}{15}$, $\frac{121}{11}$, $\frac{468}{13}$, $\frac{7168}{56}$.

3. Przedstaw liczby całkowite: 4, 9, 12, 50, 67 jako ułamki o mianownikach: *a)* 2, *b)* 5, *c)* 11.
4. Zamień na liczby mieszane następujące ułamki niewłaściwe:
   a) $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{19}{4}$, $\frac{27}{5}$, $\frac{25}{6}$, $\frac{39}{7}$, $\frac{94}{7}$, $\frac{151}{8}$, $\frac{38}{9}$, $\frac{137}{9}$, $\frac{219}{10}$;
   b) $\frac{131}{11}$, $\frac{180}{13}$, $\frac{219}{14}$, $\frac{584}{17}$, $\frac{935}{18}$, $\frac{437}{20}$, $\frac{596}{25}$, $\frac{739}{28}$, $\frac{837}{30}$;
   c) $\frac{847}{55}$, $\frac{1937}{64}$, $\frac{5324}{59}$, $\frac{3246}{145}$, $\frac{2153}{172}$, $\frac{8431}{215}$.
5. Zamień na ułamki niewłaściwe następujące liczby mieszane:
   a) $2\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{4}$, $3\frac{5}{6}$, $4\frac{3}{7}$, $6\frac{5}{8}$, $5\frac{7}{9}$, $9\frac{3}{10}$;
   b) $8\frac{7}{11}$, $7\frac{2}{13}$, $4\frac{11}{15}$, $20\frac{5}{17}$, $32\frac{6}{19}$, $18\frac{9}{20}$;
   c) $14\frac{4}{25}$, $23\frac{19}{27}$, $15\frac{17}{32}$, $34\frac{15}{56}$, $27\frac{18}{125}$.
6. Licznik ułamka wynosi 18. Dobierz mianownik tak, by otrzymany ułamek był *a)* pozorny, *b)* niewłaściwy i nie pozorny; ile ułamków otrzymasz w *a)*, ile w *b)*?
7. Napisz największą liczbę całkowitą, mniejszą od ułamka: *a)* $\frac{45}{7}$, *b)* $\frac{147}{11}$, *c)* $\frac{674}{25}$.
8. Napisz najmniejszą liczbę całkowitą, większą od ułamka: *a)* $\frac{35}{16}$, *b)* $\frac{512}{17}$, *c)* $\frac{908}{63}$.
9. Ile to jest *a)* *m* i *cm*: $\frac{512}{100}$ *m*, $\frac{3172}{100}$ *m*, $\frac{470}{100}$ *m*, $\frac{58}{10}$ *m*?
   b) *ha* i *a*: $\frac{425}{100}$ *ha*, $\frac{915}{100}$ *ha*, $\frac{950}{100}$ *ha*, $\frac{46}{10}$ *ha*?
   c) m^2 i cm^2: $\frac{54\,325}{10\,000}$ m^2, $\frac{752}{100}$ m^2?
10. Przedstaw w postaci liczby mieszanej, a następnie ułamka:
    a) *kg*: 3 *kg* 251 *g*, 5 *kg* 37 *g*, 21 *kg* 47 *dkg*, 18 *kg* 6 *dkg* 9 *g*;
    b) *km*: 2 *km* 500 *m*, 3 *km* 429 *m*, 7 *km* 940 *m*, 1 *km* 30 *m*;
    c) *ha*: 12 *ha* 30 *a*, 4 *ha* 51 *a*, 7 *ha* 2 *a*.

Rozszerzanie i skracanie ułamków

Zadania

1. Przekonaj się, że $\frac{7}{10}$ *kg* i $\frac{70}{100}$ *kg* są sobie równe, wyrażając te ciężary w *g*!
2. Obierz dowolny odcinek i utwórz $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{12}$ tego odcinka; przekonaj się, że te odcinki są sobie równe.
   Zatem: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$.
   Podobnie przekonaj się, że:
   a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$; *b)* $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$;
   c) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$; *d)* $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$; *e)* $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$.

3. Zamień ułamki:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{23}{30}$ na ułamki o mianowniku 60;
b) $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{27}{40}$ na ułamki o mianowniku 80;
c) $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{23}{64}$ na ułamki o mianowniku 128.

4. Zamień ułamki:

a) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{14}{19}$, $\frac{21}{19}$ na ułamki o liczniku 42;
b) $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{25}{16}$, $\frac{50}{183}$ na ułamki o liczniku 100.

5. Uprość następujące ułamki:

a) $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{24}{14}$ przez 2; *b)* $\frac{3}{12}$, $\frac{9}{15}$, $\frac{12}{21}$, $\frac{27}{12}$ przez 3;
c) $\frac{10}{15}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{35}{40}$, $\frac{30}{20}$ przez 5; *d)* $\frac{14}{21}$, $\frac{7}{28}$, $\frac{42}{70}$, $\frac{21}{140}$ przez 7;
e) $\frac{22}{33}$, $\frac{55}{77}$, $\frac{121}{55}$, $\frac{143}{176}$ przez 11.

6. Uprość następujące ułamki tak, by otrzymany ułamek był nieprzywiedlny:

a) $\frac{6}{8}$, $\frac{12}{8}$, $\frac{18}{30}$; *b)* $\frac{30}{36}$, $\frac{20}{36}$, $\frac{30}{45}$; *c)* $\frac{60}{45}$, $\frac{70}{42}$, $\frac{110}{66}$;
d) $\frac{33}{198}$, $\frac{125}{145}$, $\frac{300}{400}$; *e)* $\frac{128}{3072}$, $\frac{260}{3900}$, $\frac{2250}{375}$.

7. Które z ułamków:

$\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{24}{30}$, $\frac{13}{32}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{71}{80}$, $\frac{27}{36}$ dadzą się przedstawić jako ułamki o mianowniku:

a) 4, *b)* 15, *c)* 40, *d)* 128, *e)* 140, *f)* 400.

8. Jaką liczbę musisz wstawić w miejsce litery x, by było:

a) $\frac{1}{2} = \frac{x}{4}$; $\frac{2}{3} = \frac{x}{12}$; $\frac{5}{7} = \frac{x}{21}$; $\frac{11}{3} = \frac{x}{15}$; $\frac{7}{4} = \frac{x}{24}$;
b) $\frac{3}{12} = \frac{x}{4}$; $\frac{6}{21} = \frac{x}{7}$; $\frac{12}{60} = \frac{x}{15}$; $\frac{72}{18} = \frac{x}{6}$; $\frac{49}{63} = \frac{x}{9}$.

9. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika, obierając jako wspólny mianownik N W W mianowników:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$; *b)* $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$; *d)* $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{5}$; *e)* $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{1}$; *f)* $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$;
g) $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$; *h)* $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{20}$; *i)* $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$; *j)* $\frac{8}{1}$, $\frac{9}{10}$; *k)* $\frac{11}{13}$, $\frac{4}{17}$;
l) $\frac{19}{22}$, $\frac{19}{16}$; *m)* $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{4}$; *n)* $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{9}$; *o)* $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{2}{15}$;
p) $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{5}{36}$; *r)* $\frac{2}{21}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{5}{42}$; *s)* $\frac{4}{15}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{13}{60}$;
t) $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{32}{25}$, $\frac{11}{35}$, $\frac{7}{150}$, $\frac{1}{200}$; *u)* $\frac{7}{20}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{15}{66}$, $\frac{2}{55}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{12}{2}$, $\frac{100}{99}$.

10. Uprość, a następnie sprowadź do wspólnego mianownika następujące ułamki:

a) $\frac{4}{12}$, $\frac{20}{30}$; *b)* $\frac{3}{12}$, $\frac{10}{16}$; *c)* $\frac{20}{15}$, $\frac{30}{50}$; *d)* $\frac{4}{20}$, $\frac{8}{36}$, $\frac{21}{27}$.

11. Uporządkuj następujące ułamki według wielkości rosnących:

a) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$; *c)* $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{7}$; *d)* $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$;
e) $\frac{11}{2}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{11}{8}$; *f)* $\frac{2}{11}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{15}$.

12. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika, a następnie uporządkuj je według wielkości malejących:
a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$; *b)* $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$; *c)* $\frac{4}{5}, \frac{7}{9}$; *d)* $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}$; *e)* $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{11}, \frac{5}{7}$;
f) $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{17}{20}$; *g)* $\frac{7}{11}, \frac{8}{12}, \frac{3}{5}, \frac{10}{15}, \frac{13}{20}$.
13. Dodaj do licznika i do mianownika ułamka $\frac{3}{5}$ liczbę 1, do licznika i mianownika otrzymanego ułamka znów dalej 1 i t. d., aż otrzymasz ułamek o mianowniku 10. Uporządkuj otrzymane ułamki według wielkości rosnących!
14. Ojciec rozdzielił 1800 *zł* w ten sposób, że dał starszemu synowi $\frac{2}{5}$ tej kwoty, a młodszemu $\frac{1}{3}$. Ile otrzymał każdy syn? Ile ojcu jeszcze zostało?
15. Z dwóch urzędników, mających równe pobory miesięczne, jeden wydaje na mieszkanie $\frac{2}{7}$, a drugi $\frac{3}{10}$ swoich poborów. Który wydaje na mieszkanie więcej? Oblicz, ile każdy z nich wydaje, jeżeli pobory wynoszą 210 *zł*?

Dodawanie i odejmowanie ułamków

Zadania

1. Narysuj $\frac{3}{10}$ i $\frac{4}{10}$ obranego odcinka, a następnie odcinek będący ich sumą. Jakim ułamkiem obranego odcinka jest ta suma?
2. Oblicz:
a) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$; $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}$; $\frac{5}{17}+\frac{11}{17}$; $\frac{9}{23}+\frac{16}{23}$; $\frac{8}{13}+\frac{5}{13}$;
b) $\frac{23}{52}+\frac{7}{52}$; $\frac{8}{15}+\frac{13}{15}$; $\frac{11}{20}+\frac{19}{20}$; $\frac{49}{45}+\frac{41}{45}$;
c) $\frac{8}{14}+\frac{5}{14}+\frac{9}{14}$; $\frac{2}{17}+\frac{5}{17}+\frac{10}{17}$; $\frac{29}{100}+\frac{14}{100}+\frac{37}{100}$.
3. Narysuj $\frac{7}{10}$ i $\frac{3}{10}$ obranego odcinka, a następnie różnicę tych odcinków. Jakim ułamkiem obranego odcinka jest ta różnica?
4. Oblicz:
a) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}$; $\frac{9}{11}-\frac{4}{11}$; $\frac{8}{13}-\frac{3}{13}$; $\frac{21}{17}-\frac{8}{17}$; $\frac{32}{15}-\frac{2}{15}$;
b) $\frac{18}{25}-\frac{3}{25}$; $\frac{17}{39}-\frac{3}{39}$; $\frac{41}{15}-\frac{21}{15}$; $\frac{49}{76}-\frac{5}{76}$; $\frac{14}{81}-\frac{5}{81}$;
c) $\frac{48}{49}-\frac{34}{49}$; $\frac{81}{100}-\frac{21}{100}$; $\frac{114}{97}-\frac{35}{97}$; $\frac{321}{117}-\frac{236}{117}$.
5. Oblicz:
a) $\frac{4}{5}+\frac{6}{5}-\frac{3}{5}$; $\frac{6}{7}+\frac{1}{7}-\frac{2}{7}$; $\frac{15}{4}+\frac{1}{4}-\frac{7}{4}$;
b) $\frac{7}{10}-\frac{3}{10}+\frac{4}{10}$; $\frac{5}{12}-\frac{3}{12}+\frac{7}{12}$; $\frac{21}{17}-\frac{5}{17}+\frac{1}{17}$;

c) $\frac{27}{49}+\frac{18}{49}-\frac{17}{49}$; $\frac{51}{32}-\frac{17}{32}+\frac{21}{32}$; $\frac{14}{51}-\frac{5}{51}+\frac{70}{51}$;
d) $\frac{97}{145}+\frac{78}{145}-\frac{39}{145}$; $\frac{317}{210}-\frac{105}{210}+\frac{78}{210}$;
e) $\frac{19}{27}-\frac{4}{27}-\frac{11}{27}$; $\frac{51}{70}-\frac{14}{70}-\frac{2}{70}$; $\frac{42}{95}-\frac{13}{95}-\frac{9}{95}$;
f) $\frac{21}{40}-\frac{3}{40}+\frac{12}{40}-\frac{8}{40}$; $\frac{56}{81}-\frac{7}{81}+\frac{19}{81}-\frac{38}{81}$;
g) $\frac{121}{135}-\frac{46}{135}-\frac{62}{135}+\frac{32}{135}$; $\frac{311}{164}-\frac{105}{164}-\frac{79}{164}-\frac{31}{164}$.

6. Jaś wydał $\frac{2}{7}$ swych oszczędności na przybory szkolne, a $\frac{1}{7}$ na L. O. P. P., przyczem wydał razem 2 *zł* 10 *gr*. Ile wynosiły jego oszczędności? Ile wydał na L. O. P. P., a ile na przybory?
7. Waga była w równowadze, gdy na jednej szalce położono kawałek mydła długości 60 *cm*, na drugiej $^1/_2$ *kg* oraz kawałek mydła tegoż gatunku, długości 20 *cm*; ile waży kawałek mydła długości 50 *cm*?
8. Rolnik obsiał $\frac{3}{10}$ swego pola pszenicą, a $\frac{1}{10}$ jęczmieniem i w ten sposób obsiał 28 *ha*. Ile *ha* pola posiadał?
9. Oblicz:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}+\frac{7}{12}$, $\frac{5}{7}+\frac{8}{21}$, $\frac{1}{3}+\frac{11}{15}$, $\frac{3}{10}+\frac{13}{40}$, $\frac{9}{17}+\frac{50}{51}$;
b) $\frac{4}{27}+\frac{7}{9}$, $\frac{71}{100}+\frac{9}{20}$, $\frac{9}{26}+\frac{7}{13}$, $\frac{5}{24}+\frac{11}{6}$, $\frac{14}{65}+\frac{8}{13}$, $\frac{11}{38}+\frac{5}{19}$;
c) $\frac{2}{3}+\frac{11}{27}+\frac{5}{9}$, $\frac{1}{12}+\frac{5}{6}+\frac{7}{24}$, $\frac{15}{26}+\frac{17}{52}+\frac{10}{13}$, $\frac{23}{76}+\frac{31}{38}+\frac{24}{19}$;
d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}-\frac{5}{12}$, $\frac{6}{7}-\frac{5}{21}$, $\frac{2}{3}-\frac{8}{15}$, $\frac{12}{13}-\frac{15}{26}$, $\frac{9}{10}-\frac{17}{50}$;
e) $\frac{5}{2}+\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$, $\frac{11}{3}-\frac{4}{9}+\frac{23}{27}$, $\frac{8}{13}-\frac{3}{26}-\frac{5}{52}$, $\frac{8}{15}-\frac{7}{30}+\frac{2}{5}$
f) $\frac{23}{120}-\frac{9}{80}+\frac{37}{240}$, $\frac{49}{50}-\frac{29}{60}+\frac{43}{300}$, $\frac{31}{72}+\frac{35}{108}-\frac{11}{216}$;
•*g)* $\frac{1}{1}+\frac{5}{4}$, $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}$, $\frac{5}{11}-\frac{1}{3}$, $\frac{4}{13}+\frac{6}{5}$, $\frac{15}{17}-\frac{4}{13}$, $\frac{2}{11}+\frac{6}{13}$;
h) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}$, $\frac{5}{4}-\frac{1}{7}+\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}+\frac{1}{5}-\frac{2}{11}$, $\frac{5}{13}-\frac{4}{11}+\frac{2}{7}$;
i) $\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}+\frac{7}{15}$, $\frac{7}{12}-\frac{5}{18}$, $\frac{4}{15}-\frac{3}{20}$, $\frac{9}{55}+\frac{45}{77}$, $\frac{15}{26}-\frac{12}{39}$;
j) $\frac{3}{4}+\frac{31}{45}-\frac{7}{20}$, $\frac{17}{42}+\frac{11}{63}-\frac{7}{28}$, $\frac{29}{45}-\frac{2}{25}+\frac{17}{65}$;
k) $\frac{9}{14}+\frac{11}{18}-\frac{5}{42}+\frac{17}{24}-\frac{2}{9}+\frac{81}{56}+\frac{8}{63}$.

10. Oblicz:

a) $4+7\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}+\frac{5}{9}$, $3\frac{9}{20}+8\frac{7}{15}$, $5\frac{13}{72}+\frac{37}{63}$;
b) $12\frac{3}{4}+8$, $15-3\frac{1}{5}$, $10\frac{7}{8}-6\frac{4}{7}$, $11\frac{5}{6}+\frac{73}{15}$;
c) $14\frac{3}{8}+5\frac{2}{5}-6\frac{5}{12}$, $7\frac{1}{6}-2\frac{5}{12}+6\frac{1}{8}$, $20\frac{7}{56}-8\frac{13}{35}+9\frac{4}{7}$;
d) $19\frac{8}{21}+11\frac{5}{14}-12\frac{11}{28}+5\frac{7}{18}-2\frac{23}{63}$;
e) $12\frac{17}{36}+8\frac{3}{8}-4\frac{2}{9}+6\frac{11}{18}-7\frac{17}{24}$;
f) $21-4\frac{7}{8}+6\frac{2}{5}-3\frac{8}{15}-1\frac{9}{20}+7\frac{23}{30}$;
g) $7\frac{3}{16}+10\frac{7}{12}-3\frac{5}{8}+7\frac{1}{3}+4\frac{19}{24}-6+\frac{51}{32}$;

h) $\frac{49}{40} + 7\frac{2}{15} - 5\frac{7}{16} + 12\frac{5}{12} + 8 - \frac{11}{240} + \frac{79}{60}$;

i) $4\frac{19}{36} + 9\frac{7}{12} - 3\frac{4}{15} + \frac{89}{60} - 2\frac{11}{20} + 6\frac{7}{40} - \frac{23}{180}$;

j) $16\frac{8}{15} + \frac{49}{60} - \frac{233}{300} + 4\frac{71}{80} - 5\frac{21}{50} + \frac{91}{100} + 14\frac{11}{30}$.

11. Gospodyni kupiła $3\frac{1}{2}$ *kg* ziemniaków, $1\frac{1}{4}$ *kg* mięsa, $\frac{1}{10}$ *kg* herbaty, $\frac{1}{4}$ *kg* kawy i $\frac{3}{4}$ *kg* cukru; jaki ciężar musi nieść do domu?
12. Beczułka z powidłami waży $5\frac{5}{8}$ *kg*, beczułka zaś sama $\frac{3}{4}$ *kg*; ile ważą powidła?
13. Ze sztuki sukna 30 *m* długiej sprzedawał kupiec kolejno: $3\frac{1}{2}$ *m*, $2\frac{3}{4}$ *m*; ile *m* sukna mu zostało?
14. Przy zakładaniu radja okazała się potrzeba $27\frac{1}{2}$ *m* drutu na antenę, $4\frac{1}{5}$ na doprowadzenie przewodu do aparatu i $6\frac{3}{4}$ *m* na uziemienie; ile *m* drutu zużyto?
15. Klasa wyruszyła o godz. 8 rano na wycieczkę, $\frac{1}{2}$ godz. szła na dworzec, $\frac{1}{3}$ godz. czekała na odejście pociągu, po $2\frac{1}{4}$ godz. jazdy klasa wysiadła, maszerowała przez $1\frac{1}{2}$ godz., potem przez $2\frac{3}{4}$ godz. był wypoczynek i zabawy, wracała na dworzec przez $1\frac{1}{2}$ godz., $\frac{3}{4}$ godz. czekała na pociąg i po $2\frac{1}{6}$ godz. jazdy wróciła do swego miasta. O której godzinie przybyła?
16. W pewnym majątku ziemskim $\frac{1}{3}$ obszaru zajmuje las, $\frac{1}{2}$ orne pole, $\frac{1}{12}$ łąki i nieużytki, a resztę wynoszącą 40 *ha* zajmuje sad i budynki gospodarskie; jak wielki jest majątek?
17. Arab, umierając, zapisał trzem synom swe wielbłądy w ten sposób, że najstarszy miał dostać $\frac{1}{2}$ wszystkich wielbłądów, średni $\frac{1}{3}$, a najmłodszy $\frac{1}{9}$. Synowie znaleźli się w kłopocie, gdyż wielbłądów było 17 i zaczęli się kłócić. Wtem nadjechał na wielbłądzie mędrzec arabski, a gdy mu powiedzieli, dlaczego się kłócą, pogodził ich w ten sposób: dołączył do 17 wielbłądów swego. Z 18 wielbłądów dał $\frac{1}{2}$ t. j. 9 najstarszemu, $\frac{1}{3}$ t. j. 6 średniemu, $\frac{1}{9}$ t. j. 2 najmłodszemu, zam zaś zabrał swego wielbłąda i odjechał. Wyjaśnij to!

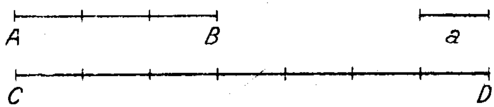
Ułamek jako wykładnik stosunku

Mamy dane dwie wielkości, np. dwa odcinki AB i CD (rys. 1). Starajmy się znaleźć odcinek, któryby się w obu mieścił bez reszty. (Przy pomocy cyrkla po kilku próbach można łatwo go znaleźć). Odcinkiem takim jest odcinek a, który w AB mieści się 3 razy, w CD 7 razy. Mówimy, że AB jest w takim stosunku do CD, jak 3 do 7. Piszemy to:

$$AB : CD = 3 : 7.$$

(Czytamy AB jest w stosunku do CD, jak 3 do 7).

Ułamek $\frac{3}{7}$ nazywamy wykładnikiem stosunku odcinka AB do CD. Z rys. 1 widać, że odcinek AB wynosi $\frac{3}{7}$ odcinka CD.



Rys. 1.

Zatem wykładnik stosunku dwóch odcinków wskazuje, jakim ułamkiem drugiego odcinka jest pierwszy odcinek.

Możemy również napisać:

$$CD : AB = 7 : 3.$$

Czytamy: CD jest w stosunku do AB, jak 7 do 3. Wykładnikiem tego stosunku jest ułamek $\frac{7}{3}$; widzimy z rys. 1, że odcinek CD wynosi $\frac{7}{3}$ odcinka AB.

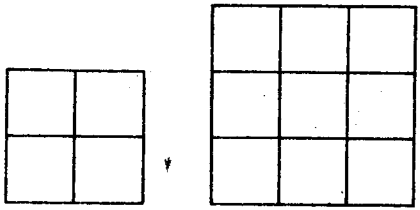
Przykład: Jaki jest wykładnik stosunku odcinków AB i CD, których długości wynoszą odpowiednio 2 *cm* i 3 *cm*?

R o z w i ą z a n i e: Ponieważ odcinek o długości 1 *cm* mieści się w obu odcinkach bez reszty, zatem możemy napisać:

$$AB : CD = 2 : 3.$$

Wykładnik stosunku odcinka AB do CD wynosi $\frac{2}{3}$. To samo odnosi się do innych wielkości, jak pola, objętości, ciężary i t. p.

Mamy np. dwa kwadraty o polach odpowiednio 4 cm^2 i 9 cm^2. Ponieważ kwadrat o polu 1 cm^2 mieści się w obu bez reszty, możemy powiedzieć, że pierwszy kwadrat jest do drugiego w stosunku, jak 4 : 9 (czytaj 4 do 9). Ułamek $\frac{4}{9}$ jest wykładnikiem stosunku. Oczywiście pierwszy kwadrat wynosi $\frac{4}{9}$ drugiego kwadratu.



Rys. 2.

Zadania

1. Wyznacz wykładnik stosunku pierwszej wielkości do drugiej, a następnie wykładnik stosunku drugiej wielkości do pierwszej:

   a) 2 *cm* i 5 *cm*; *b)* 7 *kg* i 9 *kg*; *c)* 5 *l* i 2 *l*;
   d) 4 cm^2 i 11 cm^2; *e)* 9 dcm^3 i 13 dcm^3; *f)* 3 *g* i 7 *g*.

2. Jakim ułamkiem pierwszej wielkości jest druga wielkość? (Wyznacz wykładnik stosunku!)

   a) 4 *dcm* i 9 *dcm*; *b)* 11 *km* i 5 *km*; *c)* 15 *m* i 4 *m*;
   d) 5 cm^2 i 8 cm^2; *e)* 3 dcm^2 i 8 dcm^2; *f)* 2 cm^3 i 3 cm^3;
   g) 7 *kg* i 2 *kg*; *h)* 13 *kg* i 1 *kg*; *i)* 15 *l* i 8 *l*.

3. Wyznacz wykładnik stosunku pierwszej wielkości do drugiej:

   a) 2 *cm* i 5 *dcm*; *b)* 1 *cm* i 1 *km*; *c)* 2 *dcm* i 3 *m*;
   d) 1 *g* i 2 *kg*; *e)* 2 cm^2 i 3 dcm^2; *f)* 5 *kg* i 1 *t*.

   (Wyraź obie wielkości w tych samych jednostkach miary!)

Ułamek jako iloraz dokładny

Iloraz dokładny

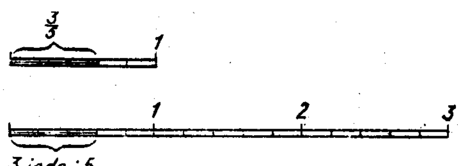
Jeżeli odcinek 14 *cm* podzielimy na kilka równych części, np. 5, to każdą taką część nazywać będziemy **ilorazem dokładnym**, otrzymanym z podzielenia 14 *cm* na 5 równych części, lub krótko ilorazem dokładnym 14 *cm* przez 5. Iloraz dokładny oznaczamy podobnie jak zwyczajny: 14 *cm* : 5.

Zadania

1. Ile *dcm* wynosi dokładny iloraz: *a)* 8 *m* : 5; *b)* 3 *m* : 2; *c)* 15 *m* : 25?
2. Ile złotych i groszy wynosi dokładny iloraz: *a)* 7 *zł* : 2; *b)* 15 *zł* : 12; *c)* 9 *zł* : 6?
3. Ile godzin, minut i sekund wynosi dokładny iloraz: *a)* 5 godz. : 3; *b)* 2 godz. : 25; *c)* 35 min. : 21?
4. Ile sztuk wynosi dokładny iloraz: *a)* 5 tuzinów : 6; *b)* 3 kopy : 15; *c)* 12 kóp 4 tuziny : 24?
5. *a)* Na 24 jednakowych ubrań potrzeba 84 *m* sukna; ile sukna potrzeba na jedno ubranie?
   b) Koło u wozu po 35 obrotach zrobiło drogę 217 *m*; jaka droga przypada na 1 obrót?

Ułamek jako iloraz dokładny

1. Na rys. 3 część jedności zakreślona wynosi $\frac{3}{5}$ jedności. Poniżej mamy 3 jedności, podzielone na 5 równych czę-



Rys 3.

ści, zatem część zakreślona wynosi 3 jedności : 5. Z porównania obu rysunków widzimy, że:

$$3 \text{ jedności} : 5 = \tfrac{3}{5} \text{ jedności}.$$

2. Na rys. 4 mamy 1 cm^2 podzielony na 3 równe części, a więc część zacieniowana wynosi $\frac{1}{3}$ cm^2. Na rys. 4 mamy

Rys. 4.

2 cm^2, podzielone na 3 równe części; zatem część zacieniowana wynosi 2 cm^2 : 3. Z porównania obu rysunków widzimy, że: 2 $cm^2 : 3 = \frac{2}{3}$ cm^2.

3. Jeżeli 7 jabłek rozdzielimy równo między 4 osoby, to każda z nich otrzyma: 7 jabłek : 4. Podział ten możemy uskutecznić, rozdzielając równo każde jabłko zosobna między 4 osoby. Ponieważ jedna osoba z każdego jabłka otrzyma 1 ćwiartkę, więc otrzyma razem 7 ćwiartek, czyli $\frac{7}{4}$ jabłka. Zatem: 7 jabłek : 4 równa się $\frac{7}{4}$ jabłka.

4. 3 *kg* : 4 = 3000 *g* : 4 = 750 *g*; $\frac{3}{4}$ *kg* = 750 *g*.
A więc: 3 *kg* : 4 = $\frac{3}{4}$ *kg*.
Aby więc utworzyć jakiś ułamek, np. $\frac{3}{5}$ jedności, to możemy: albo jedność podzielić na 5 części równych i wziąć takich części 3, albo 3 jedności podzielić na 5 równych części i wziąć jedną taką część. **Ilorazem dokładnym** liczby 3 przez 5 nazywać będziemy ułamek $\frac{3}{5}$. Iloraz ten oznaczamy: 3 : 5. Możemy więc napisać: $3 : 5 = \frac{3}{5}$.
Podobnie: $2 : 3 = \frac{2}{3}$, $7 : 5 = \frac{7}{5}$ i t. d.

Zadania

1. Przekonaj się, że:
a) 3 *m* : 5 = $\frac{3}{5}$ *m*; 14 *m* : 25 = $\frac{14}{25}$ *m*; 2 *km* : 125 = $\frac{2}{125}$ *km*;
b) 7 *kg* : 4 = $\frac{7}{4}$ *kg*; 35 *kg* : 2 = $\frac{35}{2}$ *kg*; 27 *kg* : 8 = $\frac{27}{8}$ *kg*;
c) 5 godz. : 6 = $\frac{5}{6}$ godz.; 3 min. : 5 = $\frac{3}{5}$ min.;
7 godz. : 25 = $\frac{7}{25}$ godz.;

d) 3 tuziny : 4 = $\frac{3}{4}$ tuz.; 5 kóp : 12 = $\frac{5}{12}$ kopy;
7 kóp : 15 = $\frac{7}{15}$ kopy;

e) 9 *zł* : 4 = $\frac{9}{4}$ *zł*; 17 *zł* : 20 = $\frac{17}{20}$ *zł*; 3 *zł* : 25 = $\frac{3}{25}$ *zł*.
Licz: 3 *m* : 5 = 30 *dcm* : 5 = 6 *dcm*; $\frac{1}{5}$ *m* = 2 *dcm*;
$\frac{3}{5}$ *m* = 6 *dcm*; więc 3 *m* : 5 = $\frac{3}{5}$ *m*.

2. Ile wynosi iloraz dokładny dzielenia:
a) 8 przez 4; *b)* 9 przez 3; *c)* 10 przez 3;
d) 12 przez 5; *e)* 17 przez 25; *f)* 1 przez 2;
g) 2 przez 5; *h)* 3 przez 6; *i)* 57 przez 93;
j) 13 przez 111?

3. Przekonaj się na odcinkach, że:
a) 5 *cm* : 4 = $\frac{5}{4}$ *cm*; *b)* 8 *cm* : 3 = $\frac{8}{3}$ *cm*;
c) 11 *cm* : 5 = $\frac{11}{5}$ *cm*; *d)* 3 *cm* : 8 = $\frac{3}{8}$ *cm*.

4. *a)* Pomiędzy czterech ludzi rozdzielono równo 3 *kg* chleba; ile otrzymał każdy? Odp.: 3 *kg* : 4 = $\frac{3}{4}$ *kg*.
b) Za 10 *kg* cukru zapłacono 17 *zł*; ile kosztuje 1 *kg* cukru?
c) Pociąg w 6 godzinach przebiegł drogę 315 *km*; ile *km* przebiegł średnio w 1 godzinie?
d) Pensja roczna wynosi 3120 *zł*; ile wynosi pensja miesięczna?
e) Koło robi 5 obrotów na 4 minuty; ile obrotów robi na minutę? Jaki ułamek minuty przypada na 1 obrót?
f) W 6 godzinach robotnik kopie 15 *m* rowu; ile *m* rowu wykopie w 1 godzinie? Jak długo kopie 1 *m* rowu?

5. Możemy łatwo zamienić ułamek na liczbę mieszaną, przedstawiając ten ułamek w postaci ilorazu dokładnego.
Np., jak wiemy, $\frac{9}{4} = 9 : 4$. Ponieważ $9 : 4 = 2$ (reszta 1), więc rozdzielając równo np. 9 *m* sukna między 4 osoby, należy dać każdej osobie 2 *m* sukna i czwartą część reszty. Każda więc osoba otrzyma $2\frac{1}{4}$ *m*,

$$\text{przeto: } \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

W podobny sposób zamień następujące ułamki na liczby mieszane, przedstawiając te ułamki w postaci ilorazu dokładnego: $\frac{12}{5}$, $\frac{21}{4}$, $\frac{317}{21}$, $\frac{519}{31}$, $\frac{1463}{90}$.

6. Aby zamienić liczbę mieszaną, np. $5\frac{3}{4}$, na ułamek o mianowniku 4, należy zwrócić uwagę na to, że szukany licznik podzielony przez 4 daje na iloraz niedokładny 5, a na resztę 3. Szukany więc licznik wynosi:

$$(5\cdot 4)+3=23.$$

Zatem: $$5\tfrac{3}{4}=\tfrac{23}{4}.$$

Zamień w podobny sposób następujące liczby mieszane na ułamki: $3\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{7}$, $3\frac{3}{4}$, $2\frac{3}{5}$, $8\frac{5}{12}$, $7\frac{4}{9}$.

Liczby dziesiętne

Wprowadzenie liczb dziesiętnych

Zadania

1. Wyraź w: *a) m*; *b) dcm*; *c) cm*; *d) mm*: 0,7 *km*; 0,43 *km*; 7,49 *km*; 6,04 *km*; 15,402 *km*; 0,032 · *km*; 0,00167 *km*; 0,001004 *km*.
2. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *m*:
   a) 10 *cm*, 17 *cm*, 45 *cm*, 79 *cm*, 92 *cm*;
   b) 2 *dcm* 3 *cm*, 5 *dcm* 7 *cm*, 3 *m* 4 *dcm* 5 *cm*, 6 *m* 37 *cm*;
   c) 39 *mm*, 541 *mm*, 2 *dcm* 15 *mm*, 5 *cm* 7 *mm*, 3 *dcm* 8 *cm* 9 *mm*, 6 *m* 4 *dcm* 3 *mm*, 2 *m* 8 *cm* 4 *mm*;
   d) 2 *km* 425 *m* 3 *dcm*, 1 *km* 7 *dcm*.
3. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *kg*: 15 *dkg*, 70 *dkg*, 3 *kg* 45 *dkg*, 545 *g*, 4 *dkg* 7 *g*, 28 *dkg* 6 *g*, 2 *kg* 8 *dkg* 9 *g*, 1 *kg* 125 *g*.
4. Wyraź w *g*: 0,15 *kg*, 0,274 *kg*, 5,712 *kg*, 3,014 *kg*, 0,04 *kg*.
5. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *zł*:
   a) 1 *gr*, 7 *gr*, 65 *gr*, 380 *gr*, 495 *gr*, 1246 *gr*, 5697 *gr*;
   b) 12 *zł* 3 *gr*, 7 *zł* 21 *gr*, 4 *zł* 17 *gr*, 21 *zł* 35 *gr*.
6. Wyraź w *gr*: 3,27 *zł*, 90,7 *zł*, 90,07 *zł*.
7. Wyraź w postaci liczby dziesiętnej *ha*: 3 *ha* 47 *a*, 15 *ha* 21 *a*, 8 *ha* 3 *a*, 7 *a* 15 m^2, 4 *ha* 21 *a* 8 m^2.

8. Wyraź w *dcm*³: 20 *dcm*³ 493 *cm*³, 8 *dcm*³ 15 *cm*³, 2 *m*³ 4 *dcm*³ 28 *cm*³.
9. Napisz w postaci liczb dziesiętnych ułamki:
a) $\frac{1}{10}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{14}{100}$, $\frac{93}{100}$, $\frac{4}{1000}$, $\frac{138}{1000}$, $\frac{9}{10000}$, $\frac{701}{10000}$;
b) $\frac{17}{10}$, $\frac{247}{10}$, $\frac{159}{100}$, $\frac{14021}{1000}$, $\frac{40327}{10000}$.
10. Napisz w postaci ułamków nieprzywiedlnych następujące liczby dziesiętne: 0,4; 0,35; 0,06; 0,03; 0,045; 0,054; 0,155; 0,9065.
11. Napisz w postaci liczb mieszanych następujące liczby dziesiętne: 4,35; 8,5; 2,315; 6,025; 14,092; 21,04; 3,0505; 120,492; 318,525; 91,085. Uprość część ułamkową!
12. Napisz w porządku rosnącym liczby:
a) 4,7; 4,3; *b)* 8,3; 8,04; *c)* 6,521; 6,53; *d)* 12,354; 12,347; *e)* 121,897; 140,917; *f)* 35,419; 35,149; 35,914; 35,941; 35,194.
13. Zamień następujące ułamki na liczby dziesiętne:
$\frac{5}{8}$, $\frac{7}{32}$, $\frac{18}{25}$, $\frac{17}{160}$, $\frac{13}{40}$, $\frac{21}{125}$, $\frac{9}{625}$, $\frac{27}{1024}$.
14. Zamień następujące ułamki na liczby dziesiętne (sprowadziwszy je poprzednio do postaci nieprzywiedlnej):
$\frac{6}{75}$, $\frac{21}{240}$, $\frac{14}{35}$, $\frac{35}{112}$, $\frac{77}{352}$.
15. Pomnóż przez 10, 100, 1000, 10 000 następujące liczby: 312,47; 81,354; 7,3265; 15,8461; 5,04; 17,0042; 0,00329; 0,000176; 12,0503001.
16. Podziel przez 10, 100, 1000, 10 000 następujące liczby: 47; 5,76; 14,29; 0,027; 0,0013; 8,43001.

Dodawanie i odejmowanie liczb dziesiętnych

Zadania

1. Oblicz sumy:
a) 3,5 + 9 4; 7,8 + 15,6; 8,7 + 0,5; 14,8 + 6,5;
b) 4,9 + 7,6 + 12,5; 8,7 + 6,5 + 0,4; 12,6 + 3,9 + 4,5 + 15,7;
c) 8,19 + 21,65; 5,31 + 8,69; 4,96 + 8,15 + 18,34 + 7,32;
d) 0,712 + 4,893 + 369; 8,042 + 18,917 + 12,837;
e) 5,395 + 0,07 + 14,5 + 32,703; 20,02 + 41,815 + 2,935 + 7;
f) 352 + 47,91 + 52,3179 + 0,2702 + 181,003.

2. Wykonaj dodawania:

a)	*b)*	*c)*	*d)*
8,17	0,96	23,027	39,1
4,56	12,403	15,9703	12,002
13,42	5,09	0,4951	37,9784

e)	*f)*	*g)*	*h)*
4,31	72,127	30,44	5,04729
5,287	0,51	6,543	0,00407
13,04	6,3128	7,9004	11,34619
8,003	21,0502	51,032	8,51941

3. Dodaj najpierw liczby w kolumnach, a następnie otrzymane wyniki. Sprawdź ostateczny wynik, dodając najpierw liczby w wierszach, a potem otrzymane wyniki:

$$\begin{array}{rcrcr} 4{,}75 & + & 5 & + & 4{,}094 \\ 13{,}072 & + & 19{,}17 & + & 0{,}35 \\ 2{,}03 & + & 4{,}349 & + & 11{,}507 \end{array}$$

4. Dodaj i wyraź wynik w złotych i groszach:

a)	*b)*	*c)*
57,25 *zł*	312,06 *zł*	325 *zł*
108,38 „	94,9 „	17,5 „
0,45 „	5124,57 „	0,95 „
12,72 „	138,92 „	8,29 „

5. Dodaj i wyraź wynik w *kg*, *dkg* i *g*:

a)	*b)*	*c)*
25,473 *kg*	90,02 *kg*	47,6 *dkg*
8,042 „	4,56 „	0,4 „
0,51 „	103,8 „	69,8 „
9,045 „	5,032 „	54 „

6. Dodaj i wyraź wynik w *ha*, *a* i m^2:

a)	*b)*
35,4931 *ha*	1254,87 *a*
2,5735 „	985,21 „
15,4027 „	8040,05 „
0,5 „	687,42 „

7. Oblicz następujące sumy, zamieniając *a)* ułamki na liczby dziesiętne, *b)* liczby dziesiętne na ułamki:

a) $\frac{6}{25} + 0{,}43 + \frac{47}{20} + 8{,}32 + 15{,}91 + \frac{345}{12}$;
b) $\frac{19}{40} + 25{,}37 + 19\frac{8}{50} + 4\frac{9}{48} + 6{,}41$.

8. Oblicz następujące sumy, zamieniając liczby dziesiętne na ułamki:
a) $\frac{2}{3} + 0{,}05 + 3{,}7$; $2\frac{3}{7} + 21{,}8 + \frac{4}{5}$;
b) $2{,}45 + 7{,}91 + \frac{14}{21} + 17\frac{3}{5} + 0{,}3 + 5{,}02$.

9. Wykonaj odejmowania:
a) $45{,}37 - 21{,}14$; $36{,}19 - 13{,}24$; $8{,}51 - 3{,}96$;
b) $15{,}04 - 8{,}523$; $12 - 7{,}397$; $69{,}4 - 18{,}3537$;
c) $81{,}276 - 29{,}45$; $28{,}602 - 12{,}358$; $3{,}0002 - 2{,}001$.

10. Wykonaj odejmowania:

a) $\begin{array}{r} 25{,}493 \\ -\,16{,}989 \\ \hline \end{array}$	*b)* $\begin{array}{r} 0{,}01 \\ -\,0{,}001 \\ \hline \end{array}$	*c)* $\begin{array}{r} 49{,}5 \\ -\,0{,}9999 \\ \hline \end{array}$

11. Odejmij i wyraź w *zł* i *gr*:

a) $\begin{array}{rl} 57{,}4 & zł \\ -\,25{,}85 & „ \\ \hline \end{array}$	*b)* $\begin{array}{rl} 485{,}75 & zł \\ -\,312{,}97 & „ \\ \hline \end{array}$	*c)* $\begin{array}{rl} 1215{,}6 & zł \\ -\,927{,}7 & „ \\ \hline \end{array}$

12. Odejmij i wyraź w *m*, *dcm* i *cm*:

a) $\begin{array}{rl} 5{,}49 & m \\ -\,4{,}73 & „ \\ \hline \end{array}$	*b)* $\begin{array}{rl} 0{,}48 & m \\ -\,0{,}39 & „ \\ \hline \end{array}$	*c)* $\begin{array}{rl} 49 & m \\ -\,18{,}27 & „ \\ \hline \end{array}$

13. Oblicz:
a) $6{,}45 + 9{,}37 - 12{,}59$; $17{,}348 - 6{,}297 - 4{,}935$;
b) $31{,}972 - 9{,}34 + 4{,}053 + 6{,}79 - 15{,}0594$.

14. Oblicz, zamieniając *a)* ułamki na liczby dziesiętne, *b)* liczby dziesiętne na ułamki:
a) $8\frac{7}{32} - 0{,}35$; $12{,}34 - \frac{129}{25}$; $8{,}4 - \frac{79}{40}$;
b) $17{,}32 + 4\frac{3}{5} - 19{,}8$; $31{,}74 - \frac{486}{75} + 7\frac{3}{4}$.

15. Oblicz (zamieniając liczby dziesiętne na ułamki):
a) $3{,}7 - \frac{4}{3}$; $21{,}32 - \frac{8}{15}$; $3\frac{5}{9} - 0{,}04$.

16. Wstaw zamiast litery x odpowiednią liczbę:
a) $21{,}37 + x = 54{,}79$; $x + 36{,}45 = 57{,}86$;
b) $x + 0{,}94 = 5{,}72$; $x - 4{,}58 = 12{,}41$;
c) $82{,}3 - x = 27{,}07$; $312{,}04 - x = 98{,}054$.

17. Gazomierz wskazuje 319,417 *m*^{3} zużytego gazu. W trzech poprzednich miesiącach zużyto 17,405 *m*^{3}, 19,514 *m*^{3}, 16,028 *m*^{3} gazu; jaką liczbę *m*^{3} zużytego gazu wskazywał gazomierz 3 miesiące temu?
18. Rolnik ma pole w trzech miejscach: w jednem ma 7,24 *ha*, w drugiem 12,08 *ha*, w trzeciem 5,4 *ha*. Ile ma pola?
19. Jeden bok prostokąta wynosi 3,45 *dcm*, drugi jest o 1,03 *dcm* krótszy. Ile wynosi obwód prostokąta?
20. Stan wody, odczytywany na palu wbitym w dno rzeki, wynosił 2,75 *m*, potem podniósł się o 0,47 *m*, następnie opadł o 1,03 *m*,, potem znów podniósł się o 0,64 *m*. Jaki jest obecnie stan wody?
21. W r. 1928 wyprodukowano w Polsce nawozów sztucznych w tysiącach tonn: fosforowych 256,2; azotowych 183,8; fosforowo-azotowych 24,1; potasowych 348,1; innych 17,7. Oblicz całkowitą produkcję!
22. Cukrownie w Polsce wyprodukowały cukru w tysiącach tonn: w 1927 r. 517,3; w 1928 r. 506,2; w 1929 r. 670,9; w 1930 r. 824,3. Oblicz całkowitą produkcję w tym czasie! O ile produkcja w r. 1930 przewyższała produkcję z r. 1927?
23. Oblicz światową produkcję srebra w r. 1930, jeżeli poszczególne kraje wyprodukowały w tonnach: Meksyk 3271,8; St. Zjednoczone 1562,3; Kanada 822,2; Peru 517,3; Australja 320,5; Indje brytyjskie 220,8; Boliwja 186,6; Niemcy 170,6; Japonja 155,5; Ameryka środkowa 102,6; Hiszpanja 71,5; inne kraje 242,9. O ile produkcja Ameryki (Meksyk, Stany Zjedn., Kanada, Peru, Boliwja, Ameryka środkowa) przewyższa produkcję wszystkich innych krajów?
24. Światowa produkcja platyny w r. 1929 wynosiła 5,876 tonn. Z. S. R. R. wyprodukował 3,1 tonn, Kolumbja 1,418 tonn. Ile wyprodukowały inne kraje?
25. Służąca wydała na targu: za mleko 0,60 *zł*, chleb 0,35 *zł*, bułki 0,45 *zł*, jaja 0,90 *zł*, mięso 1,80 *zł*, jarzyny 0,78 *zł*. Ile przyniosła reszty z 10 *zł*?

26. Znajdź sumę w następującym rachunku:

Firma .... dnia .... 193 ..... r.

dla ....

w ....

	Cena *zł*
1 *kg* masła	3,20
2 *kg* sera	1,60
2 *kg* cukru	3,30
0,25 *kg* kawy	2,40
4 cytryny	0,48
1 *kg* soli	0,38
3 *kg* mąki	1,38
1 flaszka oliwy	3,50
1 paczka makaronu	1,20
0,25 *kg* suszonych grzybów	3,35
Razem . . .	

27. Kupiec zapisał w księdze kasowej następujące wpływy i wydatki: z przeniesienia sumy wpływów 1848,57 *zł*, wydatków 979,74 *zł*; 28/V wpływ dzienny 68,70 *zł*, 28/V na potrzeby domu 20 *zł*, 29/V wpływ dzienny 65,84 *zł*, 29/V przekaz pieniężny za sprowadzony towar 130,95 *zł*, 29/V drobne wydatki 1,25 *zł*, 30/V wpływ dzienny 57,47 *zł*, 30/V opłata za światło elektryczne 36,70 *zł*, 30/V na potrzeby domu 12 *zł*, 31/V wpływ dzienny 61,45 *zł*, 31/V płaca pomocnika 180 *zł*; oblicz saldo i zamknij księgę kasową w dniu 31/V!

28. Krawiec zapisał w księdze kasowej następujące wpływy i wydatki: saldo z poprzedniego miesiąca 1428,15 *zł*, 1/IX czynsz za lokal 120 *zł*, 1/IX za zakupione materjały 372,50 *zł*, 1/IX wpływ dzienny 240 *zł*, 1/IX koszta korespondencji 7,45 *zł*, 2/IX wpływ dzienny 180,50 *zł*, 2/IX na potrzeby domu 30 *zł*, 31/IX wpływ dzienny 140,50 *zł*, 3/IX wykupno weksla 150 *zł*, 4/IX wpływ dzienny 167 *zł*; zamknij księgę kasową w dniu 4/IX!

Mnożenie i dzielenie ułamków

Mnożenie ułamka przez liczbę całkowitą

Określenie

Iloczyn ułamka przez liczbę całkowitą określamy podobnie, jak iloczyn dwóch liczb całkowitych. Jak wiemy:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3.$$

Podobnie sumę, w której wszystkie składniki są równemi ułamkami, jak np.: $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$
zapisujemy: $5 \cdot \frac{3}{4} =$ lub $5 \times \frac{3}{4}$.

Zatem: $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

Składnik $\frac{3}{4}$, który powtarza się, nazywamy mnożną, liczbę 5, wskazującą ile razy mnożna powtarza się, nazywamy mnożnikiem, wynik zaś $\frac{15}{4}$ iloczynem. Podobnie jak dla liczb całkowitych:

a) Jeżeli mnożnik jest 1, to iloczyn równa się mnożnej.
Zatem: $1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$; $1 \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{5}$.

b) Jeżeli mnożnik jest 0, to iloczyn równa się 0.
A więc $0 \cdot \frac{2}{3} = 0$; $0 \cdot \frac{2}{7} = 0$.

Uwaga. Mnożna może być liczbą mianowaną, np..

$$4 \cdot \frac{2}{3}\ cm = \frac{2}{3}\ cm + \frac{2}{3}\ cm + \frac{2}{3}\ cm + \frac{2}{2}\ cm.$$

Należy pamiętać, że mnożnik nie może być liczbą mianowaną, gdyż mnożnik wskazuje, ile razy mnożna powtarza się jako składnik.

Obliczanie iloczynu ułamka przez liczbę całkowitą

Przykład 1

Mamy obliczyć iloczyn: $5 \cdot \frac{3}{4}$

Ponieważ: $5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3+3+3+3+3}{4}$,

więc
$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4}.$$

Zatem ułamek mnożymy przez liczbę całkowitą, mnożąc ją przez licznik ułamka, a mianownik pozostawiając bez zmiany.

Możemy to sprawdzić również na następującym przykładzie:

Ile *l* mleka jest w pięciu naczyniach, jeżeli każde zawiera $\frac{3}{4}$ *l* mleka? Ponieważ każde naczynie zawiera 3 czwarte części litra mleka, więc 5 naczyń zawiera czwartych części litra 5 razy więcej, t. j. $5 \cdot 3 = 15$.

A więc: $$5 \cdot \frac{3}{4}\, l = \frac{5 \cdot 3}{4}\, l = \frac{15}{4}\, l.$$

Przykład 2

Mamy obliczyć iloczyn: $3 \cdot \frac{5}{12}$.

Wiemy, że $$3 \cdot \frac{5}{12} = \frac{3 \cdot 5}{12}.$$

Upraszczając ostatni ułamek przez 3, otrzymamy:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 5}{\underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{5}{4}, \text{ a więc } 3 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{(12:3)}.$$

Podobnie: $$7 \cdot \frac{11}{21} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot 11}{\underset{3}{\cancel{21}}} = \frac{11}{3} = \frac{11}{(21:7)}.$$

A więc, w przypadku, gdy mianownik mnożnej jest podzielny przez mnożnik, iloczyn oblicza się w ten sposób, że dzieli się mianownik przez mnożnik, a licznik pozostawia się ten sam.

Uwaga. Przypuśćmy, że mianownik mnożnej ma wspólny dzielnik z mnożnikiem, np.:

$$15 \cdot \frac{7}{20}$$

Widzimy, że 20 i 15 mają wspólny dzielnik 5.

Mamy: $$15 \cdot \frac{7}{20} = \frac{15 \cdot 7}{20}$$

Upraszczając ostatni ułamek przez 5, otrzymamy:

$$\frac{15\cdot 7}{20}=\frac{\overset{3}{\cancel{15}}\cdot 7}{\underset{4}{\cancel{20}}}=\frac{3\cdot 7}{4}=\frac{21}{4}.$$

Podobnie: $$12\cdot\frac{5}{8}=\frac{12\cdot 5}{8}.$$

Upraszczając przez 4, otrzymamy:

$$\frac{12\cdot 5}{8}=\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\cdot 5}{\underset{2}{\cancel{8}}}=\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}.$$

Mamy również: $$48\cdot\frac{635}{32}=\frac{48\cdot 635}{32}$$

Upraszczając przez 16, otrzymamy:

$$\frac{48\cdot 635}{32}=\frac{\overset{3}{\cancel{48}}\cdot 635}{\underset{2}{\cancel{32}}}=\frac{3\cdot 635}{2}=\frac{1905}{2}.$$

Zatem przed wykonaniem iloczynu można mnożnik i mianownik mnożnej uprościć przez wspólny dzielnik.

Przykład 3

Przypuśćmy, że mamy obliczyć iloczyn liczby mieszanej przez liczbę całkowitą, np: $4\cdot 3\frac{2}{5}$.

Mamy: $$4\cdot 3\tfrac{2}{5}=3\tfrac{2}{5}+3\tfrac{2}{5}+3\tfrac{2}{5}+3\tfrac{2}{5}.$$

Dodając do siebie osobno części całkowite, a osobno części ułamkowe, otrzymamy:

$$3+3+3+3=4\cdot 3=12$$
$$\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{5}=4\cdot\tfrac{2}{5}=\tfrac{8}{5}=1\tfrac{3}{5},$$

więc $$4\cdot 3\tfrac{2}{5}=12+1\tfrac{3}{5}=13\tfrac{3}{5}.$$

Widzimy więc, że liczbę mieszaną mnożymy przez liczbę całkowitą, mnożąc część całkowitą oraz część ułamkową liczby mieszanej przez liczbę całkowitą i dodając uzyskane wyniki.

Uwaga: Moglibyśmy również obliczyć iloczyn, zamieniając liczbę mieszaną na ułamek:

$$4\cdot 3\frac{2}{5}=4\cdot\frac{17}{5}=\frac{4\cdot 17}{5}=\frac{68}{5}=13\frac{3}{5}.$$

Zadania

1. Oblicz następujące iloczyny:
   a) $5 \cdot \frac{7}{8}$, $7 \cdot \frac{2}{3}$, $8 \cdot \frac{2}{11}$, $7 \cdot \frac{9}{8}$, $6 \cdot \frac{4}{5}$;
   b) $9 \cdot \frac{3}{4}$, $11 \cdot \frac{5}{12}$, $8 \cdot \frac{4}{9}$, $11 \cdot \frac{12}{7}$, $15 \cdot \frac{5}{19}$.
2. Oblicz następujące iloczyny:
   a) $3 \cdot 3\frac{1}{4}$, $5 \cdot 2\frac{1}{7}$, $3 \cdot 7\frac{1}{2}$, $3 \cdot 15\frac{1}{4}$, $2 \cdot 20\frac{4}{5}$;
   b) $11 \cdot 3\frac{11}{12}$, $4 \cdot 7\frac{8}{15}$, $4 \cdot 12\frac{3}{5}$, $6 \cdot 10\frac{2}{11}$, $9 \cdot 4\frac{6}{7}$.
3. Oblicz następujące iloczyny, dzieląc mianownik przez mnożnik:
   a) $3 \cdot \frac{8}{9}$, $2 \cdot \frac{5}{4}$, $4 \cdot \frac{7}{12}$, $5 \cdot \frac{9}{20}$, $4 \cdot \frac{17}{16}$;
   b) $31 \cdot \frac{15}{62}$, $13 \cdot \frac{67}{52}$, $259 \cdot \frac{347}{259}$, $16 \cdot \frac{751}{96}$.
4. Oblicz następujące iloczyny:
   a) $8 \cdot \frac{5}{12}$, $10 \cdot \frac{4}{15}$, $9 \cdot \frac{5}{6}$, $16 \cdot \frac{7}{20}$. $28 \cdot \frac{3}{14}$;
   b) $30 \cdot \frac{8}{45}$, $24 \cdot \frac{13}{18}$, $16 \cdot \frac{37}{16}$, $49 \cdot \frac{8}{35}$, $54 \cdot \frac{17}{45}$;
   c) $96 \cdot \frac{11}{144}$, $120 \cdot \frac{7}{180}$, $1026 \cdot \frac{25}{126}$, $675 \cdot \frac{5}{81}$.
   Uwaga. Przed wykonaniem mnożenia uprość!
5. Oblicz następujące iloczyny:
   a) $5 \cdot 2\frac{3}{4}$, $7 \cdot 3\frac{1}{7}$, $2 \cdot 2\frac{3}{7}$, $7 \cdot 5\frac{4}{9}$, $9 \cdot 8\frac{3}{5}$;
   b) $2 \cdot 2\frac{1}{4}$, $4 \cdot 8\frac{1}{16}$, $10 \cdot 3\frac{1}{100}$, $9 \cdot 2\frac{15}{18}$, $25 \cdot 1\frac{11}{125}$;
   c) $25 \cdot 3\frac{2}{15}$, $63 \cdot 5\frac{4}{27}$, $81 \cdot 20\frac{5}{36}$, $49 \cdot 2\frac{18}{21}$.
6. Jeżeli mnożnik równa się mianownikowi mnożnej, to iloczyn taki równa się licznikowi mnożnej. Przekonaj się o tem na kilku przykładach! Oblicz np.: $8 \cdot \frac{3}{8}$, $7 \cdot \frac{2}{7}$ i t. d.
7. Paczka herbaty kosztuje $1\frac{3}{4}$ *zł*; ile kosztuje 16 takich paczek?
8. Robotnik wykopuje dziennie $8\frac{1}{4}$ *m* rowu; ile metrów rowu wykopie w sześciu dniach?
9. Pewna rodzina spożywa dziennie $1\frac{1}{4}$ *l* mleka; ile litrów mleka spożyje ta rodzina w ciągu miesiąca?
10. Na jedno ubranie potrzeba $2\frac{1}{2}$ *m* materji; ile metrów materji potrzeba dla całej klasy, liczącej 45 uczniów?
11. Pewna maszyna spala w ciągu godziny $120\frac{3}{4}$ *kg* węgla; ile *kg* spali ta maszyna w ciągu 24 godzin?

12. Jeden stopień Réaumura równa się $\frac{5}{4}$ stopnia Celsjusza; ile stopni Celsjusza wynosi 15 stopni Réaumura?
13. Jeden frank szwajcarski kosztuje około $1\frac{4}{5}$ *zł*; ile złotych kosztuje 25 franków szwajcarskich?
14. Pociąg biegnie z szybkością $13\frac{1}{3}$ *m* na sek.; jaką drogę przebiegnie: *a)* w kwadransie, *b)* w godzinie?
15. Z fontanny wypływa $8\frac{3}{5}$ *l* wody w ciągu minuty; ile wody wypłynie w godzinie, a ile w 12 godzinach?
16. Do pewnej budowy zgodzono 8 murarzy; płaca dzienna każdego z nich wynosiła $8\frac{3}{4}$ *zł*. Ile należy im zapłacić za 6 tygodni pracy (nie licząc niedziel)?
17. Bok kwadratu ma $7\frac{2}{5}$ *cm*; ile wynosi obwód kwadratu?
18. Ściana sześcianu ma $12\frac{3}{4}$ cm^2; ile wynosi pole powierzchni sześcianu?
19. Człowiek wykonuje średnio 15 oddechów na minutę: każdy oddech wprowadza do płuc $\frac{5}{7}$ *l* powietrza. Jaką ilość powietrza wprowadza człowiek do płuc w ciągu 24 godzin?
20. Kupiec płacił za kilogram pewnego towaru po $3\frac{1}{2}$ *zł*, a sprzedawał po $3\frac{3}{4}$ *zł*; ile zarobił na 15 kilogramach?
21. Ile kosztuje 3 *m* płótna, jeśli 5 *m* tego płótna kosztuje 14 *zł*?
22. Jeden robotnik wyrabia $\frac{4}{5}$ *m*, drugi zaś $\frac{5}{7}$ *m* płótna w ciągu godziny; który z nich szybciej pracuje i o ile więcej płótna wyrobi w ciągu 8 godzin pracy?
23. Z dwóch miast wyruszają naprzeciwko siebie dwaj posłańcy; jeden idzie z prędkością $4\frac{3}{4}$ *km* na godz., drugi z prędkością $5\frac{1}{2}$ *km* na godz. Jaka jest odległość tych miast, jeśli spotkali się po 5 godzinach?

Dzielenie ułamka przez liczbę całkowitą

Iloraz ułamka przez liczbę całkowitą określamy i oznaczamy podobnie, jak iloraz dwóch liczb całkowitych.

Jak wiemy:

$$15 : 5 = 3, \text{ gdyż } 5 \cdot 3 = 15.$$

Podobnie, podzielić ułamek przez liczbę całkowitą, np. $\frac{15}{4}$ podzielić przez 5, znaczy to znaleźć taki ułamek, który pomnożony przez 5 da na wynik $\frac{15}{4}$. W naszym wypadku szukanym ułamkiem jest $\frac{3}{4}$, gdyż:

$$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}.$$

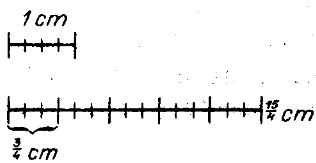
Piszemy: $$\frac{15}{4} : 5 = \frac{3}{4}.$$

Ułamek $\frac{15}{4}$ nazywamy dzielną, liczbę 5 dzielnikiem, ułamek $\frac{3}{4}$ ilorazem.

Należy pamiętać, że, podobnie jak przy liczbach całkowitych, dzielnik nie może być zerem.

Uwaga. Dzielenia przez liczbę całkowitą używamy zazwyczaj wtedy, gdy mamy jakąś wielkość podzielić na kilka równych części.

Np. Odcinek $\frac{15}{4}$ *cm* podzielono na 5 równych części; jaka jest długość jednej takiej części?



Rys. 5.

Szukamy więc odcinka, który dodany do siebie 5 razy, daje odcinek $\frac{15}{4}$ *cm*. Zadanie nasze możemy więc w następujący sposób zapisać:

$$5 \cdot ?\ cm = \frac{15}{4}\ cm.$$

Szukamy zatem mnożnej. Długość piątej części danego odcinka wynosi więc:

$$\frac{15}{4}\ cm : 5.$$

Z rys. 5 widzimy, że:

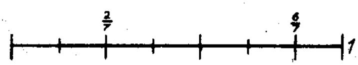
$$\frac{15}{4}\ cm : 5 = \frac{3}{4}\ cm.$$

Obliczanie ilorazu ułamka przez liczbę całkowitą

Przykład 1

Mamy obliczyć iloraz: $\frac{6}{7} : 3$.

Ponieważ dzielna zawiera 6 siódmych części jedności, więc iloraz zawierać będzie tych siódmych części trzy razy mniej t. j. $6 : 3 = 2$ (rys. 6).



Rys. 6.

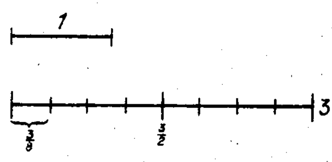
Widzimy zatem, że $\frac{6}{7} : 3 = \frac{(6 : 3)}{7} = \frac{2}{7}$.

A b y w i ę c o b l i c z y ć i l o r a z u ł a m k a p r z e z l i c z b ę c a ł k o w i t ą, d z i e l i m y j e g o l i c z n i k p r z e z t ę l i c z b ę, (o i l e l i c z n i k j e s t p r z e z n i ą p o d z i e l n y).

Przykład 2

Mamy obliczyć iloraz: $\frac{3}{2} : 4$.

Dzielną otrzymamy, dzieląc 3 jedności na 2 równe części. Aby otrzymać iloraz, należy taką część podzielić jeszcze na



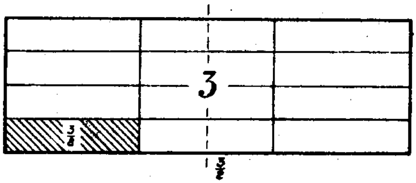
Rys. 7.

4 równe części. Widzimy stąd, że w ten sposób podzielimy 3 jedności na $2 \cdot 4$ t. j. 8 równych części. Zatem:

$$\frac{3}{2} : 4 = \frac{3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}.$$

A b y w i ę c o b l i c z y ć i l o r a z u ł a m k a p r z e z l i c z b ę c a ł k o w i t ą, m n o ż y m y m i a n o w n i k p r z e z t ę l i c z b ę.

Na rys. 8 mamy przedstawiony iloraz $\frac{3}{2} : 4$ w przypadku, gdy jednością jest kwadrat.



Rys. 8.

Zadania

1. Wykonaj dzielenie, mnożąc mianownik (liczby mieszane zamień na ułamki):
   a) $\frac{2}{5} : 7$, $\frac{3}{4} : 8$, $\frac{6}{13} : 5$, $\frac{3}{11} : 8$, $\frac{7}{16} : 6$;
   b) $2\frac{1}{3} : 5$, $3\frac{1}{4} : 6$, $7\frac{2}{9} : 3$, $11\frac{1}{2} : 5$, $15\frac{2}{3} : 8$;
   c) $1\frac{11}{12} : 5$, $\frac{37}{40} : 8$, $2\frac{2}{13} : 11$, $\frac{7}{256} : 25$, $\frac{11}{24} : 9$.
2. Wykonaj dzielenie, dzieląc licznik (liczby mieszane zamień na ułamki):
   a) $\frac{2}{5} : 2$, $\frac{8}{5} : 4$, $\frac{36}{17} : 9$, $\frac{144}{23} : 12$, $\frac{600}{723} : 25$;
   b) $3\frac{3}{4} : 5$, $7\frac{5}{6} : 47$, $8\frac{4}{7} : 10$, $24\frac{6}{7} : 3$, $18\frac{9}{11} : 9$.
3. Przed wykonaniem dzielenia uprość:
   a) $\frac{36}{17} : 24$, $\frac{8}{5} : 6$, $\frac{27}{41} : 6$, $\frac{5}{8} : 15$, $\frac{64}{55} : 128$;
   b) $\frac{39}{41} : 39$, $\frac{75}{82} : 225$, $\frac{144}{203} : 96$, $\frac{225}{314} : 125$, $\frac{121}{125} : 33$;
   c) $3\frac{3}{4} : 25$, $1\frac{23}{40} : 27$, $2\frac{29}{35} : 678$, $16\frac{1}{3} : 35$, $5\frac{1}{25} : 54$.

U w a g a. W przypadku, gdy licznik dzielnej i dzielnik są przez tę samą liczbę podzielne, należy rachunki wykonywać, jak wskazuje przykład:

$$\frac{20}{3} : 8 = \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{3 \cdot \underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{5}{6}.$$

4. Jaka jest trzecia część z: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$?
5. Przez jaką liczbę należy pomnożyć liczbę 6, aby otrzymać na wynik:
   a) $\frac{3}{4}$, *b)* $15\frac{6}{7}$, *c)* $18\frac{1}{3}$?

6. Pomniejsz siedem razy ułamki: $\frac{4}{5}$, $\frac{35}{36}$, $\frac{14}{11}$.
7. Ile kosztuje 1 *kg* pewnego towaru, jeśli 7 *kg* towaru kosztuje $26\frac{1}{4}$ *zł*?
8. Krawiec uszył 6 ubrań z $20\frac{2}{5}$ *m* sukna; ile metrów sukna potrzeba na 1 ubranie?
9. Pociąg przebiegł w ciągu 5 minut $8\frac{3}{4}$ *km*; jaką drogę przebiegł w: *a)* 1 min., *b)* 1 sek.?
10. Zegarek przyśpiesza w ciągu doby o $4\frac{1}{2}$ min.; o ile przyśpiesza w ciągu jednej godziny?
11. Sześć butelek równej pojemności zawiera $2\frac{1}{4}$ *l* wina; ile zawiera jedna butelka?
12. Automobil przebiegł w 7 godz. $345\frac{4}{5}$ *km*; ile przebiegł w jednej godzinie?
13. Schody wysokości $5\frac{1}{2}$ *m* mają 50 stopni; jaka jest wysokość stopnia?
14. Trzy osoby rozdzieliły między sobą $\frac{4}{5}$ pewnej sumy pieniędzy, jaki ułamek tej sumy otrzyma każda osoba?
15. Odkręcając kurek, wypełnimy $\frac{4}{5}$ basenu w ciągu 8 godzin; jaką część basenu wypełnimy w ciągu jednej godziny?
16. Obwód kwadratu wynosi $17\frac{3}{5}$ *m*; jak długi jest bok?
17. Pole powierzchni sześcianu wynosi $6\frac{3}{5}$ dcm^2; jakie jest pole powierzchni jednej ściany?
18. Kupiec sprzedał 12 *kg* towaru po $3\frac{1}{2}$ *zł* za 1 *kg* i zarobił 6 *zł*; ile kupiec płacił za 1 *kg* tego towaru?
19. Kupiec zmieszał 3 *kg* kawy po $42\frac{3}{4}$ *zł* z 2 *kg* kawy po $37\frac{1}{2}$ *zł*; ile kosztuje 1 *kg* tej mieszanki?
20. Jeden robotnik wykonał w ciągu 9 dni $\frac{2}{3}$ pewnej roboty; drugi robotnik wykonał w 5 dniach $\frac{4}{7}$ tej samej roboty. Który robotnik szybciej pracuje?
21. Sześć metrów płótna kosztuje 20 *zł*; ile kosztuje 15 metrów tego płótna?
22. $\frac{3}{5}$ *kg* pewnego towaru kosztuje $16\frac{1}{2}$ *zł*; ile kosztuje $\frac{1}{5}$ *kg* tego towaru?

Mnożenie ułamka przez ułamek

Ułamek wielkości lub liczby

Aby utworzyć jakiś ułamek, np. $\frac{2}{3}$ danej wielkości, należy — jak wiemy — podzielić tę wielkość na 3 równe części i wziąć takich części 2, albo też 2 takie wielkości podzielić na 3 równe części i wziąć jedną taką część.

Przykład 1

Jeśli beczka zawiera 200 *l* wina, to ile litrów zawiera $\frac{4}{5}$ tej beczki? Mamy obliczyć, ile to jest litrów: cztery piąte części dwustu litrów, czyli ile to jest:

$$\frac{4}{5} \text{ z } 200\ l.$$

Aby utworzyć ułamek $\frac{4}{5}$ zawartości beczki, należy zawartość beczki podzielić na 5 równych części i wziąć takich części 4.

Ponieważ $\frac{1}{5}$ część zawartości beczki wynosi:

$$200\ l : 5 = 40\ l,$$

zatem $\frac{4}{5}$ części zawartości beczki wynoszą:

$$4 \cdot 40\ l = 160\ l.$$

A więc: $\frac{4}{5} \cdot \text{z } 200\ l = 160\ l.$

Zadanie powyższe moglibyśmy rozwiązać jeszcze w inny sposób. Możemy bowiem utworzyć $\frac{4}{5}$ zawartości beczki, dzieląc zawartość 4 beczek na 5 równych części i biorąc jedną taką część.

Ponieważ 4 beczki zawierają:

$$4 \cdot 200\ l = 800\ l,$$

zatem $\frac{1}{5}$ zawartości 4 beczek wynosi:

$$800\ l : 5 = 160\ l,$$

czyli, jak poprzednio: $\frac{4}{5}$ z $200\ l = 160\ l.$

Przykład 2

Dany jest odcinek o długości $\frac{2}{3}$ *dcm*; jaka jest długość odcinka, który otrzymamy, biorąc $\frac{4}{5}$ danego odcinka? Mamy więc obliczyć, ile to jest $\frac{4}{5}$ z $\frac{2}{3}$ *dcm*.

a) Ponieważ piąta część z $\frac{2}{3}$ *dcm* wynosi:

$$\frac{2}{3}\,dcm : 5 = \frac{2}{3\cdot 5}\,dcm = \frac{2}{15}\,dcm,$$

więc $\frac{4}{5}$ z $\frac{2}{3}$ *dcm* jest:

$$4\cdot\frac{2}{15}\,dcm = \frac{4\cdot 2}{15}\,dcm = \frac{8}{15}\,dcm.$$

b) Ponieważ: $4\cdot\frac{2}{3}\,dcm = \frac{4\cdot 2}{3}\,dcm = \frac{8}{3}\,dcm,$

więc $\frac{4}{5}$ z $\frac{2}{3}$ *dcm* wynosi:

$$\frac{8}{3}\,dcm : 5 = \frac{8}{3\cdot 5}\,dcm = \frac{8}{15}\,dcm.$$

Przykład 3

Podobnie jak tworzymy ułamek wielkości, możemy tworzyć ułamek jakiejś liczby.

Np.: Ile to jest trzy czwarte części ułamka $\frac{7}{5}$, czyli ile to jest $\frac{3}{4}$ z $\frac{7}{5}$?

Ponieważ czwarta część ułamka $\frac{7}{5}$ wynosi

$$\frac{7}{5} : 4 = \frac{7}{5\cdot 4},$$

więc trzy czwarte części ułamka $\frac{7}{5}$ jest:

$$3\cdot\frac{7}{5\cdot 4} = \frac{3\cdot 7}{5\cdot 4}.$$

Zatem: $\frac{3}{4}$ z $\frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.

Podobnie jak przy wielkościach, możemy ułamek $\frac{3}{4}$ z ułamka $\frac{7}{5}$ obliczyć jeszcze w inny sposób. Należy ułamek $\frac{7}{5}$ trzy razy powiększyć i wziąć czwartą część wyniku.

Ponieważ: $$3\cdot\frac{7}{5} = \frac{3\cdot 7}{5},$$

więc: $$\frac{3}{4}\text{ z }\frac{7}{5} = \frac{3\cdot 7}{5} : 4 = \frac{3\cdot 7}{5\cdot 4} = \frac{21}{20}.$$

Zadania

1. Ile to jest:

a) $\frac{3}{4}$ z 150 *l*, $\frac{5}{8}$ z 4 *kg*, $\frac{2}{3}$ z $\frac{6}{11}$ *hl*, $\frac{41}{15}$ z 8 *t*, $\frac{17}{12}$ z $\frac{21}{4}$ *g*;

b) $\frac{4}{5}$ z 6 *dcm*, $\frac{11}{18}$ z 2 *km*, $\frac{11}{12}$ z $\frac{64}{7}$ m^2, $\frac{12}{7}$ z 8 m^3, $\frac{9}{19}$ z $\frac{3}{4}$ km^2;
c) $\frac{3}{5}$ z 8, $\frac{4}{7}$ z $\frac{2}{11}$, $\frac{13}{8}$ z 5, $\frac{4}{9}$ z $\frac{141}{12}$.

Uwaga. Wszystkie powyższe zadania rozwiązuj dwoma sposobami, jak w przykładach 1, 2 i 3!

2. Oblicz: $\frac{2}{3}$ z ($\frac{4}{5}$ *dcm* + $\frac{2}{3}$ *dcm*); $\frac{3}{4}$ z ($\frac{1}{4}$ *kg* + $\frac{3}{8}$ *kg*);
$\frac{11}{2}$ z ($\frac{11}{2}$ *l* + $\frac{3}{4}$ *l*); $\frac{4}{3}$ z ($\frac{5}{6}$ *km* — $\frac{1}{3}$ *km*).
3. Oblicz: $\frac{5}{6}$ z ($\frac{3}{5}$ z $\frac{4}{7}$ *dcm*); $\frac{3}{11}$ z ($\frac{4}{9}$ z $\frac{1}{6}$ *kg*); $\frac{2}{15}$ z ($\frac{4}{7}$ z 9 *l*);
$\frac{8}{13}$ z ($\frac{9}{5}$ z $\frac{2}{5}$ m^2).
4. Ile to jest:
a) $\frac{2}{3}$ z $\frac{3}{4}$ tuzina? *b)* $\frac{7}{4}$ z $\frac{8}{15}$ kopy? *c)* $\frac{2}{3}$ z $\frac{3}{12}$ godziny?

Ułamek jako mnożnik

Iloczyn ułamka i wielkości

Jeżeli 1 *l* mleka kosztuje 28 *gr*, to
2 *l* „ kosztują $2 \cdot 28$ *gr* = 56 *gr*,
3 *l* „ „ $3 \cdot 28$ *gr* = 84 *gr* i t. d.

Zajmiemy się teraz obliczeniem ceny mleka w przypadku, gdy ilość mleka wyraża się liczbą ułamkową litrów.

Obliczmy np., ile kosztuje $\frac{3}{4}$ *l* mleka.

Ponieważ 1 *l* mleka kosztuje 28 *gr*, więc $\frac{1}{4}$ *l* kosztuje czwartą część z 28 *gr*.

Zatem $\frac{3}{4}$ *l* kosztuje trzy razy więcej, t. j. trzy czwarte części z 28 *gr*.

Zatem $\frac{3}{4}$ *l* kosztuje $\frac{3}{4}$ z 28 *gr* = 21 *gr*.

Podobnie $\frac{7}{4}$ *l* kosztuje $\frac{7}{4}$ z 28 *gr* = 49 *gr*.

Z powyższych przykładów wynika, że:

Cena mleka = liczba litrów $\cdot$ 28 *gr* pod warunkiem, że liczba litrów jest liczbą całkowitą. Cenę ułamka litra mleka obliczamy, tworząc ten ułamek z 28 *gr*.

Aby i w tym wypadku obliczać cenę mleka mnożeniem liczby litrów przez 28 *gr*, mówimy, że mnożyć jakąś wielkość przez ułamek, to znaczy utworzyć ten ułamek z wielkości.

A więc: $\frac{3}{4} \cdot 28$ *gr*, to znaczy $\frac{3}{4}$ z 28 *gr*.

Zatem: $\frac{3}{4} \cdot 28$ *gr* $= 21$ *gr*.

$\frac{3}{4}$ nazywamy **mnożnikiem**, 28 *gr* **mnożną**, wynik 21 *gr* **iloczynem**.

Podobnie: $\frac{7}{4} \cdot 28$ *gr*, to znaczy $\frac{7}{4}$ z 28 *gr*.

Zatem: $\frac{7}{4} \cdot 28$ *gr* $= 49$ *gr*.

Widzimy stąd, że bez względu na to, czy liczba litrów wyraża się liczbą całkowitą, czy też ułamkową, zawsze:

cena mleka = liczba litrów · 28 *gr*.

Zadania

1. Przedstaw w postaci iloczynu i oblicz:

$\frac{2}{5}$ z 3 *kg*, $\frac{3}{4}$ z 5 *l*, $\frac{5}{3}$ z 4 *kg*, $\frac{3}{7}$ z 2 godz.

2. Oblicz:

$\frac{3}{4} \cdot 2$ *kg*, $\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$ *kg*, $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{20}$ *zł*, $\frac{5}{16} \cdot 8$ godz.

3. Ile kosztuje:

a) $\frac{3}{4}$ *l* mleka, jeżeli *l* kosztuje 32 *gr*;
b) $\frac{5}{8}$ *kg* masła, jeżeli *kg* kosztuje 4 *zł*;
c) $\frac{2}{3}$ *t* węgla, jeżeli *t* kosztuje 60 *zł*;
d) $\frac{4}{5}$ *q* mąki, jeżeli *q* kosztuje 45 *zł*;
e) $\frac{5}{7}$ *kg* chleba, jeżeli *kg* kosztuje 35 *gr*;
f) $\frac{7}{8}$ *q* ryżu, jeżeli *q* kosztuje 80 *zł*;
g) $\frac{3}{8}$ *kg* szynki, jeżeli *kg* kosztuje 3 *zł* 20 *gr*.

Napisz odpowiedź w postaci iloczynu, a następnie oblicz!

Np.: $\frac{3}{4}$ *l* mleka kosztuje:

$\frac{3}{4} \cdot 32$ *gr* $= 24$ *gr*.

Mnożenie liczby przez ułamek

Podobnie jak iloczyn ułamka i wielkości, określamy iloczyn liczby przez ułamek.

Np.: $\frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{3}{8}$ z 4; $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$ i t. p.

Mamy obliczyć iloczyn:

$\frac{2}{3} \cdot 9$, czyli $\frac{2}{3}$ z 9.

$\frac{2}{3}$ z 9 możemy obliczyć w dwojaki sposób:

a) $\frac{1}{3}$ z $9 = 9 : 3 = 3$, więc $\frac{2}{3}$ z $9 = 2 \cdot 3 = 6$.

Zatem: $\frac{2}{3} \cdot 9 = (9 : 3) \cdot 2 = 6$.

b) $\frac{2}{3}$ z $9 = \frac{1}{3}$ z $(2 \cdot 9) = (2 \cdot 9) : 3 = 6$.

Zatem: $\frac{2}{3} \cdot 9 = (2 \cdot 9) : 3 = 6$.

Widzimy stąd, że liczbę mnożymy przez ułamek, dzieląc tę liczbę przez mianownik, a wynik następnie mnożąc przez licznik, lub mnożąc tę liczbę najpierw przez licznik, a wynik dzieląc następnie przez mianownik.

Np.: $\frac{3}{5} \cdot 20 = (20 : 5) \cdot 3 = 12$ lub $\frac{3}{5} \cdot 20 = (3 \cdot 20) : 5 = 12$.

Mamy obliczyć iloczyn:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, \text{ t. j. } \frac{4}{5} \text{ z } \frac{2}{3}.$$

Ponieważ piąta część z $\frac{2}{3}$ jest:

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3 \cdot 5},$$

więc 4 piąte części z $\frac{2}{3}$ jest:

$$4 \cdot \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5}.$$

Zatem:
$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

Widzimy więc, że **iloczyn dwóch ułamków jest ułamkiem, którego licznik jest iloczynem liczników, mianownik zaś iloczynem mianowników tych ułamków.**

Wynika stąd również sposób mnożenia liczby całkowitej przez ułamek i ułamka przez liczbę całkowitą.

Np.:
$$7 \cdot \frac{8}{5} = \frac{7}{1} \cdot \frac{8}{5} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 5} = \frac{56}{5},$$

$$\frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{1} = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 1} = \frac{32}{3}.$$

Uwaga. Nie należy się spieszyć z wykonaniem iloczynu liczników i mianowników. Jeśli istnieje wspólny podzielnik jednego z liczników i jednego z mianowników, należy najpierw przez ten wspólny podzielnik uprościć.

Np.: $$\frac{8}{15}\cdot\frac{9}{12}=\frac{8\cdot 9}{15\cdot 12}.$$

Upraszczając przez 4 (wspólny podzielnik 8 i 12), otrzymujemy: $$\frac{2\cdot 9}{15\cdot 3}.$$

Upraszczając przez 3 (wspólny podzielnik 9 i 3), otrzymujemy: $$\frac{2\cdot 3}{15\cdot 1}.$$

Wkońcu upraszczając przez 3 (wspólny podzielnik 3 i 15), otrzymujemy: $$\frac{2\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{2}{5}.$$

Zadania

1. Oblicz:

a) $\frac{3}{4}\cdot 8$, $\frac{6}{11}\cdot 22$, $\frac{1}{5}\cdot 15$, $\frac{4}{9}\cdot 27$, $\frac{8}{5}\cdot 15$;

b) $\frac{9}{5}\cdot 20$, $\frac{8}{18}\cdot 36$, $1\frac{1}{2}\cdot 8$, $\frac{7}{12}\cdot 60$, $\frac{5}{14}\cdot 28$.

2. Oblicz:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$, $\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{6}$, $\frac{12}{25}\cdot\frac{3}{5}$, $\frac{7}{9}\cdot\frac{14}{5}$, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}$;

b) $\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}$, $\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{15}$, $\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}$, $\frac{5}{24}\cdot\frac{9}{10}$, $\frac{7}{18}\cdot\frac{9}{2}$;

c) $\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3}$, $\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{16}$, $\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{9}$, $\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{27}$;

d) $1\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}\cdot 2\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}\cdot 7\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{4}$;

e) $3\frac{1}{2}\cdot 7\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}\cdot 5\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}\cdot 5\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{7}\cdot 2\frac{1}{3}$.

3. Oblicz:

a) $\frac{7}{25}\cdot\frac{10}{21}$, $\frac{13}{20}\cdot\frac{15}{26}$, $\frac{8}{15}\cdot\frac{25}{36}$, $\frac{27}{32}\cdot\frac{44}{45}$;

b) $\frac{18}{35}\cdot\frac{14}{27}$, $2\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{22}$, $6\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}$, $\frac{16}{21}\cdot 8\frac{3}{4}$;

c) $5\frac{4}{9}\cdot 2\frac{4}{7}$, $9\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{13}$, $8\frac{2}{3}\cdot 4\frac{1}{2}$, $\frac{4}{15}\cdot 1\frac{11}{34}$;

d) $4\frac{23}{25}\cdot\frac{10}{41}$, $\frac{10}{11}\cdot 2\frac{32}{39}$, $\frac{9}{14}\cdot 6\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{5}\cdot 4\frac{4}{7}$;

e) $\frac{2\cdot 3\cdot 5}{7\cdot 11}\cdot\frac{11}{3\cdot 5}$, $\frac{8\cdot 9}{5}\cdot\frac{15}{16\cdot 18}$, $\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{11\cdot 13}\cdot\frac{26\cdot 33}{4\cdot 25\cdot 7}$;

f) $343\cdot\frac{65}{49}$, $27\cdot\frac{53}{729}$, $693\cdot\frac{127}{462}$, $\frac{37}{49}\cdot\frac{21}{74}$;

g) $\frac{72}{125}\cdot\frac{25}{36}$, $\frac{121}{117}\cdot\frac{39}{77}$, $\frac{729}{304}\cdot\frac{76}{81}$, $\frac{216}{343}\cdot\frac{147}{64}$;

h) $\frac{19}{225}\cdot\frac{63}{95}$, $26\frac{13}{27}\cdot\frac{21}{52}$, $15\frac{45}{64}\cdot 36\frac{72}{75}$, $95\cdot 100\frac{17}{19}$.

Uwaga. Przed wykonaniem mnożenia uprość!

Przykłady praktyczne mnożenia przez ułamek.

Przykład 1

Ile waży kulka ołowiana o objętości $\frac{2}{3}$ *cm*³, jeżeli 1 *cm*³ ołowiu waży $11\frac{2}{5}$ *g*?

Ponieważ 1 *cm*³ waży $11\frac{2}{5}$ *g*, więc $\frac{1}{3}$ *cm*³ waży trzecią część z $11\frac{2}{5}$ *g*. Zatem $\frac{2}{3}$ *cm*³ ważą dwie trzecie z $11\frac{2}{5}$ *g*, czyli $\frac{2}{3}$ z $11\frac{2}{5}$ *g*.

Widzimy stąd, że kulka waży: $\frac{2}{3} \cdot 11\frac{2}{5}$ *g*.

Ponieważ $\frac{2}{3} \cdot 11\frac{2}{5}\,g = \frac{2}{3} \cdot \frac{57}{5}\,g = \frac{114}{15}\,g = 7\frac{9}{15}\,g = 7\frac{3}{5}\,g$, zatem kulka waży $7\frac{3}{5}$ *g*.

Widzimy zatem, że ciężar kulki = ilość *cm*³ · ciężar 1 *cm*³, bez względu na to, czy objętość wyraża się liczbą całkowitą, czy też ułamkową.

Przykład 2

Goniec biegł do mety $9\frac{3}{5}$ sek., przebiegając w jednej sekundzie $6\frac{1}{4}$ *m*. Jaką drogę przebiegł?

Mamy: $9\frac{3}{5}$ sek. $= \frac{48}{5}$ sek.

W $\frac{1}{5}$ sek. goniec przebiegł piątą część z $6\frac{1}{4}$ *m*, zatem w 48 piątych częściach sek. przebiegł 48 piątych części z $6\frac{1}{4}$ *m*, czyli:

$$\frac{48}{5} \text{ z } 6\frac{1}{4}\,m,$$

a więc przebiegł:

$$\frac{48}{5} \cdot 6\frac{1}{4}\,m.$$

Mamy:

$$\frac{48}{5} \cdot 6\frac{1}{4}\,m = \frac{48}{5} \cdot \frac{25}{4}\,m = \frac{48 \cdot 25}{5 \cdot 4}\,m.$$

Upraszczając 25 i 5 przez 5, 48 i 4 przez 4, mamy:

$$\frac{48}{5} \cdot 6\frac{1}{4}\,m = \frac{12 \cdot 5}{1 \cdot 1}\,m = 60\,m.$$

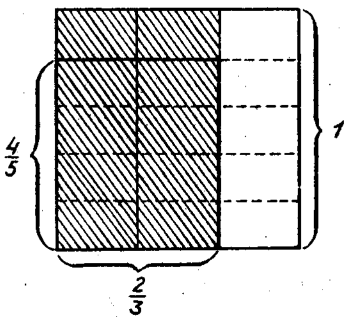
Goniec przebiegł więc 60 *m*.

Widzimy więc, że: droga przebyta = ilość sek. droga w 1 sek., bez względu na to, czy ilość sek. jest ułamkowa, czy całkowita.

Przykład 8

Pole prostokąta

Na rys. 9 mamy kwadrat jednostkowy, a w nim prostokąt o bokach $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$ jedności. Linje pionowe dzielą kwadrat jednostkowy na 3 równe części, zatem pole zacieniowane wynosi



Rys. 9.

$\frac{2}{3}$ kwadratu jednostkowego. Nasz prostokąt otrzymamy, dzieląc (linjami poziomemi) pole zacieniowane na 5 równych części i biorąc takich części 4. Wynika stąd, że pole naszego prostokąta wynosi $\frac{4}{5}$ z $\frac{2}{3}$ kwadratu jednostkowego. Możemy zatem na podstawie określenia iloczynu ułamków powiedzieć, że pole naszego prostokąta wyraża się iloczynem:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \text{ kw. jedn.}$$

Ponieważ $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$, więc pole prostokąta wynosi $\frac{8}{15}$ kwadratu jednostkowego.

Zatem: **P o l e   p r o s t o k ą t a**, np. w *cm²*, **o t r z y m a m y,   m n o ż ą c   l i c z b y   w y r a ż a j ą c e** w *cm* **d ł u g o ś ć   p o d s t a w y   i   w y s o k o ś c i**, przyczem obojętną jest rzeczą, czy liczby te są całkowite, czy ułamkowe.

Zadania

1. 1 *kg* pewnego towaru kosztuje 12 *zł*; ile kosztuje $\frac{3}{4}$ *kg*, $\frac{2}{3}$ *kg*, $3\frac{1}{2}$ *kg*, $6\frac{1}{4}$ *kg* tego towaru?

2. Las kosztuje 10 000 *zł*; ile kosztuje $\frac{3}{4}$ tego lasu?
3. 1 *kg* cukru kosztuje $1\frac{7}{10}$ *zł*; ile kosztuje $\frac{2}{5}$ *kg*; $\frac{1}{2}$ *kg*, $3\frac{1}{5}$ *kg*?
4. Posłaniec idzie z prędkością $5\frac{3}{4}$ *km* na godz.; jaką drogę przejdzie w $1\frac{1}{4}$ godz.?
5. Pociąg biegnie z prędkością $40\frac{3}{8}$ *km* na godz.; jaką drogę przebiegnie w ciągu $3\frac{3}{4}$ godz.?
6. Otwierając kurek, napełnimy basen w 5 godz.; jaki ułamek pojemności basenu napełnimy w ciągu 1 godz., $\frac{3}{4}$ godz., $2\frac{3}{5}$ godz.?
7. 1 cm^3 platyny waży $21\frac{2}{5}$ *g*; ile waży $2\frac{1}{2}$ cm^3, $\frac{7}{8}$ cm^3, $4\frac{3}{8}$ cm^3 platyny?
8. Ktoś, mając 140 *zł*, wydał $\frac{3}{5}$ tej sumy; ile mu zostało?
9. Za wykonanie pewnej roboty miał robotnik otrzymać 100 *zł*; ile mu się należy, jeśli wykonał tylko $\frac{4}{5}$ tej roboty?
10. Z fontanny wypływa $\frac{3}{4}$ *hl* wody w ciągu godziny; ile wody wypłynie w ciągu $7\frac{1}{3}$ godz.?
11. Maszyna przędzie $\frac{3}{7}$ *kg* bawełny w 1 godz.; ile wyprzędzie w ciągu $2\frac{1}{2}$ godz., $5\frac{3}{4}$ godz., $12\frac{1}{2}$ godz.?
12. Maszyna spala w godzinie $125\frac{2}{3}$ *kg* węgla; ile spali w ciągu $8\frac{3}{4}$ godziny?
13. Statek wystaje 4 *m* nad poziom wody, a część zanurzona wynosi $\frac{7}{2}$ tego, co wystaje; oblicz wysokość statku.
14. Kawa po upaleniu traci $\frac{1}{5}$ pierwotnego ciężaru; ile waży $3\frac{1}{2}$ *kg* kawy surowej po upaleniu?
15. Dwie skrzynie towarów ważą 76 *kg*. Ciężar jednej wynosi $\frac{5}{8}$ ciężaru obu skrzyń; ile waży każda skrzynia?
16. W prostokącie dwa sąsiednie boki wynoszą: *a)* $\frac{1}{2}$ *cm* i 3 *cm*, *b)* $\frac{3}{4}$ *dcm* i $\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)* $1\frac{1}{2}$ *m* i $1\frac{3}{4}$ *m*, *d)* $4\frac{2}{5}$ *dcm* i $6\frac{1}{8}$ *dcm*, *e)* $12\frac{1}{12}$ *dcm* i $9\frac{4}{11}$ *dcm*; oblicz obwód i pole prostokąta.
17. W prostokącie jeden bok wynosi: *a)* $\frac{3}{4}$ *m*, *b)* $1\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)* $3\frac{1}{5}$ *km*, a drugi bok wynosi: *a)* $\frac{8}{9}$, *b)* $\frac{11}{12}$, *c)* $\frac{15}{16}$ pierwszego; oblicz obwód i pole prostokąta.

Własności iloczynu

Iloczyn kilku ułamków

1. Oblicz, wykonując pokolei naznaczone działania:

$a)\ \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{10}{2}$; $b)\ \frac{11}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{4}$; $c)\ \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{13}{2}$; $d)\ \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$;
$e)\ \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}$; $f)\ \frac{7}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{2}$; $g)\ \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{2}$; $h)\ 2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$;
$i)\ 3\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot 3$; $j)\ 2\frac{2}{5}\cdot 2\frac{2}{5}\cdot 2$; $k)\ 7\cdot\frac{3}{5}\cdot 8\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$; $l)\ \frac{1}{3}\cdot 3\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{5}$,

i przekonaj się, że iloczyn kilku ułamków oblicza się podobnie jak iloczyn dwóch ułamków.

Np.: $$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}=\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}=\frac{48}{105}.$$

2. Oblicz następujące wyrażenia:

$a)\ (\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{7})\cdot(\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{11})$; $b)\ \frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2})\cdot\frac{7}{9}$; $c)\ \frac{1}{4}\cdot(2\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11})$;
$d)\ \frac{3}{7}\cdot(\frac{2}{5}+\frac{1}{10})\cdot\frac{5}{9}$; $e)\ \frac{3}{5}\cdot(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})\cdot(\frac{2}{7}+1)$;
$f)\ (\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{7}{3}-\frac{1}{2})\cdot(\frac{2}{3}+\frac{3}{4})$.

Uwaga. Należy najpierw wykonać działania naznaczone w nawiasach!

3. Oblicz:

$a)\ \frac{8}{15}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{3}$, $\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{8}$, $\frac{10}{21}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{3}{2}$;
$b)\ \frac{75}{100}\cdot\frac{63}{48}\cdot\frac{27}{72}$, $\frac{42}{21}\cdot\frac{57}{91}\cdot\frac{26}{19}$, $\frac{42}{75}\cdot\frac{39}{95}\cdot\frac{38}{91}\cdot\frac{45}{60}$;
$c)\ \frac{1}{8}\cdot 5\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}$, $3\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{3}$, $\frac{33}{30}\cdot 2\frac{2}{11}\cdot\frac{56}{44}$;
$d)\ 4\frac{23}{25}\cdot\frac{10}{41}\cdot 2\frac{32}{39}$, $3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{70}$, $2\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{15}\cdot 1\frac{11}{34}$.

Uwaga. Przed wykonaniem mnożenia należy zwrócić uwagę, czy któryś z liczników i mianowników nie mają wspólnego podzielnika. Jeśli wspólny podzielnik istnieje, należy przez niego uprościć!

Np.: $$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{7}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{2}{\cancel{10}}\cdot\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot\underset{1}{\cancel{7}}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\underset{3}{\cancel{6}}}=\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}=\frac{2}{9}.$$

4. Ile kosztuje podłoga o wymiarach $8\frac{3}{4}$ *m* i $12\frac{1}{2}$ *m*, jeśli 1 m^2 podłogi kosztuje 9 *zł* 20 *gr*?

5. Ile zarobiło 9 robotników w $4\frac{1}{2}$ dniach, jeśli dziennie każdy z nich zarabiał $7\frac{3}{5}$ *zł*?

6. Robotnik dostaje za 1 godzinę pracy $1\frac{2}{5}$ *zł*; ile zarobi w ciągu 6 dni, pracując dziennie $7\frac{3}{4}$ godziny?
7. Jeden *hl* pszenicy waży około 75 *kg*. Wiedząc, że mąka otrzymana z pszenicy waży $\frac{13}{16}$ ciężaru pszenicy i że chleb otrzymany z mąki waży $\frac{7}{5}$ ciężaru mąki, oblicz, ile *kg* chleba mamy z 1 *hl* pszenicy?

Prawo przemienności

Mamy:
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}.$$

Zmieniając porządek czynników, otrzymamy:
$$\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 3}.$$

Widzimy zatem, że iloczyn dwóch ułamków nie zależy od porządku czynników. Podobnie iloczyn kilku ułamków nie zależy od porządku czynników.

Np.:
$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{11}{7}=\frac{3\cdot 2\cdot 11}{5\cdot 9\cdot 7}.$$

Zmieniając porządek czynników, otrzymamy:
$$\frac{2}{9}\cdot\frac{11}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 11\cdot 3}{9\cdot 7\cdot 5}.$$

W obu wynikach tak liczniki, jak i mianowniki są odpowiednio równe.

Prawo łączności

Podobnie jak dla liczb całkowitych, zachodzi dla iloczynu ułamków prawo łączności.

Mamy naprzykład:
$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{11}=\frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 2\cdot 11}.$$

Zastępując czynniki $\frac{3}{7}$ i $\frac{5}{2}$ ich iloczynem $\frac{3\cdot 5}{7\cdot 2}$, otrzymujemy:
$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3\cdot 5}{7\cdot 2}\cdot\frac{6}{11}=\frac{2\cdot(3\cdot 5)\cdot 6}{5\cdot(7\cdot 2)\cdot 11}.$$

Otrzymaliśmy ten sam wynik, jak poprzednio, gdyż na mocy prawa łączności, poznanego dawniej dla iloczynu liczb całkowitych, liczniki i mianowniki w obu wynikach są odpowiednio sobie równe.

Zatem: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{6}{11}$.

Prawo rozdzielności względem dodawania i odejmowania.

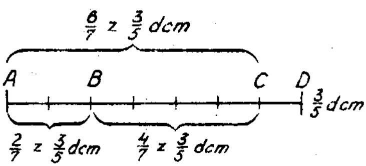
Odcinek AD równa się $\frac{3}{5}$ *dcm*. Podzieliliśmy go na 7 równych części tak, że $AB = \frac{2}{7}$ odcinka AD, $BC = \frac{4}{7}$ odcinka AD.

Z rysunku 10 widzimy, że $AC = AB + BC$,

czyli: $\frac{6}{7}$ z $\frac{3}{5}$ *dcm* $= \left(\frac{2}{7}\right.$ z $\left.\frac{3}{5} \text{ dcm}\right) + \left(\frac{4}{7}\right.$ z $\left.\frac{3}{5} \text{ dcm}\right)$,

więc: $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{5} \text{ dcm} = \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} \text{ dcm}\right) + \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \text{ dcm}\right)$.

Zatem: $\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}\right)$.



Rys. 10.

Otrzymaliśmy więc prawo rozdzielności iloczynu względem dodawania (znane nam już dla liczb całkowitych).

Z rysunku 10 widzimy również, że:

$\frac{4}{7}$ z $\frac{3}{5}$ *dcm* $= \left(\frac{6}{7}\right.$ z $\left.\frac{3}{5} \text{ dcm}\right) - \left(\frac{2}{7}\right.$ z $\left.\frac{3}{5} \text{ dcm}\right)$,

czyli: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \text{ dcm} = \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{5} \text{ dcm}\right) - \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} \text{ dcm}\right)$,

więc: $\left(\frac{6}{7} - \frac{2}{7}\right) \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}\right.$.

Otrzymaliśmy więc prawo rozdzielności iloczynu względem odejmowania.

1. Przekonaj się, że następujące pary iloczynów są sobie równe:

   a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7}$ i $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$; *b)* $2 \cdot \frac{4}{11}$ i $\frac{4}{11} \cdot 2$; *c)* $\frac{11}{5} \cdot 3$ i $3 \cdot \frac{11}{5}$;
   d) $\frac{13}{2} \cdot \frac{5}{8}$ i $\frac{5}{8} \cdot \frac{13}{2}$.

2. W iloczynie $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{11}$ przestaw czynniki na wszystkie możliwe sposoby i przekonaj się, że wszystkie otrzymane iloczyny będą sobie równe.
3. Narysuj prostokąt o wymiarach $\frac{1}{2}$ *dcm* i $\frac{3}{4}$ *dcm*; obierając raz jeden bok, drugi raz drugi bok za podstawę, oblicz jego pole. Co zauważysz?
4. *a)* Jeden robotnik zarabiał przez 6 dni po $4\frac{1}{2}$ *zł*, drugi zaś przez $4\frac{1}{2}$ dnia po 6 *zł*; porównaj ich zarobki.
   b) Jeden piechur szedł $4\frac{1}{2}$ godziny, przechodząc $5\frac{1}{4}$ *km* w godzinie, drugi zaś szedł $5\frac{1}{4}$ godziny, przechodząc $4\frac{1}{2}$ *km* w godzinie; porównaj ich drogi.
5. Ile to jest $\frac{7}{8}$ z $\frac{3}{4}$, a ile $\frac{3}{4}$ z $\frac{7}{8}$?
6. Oblicz: $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{2}{3})^2$, $(1\frac{3}{5})^2$, $(\frac{1}{3})^3$, $(2\frac{1}{7})^3$, $(\frac{5}{4})^3$.
7. Sprawdź następujące równości:
   a) $(\frac{5}{12} + \frac{7}{8}) \cdot \frac{6}{5} = (\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{5}) + (\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{5})$;
   b) $(2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4}) \cdot \frac{5}{6} = (2\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}) + (3\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6})$;
   c) $(\frac{25}{48} - \frac{15}{64}) \cdot \frac{36}{125} = (\frac{25}{48} \cdot \frac{36}{125}) - (\frac{15}{64} \cdot \frac{36}{125})$;
   d) $(2\frac{23}{36} - 1\frac{15}{42}) \cdot \frac{6}{19} = (2\frac{23}{36} \cdot \frac{6}{19}) - (1\frac{15}{42} \cdot \frac{6}{19})$.

Ćwiczenia

1. Ile otrzymamy, jeżeli od liczby 325 odejmiemy $\frac{4}{5}$ tej liczby?
2. Co jest większe: suma, czy iloczyn ułamków $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{4}$?
3. Ziemia przebiega w ciągu jednej sekundy $30\frac{13}{25}$ *km*; ile *km* przebiegnie w ciągu roku ($365\frac{1}{4}$ dni)?
4. Śruba wkręca się o $\frac{3}{16}$ *mm* za każdym obrotem; jak głęboko się wkręci po $15\frac{2}{9}$ obrotach?
5. Dwaj robotnicy za wykonanie pewnej pracy otrzymali razem 120 *zł*; pierwszy wykonał $\frac{3}{4}$ pracy, drugi resztę. Ile każdy z nich zarobił?
6. Za ile ma kupiec sprzedać towar, który go kosztował 300 *zł*, jeśli chce zarobić $\frac{3}{20}$ tego, co zapłacił?
7. Kupiec kupił $50\frac{2}{5}$ *kg* towaru, płacąc $2\frac{1}{2}$ *zł* za 1 *kg*; chce zarobić $\frac{3}{25}$ tego, co zapłacił. *a)* Ile zapłacił za towar? *b)* Jaki będzie miał zysk? *c)* Jaka będzie cena sprzedaży 1 *kg* tego towaru?

8. Z dwóch miejscowości odległych od siebie o $97\frac{1}{4}$ *km*, wychodzą równocześnie naprzeciwko siebie dwaj posłańcy; jeden przebywa w ciągu godziny $4\frac{3}{8}$ *km*, drugi $5\frac{1}{4}$ *km*. W jakiej odległości od siebie będą po $6\frac{1}{2}$ godzinach?
9. Kwotę 3256 *zł* rozdzielono między cztery osoby tak, że pierwsza otrzymała $\frac{2}{5}$, druga $\frac{1}{8}$, trzecia $\frac{1}{4}$, a czwarta resztę; ile otrzymała każda osoba?
10. Rozdzielono 1200 *zł* pomiędzy 15 osób w ten sposób, że pomiędzy 10 osób rozdzielono $\frac{5}{6}$ całej sumy na równe części, a pomiędzy pozostałych 5 osób resztę również na równe części. Ile otrzymała każda osoba?
11. Ktoś wydał naprzód $\frac{2}{5}$ tej sumy pieniędzy, którą posiadał, a następnie $\frac{3}{5}$ reszty; jaki ułamek ma jeszcze tej sumy, którą posiadał na początku?
12. Ktoś mierzył fałszywym metrem, mianowicie o $1\frac{1}{4}$ *cm* krótszym i wymierzył $15\frac{1}{2}$ *m*; jaka jest prawdziwa długość?
13. Wapno gaszone zajmuje $3\frac{1}{2}$ razy większą objętość, aniżeli przed gaszeniem; jaką objętość będzie miało $5\frac{3}{4}$ m^3 wapna po gaszeniu?
14. Obwód pola w kształcie prostokąta wynosi 545 *m*, a szerokość jego wynosi $\frac{2}{3}$ długości. Jaka jest wartość tego pola, jeśli 1 m^2 kosztuje $\frac{1}{5}$ *zł*?
15. Oblicz w stopniach, minutach i sekundach kąt, jaki opisuje wskazówka mała (godzinowa) zegara w: *a)* $\frac{7}{15}$ godz., *b)* $\frac{5}{12}$ godz., *c)* $1\frac{3}{4}$ godz.?
16. Trawa traci $\frac{13}{20}$ swego ciężaru po wysuszeniu na siano. Jaka jest wartość zbiorów z łąki, która przy pierwszem skoszeniu dała 12 *t* trawy, a przy drugiem $\frac{2}{3}$ tej ilości, jeśli 1 *t* siana kosztuje 75 *zł*?
17. Brukarze wybrukowali trzy ulice o wymiarach $11\frac{1}{2}$ *m* i $98\frac{1}{5}$ *m*, $10\frac{1}{4}$ *m* i $72\frac{1}{2}$ *m*, 12 *m* i $110\frac{3}{4}$ *m*; ile należy się brukarzom za robotę, jeśli 1 m^2 kosztuje $1\frac{1}{2}$ *zł*?
18. Sztuka płótna miała $\frac{4}{5}$ *m* szerokości, a $25\frac{1}{2}$ *m* długości. Po wypraniu straciła $\frac{1}{20}$ swej szerokości i $\frac{1}{15}$ swej długości; ile m^2 ma teraz ta sztuka płótna?

19. 30 mężczyzn, 20 kobiet i 15 dzieci urządziło wycieczkę, która przeciętnie kosztowała 2 *zł* za jedno dziecko, za jedną kobietę $\frac{7}{4}$ tego, co za dziecko i za jednego mężczyznę $\frac{5}{2}$ tego, co za dziecko; ile kosztowała wycieczka?

Dzielenie przez ułamek

Wyznaczenie całości z jej ułamka

Jaka jest długość odcinka AB, jeżeli $\frac{2}{3}$ tego odcinka ma 4 *cm*?

Mamy więc: $\frac{2}{3}$ z AB ma 4 *cm*.

Szukamy więc całości (t. j. długości AB), znając ułamek tej całości. Zadanie nasze możemy zaznaczyć następująco:

$$\tfrac{2}{3} \cdot ?\ cm = 4\ cm.$$

Szukamy zatem mnożnej znając mnożnik i iloczyn. Podobnie jak dla liczb całkowitych daną wartość iloczynu (4 *cm*) nazywamy **dzielną**, dany mnożnik ($\frac{2}{3}$) **dzielnikiem**, szukaną zaś mnożną **ilorazem**. Iloraz oznaczamy:

$$4\ cm : \tfrac{2}{3}.$$

Zadanie powyższe rozwiązujemy w następujący sposób: Jeżeli $\frac{2}{3}$ z AB ma 4 *cm*, to $\frac{1}{3}$ z AB ma dwa razy mniejszą długość t. j. 2 *cm*. Zatem odcinek AB ma $3 \cdot 2\ cm = 6\ cm$.

A więc $\quad 4\ cm : \frac{2}{3} = 6\ cm.$

Sprawdzamy: $\quad \frac{2}{3}$ z $6\ cm = \frac{2}{3} \cdot 6\ cm = 4\ cm.$

Podobnie rozwiązujemy następujące zadanie:

Ile kosztuje 1 *kg* towaru, jeżeli $\frac{3}{5}$ tego towaru kosztuje 21 *zł*? Jak wiemy, cena towaru = liczba *kg* towaru · cena 1 *kg*.

Zadanie napiszemy więc:

$$21\ zł = \tfrac{3}{5} \cdot ?\ zł, \text{ lub } 21\ zł = \tfrac{3}{5} \text{ z } ?\ zł.$$

Widzimy, że znowu szukamy całości, znając jej ułamek. Ponieważ cena 1 *kg* jest szukaną mnożną, zatem możemy napisać: cena 1 $kg = 21\ zł : \frac{3}{5}$.

Zadanie rozwiązujemy następująco: $\frac{3}{5}$ *kg* kosztuje 21 *zł*, zatem $\frac{1}{5}$ *kg* kosztuje 3 razy mniej t. j. 7 *zł*. Stąd 1 *kg* kosztuje 5 razy więcej t. j. $5 \cdot 7$ *zł* $= 35$ *zł*.

A więc: 21 *zł* $: \frac{3}{5} = 35$ *zł*.

Zadania

1. $\frac{5}{8}$ *kg* pewnego towaru kosztuje 5 *zł*; ile kosztuje 1 *kg* tego towaru?
2. Ile kosztuje gram złota, jeśli $2\frac{1}{2}$ *g* złota kosztuje 15 *zł*?
3. Automobil przebiegł w $5\frac{1}{2}$ godziny 260 *km*; jaką drogę przebiegł w 1 godzinie?
4. Robotnik za $3\frac{1}{2}$ godziny pracy otrzymał 7 *zł*; ile płacono mu za 1 godzinę?
5. $\frac{2}{5}$ sztuki sukna kosztuje 240 *zł*; ile kosztuje cała sztuka?
6. W ciągu 3 godzin robotnik wykonał $\frac{2}{5}$ przyjętej pracy; w jakim czasie wykona całą pracę?
7. $\frac{3}{4}$ butelki octu kosztuje 24 *gr*; ile kosztuje pełna butelka octu?
8. Przedstaw szukane mnożne w postaci ilorazu:

   a) $\frac{3}{4} \cdot ?$ *zł* $= 18$ *zł*; $\frac{3}{10} \cdot ?$ *l* $= 4$ *l*;
   b) $\frac{4}{5} \cdot ?$ *kg* $= 9$ *kg*; $\frac{2}{5} \cdot ?$ godz. $= 7$ godz;
   c) $\frac{5}{2} \cdot ?$ *km* $= 10$ *km*; $\frac{3}{25} \cdot ?\ m^2 = 6\ m^2$.

9. Napisz iloczyny, w których mnożna będzie szukanym ilorazem:

   a) 5 *zł* $: \frac{4}{7} = ?$; $9\ l : \frac{6}{5} = ?$
   b) 7 *kg* $: \frac{3}{2} = ?$; 6 godz. $: \frac{3}{11} = ?$
   c) 8 *km* $: \frac{5}{12} = ?$, $11\ m^2 : 1\frac{1}{4} = ?$

Wyznaczanie, jakim ułamkiem jednej całości jest druga całość

Jakim ułamkiem odcinka $\frac{9}{4}$ *cm* jest odcinek o długości 2 *cm?* Zadanie napiszemy:

$$2\ cm = ?\ z\ \frac{9}{4}\ cm.$$

Zadanie więc sprowadza się do wyznaczenia, jakim ułamkiem jedna całość (t. j. 2 *cm*) jest drugiej całości (t. j. $\frac{9}{4}$ *cm*). Zadanie możemy również zapisać następująco:

$$2\ cm = ? \cdot \tfrac{9}{4}\ cm.$$

Mamy więc wyznaczyć mnożnik, znając mnożną i iloczyn. W tym wypadku dany iloczyn (2 *cm*) nazywamy **dzielną**, daną mnożną ($\frac{9}{4}$ *cm*) **dzielnikiem**, szukany mnożnik **ilorazem**. Iloraz oznaczamy jak poprzednio:

$$2\ cm : \tfrac{9}{4}\ cm.$$

Zadanie rozwiązujemy następująco:
$\frac{1}{4}$ *cm* jest $\frac{1}{9}$ z $\frac{9}{4}$ *cm*; zatem 1 *cm* ma $\frac{4}{9}$ z $\frac{9}{4}$ *cm*; więc 2 *cm* ma dwa razy więcej t. j. $\frac{8}{9}$ z $\frac{9}{4}$ *cm*.

Podobnie rozwiązujemy zadanie:

W jakim czasie przebiegł goniec 90 *m*, jeżeli w sekundzie przebiegał $7\frac{1}{5}$ *m*? Jak wiemy:

droga przebyta = liczba sek. · droga w 1 sek.

Zatem zadanie możemy zaznaczyć:

$$90\ m = ? \cdot 7\tfrac{1}{5}\ m, \text{ lub } 90\ m = ? \text{ z } 7\tfrac{1}{5}\ m.$$

Ponieważ szukamy mnożnika, więc szukany czas wyraża się ilorazem: $90\ m : 7\frac{1}{5}\ m$, czyli $90\ m : \frac{36}{5}\ m$.

Ponieważ goniec przebiega $\frac{36}{5}$ *m* w 1 sek., więc $\frac{1}{5}$ *m* przebiega w czasie 36 razy krótszym, t. j. w $\frac{1}{36}$ sek. Zatem 1 *m* przebiega w czasie 5 razy dłuższym, t. j. w $\frac{5}{36}$ sek. A więc 90 *m* przebiegnie w czasie 90 razy dłuższym, t. j.

$$\text{w } 90 \cdot \tfrac{5}{36} \text{ sek.} = \tfrac{450}{36} \text{ sek.} = \tfrac{25}{2} \text{ sek.} = 12\tfrac{1}{2} \text{ sek.}$$

Zatem: $90\ m : 7\frac{1}{5}\ m = 12\frac{1}{2}$.

Sprawdzamy: $12\frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{5}\ m = \frac{25}{2} \cdot \frac{36}{5}\ m = 90\ m$.

Uwaga. Mówimy, że $7\frac{1}{5}$ *m* mieści się w 90 *m* $12\frac{1}{2}$ razy. A więc pytanie, ile razy jedna wielkość mieści się w drugiej, oznacza pytanie, jakim ułamkiem pierwszej wielkości jest druga.

Zadania

1. 12 *l* wina rozlano w butelki o pojemności $\frac{3}{4}$ *l*; ile butelek napełniono?

2. Ile razy odcinek $13\frac{1}{2}$ *m* jest dłuższy od odcinka $2\frac{1}{4}$ *m*?
3. Kilogram cukru kosztuje $1\frac{3}{4}$ *zł*; ile *kg* cukru otrzymamy za $6\frac{1}{8}$ *zł*?
4. Zegar przyśpiesza dziennie o $2\frac{2}{5}$ minuty; po ilu dniach przyśpieszy o godzinę?
5. Ile kamizelek można uszyć ze sztuki 6 *m* sukna, jeśli na jedną kamizelkę potrzeba $\frac{3}{8}$ *m* sukna?
6. Metr ma około $1\frac{3}{4}$ łokcia; ile to jest metrów $4\frac{1}{5}$ łokcia?
7. Obwód koła u wozu wynosi $\frac{22}{7}$ *m*; ile razy koło obróci się na drodze o długości $97\frac{3}{7}$ *m*?
8. Śruba wkręca się o $\frac{3}{4}$ *mm* za jednym obrotem; ile razy trzeba śrubę obrócić, aby wkręciła się o $3\frac{3}{4}$ *mm*?
9. Przedstaw szukane mnożniki w postaci ilorazu:

$$?\cdot\frac{5}{4}\ cm = 1\frac{1}{2}\ cm;\qquad ?\cdot\frac{11}{4}\ l = \frac{2}{5}\ l;$$
$$?\cdot 1\frac{1}{2}\ kg = 3\frac{1}{5}\ kg;\qquad ?\cdot 1\frac{1}{12}\ \text{godz.} = 2\frac{1}{2}\ \text{godz.};$$
$$?\cdot 5\frac{3}{4}\ zł = \frac{5}{8}\ zł;\qquad ?\cdot 3\frac{1}{8}\ m^2 = 1\frac{3}{4}\ m^2.$$

10. Napisz iloczyny, w których mnożnik będzie szukanym ilorazem:

$$11\frac{1}{2}\ cm : 3\frac{1}{4}\ cm = ?;\qquad 1\frac{1}{2}\ zł : 2\frac{1}{2}\ zł = ?;$$
$$2\frac{1}{5}\ kg : 1\frac{3}{4}\ kg = ?;\qquad 8\frac{1}{2}\ l : 1\frac{1}{4}\ l = ?;$$
$$4\frac{13}{20}\ m^2 : 5\frac{1}{5}\ m^2 = ?;\qquad 3\frac{1}{3}\ \text{godz.} : 1\frac{1}{5}\ \text{godz.} = ?$$

Iloraz liczb

W poprzednich wypadkach mieliśmy wyznaczyć czynnik iloczynu, znając wartość iloczynu i drugi czynnik. Podobne zadanie możemy postawić dla liczb niemianowanych.

Np. wartość iloczynu jest $\frac{56}{15}$, a jeden jego czynnik jest $\frac{7}{3}$; ile wynosi drugi czynnik?

Jeżeli szukany czynnik jest mnożnikiem, to zadanie możemy zaznaczyć w następujący sposób:

$$?\cdot\frac{7}{3} = \frac{56}{15};$$

jeżeli szukany czynnik jest mnożną, to napiszemy:

$$\frac{7}{3}\cdot ? = \frac{56}{15}.$$

W obu wypadkach odpowiedź jest ta sama, t. j. $\frac{8}{5}$, albowiem
$$\frac{8}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{56}{15}.$$

Widzimy stąd, że (podobnie jak dla liczb całkowitych) obojętną jest rzeczą, czy szukany czynnik jest mnożną, czy mnożnikiem.

Dany iloczyn ($\frac{56}{15}$) nazywamy **dzielną**, dany czynnik ($\frac{7}{3}$) **dzielnikiem**, szukany czynnik ($\frac{8}{5}$) **ilorazem**.

Widzimy, że iloraz pomnożony przez dzielnik, daje na wynik dzielną.

Zatem: **Ilorazem dwóch ułamków jest ułamek, który pomnożony przez drugi, daje na wynik pierwszy.**

Iloraz ułamków oznaczamy podobnie jak iloraz liczb całkowitych, zatem: $\frac{56}{15} : \frac{7}{3} = \frac{8}{5}$.

Podobnie: $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$, bo $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.

Uwaga. Należy pamiętać, że dzielnik nigdy nie może być zerem.

Jeżeli dzielna jest zerem, to iloraz jest zerem.

Np.: $0 : \frac{2}{3} = 0$, bo $0 \cdot \frac{2}{3} = 0$.

Obliczanie ilorazu

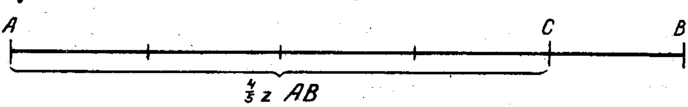
Mamy obliczyć iloraz $8 : \frac{4}{5}$.

Zadanie to możemy uzmysłowić sobie na następującym przykładzie:

Odcinek AC jest $\frac{4}{5}$ odcinka AB i ma długość 8 *cm*; jaka jest długość odcinka AB (rys. 11)?

Mamy: długość $AC = \frac{4}{5}$ długości AB,

więc $8\ cm = \frac{4}{5} \cdot ?\ cm.$



Rys. 11.

Szukamy mnożnej, przeto:

$$8\ cm : \tfrac{4}{5} = \text{długość } AB.$$

Z rys. 11 widzimy, że: długość odcinka $AB = \frac{5}{4}$ z $8\ cm$. Ułamek $\frac{5}{4}$ z $8\ cm$ możemy obliczyć w dwojaki sposób:

1. $\frac{1}{4}$ z $8\ cm = 8\ cm : 4 = 2\ cm$; stąd $\frac{5}{4}$ z $8\ cm = 5 \cdot 2 cm = 10\ cm$.

A więc $\quad 8 : \frac{4}{5} = (8 : 4) \cdot 5 = 10.$

2. $\frac{5}{4}$ z $8\ cm$ t. j. $\frac{1}{4}$ z $(5 \cdot 8\ cm) = \frac{1}{4}$ z $40\ cm = 40\ cm : 4 = 10\ cm$.

A więc $\quad 8 : \frac{4}{5} = (5 \cdot 8) : 4 = 10.$

Widzimy stąd, że *liczbę dzielimy przez ułamek, dzieląc przez licznik, a następnie mnożąc przez mianownik, lub najpierw mnożąc przez mianownik, a następnie dzieląc przez licznik.*

Np. $15 : \frac{3}{4} = (15 : 3) \cdot 4 = 20$, lub $15 : \frac{3}{4} = (4 \cdot 15) : 3 = 20$.

Mamy obliczyć iloraz:

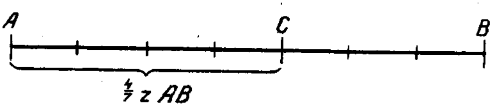
$$\tfrac{3}{14} : \tfrac{4}{7}.$$

Zadanie to możemy uzmysłowić sobie na następującym przykładzie:

Odcinek AC jest $\frac{4}{7}$ odcinka AB i ma długość $\frac{3}{14}\ dcm$; jaka jest długość odcinka AB (rys. 12)?

Mamy: $\quad$ długość $AC = \frac{4}{7}$ długości AB,

więc: $\quad \frac{3}{14}\ dcm = \frac{4}{7} \cdot ?\ dcm.$



Rys. 12.

Szukamy więc mnożnej, przeto:

$$\tfrac{3}{14}\ dcm : \tfrac{4}{7} = \text{długość } AB.$$

Z rys. 12 widzimy, że odcinek AB składa się z 7 czwartych części odcinka AC.

Zatem: $\quad$ długość $AB = \frac{7}{4}$ z $\frac{3}{14}\ dcm$,

czyli: $\quad$ długość $AB = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{14}\ dcm.$

A więc: $\frac{3}{14}\ dcm : \frac{4}{7} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{14}\ dcm.$

Zatem: $\frac{3}{14} : \frac{4}{7} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{14} = \frac{3}{14} \cdot \frac{7}{4}.$

Ułamek $\frac{7}{4}$ nazywamy odwrotnością ułamka $\frac{4}{7}$.

Możemy więc powiedzieć: **Iloraz dwóch ułamków otrzymujemy, mnożąc dzielną przez odwrotność dzielnika.**

Uwaga. Odwrotność liczby całkowitej lub mieszanej otrzymamy, pisząc ją w postaci ułamka, a następnie odwracając. Zatem odwrotnością liczby $7 = \frac{7}{1}$ jest ułamek $\frac{1}{7}$.

Podobnie odwrotnością liczby $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ jest ułamek $\frac{2}{7}$.

W powyższej regule dzielenia ułamków mieści się również reguła dzielenia ułamka przez liczbę całkowitą. Mamy bowiem:

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4 \cdot 5};$$

$$\frac{7}{2} : 3 = \frac{7}{2} : \frac{3}{1} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{2 \cdot 3} \text{ i t. d.}$$

Zadania

1. Oblicz: *a)* $2 : \frac{5}{3}$, $7 : \frac{2}{9}$, $4 : \frac{2}{11}$, $12 : \frac{8}{15}$, $20 : \frac{8}{7}$;
   b) $11 : \frac{1}{2}$, $15 : \frac{12}{13}$, $27 : \frac{3}{5}$, $30 : \frac{10}{11}$, $10 : \frac{3}{100}$;
   c) $1 : \frac{1}{5}$, $24 : \frac{32}{3}$, $4 : \frac{11}{2}$, $100 : \frac{25}{31}$, $45 : \frac{18}{5}$.
2. Podaj szukane czynniki w postaci ilorazu:
   $4\frac{1}{2} \cdot ? = 5\frac{3}{10}$, $? \cdot \frac{3}{5} = 1\frac{1}{4}$, $8\frac{4}{9} \cdot ? = \frac{1}{10}$, $? \cdot \frac{1}{8} = 1\frac{1}{10}$.
3. Podaj odwrotności następujących liczb:
   a) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$; *b)* 3, 5, 10; *c)* $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $7\frac{2}{5}$, $5\frac{1}{3}$.
4. Oblicz: *a)* $\frac{2}{3} : \frac{4}{3}$, $\frac{7}{5} : \frac{8}{25}$, $\frac{1}{3} : \frac{3}{8}$, $\frac{7}{15} : \frac{7}{25}$, $\frac{12}{25} : \frac{18}{5}$;
   b) $3 : \frac{2}{3}$, $7 : \frac{1}{5}$, $2 : \frac{3}{5}$, $9 : \frac{3}{4}$, $10 : \frac{100}{101}$;
   c) $2\frac{1}{2} : \frac{7}{5}$, $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$, $3 : 2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} : 1\frac{1}{5}$, $7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$.
5. Oblicz: *a)* $369 : \frac{41}{37}$, $27 : \frac{198}{113}$, $\frac{51}{26} : \frac{68}{65}$;
   b) $17\frac{3}{13} : \frac{49}{52}$, $107 : 35\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{32} : 7\frac{13}{16}$;
   c) $6\frac{86}{121} : \frac{2}{121}$, $5\frac{7}{121} : 5\frac{35}{44}$, $\frac{477}{187} : \frac{212}{561}$.
   Po zmianie ilorazu uprość!
6. Ile wynosi mnożna, jeżeli:
   a) iloczyn wynosi $\frac{3}{4}$, a mnożnik $\frac{5}{7}$;
   b) iloczyn wynosi $1\frac{1}{2}$, a mnożnik $\frac{8}{11}$;
   c) iloczyn wynosi $3\frac{4}{5}$, a mnożnik $1\frac{8}{9}$?

7. Ile wynosi mnożnik, jeżeli:
   a) iloczyn wynosi $\frac{17}{4}$; a mnożna $\frac{5}{8}$;
   b) iloczyn wynosi $3\frac{1}{6}$, a mnożna $\frac{23}{12}$;
   c) iloczyn wynosi $4\frac{1}{2}$, a mnożna $3\frac{1}{4}$?
8. Przez co trzeba pomnożyć liczbę $3\frac{1}{2}$, aby otrzymać 4?
9. Iloczyn dwóch liczb wynosi $\frac{11}{8}$; jedna z tych liczb jest $2\frac{1}{3}$. Ile wynosi druga?
10. Ile razy można odejmować $\frac{3}{4}$ od $4\frac{3}{8}$?
11. Jaka liczba podzielona przez: *a)* $\frac{3}{2}$, *b)* $2\frac{1}{3}$, *c)* $5\frac{3}{7}$, daje iloraz *a)* $\frac{4}{5}$, *b)* $\frac{11}{8}$, *c)* $3\frac{1}{6}$?
12. Jaka liczba jest swoją odwrotnością?
13. *a)* $\frac{5}{8}$ pewnego ciężaru wynosi $\frac{7}{10}$ *kg*; jak wielki jest ten ciężar?
    b) $\frac{11}{4}$ pewnego pola wynosi $2\frac{1}{4}$ *a*; jak wielkie jest to pole?
    c) $2\frac{3}{5}$ pewnej objętości wynosi $1\frac{1}{2}$ cm^3; jak wielka jest ta objętość?
14. Pole prostokąta wynosi: *a)* 2 cm^2, *b)* $\frac{3}{4}$ cm^2, *c)* $6\frac{2}{5}$ cm^2, jeden zaś bok ma: *a)* $\frac{4}{5}$ *cm*, *b)* $\frac{3}{5}$ *cm*; *c)* $2\frac{2}{5}$ *cm*; ile wynosi drugi bok?
15. Zamień następujące iloczyny na ilorazy: *a)* $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$, *b)* $2\cdot\dot{5}$, *c)* $3\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{3}$, *d)* $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}$. Uwaga: Np.: $\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{7}:\frac{3}{2}$.

Własności ilorazu

Dzielna, dzielnik, iloraz

Jak wiemy:

cena towaru = liczba *kg* · cena 1 *kg*.

Jeśli zatem 1 *kg* kosztuje $\frac{2}{5}$ *zł*, to, aby obliczyć, ile *kg* kupimy za $\frac{14}{10}$ *zł*, należy znaleźć iloraz:

$$\frac{14}{10}\ \text{zł} : \frac{2}{5}. \text{ Lecz } \frac{14}{10}:\frac{2}{5}=\frac{14}{10}\cdot\frac{5}{2}=\frac{7}{2}.$$

Widzimy stąd, że za $\frac{14}{10}$ *zł* kupimy $\frac{7}{2}$ *kg* towaru.

Gdybyśmy znali dzielną i wartość ilorazu, t. zn. wiedzieli, że za $\frac{14}{10}$ *zł* można kupić $\frac{7}{2}$ *kg*, to cenę jednego kilograma tego towaru otrzymalibyśmy, obliczając iloraz:

$$\frac{14}{10}\ \text{zł} : \frac{7}{2}.$$

A więc: $\frac{2}{5}$ *zł* $= \frac{14}{10}$ *zł* $: \frac{7}{2}$.

Widzimy stąd, że: **dzielnik równa się dzielnej podzielonej przez iloraz.**

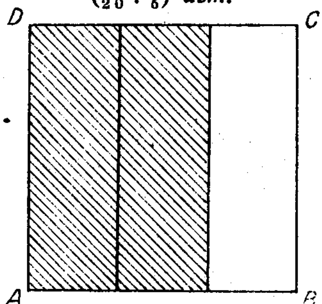
Zadania

1. Ile wynosi dzielna, jeżeli:
   a) dzielnik wynosi 6, a iloraz $\frac{7}{2}$;
   b) dzielnik wynosi 12, a iloraz $\frac{4}{5}$;
   c) dzielnik wynosi $\frac{6}{7}$, a iloraz $\frac{14}{9}$;
   d) dzielnik wynosi $3\frac{1}{5}$, a iloraz $1\frac{2}{3}$?
2. Ile wynosi dzielnik, jeżeli:
   a) dzielna wynosi 4, a iloraz 5;
   b) dzielna wynosi $\frac{2}{3}$, a iloraz 4;
   c) dzielna wynosi 3, a iloraz $\frac{2}{5}$;
   d) dzielna wynosi $\frac{4}{5}$, a iloraz $\frac{15}{8}$?
3. Przez jaką liczbę należy $\frac{2}{3}$ podzielić, aby otrzymać $\frac{3}{2}$?
4. Zastąp literę x liczbą tak, aby była spełniona równość:
   a) $\frac{2}{3} : x = \frac{5}{4}$; *b)* $x : \frac{7}{8} = \frac{2}{3}$; *c)* $3\frac{1}{2} : x = 2$; *d)* $x : \frac{2}{5} = 7\frac{1}{4}$.
5. Oblicz następujące wyrażenia:
   a) $(\frac{2}{5} : 3) \cdot 3$; *b)* $(1\frac{1}{3} : \frac{2}{5}) \cdot \frac{2}{5}$; *c)* $(\frac{2}{7} : 3\frac{1}{4}) \cdot 3\frac{1}{4}$; *d)* $(5\frac{2}{9} : 1\frac{4}{5}) \cdot 1\frac{4}{5}$.

Przekształcanie ilorazu

Prostokąt $ABCD$ o podstawie $\frac{2}{5}$ *dcm* (rys. 13) ma pole $\frac{3}{20}$ *dcm*^{2}. Wysokość AD prostokąta $ABCD$ wynosi zatem:

$$\left(\frac{3}{20} : \frac{2}{5}\right) dcm.$$



Rys. 13.

Prostokąt zacieniowany ma podstawę $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}$ *dcm* i pole $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{20}$ *dcm*². Wysokość *AD* prostokąta zacieniowanego ma zatem decymetrów: $(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{20}):(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5})$.

Widzimy stąd, że:

$$\frac{3}{20}:\frac{2}{5}=(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{20}):(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}).$$

Zatem: Iloraz nie zmieni się, jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy przez tę samą liczbę.

Gdybyśmy dzielnik i dzielną podzielili przez tę samą liczbę, to iloraz również nie zmieniłby się. Pisząc bowiem w ostatnim wzorze: $\frac{3}{20}:\frac{3}{2}$ zamiast $\frac{3}{20}\cdot\frac{2}{3}$ i $\frac{2}{5}:\frac{3}{2}$ zamiast $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}$, otrzymamy: $\frac{3}{20}:\frac{2}{5}=(\frac{3}{20}:\frac{3}{2}):(\frac{2}{5}:\frac{3}{2})$.

Zadania

1. Sprawdź następujące równości:
   a) $\frac{3}{5}:\frac{4}{7}=(\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{11}):(\frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11})$; *b)* $2:\frac{3}{7}=(2\cdot\frac{4}{5}):(\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5})$;
   c) $\frac{5}{11}:8=(\frac{5}{11}:\frac{3}{4}):(8:\frac{3}{4})$; *d)* $2\frac{1}{3}:4\frac{2}{5}=(2\frac{1}{3}:\frac{2}{13}):(4\frac{2}{5}:\frac{2}{13})$.
2. Literę x zastąp odpowiednim ułamkiem:
   a) $\frac{1}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2}{3}:x$; *b)* $\frac{3}{7}:\frac{2}{5}=x:\frac{22}{5}$; *c)* $x:\frac{3}{5}=\frac{1}{2}:\frac{9}{5}$.
   Zbadaj jak się zmieniła dzielna względnie dzielnik!

Rozdzielność ilorazu względem sumy i różnicy

Jak wiemy możemy napisać:

$$(\frac{5}{11}+\frac{3}{11})\cdot\frac{2}{7}=(\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{7})+(\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{7}).$$

Zamiast mnożyć przez $\frac{2}{7}$ możemy dzielić przez $\frac{7}{2}$.

Zatem: $(\frac{5}{11}+\frac{3}{11}):\frac{7}{2}=(\frac{5}{11}:\frac{7}{2})+(\frac{3}{11}:\frac{7}{2})$.

Podobnie: $(\frac{5}{11}-\frac{3}{11})\cdot\frac{2}{7}=(\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{7})-(\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{7})$,

więc $(\frac{5}{11}-\frac{3}{11}):\frac{2}{7}=(\frac{5}{11}:\frac{2}{7})-(\frac{3}{11}:\frac{2}{7})$.

Widzimy stąd, że sumę (wzgl. różnicę) dzielimy, dzieląc każdy składnik zosobna, a wyniki dodając (wzgl. odejmując). Jest to t. zw. prawo rozdzielności względem sumy (różnicy).

Zadania

1. Przekonaj się o prawdziwości następujących równości:
   a) $(\frac{2}{3}+\frac{1}{7}):\frac{4}{5}=(\frac{2}{3}:\frac{4}{5})+(\frac{1}{7}:\frac{4}{5})$;

b) $(\frac{11}{24} + 5\frac{2}{6} + \frac{14}{16}) : \frac{7}{8} = (\frac{11}{24} : \frac{7}{8}) + (5\frac{2}{6} : \frac{7}{8}) + (\frac{14}{16} : \frac{7}{8})$;
c) $(5\frac{3}{8} - \frac{21}{4}) : \frac{8}{9} = (5\frac{3}{8} : \frac{8}{9}) - (\frac{21}{4} : \frac{8}{9})$;
d) $(6\frac{1}{2} - \frac{4}{9} + 8\frac{2}{3}) : \frac{5}{6} = (6\frac{1}{2} : \frac{5}{6}) - (\frac{4}{9} : \frac{5}{6}) + (8\frac{2}{3} : \frac{5}{6})$.

Ćwiczenia

1. Jeżeli do $\frac{1}{3}$ pewnego odcinka dodamy $\frac{1}{6}$ tego odcinka, to otrzymamy odcinek długości 9 *cm*. Jaka jest długość danego odcinka?
2. Kupiec kupował cukier po $1\frac{1}{2}$ *zł*, a sprzedawał po $1\frac{7}{10}$ *zł*; ile *kg* sprzedał, jeśli zarobił 90 *zł*?
3. Kupiec płacił za 1 *kg* towaru $4\frac{1}{5}$ *zł*, a sprzedawał po $5\frac{2}{5}$ *zł*; ile *kg* sprzedał i ile zarobił, jeśli za towar otrzymał $17\frac{11}{20}$ *zł*?
4. Kupiec sprzedał $\frac{3}{5}$ swojego zapasu cukru i pozostało mu 25 *kg*; jaki był zapas cukru kupca?
5. Kupiec, sprzedając towar za 60 *zł*, zarobił $\frac{1}{5}$ tego, co zapłacił; ile kupiec zapłacił za towar i ile zarobił?
6. Robotnik za wykonanie $\frac{4}{5}$ zadanej pracy otrzymał $12\frac{1}{5}$ *zł*; ileby zarobił, gdyby wykonał całkowitą pracę?
7. Pewien robotnik wykona zadaną pracę w ciągu 4 godzin, a towarzysz jego wykonałby tę samą pracę w ciągu 5 godzin; w jakim czasie wykonają tę pracę, pracując razem?
8. Dwaj robotnicy, pracując razem, wykonali pewną pracę w $3\frac{1}{13}$ godz.; oblicz, w jakim czasie wykona tę pracę pierwszy robotnik, jeżeli drugi wykona ją w 8-miu godzinach.
9. Jeżeli pewną liczbę zwiększymy o jej $\frac{2}{3}$, to otrzymamy 8; jaka to jest liczba?
10. Jeżeli $\frac{4}{7}$ pewnej kwoty zwiększymy o 5 *zł*, otrzymamy 11 *zł*; ile to jest $\frac{4}{7}$ tej kwoty, a ile wynosi cała kwota?
11. $\frac{3}{4}$ odcinka *AB* równa się $\frac{2}{3}$ odcinka *CD*; jakim ułamkiem odcinka *CD* jest odcinek *AB*?
12. Różnica między $\frac{3}{4}$ pewnej liczby, a $\frac{2}{3}$ tej samej liczby wynosi 14; jaka to jest liczba?
13. Odkręcając jeden kurek, napełnimy basen w ciągu $1\frac{1}{4}$ go-

dziny, odkręcając zaś drugi kurek, napełnimy basen w ciągu $2\frac{2}{3}$ godz.; w jakim czasie napełnimy basen, jeśli oba kurki otworzymy równocześnie?

14. Ktoś wydał najpierw $\frac{2}{5}$ sumy, którą posiadał, następnie $\frac{3}{4}$ reszty i zostało mu 12 *zł*; ile posiadał na początku?
15. Kupiec miał 126 *kg* cukru. Najpierw sprzedał $\frac{5}{9}$ tego zapasu, a następnie $\frac{3}{8}$ reszty; ile mu zostało?
16. Z beczki wina odlano najpierw $\frac{1}{4}$ zawartości, następnie 76 *l* i okazało się, że zostało $\frac{5}{18}$ początkowej ilości wina; ile litrów wina zawierała beczka na początku?
17. Dwaj chłopcy mieli razem 52 *zł*; skoro jeden wydał $\frac{2}{9}$ tego, co posiadał, a drugi $\frac{1}{3}$, okazało się, że mają równo. Ile każdy z nich miał na początku?
18. Dwie skrzynie ważą 65 *kg*; ciężar jednej wynosi $\frac{5}{8}$ ciężaru drugiej. Ile waży każda skrzynia?
19. Do naczynia o pojemności $46\frac{2}{3}$ *l* rura dopływowa dostarcza $5\frac{1}{2}$ *l* wody w każdej minucie, rura zaś odpływowa odprowadza $3\frac{1}{4}$ *l* wody w każdej minucie; w jakim czasie napełni się to naczynie, jeśli obie rury będą równocześnie otwarte?

Mnożenie i dzielenie liczb dziesiętnych

Mnożenie liczby całkowitej przez dziesiętną

Mamy obliczyć iloczyn liczby dziesiętnej przez liczbę całkowitą, np.:

$$24{,}36 \cdot 78.$$

Zamieniając liczbę dziesiętną na ułamek, otrzymujemy:

$$24{,}36 \cdot 78 = \frac{2436}{100} \cdot 78 = \frac{2436 \cdot 78}{100} = \frac{190008}{100} = 1900{,}08.$$

A więc iloczyn liczby całkowitej przez dziesiętną obliczamy następująco: w liczbie dziesiętnej opuszczamy przecinek i tworzymy następnie iloczyn otrzymanych liczb całkowitych; w iloczynie tym odcinamy tyle miejsc dziesiętnych, ile ich posiada liczba dziesiętna.

U w a g a: Gdyby w iloczynie zabrakło miejsc dziesiętnych, wówczas brakujące miejsca zastąpilibyśmy zerami.

Np.: $0{,}0026 \cdot 32$. Liczymy: $26 \cdot 32 = 832$.

W otrzymanym iloczynie mamy odciąć 4 miejsca dziesiętne. Brakujące miejsca zastępujemy zerami.

Więc: $0{,}0026 \cdot 32 = 0{,}0832$.

Zadania

1. Oblicz: *a)* $7{,}9 \cdot 3$; $82{,}7 \cdot 5$; $17{,}9 \cdot 8$; $0{,}6 \cdot 15$; $45{,}7 \cdot 28$;
   b) $38{,}45 \cdot 60$; $19{,}87 \cdot 63$; $42{,}39 \cdot 84$; $618{,}57 \cdot 780$;
   c) $5{,}739 \cdot 74$; $0{,}027 \cdot 423$; $40{,}018 \cdot 176$; $543{,}709 \cdot 104$;
   d) $56{,}0043 \cdot 56$; $712 \cdot 5{,}0485$; $519 \cdot 0{,}40326$; $0{,}0016 \cdot 35$.
2. Przekonaj się na następujących zadaniach, że iloczyn liczby dziesiętnej przez 10, 100, 1000 i t. d. otrzymamy, przesuwając przecinek odpowiednio o jedno, dwa, trzy i t. d. miejsc na prawo:
   a) $4{,}2 \cdot 10$; $0{,}3 \cdot 100$; $62{,}7 \cdot 1000$; $219{,}6 \cdot 10\,000$; $0{,}4 \cdot 100\,000$;
   b) $0{,}07 \cdot 10$; $0{,}38 \cdot 10$; $57{,}29 \cdot 100$; $81{,}23 \cdot 1000$; $70{,}09 \cdot 10\,000$;
   c) $51{,}375 \cdot 10$; $0{,}008 \cdot 100$; $0{,}037 \cdot 1000$; $54{,}025 \cdot 10\,000$;
   d) $472{,}301 \cdot 100$; $1000 \cdot 519{,}07$; $10\,000 \cdot 0{,}0403$.
3. Zamień:
   a) na *dcm*: 5,2 *m*; 12,4 *m*; 0,6 *m*; 51,24 *m*; 0,07 *m*; 0,04 *km*;
   b) na *cm*: 8,06 *m*; 0,4 *m*; 51,97 *m*; 8,025 *m*;
   c) na m^2: 4,3 *a*; 5,36 *a*; 0,49 *a*; 0,02 *a*; 41,5 *a*; 1,025 *a*;
   d) na *g*: 1,25 *kg*; 0,043 *kg*; 3,107 *kg*; 16,9 *kg*;
   e) na *a*: 4,7 *ha*; 21,03 *ha*; 0,032 *ha*; 18,4 *ha*.
4. Oblicz: $4 \cdot 7{,}329 \cdot 5$; $70 \cdot 6{,}2415 \cdot 8$; $12 \cdot 45{,}003 \cdot 7$.
5. 1 *kg* jabłek kosztuje 0,75 *zł*; ile kosztuje 2, 5, 11, 30, 47, 100 *kg* jabłek?
6. 1 *kg* herbaty kosztuje 17 *zł*; ile kosztuje 0,125 *kg*, 0,2 *kg*, 0,25 *kg*, 0,5 *kg*, 1,3 *kg*, 2,7 *kg*?
7. 1 *kg* soli kosztuje 38 *gr*; ile kosztuje 0,5 *kg*, 2,5 *kg*, 7,5 *kg*?

8. 1 tonna węgla kosztuje 56,75 *zł*; ile kosztuje 3 *t*, 5 *t*, 7 *t*, 12 *t*?
9. Płaca dzienna robotnika wynosi 4,3 *zł*; ile należy mu się za 5, 11, 17, 23, 40 dni pracy?
10. 1 *l* wina kosztuje 4 *zł*; ile kosztuje 0,25 *l*, 0,3 *l*, 0,7 *l*, 1,2 *l*, 5,5 *l*?
11. 1 *kg* masła kosztuje 3,65 *zł*; ile kosztuje 2 *kg*, 3 *kg*, 5 *kg*, 19 *kg*, 24 *kg* masła?
12. Przeciętny zbiór żyta z 1 *ha* wynosił w Polsce w 1930 r. 11,8 *q*; ile żyta zebrano, jeżeli było obsianych 5895 *ha*?
13. Ktoś zarabiał miesięcznie 157,5 *zł*, a wydawał 139,4 *zł*; ile zaoszczędził przez rok?
14. Ile wynosi odległość 2 miast, których odległość na mapie w skali 1 : 600 000 wynosi 3,2 *cm*?
15. Atlas kosztuje 21,5 *zł*. Profesor, otrzymawszy zniżkę 80 *gr* na każdym atlasie, zebrał od 43 uczniów w klasie pieniądze; po ile musieli składać uczniowie i ile pieniędzy zebrał profesor?
16. Ile obrotów wykona koło lokomotywy w ciągu jednej godziny, jeśli w ciągu sekundy wykona 1,4 obrotu?
17. Piotruś zaoszczędzał przez rok szkolny po 7,5 *zł* miesięcznie. W czasie wakacyj wydał w lipcu 21,4 *zł*, w sierpniu zaś 38,8 *zł*; ile mu zostało?

Dzielenie liczby dziesiętnej przez całkowitą

Mamy obliczyć iloraz liczby dziesiętnej przez liczbę całkowitą, np.:

$$\begin{array}{l} 86{,}88 : 12 \\ \underline{7{,}24} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 86{,}88 : 12 \\ \underline{84} \\ 28 \\ \underline{24} \\ 48 \\ \underline{48} \\ 00 \end{array}$$

Dzielenie wykonujemy w następujący sposób:

Dzielimy najpierw część całkowitą; otrzymujemy na iloraz 7, a na resztę 2 całe.

Ponieważ 2 całe jest 20 dziesiątych, a w dzielnej mamy jeszcze 8 dziesiątych, więc razem mamy 28 dziesiątych, które należy podzielić przez 12. Jako wynik dzielenia otrzymamy 2 dziesiąte i resztę 4 dziesiąte.

Ponieważ 4 dziesiąte jest 40 setnych, a w dzielnej mamy jeszcze 8 setnych, więc razem mamy 48 setnych, które należy podzielić przez 12. Jako wynik dzielenia otrzymamy 4 setne bez reszty.

Widzimy zatem, że, chcąc obliczyć iloraz liczby dziesiętnej przez całkowitą, postępujemy podobnie jak przy dzieleniu liczb całkowitych. *Przed dopisaniem pierwszej cyfry dziesiętnej dzielnej dajemy w ilorazie przecinek.*

Uwaga 1. Jeżeli w dzielnej zabraknie cyfr, to do reszty dopisujemy zero; wyobrażamy bowiem sobie, że po ostatniej cyfrze dziesiętnej stoją zera.

```
 1,225
 44,1 : 36
 36
  81
  72
   90
   72
   180
   180
   000
```

Uwaga 2. Jeżeli dzielnik jest liczbą większą od dzielnej, wówczas jako część całkowitą ilorazu piszemy 0, a następnie wykonujemy dzielenie jak poprzednio.

Np.:

0,128	0,875
3,2 : 25	7 : 8
32	70
25	64
70	60
50	56
200	40
200	40
000	00

Zadania

1. Oblicz następujące ilorazy:
   a) 16,38 : 2, 37,26 : 18, 27,44 : 35, 16,8 : 12;
   b) 2,58 : 3, 0,275 : 44, 9,1 : 65, 6,37 : 40;
   c) 0,01 : 5, 0,03 : 8, 0,0015 : 6, 0,12 : 48;
   d) 3,425 : 137, 9,27 : 1236, 0,3175 : 254, 35,76 : 2235.
2. Oblicz następujące ilorazy: 1 : 2, 1 : 4, 1 : 5, 1 : 8, 1 : 16.
3. Podziel następujące liczby: 6,23, 17,516, 0,02, 3 przez *a)* 10, *b)* 100, *c)* 1000 i przekonaj się, że otrzymasz iloraz, przesuwając przecinek odpowiednio o jedno, dwa, trzy miejsca na lewo!
4. Oblicz:
   a) 5,4 : 10, 0,6 : 100, 57,6 : 1000, 81746,5 : 10 000;
   b) 3,28 : 10, 735,24 : 100, 89,13 : 100, 0,37 : 10 000;
   c) 425,731 : 10, 0,024 : 100, 1,7004 : 10 000.
5. Zamień:
   a) na *m*: 1,2 *dcm*; 54,7 *dcm*; 0,4 *dcm*; 51,3 *cm*; 12,4 *mm*;
   b) na *a*: 54,3 m^2; 0,4 m^2; 159,37 m^2; 40,23 m^2;
   c) na *kg*: 247,4 *g*; 15,2 *g*; 0,1 *g*.
6. Gospodarz zebrał 172,2 *q* pszenicy z 12 *ha*; ile wynosi przeciętny zbiór z 1 *ha*?
7. 14 cm^3 ołowiu waży 158,76 *g*; ile waży 1 cm^3 ołowiu?
8. Oblicz następujące wyrażenia:
   a) (3,7 + 2,9) : 4, (6,5 — 2,1) : 8, (7,3 + 2,3) : 6;

b) $(4{,}3 : 5) \cdot 2$, $\quad 5{,}7 : (4{,}3 - 2{,}3)$;
c) $(2{,}6 : 2) - (6{,}96 : 12) + (8{,}4 : 7)$;
d) $(4{,}7 : 2) + (2{,}91 : 3) - (0{,}5 : 5) + (2{,}7 : 30)$.

9. Przedstaw następujące ilorazy w postaci ułamka:

$$3{,}71 : 725, \qquad 0{,}153 : 628, \qquad 3{,}7 : 27.$$

10. Jaka będzie na mapie w skali 1 : 80 000 odległość między dwoma miastami, wynosząca 7,6 kilometra?

11. Oblicz następujące ilorazy, zamieniając liczby mianowane na liczby dziesiętne *a)* *km*, *b)* m^2, *c)* m^3;
a) 25 *km* 400 *m* : 8, $\quad$ 12 *km* 300 *m* : 25;
b) 15 m^2 57 dcm^2 : 12, $\quad$ 116 m^2 20 dcm^2 : 8;
c) 248 m^3 700 dcm^3 : 132, $\quad$ 2 m^3 500 dcm^3 : 125.

12. Oblicz następujące ilorazy, wyrażając dzielną jako liczby dziesiętne *a)* *m*, *b)* *t*:
a) 3 *m* : 5 *m*, $\quad$ 2 *m* 4 *dcm* : 15 *m*, $\quad$ 4 *m* 5 *dcm* 8 *cm* : 8 *m*, 12 *m* 3 *dcm* 6 *cm* : 24 *m*;
b) 13 *t* 5 *q* : 4 *t*, $\quad$ 80 *t* 1 *q* : 9 *t*, $\quad$ 5 *q* 430 *kg* : 18 *t*.

13. Średnia np. pięciu liczb, jest to ich suma podzielona przez 5. Oblicz średnią następujących liczb:
a) 1,2, 3,4; *b)* 2,71, 3,14, 2,91; *c)* 1,18, 1,16, 1,19, 1,187;
d) 3,128, 3,1279, 3,126, 3,1278, 3,127.

Zaokrąglanie liczb

Liczba mieszkańców miasta wedle dokładnego spisu wynosi 25 436. Ponieważ nie zależy naogół na dokładnej znajomości liczby mieszkańców, więc mówimy np., że liczba mieszkańców zaokrąglona do tysięcy wynosi 25 000; mówimy też, że liczba mieszkańców wynosi 25 000 z dokładnością do tysięcy. Rozumiemy przez to, że dokładna liczba mieszkańców różni się od 25 000 o mniej niż tysiąc. Różnica ta wynosi w naszym wypadku 436.

Przypuśćmy, że chcemy rozdzielić kwotę 3,45 *zł* równo między ośmiu chłopców. Należałoby zatem dać każdemu 3,45 *zł* : 8 = 0,43125 *zł*. Nie jest to możliwe, gdyż najmniejszą monetą jest 0,01 *zł*, t. j. 1 grosz. Kwotę więc rozdzielamy, dając każdemu 0,43 *zł* t. j. 43 *gr*; zostanie nam jeszcze pewna reszta, która już równo nie da się rozdzielić. Mówimy, że liczba 0,43 jest zaokrągleniem liczby 0,43125 do setnych; mówimy też, że liczba 0,43 przedstawia liczbę 0,43125 z dokładnością na dwa miejsca dziesiętne. Rozumiemy przez to, że liczba zaokrąglona różni się od dokładnej o mniej niż 0,01.

Liczby zaokrąglamy do dziesiętnych, setnych i t. d., opuszczając cyfry rzędów niższych.

Np. zaokrągleniem liczby 3,1415 do setnych jest 3,14, zaokrągleniem liczby 2,7181 do tysięcznych jest 2,718.

Jeżeli przy zaokrąglaniu pierwsza opuszczona cyfra jest większa od 5, to bierzemy zazwyczaj poprawkę, t. zn. zwiększamy liczbę o jednostkę ostatniego zachowanego rzędu.

Np. zaokrągleniem liczby 3,14159 do dziesięciotysięcznych jest 3,1416. Jeżeli pierwsza opuszczona cyfra wynosi 5, to poprawkę możemy brać lub nie.

Jeżeli ostatnią zachowaną cyfrą jest zero, to cyfry tej zazwyczaj nie opuszczamy.

Np. Zaokrąglenie liczby 3,102 do setnych piszemy 3,10 a nie 3,1. Chcemy przez to zaznaczyć, że zaokrągliliśmy do setnych.

U w a g a. Jeżeli liczbę zaokrąglamy do rzędów całkowitych, to na opuszczonych miejscach piszemy 0.

Np. Zaokrąglając 365 428 do setek, otrzymujemy 365 400.

Jeżeli chcemy przedstawić iloraz np. 3,45 : 8 z dokładnością do setnych, to nie musimy obliczyć tego ilorazu dokładnie. Wystarczy dzielenie przerwać po otrzymaniu cyfry setnych w ilorazie. Liczymy zatem:

$$\begin{array}{r l}
0{,}43 & \\
\underline{3{,}45} & : 8 \\
34 & \\
\underline{32} & \\
25 &
\end{array}$$

Gdybyśmy chcieli wiedzieć, czy należy wziąć poprawkę na ostatnią cyfrę, to należałoby obliczyć w ilorazie jeszcze cyfrę tysięcznych.

Np. Chcąc obliczyć iloraz 8,841 : 7 z dokładnością do dziesiątych, liczymy:

$$\begin{array}{l} 1,26 \\ 8,841 : 7 \\ \underline{7} \\ 18 \\ \underline{14} \\ 44 \end{array}$$

Zatem iloraz wynosi 1,3 z dokładnością do dziesiątych.

Zadania

1. Zaokrąglij następujące liczby:
   a) 4,62; 3,16; 0,415; 12,813 do dziesiątych;
   b) 1,214; 5,816; 0,127; 1,045 do setnych;
   c) 2,1842; 1,0716; 0,0025; 3,2181 do tysięcznych:
   d) 241; 686; 521,9; 1624,8; 1657 do dziesiątek;
   e) 1640; 281; 1350; 416,2; 1625,8 do setek.
2. Oblicz następujące ilorazy z dokładnością do *a)* dziesiątych, *b)* setnych, *c)* tysięcznych:
   a) 32 : 7; 3,5 : 1,4; 2,56 : 1,23; 0,071 : 0,003;
   b) 1,3 : 0,6; 1 : 3; 12,129 : 8,34; 325,12 : 49,85;
   c) 12 : 17; 0,3 : 0,26; 0,1235 : 0,386; 5,38 : 2,84.
3. Oblicz z dokładnością na pięć miejsc dziesiętnych: 1 : 3, 1 : 7, 1 : 6, 1 : 9.
4. Oblicz następujące ilorazy z dokładnością na trzy miejsca dziesiętne i porównaj: 22 : 7, 355 : 113.
5. Oblicz następujące ilorazy z taką dokładnością, abyś otrzymał wynik z błędem mniejszym od: *a)* 1 *gr*, *b)* 1 *cm*, *c)* 1 cm^3:
   a) 12 *zł* : 7; 51,34 *zł* : 1,34; *b)* 35 *m* : 1,2; 1,26 *km* : 17;
   c) 1,5 dcm^3 : 11; 2,36 m^3 : 7.
6. Za 100 dolarów zapłacono 561,3 *zł*; ile trzeba zapłacić za 1 dolara?

7. Klasa złożona z 43 uczniów zakupiła przybory do gry w piłkę nożną, rozdzielając koszta równo między siebie; ile ma złożyć każdy uczeń, jeśli przybory kosztowały 39,5 *zł*?
8. Ktoś wydał w ciągu roku na utrzymanie 1140,5 *zł*; ile wydawał przeciętnie miesięcznie, tygodniowo, dziennie?
9. Gospodarz zebrał 66 *q* owsa z 7 *ha*; ile wynosi przeciętny zbiór z 1 *ha*?
10. Pole prostokąta wynosi 13,4 m^2, przyczem jeden bok ma 3 *m* długości; jak długi jest drugi bok?

Rozwinięcie dziesiętne ułamka zwykłego

Aby ułamek zamienić na liczbę dziesiętną, przedstawiamy go w postaci ilorazu dokładnego i obliczamy następnie ten iloraz.

Np. $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$.

Podobnie: $\frac{5}{4} = 5 : 4 = 1{,}25$.

Nie każdy jednak **ułamek można** zamienić na liczbę dziesiętną. Weźmy pod uwagę np. **ułamek** $\frac{1}{3}$. Obliczamy iloraz 1 : 3

$$\begin{array}{l} \underline{0{,}33\ldots\ldots} \\ 1:3 \\ 10 \\ \underline{\ \ 9} \\ \ \ 10 \\ \underline{\ \ \ \ 9} \\ \ \ \ \ 1 \end{array}$$

Widzimy, że dzielenie nigdy się nie skończy.

Ułamek $\frac{1}{3}$ nie da się więc zamienić na liczbę dziesiętną.

W wypadku tym obliczamy iloraz z dokładnością na kilka miejsc dziesiętnych. A więc 0,33 przedstawia ułamek $\frac{1}{3}$ z dokładnością do setnych.

Zadania

1. Przedstaw następujące ułamki w postaci ilorazu dokładnego i zamień je na liczby dziesiętne:
a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$; *b)* $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{7}{40}$.

2. Przedstaw następujące liczby mieszane w postaci liczb dziesiętnych: $2\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{4}$, $8\frac{8}{25}$, $4\frac{1}{5}$, $5\frac{3}{16}$.
3. Zamień na liczby dziesiętne te z pośród następujących ułamków, które można:

   a) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{21}{48}$, $\frac{4}{24}$; *b)* $\frac{231}{840}$, $\frac{153}{225}$, $\frac{81}{165}$, $\frac{315}{2475}$.
4. Oblicz, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne:

   a) $\frac{3}{5}\cdot 0{,}15$; $2{,}7 : \frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}\cdot 0{,}42$;

   b) $3\frac{1}{4}\cdot 0{,}065$; $0{,}009\cdot 7\frac{8}{15}$; $1{,}52\cdot 2\frac{3}{8}$.
5. Przedstaw następujące ułamki w postaci ilorazów dokładnych i oblicz je z dokładnością do *a)* dziesiątych, *b)* setnych, *c)* tysięcznych:

   a) $\frac{15}{13}$, $\frac{210}{51}$, $\frac{36}{17}$, $\frac{355}{112}$; *b)* $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{53}{21}$, $\frac{7}{18}$; *c)* $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7}$, $\frac{22}{17}$, $\frac{5}{11}$.
6. Zamień odwrotności liczb całkowitych od 1 do 15 na ułamki dziesiętne z dokładnością na trzy miejsca dziesiętne.

Mnożenie i dzielenie liczby dziesiętnej przez ułamek

Mamy obliczyć iloczyn liczby dziesiętnej przez ułamek, np.:

$$35{,}42\cdot\tfrac{3}{7}.$$

Ponieważ przez ułamek mnożymy, mnożąc przez licznik, a dzieląc następnie wynik przez mianownik, zatem obliczamy najpierw iloczyn $35{,}42\cdot 3 = 106{,}26$ a następnie iloraz $106{,}26 : 7 = 15{,}18$.

Zatem: $$35{,}42 : \tfrac{3}{7} = 15{,}18.$$

Moglibyśmy postąpić odwrotnie: najpierw podzielić przez 7, a następnie wynik pomnożyć przez 3.

Rachunek przedstawiałby się następująco:

$$35{,}42 : 7 = 5{,}06;\quad 5{,}06\cdot 3 = 15{,}18.$$

Wygodniej jest jednak naogół najpierw mnożyć przez licznik, a następnie wynik dzielić przez mianownik.

Dzielenie przez ułamek sprowadzamy do mnożenia przez odwrotność tego ułamka. Np.:

$$41{,}34 : \tfrac{3}{5} = 41{,}34\cdot\tfrac{5}{3};\quad 41{,}34\cdot 5 = 206{,}7;\quad 206{,}7 : 3 = 68{,}9.$$

Zatem: $$41{,}34 : \tfrac{3}{5} = 68{,}9.$$

Zadania

1. Oblicz: *a)* $3{,}5 \cdot \frac{3}{10}$, $7{,}9 \cdot \frac{7}{100}$, $23{,}05 \cdot \frac{11}{1000}$;
   b) $2{,}4 \cdot \frac{1}{2}$, $3.9 \cdot \frac{1}{3}$, $0{,}87 \cdot \frac{2}{3}$, $14{,}25 \cdot \frac{3}{5}$, $4{,}05 \cdot 2\frac{1}{5}$;
   c) $\frac{7}{5}$ $39{,}115$, $4\frac{1}{7} \cdot 3{,}969$, $8\frac{2}{15} \cdot 0{,}405$, $\frac{3}{25} \cdot 0{,}625$.
2. Oblicz: *a)* $3{,}17 \cdot \frac{1}{2}$, $54{,}7 \cdot \frac{1}{3}$, $0{,}29 \cdot \frac{2}{5}$, $8{,}03 \cdot \frac{5}{16}$, $5{,}453 \cdot \frac{2}{7}$;
   b) $\frac{7}{11} \cdot 6{,}92$, $\frac{4}{15} \cdot 8{,}93$, $4\frac{3}{5} \cdot 7{,}904$, $\frac{18}{17} \cdot 12{,}2$, $\frac{4}{27} \cdot 0{,}43$.
3. 1 *l* nafty kosztuje 0,54; ile kosztuje $\frac{1}{3}$ *l*, $\frac{1}{2}$ *l*, $\frac{2}{5}$ *l*, $1\frac{1}{2}$ *l*, $2\frac{1}{2}$ *l*?
4. Kupiec sprzedał $2\frac{3}{10}$ *kg* herbaty po 19,5 *zł* za 1 *kg*; ile *zł* otrzymał?
5. Kupiec sprzedał $\frac{1}{2}$ *kg* cukru po 1,65 *zł* za 1 *kg*, $\frac{3}{10}$ *l* octu po 0,75 *zł* za 1 litr i $\frac{1}{4}$ *kg* czekolady po 6,5 *zł* za 1 *kg*; ile otrzymał pieniędzy?
6. Oblicz: *a)* $4{,}7 : \frac{3}{10}$; $8{,}02 : \frac{7}{1000}$; $0{,}753 : \frac{1}{100}$;
   b) $3{,}5 : \frac{3}{2}$; $7{,}8 : \frac{2}{3}$; $0{,}45 : \frac{3}{4}$; $51{,}3 : \frac{9}{16}$; $0{,}07 : 2\frac{1}{3}$;
   c) $42{,}5 : \frac{25}{3}$; $5{,}379 : 1\frac{1}{15}$; $0{,}54 : \frac{9}{100}$; $27{,}459 : \frac{27}{50}$.
7. Oblicz: *a)* $54{,}2 : \frac{3}{10}$; $7{,}04 : \frac{5}{4}$; $0{,}23 : \frac{4}{9}$; $672{,}35 : \frac{8}{3}$;
   b) $14{,}3 : 2\frac{1}{4}$; $0{,}0457 : \frac{10}{9}$; $7{,}4356 : \frac{100}{23}$.
8. Robotnik otrzymał za $4\frac{1}{2}$ dnia pracy 9,45 *zł*; jaką płacę pobierał dziennie?
9. Za $7\frac{1}{2}$ *l* wina zapłacono 26,25 *zł*; ile kosztuje 1 *l* wina?
10. Ze zmielenia $42\frac{1}{2}$ *kg* pszenicy otrzymano 29,75 *kg* mąki; ile mąki otrzymamy z 1 *kg* pszenicy?
11. Pociąg pośpieszny przebył 307,5 *km* w przeciągu $3\frac{3}{4}$ godz.; ile *km* przebywa w godzinie?
12. Piechur przebył 8,3 *km* w ciągu $1\frac{1}{4}$ godz.; ile *m* przebywa średnio w minucie?
13. Z naczynia zawierającego 53,2 *l* rozlano ocet do butelek o pojemności $\frac{7}{10}$ *l*; ile butelek napełniono?

Mnożenie liczb dziesiętnych

Mamy obliczyć iloczyn dwóch liczb dziesiętnych, np.:

$$43{,}62 \cdot 5{,}4.$$

Zamieniając liczby dziesiętne na ułamki, otrzymujemy:

$$43{,}62 \cdot 5{,}4 = \frac{4362}{100} \cdot \frac{54}{10} = \frac{4362 \cdot 54}{1000} = \frac{235548}{1000} = 235{,}548.$$

A więc iloczyn liczb dziesiętnych obliczamy następująco: **opuszczamy przecinki dziesiętne i tworzymy iloczyn otrzymanych liczb całkowitych; w iloczynie tym odcinamy tyle miejsc dziesiętnych, ile ich posiadają razem mnożna i mnożnik.**

Uwaga. Gdyby w iloczynie zabrakło miejsc dziesiętnych, wówczas brakujące miejsca zastępujemy zerami.

Np.: $0{,}27 \cdot 0{,}031.$

Liczymy: $27 \cdot 31 = 837.$

W otrzymanym iloczynie mamy odciąć $2 + 3$, t. j. 5 miejsc dziesiętnych. Brakujące miejsca zastępujemy zerami.

Więc: $0{,}27 \cdot 0{,}031 = 0{,}00837.$

Zadania

1. Oblicz następujące iloczyny:
   a) $2{,}5 \cdot 3{,}1$; $4{,}2 \cdot 7{,}3$; $35{,}04 \cdot 2{,}1$; $7{,}1 \cdot 4{,}2$;
   b) $7{,}03 \cdot 2{,}01$; $0{,}5 \cdot 0{,}2$; $7{,}35 \cdot 0{,}031$; $21{,}01 \cdot 0{,}5$;
   c) $0{,}07 \cdot 0{,}083$; $0{,}00032 \cdot 0{,}000075$; $0{,}1005 \cdot 0{,}0024$; $0{,}3 \cdot 0{,}0052$.
2. Pomnóż następujące liczby: 7354,6; 25,4; 1,2; 0,035 przez *a)* 0,1, *b)* 0,01, *c)* 0,001 i przekonaj się, że iloczyn otrzymujemy, przesuwając przecinek o: *a)* jedno, *b)* dwa, *c)* trzy miejsca na lewo!
3. Oblicz następujące iloczyny, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne: $\frac{7}{4} \cdot 2{,}13$; $\frac{15}{16} \cdot 0{,}32$; $0{,}01 \cdot \frac{6}{25}$.
4. Oblicz: $2{,}7 \cdot 3{,}4 \cdot 0{,}5$; $0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5$; $0{,}273 \cdot 0{,}9 \cdot 5$; $60{,}8 \cdot 4{,}6 \cdot 0{,}9$; $84 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}2$.
5. Oblicz:
   a) $0{,}1^2$; $0{,}01^2$; $2{,}4^2$; $1{,}02^2$; $0{,}054^2$;
   b) $0{,}1^3$; $0{,}2^3$; $0{,}4^3$; $2{,}1^3$; $0{,}01^3$; $0{,}21^3$.
6. Oblicz:
   a) $7{,}8 \cdot 5{,}4$; $8{,}72 \cdot 0{,}1$; $92{,}4 \cdot 0{,}001$; $45{,}3 \cdot 6{,}2$; $0{,}01 \cdot 3{,}25$;
   b) $61{,}45 \cdot 7{,}21$; $0{,}47 \cdot 2{,}9$; $4{,}3 \cdot 0{,}006$; $19{,}54 \cdot 0{,}67$;
   c) $0{,}0465 \cdot 37{,}8$; $57{,}843 \cdot 69{,}23$; $813{,}2 \cdot 0{,}00043$;

d) 9,7832 · 0,00006; 21,4005 · 1,0002; 0,0003 · 0,0003;
e) 4,9 · 7,8 · 5,1; 0,7 · 6,9 · 0,4; 0,24 · 1,02 · 3,5;
f) 0,041 · 62,32 · 1,003; 5,42 · 763,2 · 0,0001;
g) 2,45 · $\frac{1}{2}$ · 13,56 · $\frac{2}{3}$; 72,03 · 4,005 · $\frac{1}{7}$ · 3,2.

7. Zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne *a) km*, *b) kg*, *c)* m^2, oblicz następujące iloczyny:
a) 13 *km* 420 *m* · 2,4; 1 *km* 610 *m* · 5,4; 12 *m* 3 *dcm* · 4;
b) 5 *kg* 410 *g* · 5; 27 *kg* 350 *g* · 0,2; 2 *kg* 5 *dkg* · 0,08;
c) 7 m^2 14 dcm^2 · 0,6; 12 m^2 4 dcm^2 5 cm^2 · 1,6.
8. Oblicz następujące wyrażenia:
a) (2,3 + 4,5) · (0,3 · 3,6); 3,2 · (2,5 · 0,4) — 0,7;
b) 1,3 · (25,4 — 8,4); (12,4 + 1,06) · (41,2 — 0,08);
c) 14,37 — (2,54 · 3) + (5,19 · 5);
(5,18 · 2) + (6,91 · 0,3) — (5,14 · 0,2).
9. 1 *m* sukna kosztuje 13,4 *zł*; ile kosztuje 2,5 *m*?
10. 1 *kg* masła kosztuje 3,6 *zł*; ile kosztuje 4,25 *kg* masła?
11. 1 *l* oliwy kosztuje 4,2 *zł*; ile kosztuje 0,75 *l*?
12. 1 *kg* mydła kosztuje 1,15 *zł*; ile kosztuje 1,47 *kg* mydła?
13. Pole obejmuje 43,42 *a*; ile kosztuje, jeżeli 1 *a* ziemi ma wartość 13,7 *zł*?
14. Szerokość prostokąta wynosi 9,4 *m* i jest o 4,8 *m* krótsza od jego długości; oblicz obwód i pole tego prostokąta!
15. Ile waży beczka o pojemności 225 *l* pełna wina, jeśli 1 *l* wina waży 0,993 *kg*, beczka zaś próżna waży 33,48 *kg*?
16. Sprawdź, że:
a) (3,18 + 0,41) · 1,2 = (3,18 · 1,2) + (0,41 · 1,2);
b) 0,4 · (53,2 — 12,41) = (0,4 · 53,2) — (0,4 · 12,41).
17. Oblicz w prosty sposób:
a) (25,41 · 30) + (25,41 · 70); *b)* (16,13 · 51) — (16,13 · 41);
c) (3,24 · 0,18) — (3,24 · 0,08).
18. O ile wzrośnie pole prostokąta o podstawie 3,14 *m*, jeśli wysokość zwiększymy o 0,65 *m*?
19. Województwo warszawskie miało w roku 1927 obsianych: 116 000 *ha* pszenicą, 584 000 *ha* żytem, 106 000 *ha* jęczmieniem, 263 000 *ha* owsem, 276 000 *ha* ziemniakami i 40 000

ha burakami. Oblicz w tonnach całkowity zbiór tych ziemiopłodów, wiedząc, że na 1 *ha* przypadał odpowiednio zbiór: 14,8 *q* pszenicy, 13,1 *q* żyta, 15,5 *q* jęczmienia, 14,9 *q* owsa, 139 *q* ziemniaków, 147 *q* buraków.

20. Ile zapłacono za zużycie 47 m^3 gazu, jeżeli 1 m^3 gazu kosztuje 0,35 *zł*, przyczem dopłaca się jeszcze $\frac{1}{10}$ ceny gazu, a nadto 2,20 *zł* za najem gazomierza?
21. Pokój o wymiarach 8,4 *m*, 6,5 *m* i 4,2 *m* (wysokość) wytapetowano tapetą w cenie 2,6 *zł* za 1 m^2. Ile to kosztowało, jeśli należy jeszcze odjąć 8,5 m^2 na okna i drzwi?
22. Kula żelazna, zanurzona w naczynie pełne wody słonej, wyparła z niego 1,3 *kg* wody. Ile waży kula, jeśli przy jednakowej objętości żelazo waży 4,6 razy tyle, ile woda słona?
23. Ciężar popiołu, pochodzącego z drzewa dębowego, wynosi 0,029 ciężaru tego drzewa, a ciężar węglanu potasu, zawartego w tym popiele, wynosi 0,0625 ciężaru popiołu; ile węglanu potasu otrzymamy z 125 *kg* drzewa?
24. Dwa pociągi wyruszyły równocześnie z tej samej stacji i jechały jeden z prędkością 41,75 *km*, a drugi z prędkością 39,2 *km* na godzinę; jaka będzie odległość tych pociągów od siebie po upływie 3,5 godziny, jeśli jechały w kierunkach przeciwnych?
25. 1 *l* mleka czystego waży 1,03 *kg*. Kupiono 15 *l* mleka i przekonano się, że waży 15,42 *kg*; czy kupione mleko było czyste? Jeśli nie, to ile zawierało wody?

Dzielenie liczb dziesiętnych

Iloraz dwóch liczb dziesiętnych możemy zawsze przedstawić w postaci ilorazu liczby dziesiętnej przez liczbę całkowitą. Np.: 1,05 : 2,8.

Wiemy, że iloraz nie zmieni się, jeżeli dzielnik i dzielną pomnożymy przez tę samą liczbę. Pomnóżmy dzielną i dzielnik przez 10. Wystarczy w tym celu przesunąć przecinek o jedno miejsce na prawo.

Mamy więc: 1,05 : 2,8 = 10,5 : 28.

W nowym ilorazie dzielnik jest już liczbą całkowitą. Podobnie, mając obliczyć iloraz:

3,25 : 0,125,

mnożymy dzielną i dzielnik przez 1000, t. zn. przesuwamy przecinek o trzy miejsca na prawo. Otrzymamy:

3,25 : 0,125 = 3250 : 125.

Zatem: Aby zamienić iloraz liczb dziesiętnych na iloraz, w którym dzielnik jest liczbą całkowitą, przesuwamy przecinek w dzielnej i w dzielniku o tyle miejsc na prawo, ile dzielnik posiada miejsc dziesiętnych.

Zadania

1. Oblicz następujące ilorazy:
   a) 2,7 : 1,2; 36,54 : 4,5; 7,2 : 2,5; 2,8 : 11,2;
   b) 5,6 : 0,35; 0,231 : 0,22; 0,003 : 9,6; 0,102 : 0,34;
   c) 2295,06 : 5,8; 176,244 : 0,38; 7,0567 : 1,19; 3,84 : 2,56.
2. Podziel następujące liczby: 3,71; 23,573; 0,041; 0,2 przez *a)* 0,1, *b)* 0,01, *c)* 0,001 i przekonaj się, że otrzymasz iloraz, przesuwając przecinek odpowiednio o jedno, dwa, trzy miejsca na prawo!
3. Oblicz: *a)* 3,4 : 1,7; 1,9 : 3,6; 5,4 : 0,1; 7,2 : 0,3;
   b) 5,6 : 0,01; 26,4 : 0,12; 79,2 : 0,99; 1,3 : 0,26;
   c) 9,99 : 0,37; 1,914 : 8,7; 4,0194 : 0,203;
   d) 0,021945 : 0,0665; 0,00004 : 0,000005.
4. Oblicz:
   a) 5,7 : 0,2; 0,47 : 0,05; 3,476 : 5,5; 6,710202 : 0,088;
   b) 9,46 : 0,03; 53,207 : 1,5; 861,325 : 1,01;
   c) 357,0168 : 3,79; 14265,4 : 7,85; 69,3205 : 0,426;
   d) 0,00003 : 0,002; 0,00007 : 0,000005; 3 : 0,000016.
5. Oblicz:
   a) 2 *m* 7 *cm* : 0,3; 3 *km* 240 *m* : 1,8; 1 *m* 2 *dcm* 6 *cm* : 0,24;
   b) 5 *q* 67 *kg* : 2,1; 4 *t* 5 *q* 76 *kg* : 0,11; 7 *kg* : 0,056.
   Zamień liczby mianowane na dziesiętne.

6. Przez jaką liczbę należy pomnożyć: *a)* 3,7, *b)* 75,6, *c)* 8,003, *d)* 0,00025, aby otrzymać: *a)* 0,0037, *b)* 0,756, *c)* 80,3, *d)* 2,5?
7. Mamy obliczyć: $\frac{2}{3} : 0{,}41$.
   Liczymy: $\frac{2}{3} : 0{,}41 = \frac{2}{3} : \frac{41}{100} = \frac{2}{3} \cdot \frac{100}{41} = \frac{200}{123} = 1{,}626\ldots$
   Oblicz w ten sposób:
   a) $\frac{5}{7} : 2{,}4$; $\frac{11}{3} : 0{,}48$; $\frac{4}{11} : 21{,}4$;
   b) $\frac{11}{8} : 0{,}146$; $\frac{22}{15} : 13{,}14$; $\frac{5}{12} : 0{,}416$.
8. 4,3 *kg* kawy kosztuje 2,15 *zł*; ile kosztuje 1 *kg*?
9. Bańka miodu o pojemności 7,2 *l* kosztuje 18,72 *zł*; ile kosztuje 1 *l* miodu?
10. Pociąg przebył 307,8 *km* w ciągu 5,4 godz.; ile *km* przebywał średnio na godzinę?
11. Na wyścigach przebył automobilista odległość wynoszącą 331,4 *km* w 2,8 godz.; ile przebywał średnio na godzinę?

Iloraz w postaci ułamka

Umówiono się znak dzielenia zastępować kreską ułamkową nawet w przypadku, gdy dzielnik i dzielna nie są liczbami całkowitemi.

Zatem wyrażenie: $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$ oznacza $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$.

Podobnie: $\dfrac{0{,}2}{\frac{3}{5}} = 0{,}2 : \frac{3}{5}$.

Uwaga. Kreska, która zastępuje znak dzielenia, jest dłuższa od kresek ułamkowych, jeśli dzielnik wzgl. dzielna są ułamkami.

Zadania

1. Oblicz:
   a) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$, $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}$, $\dfrac{1\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}}$, $\dfrac{2\frac{3}{7}}{1\frac{2}{5}}$; *b)* $\dfrac{0{,}3}{0{,}5}$, $\dfrac{2{,}7}{1{,}8}$, $\dfrac{0{,}06}{0{,}15}$, $\dfrac{0{,}001}{0{,}025}$;
   c) $\dfrac{0{,}3}{\frac{2}{5}}$, $\dfrac{10{,}5}{1\frac{3}{5}}$, $\dfrac{2\frac{3}{5}}{0{,}13}$, $\dfrac{\frac{3}{7}}{0{,}5}$.
2. Oblicz:
   a) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}}$, $\dfrac{1\frac{2}{3}\cdot 3\frac{2}{5}}{\frac{2}{7}+\frac{3}{5}}$, $\dfrac{0{,}5-\frac{1}{3}}{1{,}3+\frac{7}{10}}$; *b)* $\dfrac{0{,}2+\frac{1}{3}}{0{,}5\cdot\frac{3}{5}}$, $\dfrac{(1\frac{1}{3}+2\frac{1}{5})\cdot 1{,}3}{(2\cdot\frac{3}{4})+0{,}7}$.

Wykonaj najpierw naznaczone działania nad kreską, następnie pod kreską.

Ćwiczenia

1. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez 3,5 otrzymamy na wynik 1,125. Jaka to jest liczba?
2. Jeżeli pewną liczbę pomnożymy przez $\frac{3}{5}$, otrzymamy na wynik 7,416. Jaka to jest liczba?
3. Jeśli pewną liczbę pomnożysz przez 2,3, a następnie przez $\frac{4}{5}$, to otrzymasz 4,968. Jaka to jest liczba?
4. Jeżeli $\frac{2}{5}$ *kg* towaru kosztuje 1,4 *zł*, to ile kosztuje 3,5 *kg* tego towaru?
5. Za 3,4 *l* wina zapłacono 15,3 *zł*; ile kosztuje 1 *l* wina? Ile kosztuje 5,5 *l* wina?
6. Kupiec zapłacił za 14,5 *kg* towaru 33,35 *zł*; po ile sprzedawał 1 *kg* tego towaru, jeśli ogółem zarobił 4,35 *zł*?
7. Beczka zawiera 125 *l* wina; ile flaszek o pojemności 0,7 *l* napełnimy winem?
8. 1 *l* oliwy waży 0,91 *kg*; jaką objętość ma 3,5 *kg* oliwy?
9. 1 *kg* nafty ma objętość 1,25 *l*; ile waży 96 *l* nafty?
10. Wyraź we włókach obszar o powierzchni 54,25 *ha*, wiedząc, że jedna włóka ma 16,8 *ha*.
11. Kula karabinowa przebiega 100 *m* w 0,2 sekundy. W jakim czasie przebiegnie $2\frac{3}{4}$ *km*?
12. Zmieszano 12,5 *l* wina po 4,25 *zł* za litr z 9,75 *l* wina po 5,6 *zł* za litr; ile kosztuje 1 *l* tej mieszaniny?
13. Pole prostokąta ma 3,15 dcm^2, a jeden bok 2,4 *dcm*; ile wynosi drugi bok?
14. W r 1927 w Polsce 1211 rybaków złowiło 1787 tonn ryb; jaki roczny połów wypada przeciętnie na 1 rybaka?
15. W Polsce w r. 1927 obsiano żytem 4 889 000 *ha*, z czego zebrano 56 730 000 *q* żyta. Jaki był zbiór z 1 *ha*?
16. W Polsce skonsumowano w r. 1925 około 6.000 *t* kawy; ile wypada przeciętnie na 1 osobę, jeśli liczba mieszkańców wynosiła około 28 500 000?

17. Kupiec sprzedał 5 *l* wina jednego gatunku za 24,80 *zł*, drugiego zaś gatunku 8 *l* za 38 *zł*; które wino jest droższe i jaka byłaby różnica cen przy sprzedaży 12,5 *l*?
18. Przekonano się, że bambus w ciągu 1 sekundy wzrasta o 0,0000072 *m*; oblicz w dniach wiek bambusa o wysokości 3,25 *m*.
19. Za 2,5 *kg* mięsa zapłacono 5,5 *zł*; po odrzuceniu kości przekonano się, że mięso waży $\frac{4}{5}$ pierwotnego ciężaru. Ile kosztuje 1 *kg* bez kości?
20. Uczeń chciał kupić zeszyty dla całej klasy po 0,30 *zł* sztuka, przekonał się jednak, że brakuje mu 0,60 *zł*; kupił wobec tego zeszyty po 0,25 *zł* i zostało mu 0,75 *zł*. Ilu było uczniów w klasie? Ile pieniędzy miał uczeń?
21. Koło automobilu ma obwód 3,25 *m*; ile razy obróci się ono na drodze 100 *km*?
22. W Anglji urządzono w r. 1829 próbę biegu 3 lokomotyw. Pierwsza przyjechała do mety po 520 sekundach, jadąc z prędkością 22,5 *km* na godzinę, druga jechała z prędkością 12,58 *km* na godzinę, a trzecia z prędkością 8,66 *km* na godzinę. W jakim czasie przebyła druga lokomotywa, a w jakim trzecia przepisaną drogę?
23. Goniec przebiegł 100 *m* w czasie 10,8 sek.; porównaj drogi w 1 sekundzie, przebyte przez gońca i przez pociąg, biegnący z szybkością 40 *km* na godzinę.
24. Zegarek spóźnia się o 0,6 minuty na godzinę; w południe o godz. 12 wskazywał dokładny czas. Jaka będzie prawdziwa godzina na drugi dzień, gdy zegarek wskazywać będzie godzinę 12?
25. Chcąc zbadać podziałkę na taśmie mierniczej, zmierzono pewną długość tą taśmą i znaleziono 13,5 *m*. Mierząc dokładną taśmą, otrzymano 13,77 *m*. O ile różni się metr na badanej taśmie od prawdziwego metra?
26. Jeden kupujący kupił $\frac{3}{7}$ sztuki płótna, drugi połowę reszty i zapłacił o 68,4 *zł* mniej, niż pierwszy. Ile *m* każdy kupił i ile zapłacił, jeżeli 1 *m* płótna kosztował 5,70 *zł*?

27. Odległość dwóch miast na globusie wynosi 0,035 *m*; jaka jest odległość tych miast, jeżeli obwód równika ziemi ma 40 070 *km*, obwód zaś równika na globusie 1,35 *m*?
28. Naczynie puste waży 2,12 *kg*; jeśli $\frac{3}{5}$ pojemności napełnimy wodą, wówczas waży 9,62 *kg*. Jaka jest pojemność naczynia?
29. Naczynie puste waży 1,25 *kg*, napełnione wodą 4,35 *kg*, a napełnione mlekiem 4,44 *kg*. Ile waży 1 *l* mleka?
30. Flaszka napełniona wodą waży 1,2 *kg*, napełniona zaś benzyną 0,99 *kg*; jaki jest ciężar i jaka pojemność flaszki, jeżeli 1 *l* benzyny waży 0,7 *kg*?
31. Zakupiono 62 tonn węgla. Jeden piec spalał przeciętnie 0,3 tonny dziennie, drugi 0,15 tonny, a trzeci mały piecyk 0,007 tonny dziennie. Palono przez 9 tygodni, przyczem jednak w ostatnim tygodniu nie palono w największym piecu. Na jak długo wystarczy pozostały w piwnicy zapas węgla, jeżeli nadal ma się palić we wszystkich piecach?

Liczby przybliżone

Określenie

W praktyce niezawsze posługujemy się liczbami dokładnemi. Już poprzednio poznaliśmy wypadki, w których liczby zaokrąglamy. Wiele jest jeszcze innych przyczyn, które zmuszają nas do używania liczb niedokładnych, czyli przybliżonych. Najważniejszem jest to, że pomiary nasze nie są nigdy dokładne. Łatwo się o tem przekonać, jeżeli np. długość sali szkolnej zmierzy pokolei kilku uczniów. Otrzymają na wyniki różne liczby, np. 5,46 *m*, 5,42 *m* 5,44 *m*, 5,45 *m*, 5,18 *m*. Widzimy, że cztery pierwsze liczby różnią się między sobą o kilka setnych, ostatnia liczba bardziej się różni od pozostałych. Możemy więc przypuścić, że przy ostatnim pomiarze zrobiono jakąś większą pomyłkę. Dlatego też wynik ostatniego pomiaru pomijamy. Co do pozostałych czterech liczb zauważamy, że cyfry całych i dziesiątych są równe. Możemy je więc uważać za pewne. Niepewność ogranicza się tylko do setnych. Aby wyzyskać również i cyfry setnych, tworzymy średnią otrzymanych wyników z dokładnością do setnych. W naszym wypadku średnia ta (t. j. suma liczb podzielona przez ilość liczb), wynosi 5,44 *m*. Przyjmując, że długość sali wynosi 5,44 *m*, możemy się spodziewać, że błąd, jaki popełniamy, będzie mniejszy, niż gdybyśmy wzięli którykolwiek wynik pomiaru. Błąd popełniony jest mniejszy od kilku setnych.

Jeżeli liczbę 5,44 zaokrąglimy do dziesiątych, otrzymamy 5,4 *m*. Wartość ta różni się od prawdziwej o mniej, niż 0,1 *m*, t. j. mniej, niż o jednostkę zachowanego rzędu.

Uwaga 1. Jeżeli w przybliżeniu ostatnią cyfrą jest zero, to ją zachowujemy dla zaznaczenia, że niepewność ogranicza się do jednostek ostatniego rzędu zachowanego. A więc piszemy np. 34,50 zamiast 34,5.

Uwaga 2. W wielu wypadkach nie chcemy zbyt dokładnie mierzyć. Kupiec nie waży węgla z dokładnością do grama; waży co najwyżej z dokładnością do dziesięciu kilogramów. Towar waży się tem dokładniej, im jest droższy.

Działania na liczbach przybliżonych

Jeżeli na liczbach przybliżonych wykonujemy działania, to wyniki będą również niedokładne. Przypuśćmy, że liczby przybliżone 3,2 *m* i 5,4 *m* przedstawiają długość i szerokość pokoju z dokładnością do dziesiątych. Zatem pokój ma od 3,1 *m* do 3,3 *m* długości, od 5,3 *m* do 5,5 *m* szerokości. Powierzchnia podłogi wynosi zatem co najmniej:

$$(3,1 \cdot 5,3)\ m^2 = 16,43\ m^2,$$

co najwyżej zaś $(3,3 \cdot 5,5)\ m^2 = 18,15\ m^2.$

Obliczając zaś pole podłogi z danych przybliżonych, otrzymujemy $(3,2 \cdot 5,4)\ m^2 = 17,28\ m^2.$

Widzimy stąd, że w wyniku działań na liczbach przybliżonych błąd nie ogranicza się do ostatniej cyfry, w naszym bowiem wypadku błąd sięgać może do kilku dziesiętnych m^2. Zatem nie wszystkie cyfry wyniku mają znaczenie.

Przed wykonaniem działań na liczbach przybliżonych zaokrąglamy liczby tak, by błąd nie przewyższał jednostki ostatniego zachowanego rzędu.

Suma. Jeżeli mamy obliczyć sumę kilku liczb przybliżonych, to zachowujemy te rzędy, które występują równocześnie we wszystkich składnikach. Z pozostałych miejsc bierzemy poprawkę. Np.:

$$\begin{array}{r|l} 3{,}25 & 76 \\ 18{,}20 & \\ 3{,}56 & 1 \\ \hline 25{,}01 & 86 \end{array}$$

Jako wartość sumy przyjmujemy 25,02.

Aby ocenić błąd w wyniku, zauważmy, że w każdym składniku błąd nie przekracza 0,01. Ponieważ składników jest 3, więc błąd w sumie nie przekracza $3 \cdot 0{,}01 = 0{,}03$.

Różnica. Podobnie przy odejmowaniu zachowujemy w różnicy tylko te miejsca dziesiętne, które występują równocześnie w danych liczbach. Z pozostałych cyfr bierzemy zazwyczaj poprawkę. Np.

$$\begin{array}{r|l} 18{,}64 & 7 \\ 9{,}28 & \\ \hline 9{,}36 & 7 \end{array}$$

Zatem jako różnicę przyjmujemy 9,37.

Iloczyn. Cyframi znaczącemi danej liczby przybliżonej nazywamy te cyfry na rzędach zachowanych, które otrzymujemy po odrzuceniu zer początkowych.

Np. 0,00305 ma trzy cyfry znaczące; 0,00030 ma dwie cyfry znaczące. Liczbę cyfr znaczących nazywamy stopniem dokładności przybliżenia. Zatem stopień dokładności liczby 0,00305 jest trzeci, liczby 0,00030 drugi, liczby 0,2354 czwarty.

Stopień dokładności pomiaru nie zależy od jednostki, którą pomiar wyrażamy.

Np. $3{,}15\ mm = 0{,}315\ cm = 0{,}00315\ m = 0{,}00000315\ km$.

Wszystkie powyższe liczby mają trzeci stopień dokładności.

Jeżeli liczba posiada miejsca dziesiętne, to zachowujemy w niej wszystkie cyfry znaczące, a następne pomijamy. Piszemy więc: 2,30; 0,03500.

Pierwsza liczba ma III stopień dokładności, druga IV stopień dokładności. Z samego więc zapisania liczby, mającej miejsca dziesiętne znaczące, widzimy, jaki jest jej stopień dokładności. Jeżeli liczba nie posiada miejsc dziesiętnych znaczących, to podajemy jej stopień dokładności. Np. mówimy, że liczba 25 000 jest przybliżoną w II stopniu dokładności. Z samego zapisu liczby całkowitej nie możemy ocenić jej stopnia dokładności.

Iloczyn dwu liczb, z których jedna lub obie są przybliżone, zaokrąglamy w następujący sposób:

1) Jeżeli tylko jedna liczba jest przybliżona, to iloczyn zaokrąglamy do tego stopnia dokładności, jaki posiada liczba przybliżona.

2) Jeżeli obie liczby są przybliżone, to iloczyn zaokrąglamy do stopnia dokładności tej liczby, której stopień dokładności jest mniejszy (względnie do wspólnego stopnia dokładności, jeżeli obie liczby posiadają ten sam stopień dokładności).

Np.: $$25{,}1 \cdot 0{,}83 = 20{,}833.$$

Jeżeli w tym iloczynie tylko liczba 25,1 jest przybliżona, a 0,83 dokładna, to wynik zaokrąglamy do III stopnia dokładności, t. j. do 20,8. Jeżeli oba czynniki są liczbami przybliżonemi, to wynik zaokrąglamy do II stopnia dokładności, t. j. do liczby 21.

Podobnie postępujemy przy ilorazie dwóch liczb, z których jedna, lub obie są przybliżone, a mianowicie:

1) Jeżeli jedna tylko liczba jest przybliżona, to iloraz zaokrąglamy do tego stopnia dokładności, jaki posiada liczba przybliżona.

2) Jeżeli obie liczby są przybliżone, to zaokrąglamy iloraz do stopnia dokładności tej liczby, której stopień dokładności jest mniejszy (względnie do wspólnego stopnia dokładności, jeżeli obie liczby posiadają ten sam stopień dokładności).

U w a g a: Dzielenie, należy przerwać wtedy, gdy w ilorazie otrzymamy żądany stopień dokładności.

Np. Mamy obliczyć: 12,4 : 0,41.

Jeżeli w tym ilorazie tylko liczba 12,4 jest przybliżona, to przerywamy dzielenie wtedy, gdy uzyskaliśmy w ilorazie III stopień dokładności.

A więc liczymy: 12,4 : 0,41 = 30,2.

Jeśli obie liczby są przybliżone, to przerywamy dzielenie wtedy, gdy uzyskaliśmy w ilorazie II-gi stopień dokładności.

A więc liczymy: 12,4 : 0,41 = 30.

Zadania

1. Zmierz *a)* długość ławki szkolnej, *b)* długość i szerokość pokoju, *c)* odległość między dwoma palikami, które wbijesz do ziemi!
2. Narciarz na konkursie skoków wykonał skok, którego długość jeden sędzia podał na 63,2 *m*, drugi na 63,5 *m*, trzeci na 62,9 *m*. Podaj przybliżoną długość skoku w *m*!
3. Zmierzono stoperem czas jazdy na rowerze zwycięzcy wyścigu kolarskiego. Sędziowie odczytali na swoich stoperach następujące czasy: 25 min. 35 sek., 25 min. 36 sek., 25 min. 34 sek. Podaj czas trwania jazdy w połówkach minut!
4. Następujące liczby są przybliżone: *a)* 3,745; *b)* 12,83; *c)* 4,502; *d)* 0,00782; *e)* 5,4073, *f)* 0,000047. Błąd każdej jest nie większy od 1 jednostki jej ostatniego rzędu. Wyznacz w jakich granicach znajduje się dokładna liczba!

   R o z w i ą z a n i e: Jeżeli 0,056 jest liczbą przybliżoną, której błąd jest nie większy od 0,001, to liczba dokładna może być co najwyżej o 0,001 większa, albo też o 0,001 mniejsza od liczby przybliżonej. Wynosi zatem co najwyżej 0,057, a co najmniej 0,055.
5. Dodaj następujące liczby przybliżone:

   a) 11,33 *m* + 0,4 *m*; 8,46 *m* + 2,5 *m*; 28,35 *m* + 4,3 *m*; 18,2 *km* + 7,25 *km*;

b) 47,583 *kg* + 12,39 *kg*; 15,609 *kg* + 4,27 *kg*;
9,29 *kg* + 14,057 *kg*;

c) 21,5124 *ha* + 7,53 *ha*; 54,3987 *ha* + 12,91 *ha*;
6,4753 *ha* + 2,8 *ha*;

d) 7,3 km^2 + 21,06 km^2 + 17,5432 km^2;
21,4671 km^2 + 5,23 km^2 + 6,245 km^2.

6. Oblicz sumę następujących liczb dziesiętnych przybliżonych:

a) 15,86	*b)* 4,37926	*c)* 11,35039
186,236	26,4938	8,14
19,31268	0,872492	7,9542
12,0429	7,31004	6,2
d) 0,536 *km*	*e)* 5,93 *km*	*f)* 0,024 *g*
2,35 „	2,7 „	0,01 „
4,798 „	4,827 „	0,132 „
5,29 „	2,549 „	0,05 „
6,042 „	8,4 „	0,135 „
g) 1,245738	*h)* 0,0048	*i)* 8,47
2,427001	0,01	2,512
5,6945	0,00025	0,7
8,47476	0,00037	4
3,136021	0,001	9,26

7. Oblicz następujące różnice liczb przybliżonych:

a) 84,42 *m* — 11,9 *m*; 14,22 *kg* — 7,6 *kg*;
2,45 dcm^2 — 0,4 dcm^2;

b) 12,3 *kg* — 6,17 *kg*; 94,9 *km* — 19,23 *km*;
46,3 *m* — 17,02 *m*;

c) 118,4695 *ha* — 28,59 *ha*; 38,52 km^2 — 7,6423 km^2;
15,004 *kg* — 8,01 *kg*.

8. Oblicz następujące różnice liczb przybliżonych:

a) 32,425 *kg*	*b)* 53,18 *km*	*c)* 35,02 *hl*
— 17,31 „	— 14,271 „	— 19,006 „
d) 483,217	*e)* 685,4296	*f)* 819,00547
— 396,89	— 216,84354	— 185,19

9. Oblicz wyrażenia, utworzone z liczb przybliżonych:

a) 5,47 *hl* + 26,5 *hl* — 11,32 *hl* + 18,325 *hl* — 16,03 *hl*;

b) 18,293 *kg* + 4,62 *kg* — 8,024 *kg* — 6,51 *kg* + 4,256 *kg*.

10. Oblicz następujące iloczyny, w których mnożnik jest liczbą dokładną, a mnożna przybliżoną:

a) $4{,}8 \cdot 5{,}27$; $5{,}9 \cdot 3{,}84$; $2{,}07 \cdot 0{,}452$;

b) $51{,}83 \cdot 1{,}42$; $250 \cdot 3{,}2$; $104{,}5 \cdot 2{,}01$;

c) $7{,}5 \cdot 0{,}30$; $0{,}42 \cdot 1{,}50$; $5600 \cdot 0{,}03$;

d) $2430 \cdot 0{,}50$; $582 \cdot 6{,}1$; $35{,}81 \cdot 20{,}04$.

11. Oblicz następujące iloczyny, w których wszystkie czynniki są liczbami przybliżonemi:

a) $4{,}72 \cdot 5{,}4$; $2{,}13 \cdot 6{,}2$; $8{,}53 \cdot 2{,}03$;

b) $5{,}2 \cdot 0{,}21$; $43{,}6 \cdot 0{,}07$; $0{,}24 \cdot 0{,}037$;

c) $0{,}027 \cdot 3{,}1$; $35{,}04 \cdot 5{,}03$; $0{,}20 \cdot 0{,}30$;

d) $0{,}52 \cdot 4{,}3 \cdot 3{,}1$; $2{,}36 \cdot 0{,}24 \cdot 5{,}01$;

e) $35{,}04 \cdot 5{,}2 \cdot 0{,}03$; $5{,}31 \cdot 0{,}10 \cdot 3{,}20$;

f) $0{,}02 \cdot 1{,}024 \cdot 5{,}310$; $3{,}02 \cdot 5{,}10 \cdot 0{,}30$.

Uwaga: Nie należy sądzić, że w iloczynie liczb przybliżonych błąd jest mniejszy od 1 jednostki najniższego zachowanego rzędu.

Np.: Iloczyn liczb dokładnych 8,93 i 1,09 wynosi 9,7337. Gdybyśmy obliczyli iloczyn liczb przybliżonych 8,92 i 1,08, to otrzymalibyśmy: $8{,}92 \cdot 1{,}08 = 9{,}63$.

Porównując oba wyniki, widzimy, że błąd wynosi przeszło 0,1, t. j. więcej, niż 1 jednostkę przedostatniego zachowanego rzędu.

12. Oblicz następujące ilorazy, w których dzielna jest liczbą dokładną, dzielnik zaś przybliżoną:

a) $3{,}2 : 1{,}24$; $0{,}25 : 1{,}12$; $5{,}75 : 0{,}036$;

b) $8{,}4 : 3{,}51$; $457 : 0{,}18$; $712{,}4 : 4{,}15$.

13. Oblicz następujące ilorazy, w których dzielna jest liczbą przybliżoną, dzielnik zaś dokładną:

a) $25{,}48 : 37$; $42{,}35 : 5{,}3$; $75{,}20 : 8{,}4$;

b) $0{,}0342 : 0{,}7$; $51{,}407 : 21{,}5$; $9{,}040 : 5{,}3$.

14. Oblicz następujące ilorazy, w których dzielna i dzielnik są liczbami przybliżonemi:

a) 17,25 : 13,40; 0,3402 : 0,021; 5,704 : 9,03;

b) 18,372 : 4,306; 0,270 : 5,4; 4,793 : 0,210.

Uwaga: Podobnie, jak przy iloczynie, nie należy także przy ilorazie liczb przybliżonych sądzić, że błąd ilorazu jest mniejszy od 1 jednostki ostatniego zachowanego rzędu.

Zagadnienia praktyczne

Przeliczanie walut obcych

1. Dinar jugosłowiański ma wartość $\frac{4}{25}$ *zł*; jaką wartość przedstawia *a)* 70, *b)* 120, *c)* 2100 dinarów? Ile to jest dinarów *a)* 24 *zł*, *b)* 60 *zł*, *c)* 200 *zł*, *d)* 18 *zł* 40 *gr*, *e)* 51 *zł* 20 *gr*?
2. Jeżeli 1 dolar amerykański ma wartość $5\frac{1}{2}$ *zł*, to jaką wartość przedstawia *a)* 10, *b)* 20, *c)* 60, *d)* 80 centów (1 dolar = 100 centów)? Ile *zł* kosztuje książka w cenie 2 dol. 30 c.?
3. Ktoś miał 58 dolarów, które mógł sprzedać po 8,9 *zł*, sprzedał je jednak, gdy dolar stracił $\frac{1}{3}$ swej pierwotnej wartości; ile *zł* otrzymał? Wynik zaokrąglij do setnych złotego!
4. Za prenumeratę francuskich czasopism ma ktoś posłać $42\frac{1}{2}$ franków; ile pośle, jeżeli 1 frank francuski ma wartość $\frac{7}{20}$ *zł*?
5. Jednostką monetarną w Palestynie jest 1 funt, mający wartość $43\frac{7}{100}$ *zł*; ile to jest w *zł*: *a)* $\frac{1}{4}$, *b)* $\frac{3}{10}$, *c)* $3\frac{1}{2}$ funta?
6. Ktoś wymienił dolary po kursie $5\frac{3}{8}$ *zł* za dolara i otrzymał za nie 208 *zł* 60 *gr*; ile dolarów wymienił?
7. Pewnego dnia płacono za dolara $5\frac{1}{2}$ *zł*, a za franka francuskiego $\frac{3}{10}$ *zł*; ile franków można było otrzymać za 561 dolarów?
8. 10 koron duńskich ma wartość 24 *zł*. Jaką wartość w *zł*

ma gulden holenderski, jeżeli koroną duńska wynosi $\frac{2}{3}$ guld. holend.?

9. Handlarz owoców sprowadził z Węgier 5000 *kg* winogron po 0,65 pengö za 1 *kg*; ile *zł* zapłacił, jeżeli 1 pengö wynosił 1,56 *zł*?
10. Ktoś schował w 1931 r. 214 dolarów. Ile stracił do 1 grudnia 1933 r., jeżeli kurs dolara w r. 1931 wynosił 8,91 *zł*, zaś z początkiem grudnia 1933 r. 5,45 *zł*?
11. Ktoś chce wymienić 736 franków francuskich na *zł*. Ile *zł* otrzyma, jeżeli kurs dzienny franka wynosi 0,349 *zł*? Jaki musiałby być kurs franka, gdyby wymieniający chciał otrzymać o 3 *zł* więcej? Wynik zaokrąglij do setnych złotego!
12. Księgarz ma zapłacić za sprowadzone książki: 218,70 franków szwajcarskich; 87,40 marek niemieckich; 52,20 guldenów holenderskich i 328 lirów włoskich. Ile *zł* zapłaci, jeżeli frank szwajcarski wynosi 1,72 *zł*, marka niemiecka 2,12 *zł*, gulden holenderski 3,57 *zł*, lira włoska 0,47 *zł*? Ile zapłaciłby za ten rachunek we frankach szwajcarskich?
13. Angielski funt szterling dzieli się na 20 szylingów, zaś 1 szyling równa się 12 pensom. Oblicz wartość 2 ft. 8 szyl. 5 pens., jeżeli funt szterling ma wartość 29,70 *zł*.
14. Dom handlowy wysłał kupcowi w Anglji towar za 19 435 *zł*, a wzamian otrzymał od niego towar wartości 570 funtów szterlingów. Kto i ile ma zapłacić, jeżeli w dniu, w którym ma nastąpić wyrównanie rachunków funt szterling wynosi 29,55 *zł*, a różnica wartości towarów ma być pokryta *a)* w *zł*, *b)* w ft. szterl.?
15. Kantor wymiany wypłacił za 930 franków francuskich 316 *zł* 20 *gr*, a za 260 dol. 1414 *zł* 40 *gr*; po jakim kursie liczył franka, a po jakim dolara? Wynik zaokrąglij do setnych złotego!
16. 6/XII 1933 r. płacono w Zurychu za 1 dol. am. 3,25 franków szwajc., a za 100 *zł* 57,65 fr. szwajc. Ile *zł* można

było otrzymać za 320 dol.? Ktoś wymienił 1000 *zł* na 100 dol., a resztę zażądał w frankach; ile otrzymał franków?

17. Ktoś, wyjeżdżając do Włoch, pragnie nabyć 2000 lirów. Kurs lira w Polsce wynosi 0,47 *zł*, kurs zaś złotego we Włoszech 2,12 lir. Czy korzystniej jest nabyć liry w Polsce, czy we Włoszech? Ile *zł* wynosi różnica na 2000 lir?
18. Przejazd 600 *km* III klasą pociągu pośpiesznego kosztuje w Niemczech 31,50 marek niem., w Polsce 30,80 *zł*. Gdzie kosztuje drożej? (1 marka niem. = 2,12 *zł*).
19. W Niemczech wynosi opłata za każdy wyraz telegramu 0,15 mk., w Polsce uiszcza się zasadniczą opłatę 50 *gr* i ponadto 15 *gr* za każdy wyraz. Oblicz w *zł* różnicę opłat za telegram, złożony z 18 wyrazów!
20. Uzupełnij następującą tablicę, zamieniając jednostki monetarne jednych państw na jednostki państw innych:

	Polska	Francja	Anglja	Włochy	Niemcy
Polska 1 *zł*	1 *zł*	.... fr.	.... ft. szt.	.... lir	.... mk.
Francja 1 frank	0,35 *zł*	1 fr.	.... ft. szt.	.... lir	.... mk.
Anglja 1 f. szt.	29,50 *zł*	.... fr.	1 ft. szt.	.... lir	.... mk.
Włochy 1 lira	0,47 *zł*	.... fr.	.... ft. szt.	1 lira	.... mk.
Niemcy 1 marka	2,12 *zł*	.... fr.	.... ft. szt.	.... lir	1 marka

a) ile franków ma 15 lir; 73,4 mk.; 294,50 *zł*?
b) ile marek ma 32,8 ft. szt.; 197 lir; 519 *zł*?

Wyniki zaokrąglij do setnych jednostki monety danego kraju!

Ciężar właściwy ciał

Ciężarem właściwym ciała nazywamy liczbę wskazującą, ile g waży 1 cm^3 tego ciała. Np. 1 cm^3 korka waży 0,24 g, a więc ciężar właściwy korka wynosi 0,24.

Poniżej mamy tabelkę ciężarów właściwych niektórych ciał:

Cyna	7,28
Glin (Aluminjum) . .	2,7
Miedź	8,93
Nikiel	8,8
Platyna	21,4
Rtęć	13,6
Srebro	10,5
Złoto	19,3
Żelazo	7,8

W niżej podanych zadaniach wykonaj rachunki z taką tylko dokładnością, która ma praktyczne znaczenie:

1. Ile waży *a)* $5\frac{1}{4}$ cm^3, *b)* $\frac{18}{7}$ cm^3, *c)* 1,5 dcm^3 niklu?
2. Jaką objętość ma figurka z niklu, która waży 325,5 g?
3. Ile waży $3\frac{3}{4}$ l rtęci? Ile to jest litrów 150 kg rtęci?
4. Rurka szklana, wypełniona do połowy rtęcią, waży $45\frac{3}{10}$ g, sama zaś rurka $4\frac{1}{2}$ g; jaka jest pojemność rurki?
5. Kula srebra waży 0,561 kg; ile cm^3 srebra zawiera?
6. Ile wazy blacha cynowa o długości 1 m 2 dcm, o szerokości 8 dcm i o grubości $\frac{1}{5}$ mm?
7. Kulka złota ma objętość $3\frac{2}{7}$ cm^3; jaką przedstawia wartość, jeżeli 1 g złota kosztuje 6,2 $zł$?
8. Rondel miedziany waży 1,7 kg; ileby ważył, gdyby zamiast z miedzi był z aluminjum?
9. W r. 1929 wyprodukowano w całym świecie 5876 kg platyny. Ile to jest m^3?
10. Litr oliwy waży 0,92 kg. Jaki jest ciężar właściwy oliwy? Jaką objętość ma $5\frac{1}{2}$ kg oliwy?
11. Ciężar kulki ołowianej wynosi $181\frac{1}{2}$ g, a objętość jej, zmie-

rzona zapomocą menzurki, 16 cm^3. Ile wynosi ciężar właściwy ołowiu? Jaką objętość ma 17,498 *kg* ołowiu?

12. 3 litry nafty ważą $2\frac{2}{5}$ *kg*. *a)* Jaki jest ciężar właściwy nafty? *b)* Jaką objętość ma 3,25 *kg* nafty? *c)* Ktoś chce kupić $5\frac{1}{2}$ *l* nafty; ponieważ kupiec nie ma miarki, chce tę ilość odważyć. Ile ma nafty odważyć?

Zamiany różnych jednostek miary na metryczne*

A) Dawne polskie miary długości

mila = 7,42 *km*.

łokieć = 2 stopy = 24 cale = 57,6 *cm*.

1. *a)* Ile *cm* ma 1 cal? *b)* Wyraź w *m* $49\frac{1}{2}$ cali. *c)* Ile cali ma 1 *m*?
2. *a)* Ile *cm* ma 1 stopa? *b)* Ile to jest *m* 181,3 stóp? *c)* Ile stóp ma 1 *km*?
3. Na ubranie potrzeba 3 *m* 10 *cm* sukna; ile to jest łokci?
4. Wyraź w łokciach długość i szerokość sali szkolnej!
5. *a)* Ile to jest *km* $12\frac{3}{4}$ mili? *b)* Odległość ze Lwowa do Krakowa wynosi 343 *km*; ile to jest mil?
6. Auto ma przebyć drogę $8\frac{3}{4}$ mili. Z jaką prędkością (ile *m* na sekundę) ma jechać auto, by przebyło tę drogę w ciągu 5 kwadransów?

B) Dawne polskie miary powierzchni

włóka = 30 morgów = 16,8 *ha*.

1. *a)* Wyraź morg w *ha*! *b)* Ile to jest morgów $\frac{1}{8}$ *ha*, 1 *ha*, 7,5 *ha*?
2. Gospodarz posiada 2,3 włóki ziemi; wyraź to w *ha*!
3. Ile morgów ma łąka o powierzchni 27,4 *ha*?
4. Gospodarz kupił 12 morgów ziemi za 4000 *zł*; ile płacił za 1 *ha*?

---

* W zadaniach, podanych w tym ustępie, należy wykonywać rachunki z taką tylko dokładnością, jaka w życiu codziennem posiada znaczenie!

5. Rolnik obliczył sobie, że przeciętny zbiór z morga wynosił 7,4 *q* pszenicy. Ile wynosił jego zbiór, jeżeli miał obsianych pszenicą $11\frac{1}{2}$ *ha*?

C) Dawne polskie miary wagi

centnar	=	100 funtów
funt	=	405,5 *g*
uncja	=	25,34 *g*
łut	=	12,67 *g*.

1. *a)* Ile *kg* miał 1 centnar? *b)* Ile centnarów jest 1000 *kg*?
2. Ile *a)* funtów, *b)* uncyj, *c)* łutów miał 1 centnar?
3. W starej książce kucharskiej czytamy: „Do $1\frac{1}{2}$ funta mąki wsyp 3 uncje cukru i dodaj do tego $\frac{1}{2}$ łuta utartej wanilji...". Jakbyś przepisał ten przepis, posługując się obecnemi miarami wagi?

D) Inne używane jednostki miar

1. Ktoś kupił pod budowę domu 280 sążni kwadratowych ziemi za 5180 *zł*; ile zapłacił za 1 m^2 ziemi, jeżeli 1 sążeń = 4,55 m^2?
2. Pewien majątek ziemski koło Charkowa obejmował 8400 dziesięcin; wyraź to w *ha*, wiedząc, że dziesięcina rosyjska wynosi $109\frac{1}{4}$ *a*!
3. 1 cal angielski, amerykański i rosyjski wynosi 25,4 *mm*; wyraź w calach *a)* 78 *cm*, *b)* 4,27 *cm*, *c)* długość ławki szkolnej.
4. Pewien obraz w Muzeum Brytyjskiem ma $68\frac{1}{2}$ cala długości, a $47\frac{1}{4}$ cala szerokości; podaj wymiary obrazu w *cm*!
5. Ile dawnych cali polskich ma 100 cali angielskich?
6. 1 pud rosyjski = 16,38 *kg*. *a)* Ile pudów zawiera 1 *t*? *b)* Kupiec otrzymał z Z. S. R. R. 27 pudów towaru; ile ma zapłacić cła, jeżeli cło od 100 *kg* tego towaru wynosi 27 *zł*?
7. Wiorsta (miara rosyjska) wynosi 1,067 *km*. *a)* Ile to jest 25 wiorst, 94 wiorst? *b)* Ile to jest wiorst 570 *km*?
8. *a)* Wysokość Mt. Everest wynosi 29 000 stóp angielskich; ile to jest *m*, jeżeli 1 stopa = 30,48 *cm*? *b)* Wyraź w sto-

pach ang. wysokość Gierlachu (2663 *m*) i Howerli (2058 *m*)!

9. *a)* Mila morska ma 1,852 *km*. Ile *km* na godzinę przebywa okręt, który porusza się z prędkością 16 węzłów (to znaczy 16 mil morskich na godzinę)? *b)* Statek przebył w ciągu doby 552 *km*; oblicz prędkość statku w węzłach!

10. Pojemność okrętów wyraża się w rejestrowanych tonnach. Rejestr. tonna wynosi 2,83 m^3. Wyraź w m^3 pojemność następujących statków polskiej floty handlowej: *a)* Polonja 7500 rej. tonn, *b)* Kościuszko 6522 rej. tonn, *c)* Pułaski 6345 rej. tonn, *d)* Premjer 3540 rej. tonn.

Rachunki kupieckie, gospodarskie i inne

1. Wykonaj obliczenia w następującym rachunku:

Firma .... dnia .... 193...... r

Rachunek

dla ....

w ....

Ilość	Jednostek	Wyszczególnienie towaru	Cena jednostkowa	*zł*	*gr*
4	*kg*	mąki	0,45 *zł*		
$2^1/_2$	„	cukru	1,55 „		
2	„	soli	0,38 „		
36	sztuk	jaj	0,075 „		
5	„	cytryn	0,12 „		
$1^1/_2$	*l*	octu	0,62 „		
5	sztuk	śledzi	0,18 „		
		Razem . .			

2. Kupiec dostarczył $3\frac{1}{2}$ *kg* cukru po 1,50 *zł* za 1 *kg*, $\frac{1}{2}$ *kg* kawy po 9 *zł* za 1 *kg*, $2\frac{1}{4}$ *kg* ryżu po 0,80 *zł* za 1 *kg*, 25 *dkg* herbaty po 18 *zł* za 1 *kg* i 2 pudełka konserw jarzynowych po 1,35 *zł* za 1 pudełko. Jaki rachunek wystawił?

3 Sporządź rachunek za dostarczone towary:
12 świec po 0,28 *zł* za sztukę, $3\frac{1}{2}$ *kg* mydła po 1,20 *zł*

za 1 *kg*, 2 pudełka pasty do obuwia po 0,80 *zł* za pudełko, 3 paczki zapałek po 0,85 *zł* za paczkę.

4. Kupiec dostarczył 18 szklanek po 0,35 *zł* za sztukę, $\frac{1}{2}$ tuzina talerzy głębokich po 1,40 *zł* za sztukę, $\frac{1}{2}$ tuzina talerzy płytkich po 1,25 *zł* za sztukę, 3 garnki po 2,80 *zł* i 2 rondle po 7,50 *zł*; jaki rachunek wystawił?
5. Kupiec dostarczył 2,5 *kg* cukru po 1,55 *zł* za 1 *kg*, 0,3 kawy po 8,75 *zł* za 1 *kg*, 0,2 herbaty po 17,50 *zł* za 1 *kg*, 1,5 *kg* ryżu po 0,85 *zł* za 1 *kg* i 0,25 *kg* suszonych grzybów po 15,50 *zł* za 1 *kg*; jaki rachunek wystawił?
6. Kupcowi dostarczono 78,5 *kg* kiełbasy za 251 *zł* 20 *gr*. Z zapasu tego odstąpił innemu kupcowi 28,5 *kg*; ile należy mu się za odstąpioną kiełbasę?
7. Za wór mąki, ważący 86,7 *kg* zapłacił kupiec 34 *zł* 20 *gr*. Sam wór waży 1,2 *kg*. Ile musi żądać kupiec za 1 *kg* mąki, gdy chce na worze mąki zarobić 5 *zł*? (Czy może zarobić dokładnie 5 *zł*? Ile zarobi naprawdę, gdy będzie sprzedawał mąkę po obliczonej cenie?)
8. Kupiec rozlał wino do flaszek o pojemności $\frac{7}{10}$ *l*. *a)* Jaką ustanowi cenę za flaszkę wina, jeżeli 1 *l* wina sprzedaje po 3 *zł* 50 *gr*, a za flaszkę dolicza 5 *gr*? *b)* Jaką ustanowi cenę, zaokrąglając ją do dziesiątek groszy, jeżeli 1 *l* wina sprzedaje po 3 *zł* 90 *gr*, a za flaszkę dolicza 6 *gr*?
9. Oblicz wartość towaru w sklepie, mając sporządzony inwentarz:

Ilość	Opakowanie	Dział	Cena		Wartość	
			zł	*gr*	*zł*	*gr*
200	*kg*	mąka	—	45		
160	„	cukier	1	55		
84	„	ryż	—	80		
18	*l*	ocet	—	60		
50	sztuki	cytryny	—	12		
90	*kg*	sól	—	38		
1,5	skrzynie	zapałki	80	—		
15	*kg*	grzyby	14	50		

10. W sklepie znajdują się następujące zapasy towaru: 17 *kg* wędlin po 3,4 *zł* za 1 *kg*, 60 pudełek sardynek po 1,35 *zł* za pudełko, 82 puszek konserw rybnych po 1,75 *zł* za puszkę, 136 puszek konserw jarzynowych po 2,30 *zł* za puszkę, 2 beczki śledzi po 190 *zł* za beczkę, 1,52 *hl* octu po 60 *gr* za litr. Podaj wartość towarów!
11. Kupiec zapłacił za 100 *kg* towaru 680 *zł*. Przy sprzedaży chce zarobić na tym towarze $\frac{1}{8}$ ceny kupna; jaką cenę ustanowi za 1 *kg*?
12. Kupiec zapłacił za 50 *kg* marmelady 126 *zł*. Przy sprzedaży chce zarobić $\frac{1}{6}$ ceny kupna. Jaką cenę z zaokrągleniem do dziesiątek *gr* ustanowi za 1 *kg*?
13. Handlarz owoców zapłacił za 100 *kg* jabłek 85 *zł*. Okazało się, że $\frac{3}{20}$ ilości jabłek jest zepsute. Na reszcie postanowił handlarz zarobić $\frac{1}{5}$ ceny kupna. Po jakiej cenie musi sprzedawać 1 *kg*?
14. Kupiec kupował sardynki po $1\frac{1}{4}$ *zł*, a sprzedawał po $1\frac{3}{5}$ *zł* za pudełko. Sprzedał już pudełek za $116\frac{4}{5}$ *zł*; ile na tem zarobił?
15. Handlarz ryb kupił ryby po $1\frac{3}{5}$ *zł*, a sprzedaje po $1\frac{9}{10}$ *zł* za 1 *kg*; ile *kg* musi sprzedać, by zarobić 45 *zł*?
16. Kupiec sprzedał 6,5 *kg* kawy jednego gatunku za 49,40 *zł*, a 8,3 *kg* drugiego gatunku za 59,76 *zł*. Która kawa jest droższa? Ile można kupić kawy tańszej za cenę 5 *kg* kawy droższej?
17. *a)* 1 *kg* ziemniaków kosztuje 0,16 *zł*; ile zapłaciła gospodyni za 2,5 *kg*?
   b) 1 *kg* masła kosztuje 3.20 *zł*; ile kosztuje 0,75 *kg*?
   c) 1 *kg* cukru kosztuje 1,60 *zł*; ile kosztuje $\frac{1}{5}$ *kg*, $\frac{1}{4}$ *kg*, $\frac{3}{4}$ *kg*, $1\frac{5}{8}$ *kg*, $4\frac{4}{5}$ *kg*?
   d) 1 *kg* szynki kosztuje 4 *zł*; ile kosztuje $\frac{1}{10}$ *kg*, $\frac{2}{5}$ *kg*, $\frac{3}{4}$ *kg*, $2\frac{1}{4}$ *kg*, $3\frac{3}{4}$ *kg*; ile szynki można kupić za 72 *gr*, 1 *zł* 60 *gr*, 5 *zł* 20 *gr*?
   e) 1 *l* wina kosztuje 4,7 *zł*; ile kosztuje $\frac{1}{4}$ *l*, $\frac{3}{4}$ *l*, $1\frac{1}{4}$ *l*?
   f) 1 *kg* soli kosztuje 0,38 *zł*; ile kosztuje $2\frac{3}{4}$ *kg*?
   g) 1 *m* sukna kosztuje 16 *zł* 50 *gr*; ile kosztuje 3,15 *m*?

h) 1 *kg* kawy kosztuje $7\frac{1}{2}$ zł; ile kosztuje $\frac{1}{10}$ *kg*, $\frac{1}{4}$ *kg*, $2\frac{1}{5}$ *kg*?

i) 1 tonna węgla kosztuje 52 *zł* 70 *gr*; ile kosztuje 1 *q*, $2\frac{1}{2}$ *q*, $4\frac{1}{2}$ *q* węgla?

j) $\frac{3}{4}$ *l* octu kosztuje $\frac{9}{20}$ *zł*; podaj w złotych i groszach cenę $\frac{1}{3}$ *l*, $2\frac{1}{2}$ *l* octu!

k) 10 *dkg* herbaty kosztuje $1\frac{3}{5}$ *zł*; podaj w złotych i groszach cenę $\frac{1}{8}$ *kg*, $\frac{2}{5}$ *kg*, $\frac{3}{4}$ *kg* herbaty!

18. Na ubranie potrzeba $3\frac{1}{8}$ *m* sukna; ile za nie zapłacimy, jeżeli 1 *m* kosztuje $15\frac{3}{5}$ *zł*?
19. Za $3\frac{1}{10}$ materjału na ubranie zapłacono $45\frac{1}{2}$ *zł*; po czemu płacono za 1 *m*?
20. Służąca kupiła $6\frac{1}{4}$ *kg* ryby za 11 *zł* 25 *gr*; ile liczył kupiec za 1 *kg* ryby?
21. Ojciec kupił sukno na ubranie dla siebie i 2 synów, licząc na swoje ubranie 3,2 *m*, na ubranie starszego syna 2,85 *m*, a młodszego $2\frac{1}{4}$ *m*. Kupiec zażądał za sukno 124 *zł* 50 *gr*; po czemu liczył 1 *m* sukna?
22. Na ubranie, które kosztowało 87 *zł*, zużyto 3,2 *m* sukna. Ile kosztował 1 *m* sukna, jeżeli krawiec za robotę i dodatki policzył 34 *zł* 20 *gr*?
23. Za 4,7 *l* wina zapłacono 18,33 *zł*; ile kosztuje $7\frac{1}{2}$ *l* wina?
24. Za 0,3 *kg* kiełbasy zapłacono 1,05 *zł*; ile trzeba zapłacić za $2\frac{1}{2}$ *kg*?
25. Rachunek wystawiony przez elektrownię za zużycie prądu na oświetlenie w czasie od 15/V 1933 do 17/VI 1933 wyniósł 16 *zł* 20 *gr*; ile kosztowało przeciętnie dzienne zużycie prądu?
26. Oświetlenie pewnej restauracji kosztuje 1,40 *zł* za godzinę. Ile wyniesie rachunek za czerwiec, jeżeli lokal jest oświetlony od godz. $19\frac{1}{2}$ do 24, a ile za grudzień, jeżeli lokal jest oświetlony od godz. $15\frac{1}{4}$ do 24?
27. Gospodarz kupił 15,35 *ha* pola za 17 800 *zł*; po ile płacił za 1 *ha*?

28. Gospodarz dokupił przy parcelacji $4\frac{3}{5}$ *a* pola; ile zapłacił, jeżeli 1 *a* liczono po 8,70 *zł*?
29. Przy parcelacji majątku sprzedawano 1 *ha* pola po 900 *zł*. Od kupujących żądano $\frac{2}{3}$ ceny kupna gotówką, ą resztę mogli spłacać ratami; ile pola na raty mógł kupić gospodarz, który miał 1350 *zł* gotówki?
30. Las, w kształcie prostokąta, ma $1\frac{3}{10}$ *km* długości oraz $\frac{3}{5}$ *km* szerokości; jaką wartość przedstawia, jeżeli za 1 *ha* lasu płacą 1650 *zł*?
31. W majątku, obejmującym 258 *ha*, $\frac{3}{8}$ zajmuje pole orne, a resztę las. Jaką wartość przedstawia ten majątek, jeżeli 1 *ha* pola oceniają na 760 *zł*, a lasu na 1250 *zł*?
32. Ulica, długa na 327 *m* i na 6,5 *m* szeroka, ma być wybrukowana; 1 m^2 brukowania kosztuje 5,35 *zł*. Ile kosztuje wybrukowanie tej ulicy?
33. 1 m^2 linoleum kosztuje 4,25 *zł*; ile kosztuje pokrycie podłogi pokoju 5,65 *m* długiego, a 5,07 *m* szerokiego?
34. Malarz pokojowy żąda za malowanie pokoju po 70 *gr* za 1 m^2. Ile trzeba zapłacić za wymalowanie ścian (bez sufitu) pokoju 6,4 *m* długiego, 5,18 *m* szerokiego, a 4,65 wysokiego, jeżeli w pokoju są dwa okna, mające po 1,18 *m* szerokości i 1,47 *m* wysokości, oraz drzwi 1,5 *m* szerokie i 2,15 *m* wysokie?
35. Ze zmielenia 1 *kg* pszenicy otrzymuje się $\frac{3}{4}$ *kg* mąki. *a)* Ile *kg* mąki otrzymamy z 88 *kg*, 125 *kg*, 270 *kg*, 324 *kg* pszenicy? *b)* Ile *kg* pszenicy trzeba zemleć, by otrzymać 60 *kg*, 150 *kg*, 270 *kg*, 500 *kg* mąki?
36. Do wypieku 10 *kg* chleba zużywa piekarz 7 *kg* mąki. *a)* Ile *kg* mąki zużywa do wypieczenia 1 *kg*, 8 *kg*, 35 *kg*, 50 *kg* chleba? *b)* Ile *kg* chleba wypiecze z 10 *kg*, 18 *kg*, 50 *kg* mąki?
37. Piekarz wypieka z $18\frac{1}{4}$ *kg* mąki 24,8 *kg* chleba; ile mąki zużyje na wypieczenie 120 *kg* chleba?
38. Płaca dzienna robotnika w pewnej fabryce wynosi 3,40 *zł*, a płaca majstra $6\frac{1}{2}$ *zł*; ile wynosi tygodniowa wypłata

297,7; 396,2; 345,8. Ile tysięcy tonn wynosił przeciętnie roczny wywóz w powyższem dziewięcioleciu?

b) W powyższem dziewięcioleciu wywieziono z Polski przetworów ropy w tysiącach tonn: 287,9; 309,4; 295,7; 410,0; 241,2; 215,7; 217,0; 156,0; 186,6. Oblicz przeciętny roczny wywóz!

Procenty

Jednym **procentem** jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{100}$ tej wielkości.

Np. jeden procent $7\,m = \frac{1}{100}$ z $7\,m = \frac{7}{100}\,m = 7\,cm$.

Dwa, trzy, cztery procent jakiejś wielkości są to odpowiednio $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{4}{100}$ tej wielkości.

Np. 8 procent $40\,m = \frac{8 \cdot 40}{100}\,m = \frac{16}{5}\,m$,

$\frac{5}{2}$ procent $1000 = \frac{2{,}5}{100}$ z $1000 = \frac{2{,}5 \cdot 1000}{100} = 25$,

150 procent $20 = \frac{150}{100}$ z $20 = \frac{150 \cdot 20}{100} = 30$.

Procent oznaczamy %, a więc 4% oznacza 4 procent, $1\frac{1}{2}$% oznacza jeden i pół procentu.

Jednym **promil** jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{1000}$ tej wielkości.

Jeżeli odcinek AB wynosi 5 tysięcznych części odcinka CD, t. j. jeśli

$$AB = \frac{5}{1000}\,CD,$$

to mówimy, że AB jest 5 **promil** odcinka CD.

Dwa, trzy, osiem promil jakiejś wielkości są to odpowiednio $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{8}{1000}$ tej wielkości.

Np. 3 promil $10\,000 = \frac{3}{1000}$ z $10\,000 = 30$,

9 promil $1500 = \frac{9}{1000}$ z $1500 = \frac{27}{2}$.

Promil oznaczamy ‰, a więc 3‰ oznacza 3 promil, 11‰ oznacza 11 promil.

Przykład

Odcinek AB jest $\frac{1}{7}$ odcinka CD. Jakim procentem odcinka CD jest odcinek AB? Przedstawmy ułamek $\frac{1}{7}$ w postaci ułamka o mianowniku 100.

Mamy: $$\frac{1}{7}=\frac{\frac{1}{7}\cdot 100}{100}=\frac{14\frac{2}{7}}{100}.$$

A więc AB zawiera $14\frac{2}{7}$ setnych odcinka CD, t. zn. AB jest $14\frac{2}{7}\%$ odcinka CD.

Moglibyśmy jeszcze inaczej rozumować:

$$\frac{1}{7}=0{,}142\ldots=\frac{14{,}2\ldots}{100}.$$

Zatem AB wynosi w przybliżeniu $14{,}2\%$ odcinka AD.

Zadania

1. Oblicz: *a)* 4% z 100, 150, 450, 70, 230, 1490;
   b) 6% z 10, 18, 37, 42, 175, 6273;
   c) $2\frac{1}{2}\%$ z 240, 718, 5194, 87 326;
   d) 9,4% z 125, 810, 1238, 4735;
   e) $7\frac{1}{4}\%$ z 426,8, 792,45, $5127\frac{1}{2}$.
2. Ile to jest: *a)* 150% z 18, 48, 200?
   b) 300% z $8\frac{3}{5}$, 157,5, 617,42?
3. Ile to jest 3% z:
   a) 100 *zł*, 70 *zł*, 360 *zł*, 47 *zł*, 8354 *zł*?
   b) 56 *kg*, 92 *kg*, 421 *kg*, 572 *kg*?
   c) 87 *m*, 540 *m*, $719\frac{1}{2}$ *m*, $690\frac{3}{4}$ *m*?
4. Ile to jest 17% z: *a)* 18,4 *kg*, 25,9 *kg*, 42,74 *kg*?
   b) 8 *zł*, 15 *zł* 60 *gr*, 194 *zł* 20 *gr*, $576\frac{1}{2}$ *zł*?
5. Ile to jest 2% z:
   a) 1 *km*, 7 *km*, 24 *km*, $8\frac{1}{2}$ *km*, 12,4 *km*?
   b) 360 *zł*, 570 *zł*, 1450 *zł*?
6. Jaki to jest procent:
   10‰, 20‰, 140‰, 36‰, 45‰, 125‰?
7. Jaki to jest promil: 3%, 0,24%, 1,3%, $3\frac{3}{5}\%$, $14\frac{1}{2}\%$?

8. Kupiec zapłacił za towar 600 *zł*; przy sprzedaży zarobił na nim 14%. Za ile sprzedał towar?
9. Czynsz za mieszkanie, wynoszący 120 *zł* miesięcznie, obniżył gospodarz o 15%; ile wynosił obniżony czynsz?
10. Kupiec sprowadził 230 *kg* mydła za 207 *zł*. Po czemu będzie sprzedawał 1 *kg*, jeżeli chce zarobić 10%?
11. Rzemieślnik zarobił w 1928 r. 3600 *zł*; w r. 1930 zarobek jego był o 30% wyższy, niż w 1928 r., zaś w 1933 r. o 30% niższy, niż w 1930 r. Ile zarobił w 1933 r.?
12. Kupiec sprowadził za 315 *zł* mąki, za 430 *zł* cukru i za 270 *zł* oliwy. Przy sprzedaży zarobił na mące 7%, na cukrze 6%, a na oliwie, której część wylała się, stracił 12%. Czy na całym towarze kupiec zyskał, czy stracił i jaką kwotę?
13. Kupiec zapłacił za 60 *kg* towaru brutto 85 *zł* 50 *gr*. Tara wynosiła 5% ciężaru brutto. Jaką cenę ustanowi kupiec za 1 *kg* towaru, jeżeli chce zarobić na nim 12%?
14. W r. 1928 wynosiła produkcja diamentów w świecie 1458 *kg*, z czego na kraje południowej Afryki przypada 49,9%, na Kongo belgijskie 26%. Ile diamentów wyprodukował każdy z tych krajów?
15. W r. 1931 było w Polsce zatrudnionych 480 000 urzędników państwowych i prywatnych, z czego przypada na administrację 18%, na szkolnictwo 17%. Ilu urzędników zajętych było w administracji, a ilu w szkolnictwie?
16. W r. 1931 było w Polsce zatrudnionych w górnictwie i przemyśle 580 400 robotników. Z tego przypada na górnictwo 22,7%, na hutnictwo 8,1%, a reszta na przemysł. Ilu robotników było zajętych w każdej z powyższych gałęzi pracy?
17. Ludność Polski wynosi 32 600 000 mieszkańców, z czego przypada 26% na ludność w wieku od 10—19 lat, a 16,7% na ludność w wieku od 20—29 lat. Ile ludności w wieku od 10—19 lat, a ile w wieku od 20—29 lat znajduje się w Polsce?

18. W r. 1932 przewinęły przez port w Gdyni statki różnych państw o ogólnej pojemności 5 670 000 rej. tonn. Z tego przypada na Polskę 19,2%, Niemcy 11,2%, Danję 11,8%, Szwecję 28,3%, Norwegję 7,9%, Anglję 3,5%, St. Zjedn. Ameryki 4,5%, a reszta na inne państwa. Oblicz według przynależności państwowej ogólną pojemność statków, które przewinęły przez Gdynię!
19. W r. 1929 wysłano z Polski 83 000 000 listów zagranicę, z czego wysłano: do Austrji 6%, do Czechosłowacji 6%, do Francji 9%, do Gdańska 4%, do Niemiec 32%, do W. Brytanji 2%, do Z. S. R. R. 6%, do Argentyny 2%, do Stanów Zjednoczonych 7%, do Kanady 4%, do Brazylji 1%, a resztę do innych krajów. Oblicz, ile listów wysłano do poszczególnych krajów!
20. Ludność świata wynosiła w 1930 r. 2 034 000 000 mieszkańców, z czego przypadało na Europę 24,3%, Azję 56%, Afrykę 7%, Amerykę 12,2%, Australję i Oceanję 0,5%. Oblicz liczbę ludności w poszczególnych częściach świata!
21. Ludność Polski wynosi 32 600 000 mieszkańców, z czego przypada na ludność w miastach 27%. Ile wynosi ludność miast, a ile wsi?
22. Roczny naturalny przyrost ludności wynosi w Polsce przeciętnie około 15‰. Jeżeli z końcem 1932 r. ludność wynosiła 32 600 000 mieszkańców, to ile przy tym przyroście wyniosłaby z końcem 1933 r., a ile z końcem 1934 r.?
23. Długość granic niektórych państw wynosi: Polski 5534 *km*, w tem morskich 2,5%, Francji 5624 *km*, w tem morskich 50,7%, Niemiec 7677 *km*, w tem morskich 22,6%, Włoch 9960 *km*, w tem morskich 80,2%, Rumunji 2870 *km*, w tem morskich 15,7%. Oblicz długość granic morskich wymienionych państw!
24. Długość granic Polski wynosi 5534 *km*. Z tego przypada na granice: z Niemcami 34,5%, z Z. S. R. R. 25,5%, z Czechosłowacją 17,8%, z Litwą 9,2%, z Rumunją 6,3%, z Wolnem Miastem Gdańskiem 2,2%, z Łotwą 2%, a reszta przy-

pada na granicę morską. Oblicz długość granic Polski z poszczególnemi państwami!

25. Jakim procentem odcinka CD jest odcinek AB, jeśli odcinek AB wynosi:

a) $\frac{1}{9}$, *b)* $\frac{2}{3}$, *c)* $\frac{5}{11}$, *d)* $\frac{8}{3}$ odcinka CD?

26. Jakim promil odcinka CD jest odcinek AB, jeśli odcinek AB wynosi:

a) $\frac{5}{601}$, *b)* $\frac{7}{899}$, *c)* $\frac{1}{380}$ odcinka CD?

27. W kupiectwie używa się nieraz przy obliczaniu procentu tak zwanej praktyki włoskiej. W tym celu dany procent rozkładamy na częściowe procenty, które łatwo dadzą się obliczyć.

I. Np. obliczyć $17\frac{1}{2}\%$ z 484 *zł*.

Rozkładamy: $17\frac{1}{2}\% = 10\% + 5\% + 2\frac{1}{2}\%$.

Mamy:	10%	z 484 *zł*	wynosi	48,40	*zł*
	5%	„ 484 „	„	24,20	„
	$2\frac{1}{2}\%$	„ 484 „	„	12,10	„
	$17\frac{1}{2}\%$	z 484 *zł*	wynosi	84,70	*zł*

a zatem $17\frac{1}{2}\%$ z 484 *zł* wynosi 84 *zł* 70 *gr*.

II. Obliczyć 45% z 317 *zł*!

Rozkładamy: $45\% = 50\% - 5\%$.

Mamy:	50% z 317 *zł* wynosi	158 *zł* 50 *gr*
	5% „ 317 „ „	15 „ 85 „
Odejmując, otrzymamy:	45% z 317 *zł* wynosi	142 *zł* 65 *gr*.

Oblicz praktyką włoską:

a) 60% kwoty 340 *zł*; *b)* 15% kwoty 834 *zł*;

c) 16% „ 719 „; *d)* 35% „ 493 „;

($16\% = 10\% + 5\% + 1\%$) ($35\% = 25\% + 10\%$)

e) 85% kwoty 564 *zł*; *f)* 26% kwoty 1450 *zł*;

g) 40% „ 2780 „; *h)* 24% „ 967 „;

($40\% = 50\% - 10\%$).

28. I. Jeżeli odcinek 8 *cm* powiększymy o 25%, to otrzymamy odcinek 8 *cm* + 2 *cm* = 10 *cm*. Ten sam wynik otrzymalibyśmy, obliczając 100% + 25%, t. j. 125% odcinka 8 *cm*.
Mamy bowiem: $\frac{125}{100} \cdot 8$ *cm* = 10 *cm*.
Powiększyć więc wielkość np. o 25%, to znaczy utworzyć 100% + 25% = 125% tej wielkości.
II. Jeżeli odcinek 9 *cm* pomniejszymy o 25%, to otrzymamy odcinek 8 *cm* — 2 *cm* = 6 *cm*. Ten sam wynik otrzymalibyśmy, obliczając 100% — 25% t. j. 75% odcinka 8 *cm*.
Mamy bowiem: $\frac{75}{100} \cdot 8$ *cm* = 6 *cm*.
Zmniejszyć więc wielkość np. o 25%, to znaczy utworzyć 100% — 25% = 75% tej wielkości.
Jak długi jest odcinek, który jest *a)* o 5% większy, *b)* o 20% mniejszy od odcinka 4 *dcm*?
29. 1 *kg* kawy średniego gatunku kosztuje 8 *zł*, lepszego gatunku o 30% więcej; ile kosztuje 1 *kg* kawy lepszego gatunku?
30. Robotnik zarabiał tygodniowo 45 *zł*; po pewnym czasie uzyskał 20% podwyżki płacy. Ile zarabiał tygodniowo po podwyżce?
31. Cena węgla kamiennego wzrosła o 8%. Ile trzeba zapłacić za tę ilość węgla, która przedtem kosztowała: *a)* 30 *zł*, *b)* 50 *zł*, *c)* 72 *zł*, *d)* 240 *zł*?
32. Z naczynia wyparowało 18% wody; ile wody pozostało, jeżeli początkowo było 7 *l*?
33. Cena żyta spadła o 15%; ile kosztuje ta ilość żyta, która przed zniżką cen kosztowała:
a) 30 *zł*, *b)* 65 *zł*, *c)* 80 *zł*, *d)* 250 *zł*?
34. Ktoś zarabia miesięcznie 250 *zł*, z czego wydaje 30% na czynsz. Ile pozostaje mu pieniędzy na inne wydatki?

Skonto i rabat

Zazwyczaj należności za towar nie płaci się natychmiast gotówką, ale dopiero po kilku miesiącach. Tak np. kupiec detajlista płaci najczęściej hurtownikowi za towar ratami, w miarę rozprzedaży towaru. Jeżeli jednak płaci przy kupnie gotówką, otrzymuje na cenie towaru opust, zwany s k o n t e m.

Często przy kupnie większej ilości towaru daje się opust, zwany r a b a t e m.

Skonto i rabat oblicza się w procentach należytości za towar.

Np.: Ktoś kupuje 200 *kg* cukru po 1,60 *zł* za *kg*. Ponieważ kupuje dużą ilość towaru, kupiec udziela mu 5% rabatu; kupujący ma więc zapłacić zamiast 320 *zł* tylko 304 *zł*. Ponieważ kupujący uiszcza należytość gotówką, kupiec udziela mu jeszcze 2% skonta od kwoty, którą ma zapłacić (304 *zł*), czyli opuszcza mu jeszcze 6 *zł* 8 *gr*. W ten sposób kupujący zapłaci gotówką 297 *zł* 92 *gr*.

Zadania

1. Uzupełnij następujący rachunek:

Firma. Miejscowość, dnia .... 193..... r.

Rachunek

dla ....

w ....

Ilość	Jednostek	Wyszczególnienie towaru	Cena jednostkowa	Cena *zł*	Cena *gr*
8	*kg*	czekolada	8,50 *zł*		
5	"	kawa	11 "		
50	"	cukier	1,60 "		
10	"	masło	3,50 "		
70	"	mąka	0,40 "		
40	pudełek	sardynki	1,80 "		
		Razem . .	—		
		4% rabatu	—		
		Pozostaje do wyrównania			

2. Ktoś zakupił 8 tonn węgla po 58 *zł* za tonnę. Ponieważ płacił gotówką, kupiec udzielił mu 5% skonta; wystaw rachunek!

3. Ktoś zakupił towaru za 380 *zł* i otrzymał przytem 6% rabatu; ile zapłacił za towar?
4. Kupiec zakupił towaru za 2890 *zł*. Ponieważ płaci gotówką przy odbiorze, otrzymuje $7\frac{1}{2}$% skonta; ile zapłaci za towar?
5. Ktoś zakupił meble za 940 *zł*. Ponieważ płaci gotówką, otrzymuje 8% skonta; ile zapłaci za meble?
6. Przy urządzaniu sali na odczyty zakupiono 120 krzeseł po 8 *zł* za sztukę; otrzymano przytem 7% rabatu. Ponieważ płacono gotówką, otrzymano jeszcze 3% skonta od kwoty, którą po potrąceniu rabatu miano zapłacić; ile zapłacono?

Obliczanie liczby, której procent jest znany

Jaka to jest liczba, której 8% wynosi 15? Zadanie możemy zapisać:

$$8\% \text{ z?} = 15, \text{ czyli } \tfrac{8}{100} \text{ z?} = 15, \text{ lub } \tfrac{8}{100} \cdot ? = 15.$$

Ponieważ niewiadoma jest mnożną, zatem szukana liczba wynosi:
$$15 : \tfrac{8}{100} = 15 \cdot \tfrac{100}{8} = 187,5.$$

Moglibyśmy zadanie powyższe rozwiązać jeszcze w inny sposób, a mianowicie:

Jeżeli 8% wynosi 15, to 1% wynosi 8 razy mniej t. j. $\frac{15}{8}$. Zatem $\frac{1}{100}$ szukanej liczby jest $\frac{15}{8}$, więc szukana liczba jest 100 razy większa, czyli wynosi $100 \cdot \frac{15}{8} = 187,5$.

Zadania

1. Oblicz liczbę, której:
   a) 7% wynosi 7; *b)* 7% wynosi 21; *c)* 4% wynosi 36; *d)* 12% wynosi 48; *e)* $4\frac{1}{2}$% wynosi 72; *f)* 2,4% wynosi 36; *g)* $7\frac{1}{2}$% wynosi 1440; *h)* $6\frac{2}{5}$% wynosi 12,8; *i)* 5% wynosi $2\frac{1}{2}$; *j)* $8\frac{3}{4}$% wynosi 7.
2. Oblicz liczbę, której:
   a) 100% wynosi 1; *b)* 50% wynosi 1; *c)* 1% wynosi 1; *d)* 3% wynosi 2; *e)* 7% wynosi 11; *f)* 12% wynosi $3\frac{1}{5}$; *g)* 150% wynosi 41; *h)* 180% wynosi 90; *i)* 132,4% wynosi 66,2; *j)* 250% wynosi $7\frac{1}{2}$.

detajlista płaci najczęściej hurtownikowi za towar ratami, w miarę rozprzedaży towaru. Jeżeli jednak płaci przy kupnie gotówką, otrzymuje na cenie towaru opust, zwany **skontem**.

Często przy kupnie większej ilości towaru daje się opust, zwany **rabatem**.

Skonto i rabat oblicza się w procentach należytości za towar.

Np.: Ktoś kupuje 200 *kg* cukru po 1,60 *zł* za *kg*. Ponieważ kupuje dużą ilość towaru, kupiec udziela mu 5% rabatu; kupujący ma więc zapłacić zamiast 320 *zł* tylko 304 *zł*. Ponieważ kupujący uiszcza należytość gotówką, kupiec udziela mu jeszcze 2% skonta od kwoty, którą ma zapłacić (304 *zł*), czyli opuszcza mu jeszcze 6 *zł* 8 *gr*. W ten sposób kupujący zapłaci gotówką 297 *zł* 92 *gr*.

Zadania

1. Uzupełnij następujący rachunek:

Firma. Miejscowość, dnia .... 193..... r.

Rachunek

dla ....

w ....

Ilość	Jednostek	Wyszczególnienie towaru	Cena jednostkowa	Cena *zł*	Cena *gr*
8	*kg*	czekolada	8,50 *zł*		
5	„	kawa	11 „		
50	„	cukier	1,60 „		
10	„	masło	3,50 „		
70	„	mąka	0,40 „		
40	pudełek	sardynki	1,80 „		
		Razem . .	—		
		4% rabatu	—		
		Pozostaje do wyrównania			

2. Ktoś zakupił 8 tonn węgla po 58 *zł* za tonnę. Ponieważ płacił gotówką, kupiec udzielił mu 5% skonta; wystaw rachunek!

3. Ktoś zakupił towaru za 380 *zł* i otrzymał przytem 6% rabatu; ile zapłacił za towar?
4. Kupiec zakupił towaru za 2890 *zł*. Ponieważ płaci gotówką przy odbiorze, otrzymuje $7\frac{1}{2}$% skonta; ile zapłaci za towar?
5. Ktoś zakupił meble za 940 *zł*. Ponieważ płaci gotówką, otrzymuje 8% skonta; ile zapłaci za meble?
6. Przy urządzaniu sali na odczyty zakupiono 120 krzeseł po 8 *zł* za sztukę; otrzymano przytem 7% rabatu. Ponieważ płacono gotówką, otrzymano jeszcze 3% skonta od kwoty, którą po potrąceniu rabatu miano zapłacić; ile zapłacono?

Obliczanie liczby, której procent jest znany

Jaka to jest liczba, której 8% wynosi 15? Zadanie możemy zapisać:

$$8\% \text{ z?} = 15, \text{ czyli } \tfrac{8}{100} \text{ z?} = 15, \text{ lub } \tfrac{8}{100} \cdot ? = 15.$$

Ponieważ niewiadoma jest mnożną, zatem szukana liczba wynosi: $15 : \frac{8}{100} = 15 \cdot \frac{100}{8} = 187{,}5.$

Moglibyśmy zadanie powyższe rozwiązać jeszcze w inny sposób, a mianowicie:

Jeżeli 8% wynosi 15, to 1% wynosi 8 razy mniej t. j. $\frac{15}{8}$. Zatem $\frac{1}{100}$ szukanej liczby jest $\frac{15}{8}$, więc szukana liczba jest 100 razy większa, czyli wynosi $100 \cdot \frac{15}{8} = 187{,}5$.

Zadania

1. Oblicz liczbę, której:
   a) 7% wynosi 7; *b)* 7% wynosi 21; *c)* 4% wynosi 36; *d)* 12% wynosi 48; *e)* $4\frac{1}{2}$% wynosi 72; *f)* 2,4% wynosi 36; *g)* $7\frac{1}{2}$% wynosi 1440; *h)* $6\frac{2}{5}$% wynosi 12,8; *i)* 5% wynosi $2\frac{1}{2}$; *j)* $8\frac{3}{4}$% wynosi 7.
2. Oblicz liczbę, której:
   a) 100% wynosi 1; *b)* 50% wynosi 1; *c)* 1% wynosi 1; *d)* 3% wynosi 2; *e)* 7% wynosi 11; *f)* 12% wynosi $3\frac{1}{5}$; *g)* 150% wynosi 41; *h)* 180% wynosi 90; *i)* 132,4% wynosi 66,2; *j)* 250% wynosi $7\frac{1}{2}$.

3. *a)* $5\frac{1}{2}\%$ pewnej kwoty wynosi 3 *zł* 30 *gr*; jaka to kwota?
   b) $9\frac{1}{3}\%$ pewnej kwoty wynosi 70 *zł*; jaka to kwota?
   c) 55,5% pewnej kwoty wynosi 44 *zł* 40 *gr*; jaka to kwota?
4. *a)* 2,4% pewnej długości wynosi 36 *cm*; jaka to długość?
   b) $16\frac{1}{3}\%$ pewnej długości wynosi 9,8 *km*; jaka to długość?
   c) $62\frac{1}{2}\%$ pewnej długości wynosi 2 *m* 50 *cm*; jaka to długość?
5. *a)* $1\frac{1}{3}$‰ pewnego ciężaru wynosi 0,2 *kg*; jaki to ciężar?
   b) $3\frac{1}{8}$‰ pewnego ciężaru wynosi 3 *kg* 200 *g*; jaki to ciężar?
   c) 21,6‰ pewnego ciężaru wynosi 27 *kg*; jaki to ciężar?
6. 15% pewnej kwoty wynosi 7 *zł* 50 *gr*; jaka to kwota?
7. 8% pewnej długości wynosi 24 *cm*; jaka to długość?
8. $10\frac{1}{2}\%$ pewnego ciężaru wynosi 14,7 *g*; jaki to ciężar?
9. Kupiec zarobił na towarze 8%, co wyniosło 320 *zł*; za ile nabył towar?
10. Kupiec sprowadził jabłka, przyczem 6 *kg* t. j. 5% sprowadzonych jabłek okazało się zepsutych; ile *kg* jabłek sprowadził kupiec?
11. Przy kupnie posiadłości zapłacił kupujący 12 000 *zł*, co stanowiło 30% ceny kupna; jaka była cena posiadłości?
12. W r. 1929 wynosiła produkcja rtęci w Hiszpanji 2476 tonn, co daje 44,5% światowej produkcji; ile wynosiła światowa produkcja?
13. Produkcja soli kuchennej w r. 1929 wynosiła w Polsce 407 000 tonn, co dało 1,5% światowej produkcji soli; ile wynosiła światowa produkcja? Ile soli wyprodukowały Stany Zjednoczone, jeżeli ich produkcja wynosiła 15,4% produkcji światowej?
14. Produkcja platyny w Z. S. R. R. wynosiła w 1929 r. 3100 *kg*, co daje 52,8% światowej produkcji; ile wynosiła produkcja światowa? Ile *kg* platyny wyprodukowała Kolumbja, jeśli jej produkcja wynosiła 24,1% światowej produkcji?
15. W r. 1929 zebrano w Polsce 657.000 *q* lnu, co daje 10,9% zbioru w całym świecie; ile wynosił zbiór w świecie?
16. W r. 1932 zmarło w miastach w Polsce, liczących ponad

100 000 mieszkańców, 40 033 ludzi, co daje 11,9% liczby mieszkańców tych miast. Ile wynosiła ta liczba?

17. W r. 1931 wynosił tonnaż floty handlowej W. Brytanji 20 303 000 tonn rej., co stanowiło 29% ogólnego tonnażu floty handlowej w świecie; ile wynosił ten tonnaż?

18. W r. 1930 wydobyto w Polsce 37 500 000 tonn węgla, co dało 3,1% światowej produkcji; ile wynosiła światowa produkcja? Ile wyprodukowały Stany Zjednoczone, a ile W. Brytanja, jeżeli udział Stanów Zjednoczonych w światowej produkcji wynosił 39,9%, a W. Brytanji 20,4%?

19. W r. 1930/31 wynosiła produkcja cukru w Polsce 785 000 tonn, co stanowiło 6,6% światowej produkcji buraczanego cukru; ile wynosiła światowa produkcja tego cukru?

20. W r. 1930/31 wynosiła produkcja cukru trzcinowego w Japonji 919 000 tonn, co stanowiło 5,3% światowej produkcji tego cukru; ile wynosiła światowa produkcja cukru trzcinowego?

21. Kupiec, udzieliwszy 8% rabatu, wziął za towar o 96 *zł* mniej, niż byłby otrzymał bez rabatu; ile policzył za towar?

22. Ktoś, płacąc za towar gotówką, otrzymał $7\frac{1}{2}$% skonta, wskutek czego zapłacił o 36 *zł* mniej, niż należałoby się za towar; ile zapłacił?

23. Fabrykant, kupiwszy 100 tonn węgla, otrzymał 8% rabatu, co wyniosło 480 *zł*. Ponieważ płacił gotówką, udzielono mu jeszcze od reszty 5% skonta; ile zapłacił?

Obliczanie procentu

Jakim procentem kwoty 68 *zł* jest kwota 14 *zł*?
Ponieważ 1% z 68 *zł* jest $\frac{68}{100}$ *zł* więc pytamy się

$$? \cdot \tfrac{68}{100}\ zł = 14\ zł.$$

Stąd szukany procent wynosi

$$14 : \tfrac{68}{100} = 14 \cdot \tfrac{100}{68} = 20{,}58\ldots$$

A więc procent wynosi w przybliżeniu 20,6%.

Zadanie powyższe moglibyśmy jeszcze inaczej rozwiązać, a mianowicie: Pytamy się najpierw, jakim ułamkiem kwoty 68 *zł* jest 14 *zł*. Pytanie to zapisujemy ? z 68 *zł* = 14 *zł*, czyli ? · 68 *zł* = 14 *zł*.

Szukany ułamek wynosi $\frac{14}{68} = 0{,}2058\ldots$

A więc: $14\ zł = \frac{14}{68}$ z $68 = \frac{\frac{14}{68} \cdot 100}{100}$ z $68 = \frac{20{,}58}{100}$ z 68, czyli szukany procent wynosi w przybliżeniu 20,6%.

Zadania

1. Jaki procent:

a) liczby	50	wynosi	7;	*b)* liczby	10	wynosi	2;
c) „	80	„	32;	*d)* „	90	„	18;
e) „	75	„	9;	*f)* „	400	„	120;
g) „	550	„	198;	*h)* „	320	„	128?

2. Jaki procent:

a) liczby	5	wynosi	15;	*b)* liczby	9	wynosi	900;
c) „	$4\frac{1}{8}$	„	66;	*d)* „	7,2	„	$14\frac{2}{5}$;
e) „	$2\frac{2}{3}$	„	8,8;	*f)* „	8,5	„	$1\frac{1}{2}$?

3. Jaki promil:

a) liczby	40	wynosi	0,2;	*b)* liczby	45	wynosi	0,09;
c) „	1,5	„	$4\frac{1}{2}$;	*d)* „	600	„	$2\frac{2}{5}$?

4. Jaki to jest procent z 200 *zł*: 5 *zł*, 10 *zł*, 15 *zł*, 25 *zł*, 30 *zł*, 42 *zł*, 48 *zł*, 73 *zł*, 32 *zł* 50 *gr*?
5. Jaki stanowi procent 15 *zł* z : 30 *zł*, 75 *zł*, 150 *zł*, 172 *zł* 50 *gr*, 330 *zł*.
6. Jaki to jest procent z 3 *kg*: 12 *g*, 246 *g*, 795 *g*, $1\frac{1}{2}$ *kg*; 4,5 *kg*?
7. Jaki to jest promil z 2 *km*: 5 *m*, 48 *m*, 127 *m*; 1,4 *m*, $9\frac{1}{2}$ *m*?
8. Kupiec zapłacił za towar 2500 *zł*, a sprzedał go za 3000 *zł*; jaki % ceny kupna zyskał kupiec?
9. Kupiec sprowadził 240 *kg* jabłek, z czego 12 *kg* okazało się zepsutych; jaki % był zepsutych jabłek?
10. Towar waży brutto 84 *kg*; tara wynosi 2,1 *kg*. Jaki procent ciężaru brutto wynosi ciężar netto?

11. Kupiono kamienicę za 80 000 *zł*. Na remont jej wydano 20% ceny kupna, poczem sprzedano ją za 90 000 *zł*. Ile stracono i jaki to procent wyłożonego kapitału?
12. W r. 1931 wynosił kurs dolara 8,9 *zł*, zaś w listopadzie 1933 r. 5,6 *zł*. Jaki procent swej pierwotnej wartości stracił dolar?
13. Produkcja cukru w świecie wynosiła w roku 1930/31, 29 032 000 tonn; z tego przypada na cukier buraczany 11 807 000 tonn, a reszta na cukier trzcinowy.

    a) Jaki % ogólnej produkcji stanowił cukier trzcinowy?

    b) Polska wyprodukowała w 1930/31 r. 6,6% światowej produkcji cukru buraczanego. Jaki % ogólnej światowej produkcji cukru wyprodukowała?
14. Produkcja ziemniaków w świecie w roku 1930 wynosiła w miljonach *q* 1896,4, z czego przypada na Polskę w miljonach *q* 309. Jaki to procent światowej produkcji ziemniaków?
15. Powierzchnia kuli ziemskiej wynosi okrągło 570 000 000 km^2, z czego przypada na lądy 148 900 000, a reszta na oceany. Oblicz, jaki % powierzchni kuli ziemskiej zajmują lądy, a jaki oceany?
16. W r. 1931 wydobyto w świecie 1044 miljonów tonn węgla, z czego przypada na Polskę 38,3 miljonów tonn. Jaki % wydobytego węgla przypada na Polskę?
17. W r. 1931 ogólny tonnaż floty handlowej w świecie wynosił 70 131 000 tonn rejestr., z czego przypada na W. Brytanję 20 303 000 tonn rejestr., na Stany Zjednoczone 13 642 000 tonn rejestr. Oblicz % ogólnego tonnażu, który przypada na każde z tych państw!
18. W r. 1930 wyprodukowano w świecie 636,4 tonn złota, z czego przypada na kraje południowej Afryki 333,3 tonn; jaki to % światowej produkcji?
19. Dochody z pewnego przedsiębiorstwa wynosiły w 1931 r. 15 000 *zł*, w r. 1932 były o 20% niższe, a w r. 1933 wy-

niosły znów 15 000 *zł*. O ile % podniosły się dochody w r. 1933, w porównaniu z dochodami r. 1932?

20. Kupiec sprzedał 150 *kg* mydła, którego 1 *kg* kosztował 1 *zł* 20 *gr* z pewnym rabatem, wynoszącym 166 *zł* 50 *gr*; ile % wynosił rabat?
21. Drukarnia zakupiła papieru za 1250 *zł*, a że płaciła gotówką, zapłaciła tylko 1150 *zł*; ile % skonta otrzymała?
22. Kupiec sprowadził towaru za 1800 *zł*, a ponieważ płacił gotówką, otrzymał 5% skonta. Towar ten sprzedał za 1900 *zł*. Jaki % wyłożonych pieniędzy zarobił?
23. Kupiec sprzedał towar za 1512 *zł*, zarobiwszy na nim 8% ceny kupna; ile kosztował go towar?
    Zauważ, że cena sprzedaży wynosi 100% + 8%, czyli 108% ceny kupna!
24. Kupiec sprzedał towar za *a)*: 679 *zł*, *b)* 2540 *zł*, *c)* 135 *zł*, przyczem poniósł stratę, wynoszącą *a)* 3%, *b)* 4%, *c)* 1% ceny kupna; ile zapłacił za towar?

    Uwaga: Cena sprzedaży wynosi w *a)*: 100% — 3% = 97% ceny kupna.

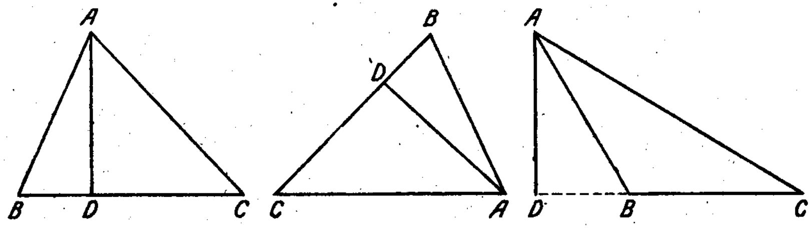
25. Za towar, który podrożał o 6%, zapłacono 624 *zł*; ile kosztował ten towar przed podrożeniem?
26. Czynsz za mieszkanie, po obniżeniu o 20%, wynosi 68 *zł*; ile wynosił czynsz przed obniżeniem?

Powtórzenie wiadomości o trójkącie i wielokącie

Trójkąt

Narysujmy trójkąt *ABC* (rys. 14).

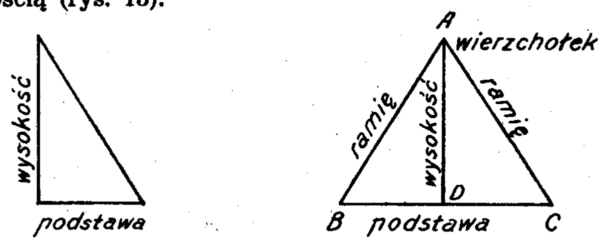
Z wierzchołka *A* poprowadzimy odcinek *AD*, prostopadły do przeciwległego boku *BC*, względnie jego przedłużenia. Odcinek ten nazywamy **wysokością**, bok zaś *BC* **podstawą, przynależną do tej wysokości** (rys. 14).



Rys. 14.

W każdym trójkącie mamy trzy wysokości i trzy podstawy (odpowiednio do nich należące).

Jeżeli w trójkącie prostokątnym przyjmujemy jedną z przyprostokątnych za podstawę, to druga przyprostokątna będzie wysokością (rys. 15).



Rys. 15.

Trójkąt, w którym dwa boki są równe, nazywamy równoramiennym. Boki równe nazywamy ramionami. W trójkącie równoramiennym ABC (rys. 15) boki AB i AC są ramionami. Trzeci bok BC nazywamy krótko podstawą trójkąta równoramiennego. Wierzchołek A, leżący naprzeciw podstawy, nazywamy wierzchołkiem trójkąta równoramiennego. Wysokość poprowadzoną z tego wierzchołka nazywamy wysokością trójkąta równoramiennego.

Wytnijmy z papieru trójkąt równoramienny (rys. 15) i zegnijmy trójkąt we dwoje wzdłuż wysokości. Przekonamy się, że trójkąty prostokątne (na które wysokość podzieliła trójkąt równoramienny) nakryją się.

Kąt przy A nakryje więc kąt przy B, a zatem: $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.

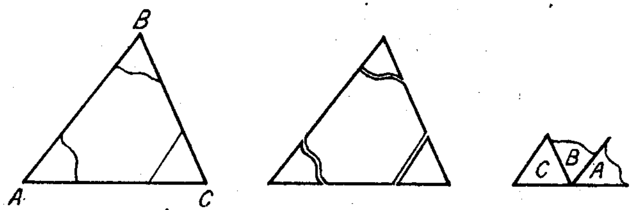
Widzimy zatem, że w trójkącie naprzeciw równych boków leżą równe kąty.

Naodwrót: jeśli przekonamy się, że dwa kąty trójkąta są sobie równe, to przeciwległe boki są też równe.

Wynika stąd, że: w trójkącie równobocznym wszystkie kąty są sobie równe. Naodwrót, jeśli w jakimś trójkącie wszystkie kąty są sobie równe, to trójkąt jest trójkątem równobocznym.

Suma kątów trójkąta

Obliczmy sumę kątów trójkąta. Odetnijmy trzy kąty trójkąta (rys. 16) i utwórzmy ich sumę, jak na rys. 16.



Rys. 16.

Przekonamy się, że ich suma wynosi 180°. Ten sam wynik otrzymalibyśmy, mierząc kąty trójkąta zapomocą kątomierza i obliczając ich sumę. A więc:

Suma kątów w każdym trójkącie wynosi 180°.

Uwaga. W trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe. Ponieważ ich suma wynosi 180°, więc każdy z nich ma po $180^\circ : 3 = 60^\circ$.

Zadania

1. Narysuj trójkąt i wszystkie jego wysokości! Powtórz to zadanie w przypadku, gdy jeden z kątów trójkąta jest rozwarty!
2. Narysuj kilka różnych trójkątów o wspólnej podstawie i o różnych wysokościach!

3. Narysuj trójkąt, którego podstawa ma 5 *cm*, wysokość 4 *cm*, przyczem wysokość ta pada w odległości 2 *cm* od jednego z końców podstawy!
4. Narysuj trójkąt i podziel go na dwa trójkąty prostokątne!
5. Jedna przyprostokątna ma 6 *cm*, druga 8 *cm*; ile ma przeciwprostokątna? Odczytaj z rysunku!
6. Jedna przyprostokątna ma 7 *cm*, a kąt przyległy do tej przyprostokątnej 60^0; ile ma druga przyprostokątna, a ile przeciwprostokątna? Odczytaj z rysunku!
7. Wytnij z papieru dwa równe trójkąty prostokątne i złóż z nich raz trójkąt równoramienny, drugi raz prostokąt!
8. Wytnij z papieru dwa trójkąty prostokątne, w których obie przyprostokątne wynoszą po 4 *cm*, dwa trójkąty prostokątne, w których obie przyprostokątne wynoszą po 3 *cm*, i cztery trójkąty prostokątne o przyprostokątnych 3 *cm* i 4 *cm* i złóż z tych trójkątów kwadrat o boku 7 *cm*!
9. Narysuj trójkąt równoramienny, znając podstawę: *a)* 3 *cm*; *b)* 4,5 *cm*; *c)* 6,5 *cm* i kąt przy podstawie: *a)* 40^0; *b)* 60^0; *c)* 45^0!
10. Narysuj trójkąt równoboczny o boku: *a)* 3 *cm*; *b)* 4 *cm*; *c)* 3,5 *cm*; *d)* 4,5 *cm*!

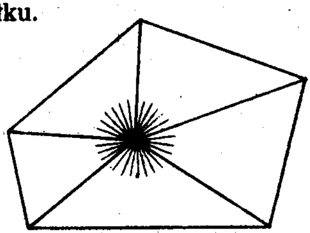
    Uwaga. Narysuj kąt 60^0 i na jego ramionach odetnij od wierzchołka boki trójkąta równobocznego!
11. Narysuj trójkąt równoboczny o obwodzie 13 *cm* 5 *mm* i zmierz jego wysokość!
12. *a)* Z 4 równych trójkątów równobocznych złóż nowy trójkąt równoboczny! Ile razy bok dużego trójkąta będzie większy od boku małego trójkąta? *b)* Powtórz powyższe zadanie, biorąc 9 równych trójkątów równobocznych!
13. Narysuj 3 odcinki o długości 37 *mm*, wychodzące z jednego punktu tak, aby co dwa sąsiednie zawierały kąt 120^0 i połącz wolne końce odcinkami! Jaki trójkąt otrzymasz?
14. Narysuj dowolny trójkąt, zmierz wszystkie jego kąty i dodaj!

15. W trójkącie suma dwóch kątów wynosi: *a)* 110°; *b)* 135°; *c)* 98°; *d)* 80°; oblicz trzeci kąt!
16. W trójkącie równoramiennym kąt u podstawy wynosi: *a)* 42°; *b)* 39°; *c)* 60°; oblicz pozostałe kąty trójkąta!
17. W trójkącie równoramiennym kąt u wierzchołka wynosi: *a)* 30°; *b)* 60°; *c)* 90°; oblicz pozostałe kąty trójkąta!
18. W trójkącie prostokątnym jeden z. kątów wynosi: *a)* 30°; *b)* 60°; *c)* 45°; *d)* 47°; oblicz pozostałe kąty!
19. Ile wynosi suma kątów ostrych w trójkącie prostokątnym?
20. W trójkącie prostokątnym wynosi jeden kąt 45°; co możesz powiedzieć o przyprostokątnych?
21. Narysuj: *a)* trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 *cm* i 4 *cm*, *b)* dowolny trójkąt o podstawie 5 *cm* i wysokości do niego należącej, równej 4 *cm*, *c)* trójkąt równoramienny o podstawie 5 *cm* i wysokości do niej należącej, równej 4 *cm*. Zmierz, który z tych trójkątów ma najmniejszy obwód!

Wielokąt

1. Narysuj czworokąt *a)* wypukły, *b)* wklęsły; oznacz jego boki i kąty!
2. Narysuj dowolny *a)* sześciokąt, *b)* ośmiokąt i wszystkie jego przekątne!
3. Narysuj czworokąt *a)* wypukły, *b)* wklęsły. Podziel go przekątną na dwa trójkąty i oblicz w ten sposób sumę kątów czworokąta!
4. Narysuj *a)* sześciokąt, *b)* ośmiokąt (wklęsły), w którym każde dwa sąsiednie boki są do siebie prostopadłe. Zaznacz kąty tego wielokąta i oblicz ich sumę!
5. Podziel przekątną *a)* sześciokąt na dwa czworokąty, *b)* siedmiokąt na czworokąt i pięciokąt!
6. Narysuj dowolny sześciokąt i przerysuj go obok, uważając boki tego sześciokąta za odcinki linji łamanej. Zrób to dwoma sposobami: *a)* przy pomocy przenoszenia odcinków i kątów, *b)* przy pomocy rzutów!

7. Narysuj pięciokąt wypukły i przerysuj go zapomocą rzutów na jedną przekątną!
8. Na rys. 17 mamy pięciokąt, rozbity na 5 trójkątów o wspólnym wierzchołku.



Rys. 17.

a) Ile wynosi suma kątów tych pięciu trójkątów?
b) Ile wynosi suma kątów zacieniowanych?
c) Ile zatem wynosi suma kątów pięciokąta?
d) Oblicz w ten sposób sumę kątów *a)* sześciokąta, *b)* siedmiokąta, *c)* dziesięciokąta!

Pola

Metryczne jednostki miary pola

1. Ile *a)* dcm^2, *b)* cm^2, *c)* mm^2 zawiera 1 cm^2?
2. Ile *a)* cm^2, *b)* mm^2, zawiera 1 dcm^2?
3. Ile *a)* m^2, *b)* dcm^2 zawiera 1 *a*?
4. Ile *a)* *a*, *b)* m^2 zawiera 1 *ha*?
5. Ile *a)* *ha*, *b)* *a*, *c)* m^2 zawiera 1 km^2?
6. Ile m^2 zawiera: *a)* 6 *a*, *b)* $8\frac{1}{2}$ *a*, *c)* $11\frac{1}{4}$ *a*, *d)* 7,4 *a* *e)* 24,65 *a*?
7. Ile *a* zawiera: *a)* 5 km^2, *b)* $3\frac{1}{2}$ km^2, *c)* $1\frac{1}{8}$ km^2, *d)* 2,3 km^2, *e)* 0,4215 km^2?
8. Ile *ha* zawiera: *a)* 0,4 km^2, *b)* $2\frac{1}{5}$ km^2, *c)* 7,3 km^2?
9. Napisz, jaką częścią *a)* *ha* jest 1 m^2, *b)* km^2 jest 1 *ha*!
10. Zamień na *a*: 25 *ha* 17 *a*, 4 *ha* 8 *a*, 1 km^2 7 *ha* 12 *a*, 3 km^2 48 *ha* 3 *a*!

Pole prostokąta

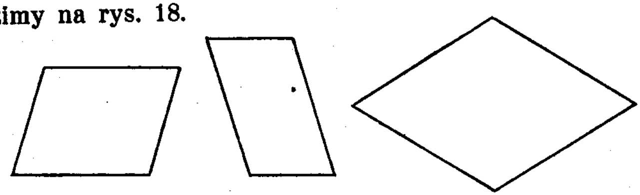
1. Boki prostokąta wynoszą: *a)* 3 *cm* i 5 *cm*; *b)* 4 *cm* i 7 *cm*; *c)* 8 *dcm* i 23 *dcm*; *d)* 12 *m* i 15 *m*; oblicz pole prostokąta!
2. Boki prostokąta wynoszą: *a)* $\frac{3}{4}$ *m* i 2 *m*, *b)* $\frac{5}{6}$ *m* i 4 *m*, *c)* $2\frac{1}{2}$ *dcm* i 6 *dcm*, *d)* $\frac{3}{10}$ *m* i $\frac{7}{10}$ *m*, *c)* $\frac{4}{5}$ *m* i $3\frac{1}{4}$ *m*; oblicz pole prostokąta!
3. Boki prostokąta wynoszą: *a)* 2,5 *m* i 4,6 *m*; *b)* 5,3 *cm* i 8,7 *cm*; *c)* 7,14 *dcm* i 12,52 *dcm*; oblicz pole prostokąta!
4. Bok kwadratu wynosi: *a)* 2 *cm*, *b)* $\frac{1}{5}$ *m*, *c)* $2\frac{1}{4}$ *m*; oblicz pole kwadratu!
5. Obwód kwadratu wynosi: *a)* 44 *cm*, *b)* $3\frac{2}{5}$ *dcm*, *c)* 4,5 *m*, *d)* 0,42 *km*; oblicz pole kwadratu!
6. Obwód prostokąta wynosi: *a)* 28 *cm*, *b)* 4,6 *dcm*, *c)* $9\frac{1}{2}$ *m*, a jeden z jego boków: *a)* 8 *cm*, *b)* 1,2 *dcm*, *c)* $2\frac{1}{4}$ *m*; oblicz pole prostokąta!
7. Pole prostokąta wynosi:
   a) 72 m^2; *b)* 319 m^2; *c)* $4\frac{1}{2}$ *a*; *d)* 7,4 *ha*; *e)* 6,28 *a*; *f)* $5\frac{1}{4}$ m^2, jeden zaś z boków: *a)* 18 *m*; *b)* 55 *m*; *c)* $53\frac{1}{3}$ *m*; *d)* 0,64 *km*; *e)* $81\frac{1}{4}$ *m*; *f)* 2,3 *m*; ile wynosi drugi bok?
8. Ile *a* ma parcela prostokątna o bokach 235 *m* i 318 *m*?
9. Gospodarz miał pole w kształcie prostokąta o bokach 35 *m* i 64 *m*. Z tego pola pozostawił sobie plac w kształcie kwadratu o boku 35 *m*, a resztę sprzedał sąsiadowi, licząc po 18,5 *zł* za 1 *a*; ile *zł* otrzymał?
10. Ile wynosi bok kwadratu, o polu: *a)* 16 m^2, *b)* 25 dcm^2, *c)* 81 cm^2, *d)* 1 *a*, *e)* 1,44 *a*?
11. Stół kwadratowy o boku 0,9 *m* przykryty jest serwetą, która zwisa dokoła stołu na 0,25 *m*; jakie jest pole tej serwety?
12. Jak długi jest bok kwadratu, którego pole równa się polu prostokąta o wymiarach: *a)* 4 *cm* i 9 *cm*, *b)* 9 *cm* i 16 *cm*?
13. Zamieniono pole w kształcie prostokąta o wymiarach 156 *m* i 75 *m* w cenie 3,7 *zł* za 1 m^2 na pole w cenie 2,5 *zł* za 1 m^2; ile pola na zamianie zyskano?

14. Podłogę sali o długości 9 *m*, szerokości zaś 6,25 *m* wyłożono deseczkami kwadratowemi o boku 2,5 *dcm*; ile deseczek zużyto na pokrycie całej podłogi?
15. Ścianę o wymiarach 6,5 *m* i 3,8 *m* pokryto tapetami o szerokości 25 *cm*; ile tapet zużyto?
16. Kwadrat o boku 0,25 *m* podzielono równoległą do jednego boku na dwa prostokąty, z których jeden ma pole 225 cm^2; podaj wymiary obu prostokątów!
17. Puszka lakieru wystarcza na polakierowanie 18 m^2; ile puszek potrzeba na podwójne polakierowanie podłogi o wymiarach $6\frac{1}{2}$ *m* i 10 *m*?

Równoległobok

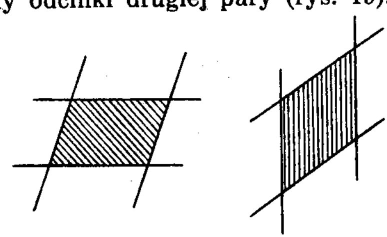
Określenie

Czworokąt, którego przeciwległe boki są równoległe, nazywa się **równoległobokiem**. Przykłady równoległoboku widzimy na rys. 18.



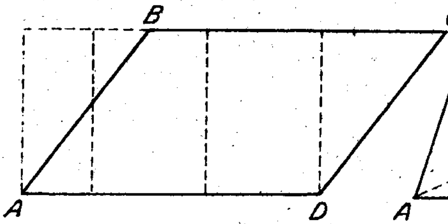
Rys. 18.

Możemy otrzymać równoległobok, kreśląc dwie pary odcinków równoległych tak, aby odcinki równoległe pierwszej pary przecinały odcinki drugiej pary (rys. 19).

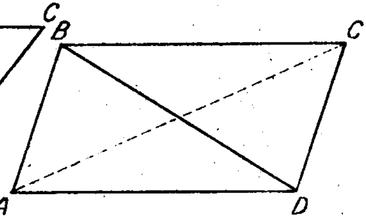


Rys. 19.

Niech będzie dany równoległobok $ABCD$, jak na rys. 20. Poprowadźmy z dowolnego punktu boku AD prostopadłą do tegoż boku, aż do przecięcia się z bokiem BC lub jego przedłużeniem. Prowadząc kilka takich odcinków, przekonamy się, że wszystkie są sobie równe. Którykolwiek z nich nazywamy wysokością równoległoboku, odpowiadającą podstawie AD.



Rys. 20.



Rys. 21.

Wytnijmy z kartonu równoległobok $ABCD$ i przetnijmy go wzdłuż przekątnej na dwa trójkąty ABD i CDB (rys. 21). Nakładając na siebie te trójkąty, przekonamy się, że są równe. Zatem $\sphericalangle A$ nakryje się z $\sphericalangle C$, więc $\sphericalangle C = \sphericalangle A$. Zauważymy również, że bok AB nakryje się z CD, więc $AB = CD$, również bok AD nakryje się z CB, więc $AD = CB$.

Podobnie, przecinając czworokąt wzdłuż przekątnej AC, przekonamy się, że $\sphericalangle B = \sphericalangle D$.

Widzimy stąd, że w równoległoboku przeciwległe boki i kąty są sobie równe.

Zadania

1. Narysuj równoległobok i porównaj przeciwległe boki i przeciwległe kąty!
2. Narysuj równoległobok, którego dwa sąsiednie boki mają *a)* 5 *cm* i 6 *cm*; *b)* 4 *cm* i 7 *cm*; *c)* 2 *cm* i 4 *cm*, kąt zaś między niemi zawarty wynosi: *a)* 30°, *b)* 60°, *c)* 45°!
3. Jaka jest wysokość równoległoboku, którego sąsiednie boki wynoszą 36 *m* i 45 *m*, kąt zaś między niemi 45°?

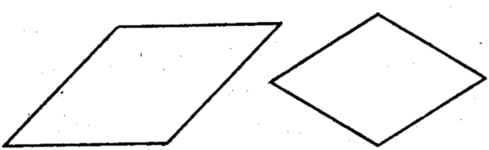
(Odczytaj wysokość z planu równoległoboku w skali 1 : 1000!)

4. Narysuj równoległobok, którego podstawa wynosi 5 *cm*, wysokość 4 *cm*, a jeden z kątów przypodstawnych 45°!
5. Połącz w dowolnym czworokącie środki przyległych boków odcinkami i przekonaj się, że otrzymany czworokąt jest równoległobokiem!
6. Jedna parcela jest prostokątem o podstawie 20 *m* i wysokości 8 *m*, druga równoległobokiem o tej samej podstawie i wysokości, przyczem kąt ostry między dwoma bokami wynosi 60°. Oblicz obwód prostokąta i zmierz obwód drugiej parceli (na planie w skali 1 : 200)! Ile kosztowałoby ogrodzenie każdej z parcel, jeżeli 1 *m* ogrodzenia kosztuje 8 *zł*?
7. Narysuj dowolny równoległobok oraz prostokąt o tej samej podstawie i wysokości. Zmierz obwody! Który obwód jest większy?

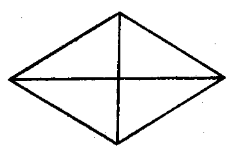
Romb

Równoległobok, w którym wszystkie cztery boki są równe, nazywa się *rombem* (rys. 22).

Wycinając z papieru romb i zginając go we czworo wzdłuż przekątnych, otrzymamy cztery równe trójkąty prostokątne



Rys. 22.



Rys. 23.

(rys. 23). Widzimy stąd, że: *w rombie przekątne są do siebie prostopadłe i połowią się wzajemnie.*

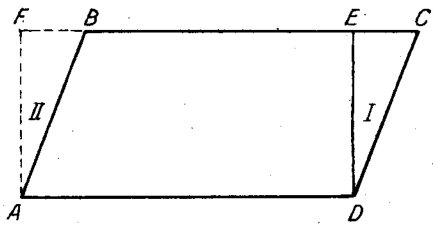
Zadania

1. Narysuj romb, którego jeden bok wynosi 5 *cm*, a jeder z kątów 120°!

2. Narysuj romb o przekątnych 8 *cm* i 10 *cm*!
3. Połącz w rombie środki przyległych boków odcinkami, a w otrzymanym czworokącie zmierz boki i kąty! Co to za czworokąt?
4. Nakreśl romb, a obok narysuj go w skali 1 : 3!
5. Narysuj romb, którego obwód wynosi 42 *cm*, a jeden z kątów 60°!
6. Narysuj dowolny romb i kwadrat o tym samym boku; która z figur ma większą wysokość?

Pole równoległoboku

Niech będzie dany równoległobok *ABCD*, jak rys. 24. Poprowadźmy z punktu *D* wysokość, należącą do podstawy *AD*.



Rys. 24.

Przetnijmy teraz wzdłuż tej wysokości nasz równoległobok i przesuńmy trójkąt I w położenie II. Otrzymamy w ten sposób prostokąt *ADEF*, który ma równą powierzchnię z naszym równoległobokiem. Prostokąt ten i równoległobok mają równą podstawę i wysokość.

Zatem: P o w i e r z c h n i a r ó w n o l e g ł o b o k u j e s t r ó w n a p o w i e r z c h n i p r o s t o k ą t a, m a j ą c e g o t ę s a m ą p o d s t a w ę i t ę s a m ą w y s o k o ś ć, c o d a n y r ó w n o l e g ł o b o k.

Aby więc obliczyć, ile np. centymetrów kwadratowych zawiera pole równoległoboku, należy pomnożyć przez siebie liczby, wyrażające w *cm* długości podstawy i wysokości.

Należy uważać przy tworzeniu iloczynu, dającego miarę pola równoległoboku, aby liczby wyrażały długości podstawy i wysokości w tych samych jednostkach.

Zadania

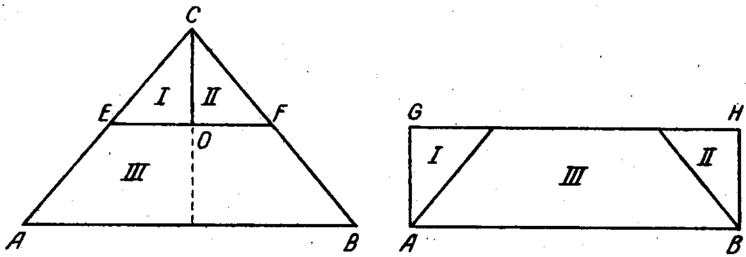
1. Wytnij równoległobok i podziel go tak na części, aby z nich dał się złożyć prostokąt o tej samej podstawie i wysokości!
2. Narysuj równoległobok, którego podstawa wynosi 3 *cm*, wysokość 2 *cm*, a jeden z kątów przypodstawnych 30°! Zamień go na prostokąt o tej samej powierzchni!
3. Wytnij z papieru 4 równe trójkąty prostokątne (nierównoramienne) i złóż z nich prostokąt i równoległobok! Co powiesz o powierzchniach tych czworokątów?
4. Z sześciu równych równoległoboków złóż kilka figur o równych polach!
5. Oblicz pole równoległoboku, którego podstawa równa się: *a)* $\frac{4}{5}$ *dcm*, *b)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 8,5 *m*, *d)* 14,2 *m*; wysokość zaś: *a)* $\frac{3}{4}$ *dcm*, *b)* $2\frac{1}{4}$ *cm*, *c)* 15,8 *m*, *d)* 6,3 *m*.
   Uwaga: w zadaniach *c)* i *d)* liczby są przybliżone!
6. Oblicz podstawę równoległoboku, którego pole wynosi: *a)* 28,62 km^2, *b)* 60 cm^2, *c)* $8\frac{4}{5}$ cm^2, *d)* 45,54 m^2, wysokość zaś: 7,2 *km*, *b)* 1,2 *cm*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *d)* 7,2 *m*.
7. Oblicz pole równoległoboku, którego podstawa wynosi 5 *cm*, drugi bok 2 *cm*, a jeden z kątów przypodstawnych 60°. (Wysokość zmierz z rysunku).
8. Jaka jest wysokość równoległoboku, którego pole wynosi: *a)* $6\frac{3}{5}$ dcm^2, *b)* 115,5 m^2, *c)* $85\frac{1}{2}$ km^2, *d)* 2,8 cm^2, *e)* $\frac{5}{8}$ m^2, podstawa zaś: *a)* 3 *dcm*, *b)* 15,4 *m*, *c)* $11\frac{1}{4}$ *km*, *d)* 3,5 *cm*, *e)* 1,6 *m*?
9. Przez pole w kształcie równoległoboku, o podstawie 85,6 *m* i wysokości 62,5 *m*, poprowadzono równolegle do podstawy drogę o szerokości 2,6 *m*, resztę zaś sprzedano po 55 *zł* za *ar*; jaką kwotę ze sprzedaży uzyskano?
10. Wytnij z papieru romb, którego przekątne wynoszą 4 *cm*

i 6 *cm*, przetnij wzdłuż tych przekątnych i złóż z otrzymanych trójkątów prostokąt! Oblicz pole tego rombu!

11. Obwód rombu wynosi 20 *m*, wysokość zaś 4 *m* 8 *dcm*; oblicz pole!
12. Narysuj *a)* kilka równoległoboków, *b)* kilka rombów i oblicz pole każdej z tych figur w mm^2! (Podstawy i wysokości zmierz miarką)!
13. Jakie jest pole równoległoboku, którego boki wynoszą 58 *m* i 96 *m*, kąt zaś między niemi 60°? (Wysokość odczytaj z planu tego równoległoboku w skali 1 : 1000!).

Pole trójkąta

Niech będzie dany trójkąt *ABC*, jak na rys. 25. Z wierzchołka *C* poprowadźmy wysokość, należącą do podstawy *AB*.



Rys. 25.

Przez środek *O* tej wysokości nakreślmy równoległą do podstawy. Rozetnijmy teraz trójkąt na trzy części wzdłuż odcinka *EF* i *OC*. Otrzymamy w ten sposób dwa trójkąty *I* i *II* oraz czworobok *III*. Przełóżmy teraz trójkąty *I* i *II* jak wskazuje rys. 25. Otrzymamy prostokąt *ABHG*. Ponieważ trójkąt *ABC* składa się z trzech części, z których złożyliśmy ten prostokąt, zatem pole prostokąta równa się polu trójkąta. Prostokąt *ABHG* ma tę samą podstawę, co nasz trójkąt, a wysokość o połowę mniejszą.

Zatem: **Powierzchnia trójkąta równa się powierzchni prostokąta, mającego tę samą podstawę i o połowę mniejszą wysokość.**

Aby więc obliczyć, ile np. centymetrów kwadratowych zawiera pole trójkąta, należy obliczyć połowę iloczynu dwóch liczb, wyrażających długości podstawy i wysokości w *cm*.

W trójkącie prostokątnym możemy wziąć jako podstawę jedną, a jako wysokość drugą przyprostokątną.

Uwaga. Podobnie jak poprzednio, należy przy obliczaniu pola trójkąta wyrazić długości jego podstawy i wysokości w tych samych jednostkach.

Zadania

1. Wytnij z papieru trójkąt i przetnij go na takie trzy części, by można z nich złożyć prostokąt o podstawie równej podstawie trójkąta.
2. Przetnij trójkąt równoramienny tak na dwie części, aby z nich dał się złożyć prostokąt!
3. Ile wynosi pole trójkąta, którego podstawa równa się: *a)* 5 *cm*, *b)* 9 *cm*, *c)* $2\frac{3}{4}$ *cm*, *d)* 3,45 *m*, wysokość zaś: *a)* 6 *cm*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* $1\frac{1}{4}$ *cm*, *d)* 2,8 *cm*?
4. Ile wynosi pole trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne równają się: *a)* 5 *cm* i 8 *cm*, *b)* 2,3 *cm* i $5\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 9,7 *m* i 21,4 *m*, *d)* 4,3 *m* i 18,5 *m*.
   Uwaga. Liczby w zadaniu *c)* i *d)* są przybliżone.
5. Narysuj kilka trójkątów i oblicz ich pola; wymiary odczytaj z rysunku!
6. Pole trójkąta wynosi: *a)* 32 m^2; *b)* 25,4 *a*; *c)* 3,9 *ha*; *d)* 1 morg; podstawa zaś: *a)* 8 *m*; *b)* 42 *m*; *c)* 180 *m*; *d)* 140 *m*. Oblicz wysokość!
7. Pole trójkąta wynosi: *a)* 45 m^2; *b)* 1 *a*; *c)* 1 *ha*; *d)* 1 morg, wysokość zaś: *a)* 10 *m*; *b)* 25 *m*; *c)* 100 *m*; *d)* 70 *m*. Oblicz podstawę!
8. Pole w kształcie równoległoboku, o podstawie 128 *m* i wysokości 85 *m*, oceniono po 50 *zł* za 1 *a*. Pole to zamie-

niono na łąkę w kształcie trójkąta, licząc po 68 *zł* za 1 ar; jakie jest pole tej łąki? Ile wynosi podstawa, jeśli wysokość ma 100 *m*?

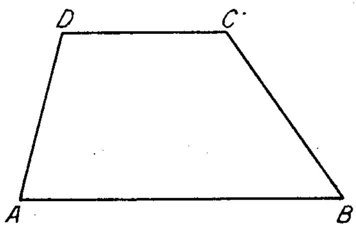
9. Pole kształtu trójkąta o podstawie równej 150 *m* kosztuje 36 000 *zł*. Ile wynosi wysokość tego trójkąta, jeżeli metr kwadratowy kosztuje 4 *zł*? Rysunek w skali 1 : 5000!
10. Gospodarz ma pole w kształcie trójkąta o podstawie 48,5 *m* i wysokości 36,4 *m*. Pole to zamienia z sąsiadem na pole prostokątne o tej samej powierzchni, przyczem jeden bok tego prostokąta wynosi $29\frac{1}{4}$ *m*; jak długi jest drugi bok?
11. Narysuj kilka trójkątów, zmierz podstawy i wysokości w *mm* i oblicz pole każdego z nich!

Trapez

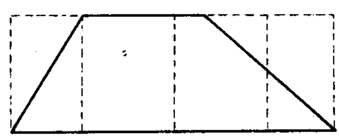
Określenie

Czworokąt, w którym dwa boki są równoległe, pozostałe zaś dwa nie są równoległe, nazywa się **trapezem** (rys. 27).

W trapezie $ABCD$ bok AB jest równoległy do boku CD. Boki równoległe trapezu nazywamy **podstawami**.



Rys. 27.



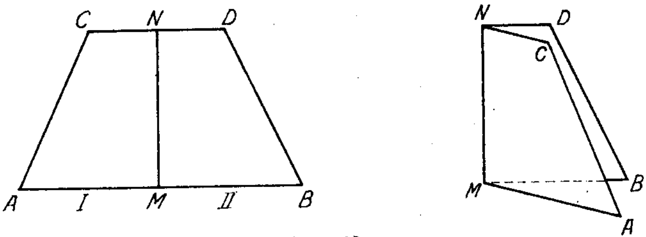
Rys. 28.

Poprowadźmy z dowolnego punktu podstawy trapezu prostopadłą do tej podstawy aż do przecięcia się z drugą podstawą, lub jej przedłużeniem (rys. 28). Prowadząc kilka takich odcinków, przekonamy się, że wszystkie są sobie równe. Którykolwiek z nich nazywamy wysokością trapezu.

Trapez równoramienny

Trapez, w którym nierównoległe boki są równe (rys. 29), nazywa się trapezem **równoramiennym**.

Wytnijmy z papieru trapez równoramienny i zegnijmy go we dwoje wzdłuż prostej, łączącej środki podstaw (rys. 29). Przekonamy się, że trapezy I i II nakryją się.



Rys. 29.

Ponieważ po zgięciu $\sphericalangle A$ nakrywa się z $\sphericalangle B$ (podobnie $\sphericalangle C$ nakrywa się z $\sphericalangle D$), więc w trapezie równoramiennym kąty, leżące przy tej samej podstawie, są sobie równe.

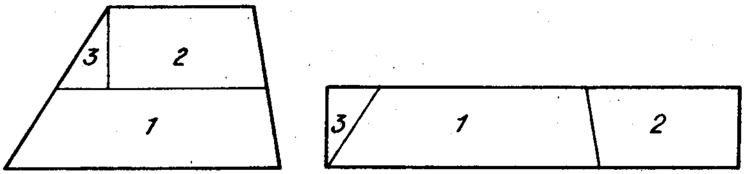
Naodwrót, jeżeli kąty leżące przy jednej z podstaw trapezu są równe, to trapez jest równoramienny.

Zadania

1. Narysuj trapez, w którym podstawa wynosi: *a)* 6 *cm*, *b)* 8 *cm*, *c)* 5,5 *cm*, wysokość: *a)* 2 *cm*, *b)* 3,5 *cm*, *c)* 4,8 *cm*; kąty zaś przypodstawne: *a)* 60° i 80°, *b)* 45° i 90°, *c)* $80^\circ 30'$ i 60°.
2. Narysuj trapez równoramienny, w którym podstawa wynosi: *a)* 4,5 *cm*, *b)* 7 *cm*, *c)* 6,5 *cm*, sąsiedni bok: *a)* 2 *cm*, *b)* 3,4 *cm*, *c)* 2,8 *cm*, kąt zaś między tym bokiem a podstawą: *a)* 60°, *b)* 45°, *c)* $80^\circ 30'$.
3. Narysuj trapez równoramienny, w którym boki równoległe wynoszą: *a)* 8 *cm* i 6 *cm*, *b)* 7 *cm* i 4,5 *cm*, *c)* 6,5 *cm* i 4,5 *cm*, wysokość zaś *a)* 4 *cm*, *b)* 3,5 *cm*, *c)* 2,5 *cm*.
4. Przetnij trapez równoramienny na 2 równe części tak, aby z nich dał się złożyć prostokąt! Rysunek!

Pole trapezu

Na rys. 30 mamy trapez rozcięty na 3 części, z których obok zbudowany jest prostokąt. (Prosta pozioma jest poprowadzona w połowie wysokości równolegle do podstaw trapezu).

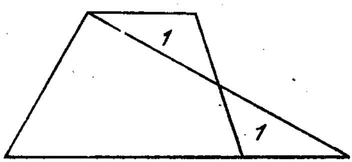


Rys. 30.

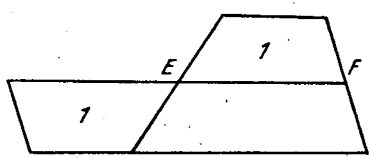
W prostokącie otrzymanym podstawa jest sumą podstaw trapezu, wysokość zaś dwa razy mniejsza, niż w trapezie.

Zatem trapez ma powierzchnię równą powierzchni prostokąta, którego podstawa jest równa sumie obu podstaw trapezu, a wysokość jest dwa razy mniejsza, niż w trapezie.

Na rys. 31 i 32 mamy trapez zamieniony na trójkąt względnie równoległobok o tem samem polu.



Rys. 31.



Rys. 32.

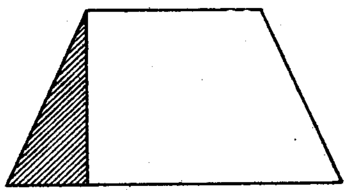
Aby więc obliczyć pole trapezu, np. w *cm*², należy utworzyć połowę iloczynu liczb, wyrażających w *cm* długość sumy obu podstaw i długość wysokości.

Zadania

1. Zamień dowolnie obrany trapez na: *a)* prostokąt, *b)* trójkąt, *c)* równoległobok o równem polu!
2. Oblicz pole trapezu, którego boki równoległe mają: *a)* 10 *cm*

i 6 *cm*, *b)* $8\frac{1}{3}$ *cm* i $5\frac{3}{4}$ *cm*, *c)* 11,25 *dcm* i 8,34 *dcm*, wysokość zaś wynosi: *a)* 4 *cm*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 7,2 *dcm*.

3. Pole trapezu wynosi: *a)* $39\frac{1}{8}$ cm^2, *b)* 0,388 *ha*, *c)* 1,815 *a*, boki zaś równoległe mają: *a)* 4 *cm* i $11\frac{1}{4}$ *cm*, *b)* 112 *m* i 81 *m*, *c)* $14\frac{1}{8}$ *m* i $16\frac{1}{8}$ *m*; oblicz wysokość trapezu! Uwaga: w zadaniu *b)* liczby są przybliżone.
4. Pole kształtu trapezu ma 1 *ha* 71 *a* 70 m^2; wysokość tego trapezu wynosi 85 *m*, a jeden z boków równoległych 112 *m*. Ile wynosi drugi bok równoległy?
5. W trapezie równoramiennym boki równoległe mają 10 *cm* i 5 *cm*, wysokość zaś 4 *cm*. Ile wynosi pole trójkąta zacieniowanego (rys. 33)?

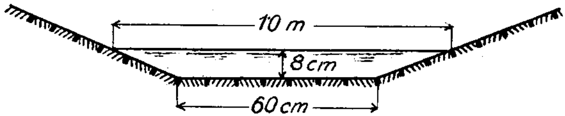


Rys. 33.

6. Trapez, w którym jeden z boków równoległych jest dwa razy dłuższy od drugiego, ma wysokość 48 *m*, pole zaś 18,72 *a*. Oblicz długość każdego z boków równoległych! Zrób rysunek w odpowiedniej skali!
7. Pole w kształcie trapezu oceniono na 4988 *zł*, licząc po 40 *zł* za *ar*. Ile wynosi wysokość tego trapezu, jeśli boki równoległe mają 135 *m* i 155 *m*?
8. Pole trapezu równoramiennego równa się 18,72 *a*, przyczem jeden z boków równoległych jest 2 razy większy od drugiego, wysokość zaś wynosi 48 *m*; oblicz długości boków równoległych! Rysunek w skali 1 : 1000!
9. Pole w kształcie trapezu sprzedano za 5760 *zł*, licząc po 48 *zł* za 1 *a*; wiedząc, że wysokość trapezu wynosiła 80 *m*,

jeden zaś z boków równoległych miał 135 *m*, oblicz długość drugiego boku równoległego!

10. Rowem o przekroju, jak na rys. 34, płynie woda strumieniem, głębokim na 8 *cm*. Ile wody przepływa przez ten

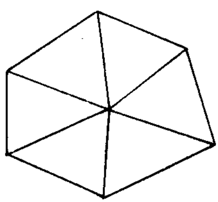


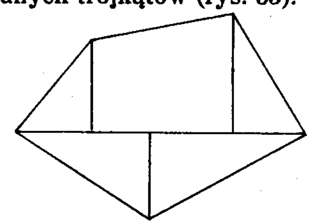
Rys. 34.

przekrój na minutę, jeżeli przez 1 cm^2 przekroju przepływa w ciągu minuty 2 *l* wody?

Pole wielokąta

Chcąc obliczyć pole wielokąta, dzielimy go zazwyczaj na trójkąty i obliczamy sumę pól otrzymanych trójkątów (rys. 35).


Rys. 35.

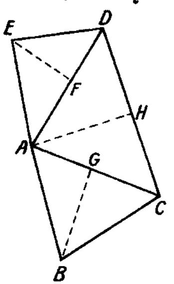

Rys. 36.

W niektórych wypadkach dzielimy wielokąt na trójkąty prostokątne i trapezy (rys. 36).

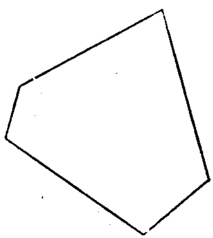
Zadania

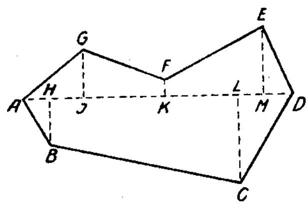
1. Przekątna czworokąta ma długość 157,4 *m* i dzieli ten czworokąt na 2 trójkąty, z których jeden ma wysokość 74,6 *m*, drugi zaś 96,4 *m*, przyczem wysokości te są prostopadłe do przekątnej; oblicz pole tego czworokąta! Rysunek w skali 1 : 500!

2. Oblicz pole chorągiewki, którą otrzymasz, wycinając z prostokąta o bokach 4,5 *cm* i 6,5 *cm* trójkąt równoramienny, którego podstawa ma 4,5 *cm*, wysokość zaś 2 *cm*.
3. Narysuj kwadrat o boku 2,5 *cm* i przy każdym boku trójkąt równoramienny, o wysokości 3,4 *cm*; oblicz pole tej figury (gwiazdy)!
4. Oblicz pole pięciokąta (rys. 37), jeżeli $AC = AD = 5$ *m*, $CD = 6$ *m*, $AH = 4$ *m*, $EF = 2{,}5$ *m*, $BG = 3{,}4$ *m*.
5. Oblicz pole pięciokąta jak na rys. 38, dzieląc go przekątnemi, poprowadzonemi z jednego wierzchołka, na trójkąty i mierząc na rysunku potrzebne wielkości.



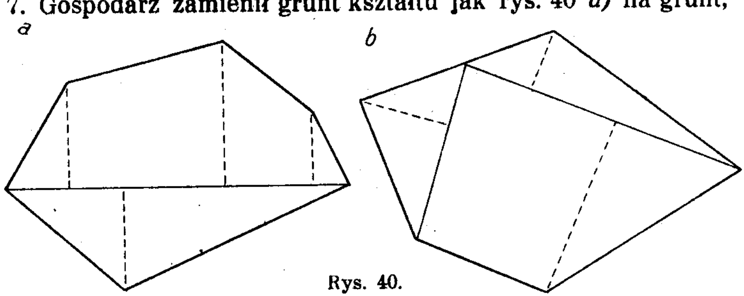
Rys. 37.


Rys. 38.



Rys. 39.

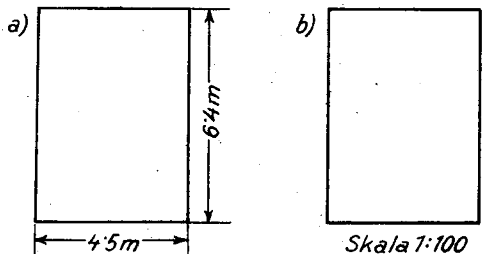
6. Oblicz pole wielokąta (rys. 39), wiedząc, że $AH = 5$ *m*, $HI = 6{,}5$ *m*, $IK = 12{,}2$ *m*, $KL = 11{,}8$ *m*, $LM = 3{,}9$ *m*, $MD = 5{,}5$ *m*, $HB = 8{,}8$ *m*, $IG = 9{,}4$ *m*, $KF = 4{,}7$ *m*, $LC = 15{,}2$ *m*, $ME = 23{,}1$ m.
7. Gospodarz zamienił grunt kształtu jak rys. 40 *a)* na grunt,



Rys. 40.

jak na rys. *b)*; przekonaj się, czy na tej zamianie zyskał pola, czy też stracił?

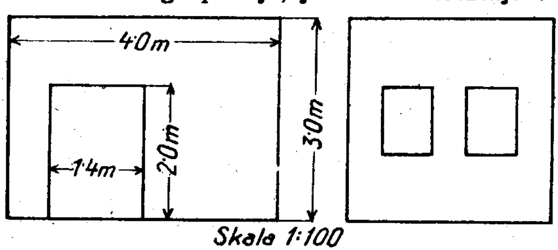
8. Narysuj dowolny wielokąt i przy pomocy podziałki pomierz te wielkości, które będą potrzebne do obliczenia pola tego wielokąta; oblicz to pole!
9. Oblicz pole podłogi, której plan podaje rys. 41 *a)*; powtórz to zadanie, posługując się rys. 41 *b)*. Ile desek 3 *m*



Rys. 41.

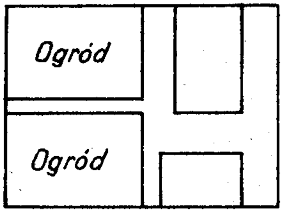
długich, a 20 *cm* szerokich potrzeba na pokrycie każdej z tych podłóg?

10. Rys. 42 przedstawia plan dwu ścian pokoju; pozostałe dwie ściany nie mają ani drzwi, ani okien. Ile kosztuje polakierowanie tego pokoju, jeśli 1 m^2 kosztuje 6 zł?



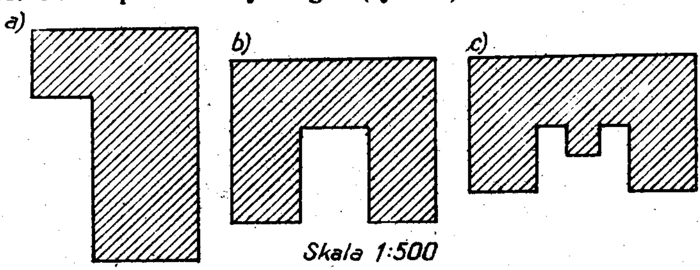
Rys. 42.

11. Rys. 43 przedstawia plan domku z ogrodem i zabudowaniem; oblicz pole niezabudowanej części *a)* z ogrodem, *b)* bez ogrodu!



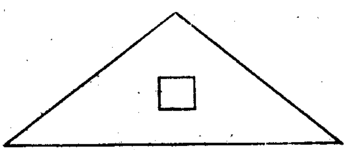
Rys. 43.

12. Oblicz pole każdej z figur (rys. 44).

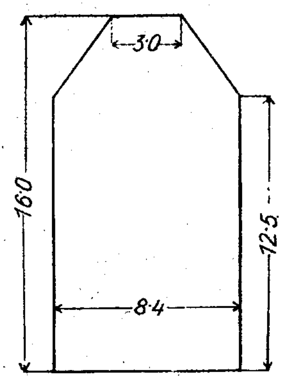


Rys. 44.

13. Rys. 45 przedstawia plan ściany bocznej strychu; oblicz pole tej ściany!



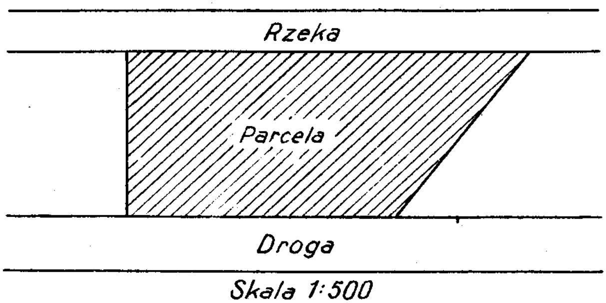
Rys. 45.



Rys. 46.

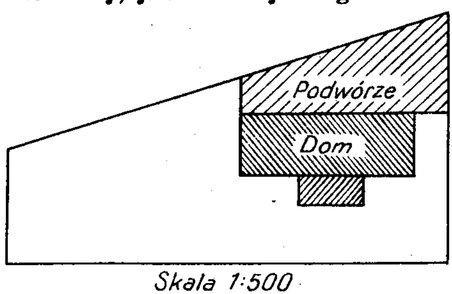
14. Rys. 46 przedstawia plan ściany bocznej trzypiętrowej kamienicy. Oblicz pole tego przekroju! Liczby podają wymiary w *m*.

15. Oblicz pole parceli jak na rys. 47, a następnie podziel ją równoległą do najkrótszego boku na dwie równe części!



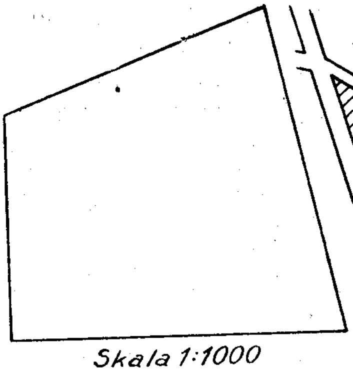
Rys. 47.

16. W posiadłości, jak na rys. 48, ogród zajmuje 90% części niezacieniowanej; jak wielki jest ogród?

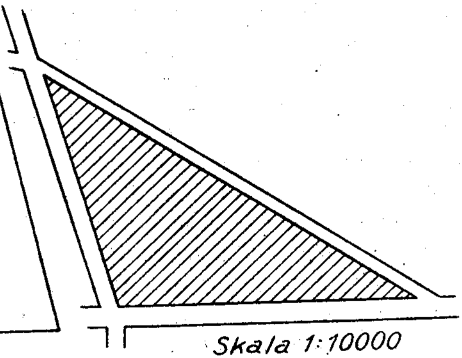


Rys. 48.

17. Na parceli (rys. 49) postawiono dom o podstawie prostokątnej, a o wymiarach 18 *m* i 10 *m*; oblicz pole części niezabudowanej!
18. Rys. 50 przedstawia część planu miasta. 68% trójkąta zacieniowanego jest zabudowane. Ile wynosi pole części zabudowanej? (Potrzebne liczby odczytaj z rysunku).



Rys. 49.



Rys. 50.

Graniastosłup prosty

Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

(Powtórzenie)

Dwie płaszczyzny nazywamy równoległemi, jeżeli, jakkolwiek je przedłużymy, nigdy się nie przetną.

1. Wskaż w pokoju ściany równoległe!
2. Ustaw 2 kartki papieru równolegle!
3. Wskaż płaszczyzny równoległe w prostopadłościanie!

Dwie proste, przez które płaszczyzna nie da się przeprowadzić, nazywają się wichrowate.

1. Wskaż w pokoju dwie krawędzie wichrowate!
2. Ustaw dwa ołówki tak, by przedstawiały odcinki wichrowate!

Dwa odcinki, leżące w jednej płaszczyźnie, są równoległe, jeżeli się nie przetną, jakkolwiek je przedłużymy.

1. Narysuj kilka odcinków równoległych!
2. Wskaż w pokoju krawędzie równoległe!

Odcinek jest równoległy do płaszczyzny, jeżeli odcinek i płaszczyzna nie przetną się, jakkolwiek je przedłużymy.

1. Wskaż w pokoju krawędź i ścianę do siebie równoległe!
2. Ustaw ołówek równolegle do powierzchni stołu!

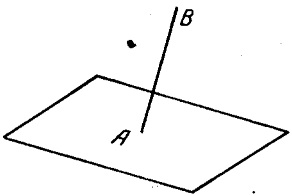
Mamy wbity drut do deseczki. Mówimy, że drut jest wbity prostopadle do deseczki, jeżeli przy ustawieniu deseczki poziomo, drut ustawi się pionowo.

Podobnie mówimy, że odcinek AB jest prostopadły do płaszczyzny, rys. 51, jeżeli przy ustawieniu tej płaszczyzny poziomo odcinek ustawi się pionowo. Przypuszczamy oczywiście, że odcinek AB jest sztywnie związany z płaszczyzną.

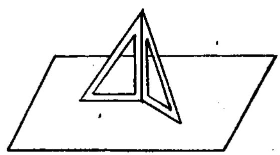
Jeżeli płaszczyzna jest ustawiona poziomo, zaś prosta jest pionowa, to prosta jest prostopadła do płaszczyzny.

Np. krawędzie boczne pokoju są prostopadłe do podłogi.

Odcinek prostopadły do danej płaszczyzny, przedstawionej na rys. 52, otrzymać możemy przy pomocy dwóch ekierek.



Rys. 51.



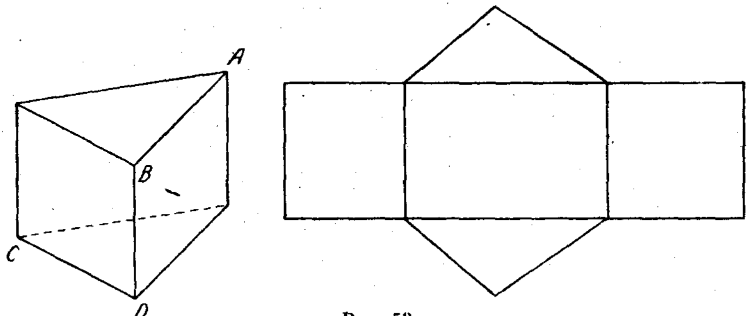
Rys. 52.

Ustawiamy ekierki jednemi przyprostokątnemi na płaszczyźnie tak, by przyprostokątne te nie leżały na jednej prostej i aby drugie przyprostokątne się schodziły. Przyprostokątne schodzące się wyznaczą prostą, prostopadłą do płaszczyzny.

1. Wskaż krawędzie prostopadłe do ściany pokoju!
2. Ustaw do kartki papieru ołówek tak, by wskazywał odcinek do niej prostopadły!

Graniastosłup prosty o podstawie trójkątnej i wielokątnej

Pierwszy z rys. 53 przedstawia bryłę, która nazywa się graniastosłupem prostym trójkątnym, drugi zaś z rys. 53

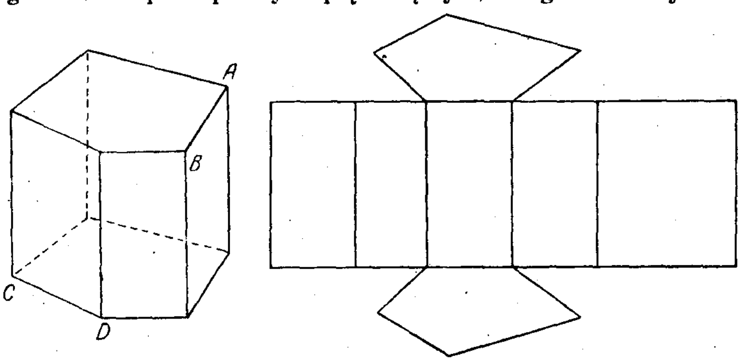


Rys. 53.

przedstawia siatkę tej bryły. Siatka ta pozwala zbudować model graniastosłupa prostego trójkątnego.

Dwie ściany są trójkątami równemi i leżą w płaszczyznach równoległych; nazywamy je podstawami. Pozostałe ściany są prostokątami. Krawędzie, łączące obie podstawy są sobie równe i do siebie równoległe. Jeżeli ustawimy jedną z podstaw poziomo, to druga podstawa ustawi się również poziomo, a krawędzie, łączące obie podstawy, ustawią się pionowo. Krawędzie te więc są do podstaw prostopadłe.

Pierwszy z rys. 54 przedstawia bryłę, która nazywa się graniastosłupem prostym pięciokątnym, drugi zaś z rys. 54



Rys. 54.

przedstawia siatkę tej bryły. Siatka ta pozwala zbudować model graniastosłupa prostego pięciokątnego.

Dwie ściany są pięciokątami równemi i leżą w płaszczyznach równoległych; nazywamy je podstawami. Pozostałe ściany są prostokątami i nazywamy je ścianami bocznemi. Powierzchnię, utworzoną przez ściany boczne, nazywamy pobocznicą graniastosłupa.

Krawędzie, łączące obie podstawy, są sobie równe i do siebie równoległe. Krawędzie te nazywamy krawędziami bocznemi.

Jeżeli ustawimy jedną z podstaw poziomo, to druga podstawa ustawi się również poziomo, a krawędzie boczne ustawią się pionowo. W graniastosłupie prostym krawędź boczna nazywa się również wysokością graniastosłupa. Krawędzie *AB* i *CD* (rys. 54) są wichrowate, gdyż nie da się przez nie poprowadzić płaszczyzny.

Graniastosłupy proste mogą mieć również jako podstawy: czworokąty, sześciokąty i t. d. Nazywamy je graniastosłupami prostemi czworokątnemi, sześciokątnemi i t. d.

Zadania

1. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego o wysokości 6 *cm*, którego podstawa jest trójkątem równobocznym o boku 3 *cm*! Zrób model tego graniastosłupa!
2. Ile ścian, krawędzi, wierzchołków ma graniastosłup prosty: *a)* trójkątny, *b)* pięciokątny, *c)* sześciokątny?
3. Ile krawędzi podstawowych, a ile bocznych ma graniastosłup prosty: *a)* trójkątny, *b)* ośmiokątny, *c)* dwunastokątny?
4. Która ściana graniastosłupa trójkątnego sąsiaduje z trzema ścianami, a która z czterema?
5. Przekonaj się na kilku graniastosłupach prostych, że, dodając do liczby ścian liczbę wierzchołków i od tej sumy odejmując 2, otrzymasz liczbę krawędzi!

6. Opierając się na poprzedniem zadaniu i wiedząc, że w pewnym graniastosłupie prostym jest:

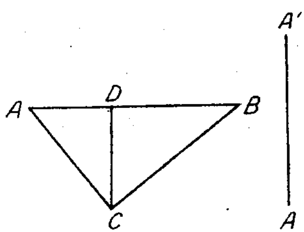
a) 14 wierzchołków, 9 ścian; oblicz, ile jest krawędzi!
b) 30 krawędzi, 12 ścian; oblicz, ile jest wierzchołków!
c) 45 krawędzi, 30 wierzchołków; oblicz, ile jest ścian!

7. Czy można zbudować graniastosłup prosty, trójkątny, w którym wszystkie krawędzie byłyby równe?
8. Obierz na dwóch sąsiednich ścianach pobocznicy graniastosłupa prostego dwa dowolne punkty i połącz je najkrótszą linją, położoną na tym graniastosłupie! Odp. Linję tę otrzymasz, łącząc te punkty na siatce odcinkiem.

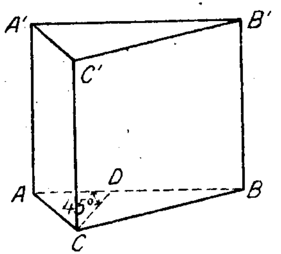
Rzut równoległy ukośny graniastosłupa prostego

Rys. 56 przedstawia nam w rzucie równoległym ukośnym graniastosłup prosty trójkątny, którego podstawa i krawędź boczna podane są w naturalnej wielkości na rys. 55.

Zasady rysowania graniastosłupa prostego w rzucie równoległym ukośnym są następujące: Ustawiamy na stole kartkę



Rys. 55.



Rys. 56.

papieru pionowo, która będzie przedstawiać płaszczyznę, t. zw. płaszczyznę rzutów (jako płaszczyznę rzutów moglibyśmy obrać jedną ze ścian pokoju), a przed nią graniastosłup tak, aby jedna ze ścian np. $ABB'A'$ była do tej płaszczyzny równoległa.

I. Krawędzie i odcinki graniastosłupa, równoległe między sobą, są i na rysunku równoległe.

Np. Krawędzie AA', BB', CC', lub AB i $A'B'$, AC i $A'C'$, BC i $B'C'$ są w rzeczywistości i na rysunku równoległe.

II. Odcinki równoległe do płaszczyzny rzutów (to znaczy leżące na płaszczyznach równoległych do płaszczyzny rzutów) rysujemy w naturalnej wielkości; kąty zawarte między takiemi odcinkami są na rysunku takie, jak w rzeczywistości.

Np. AB, AA', BB', CC', AD są na rysunku w naturalnej wielkości. Odcinki AA', BB' są do AB na rysunku i w rzeczywistości prostopadłe.

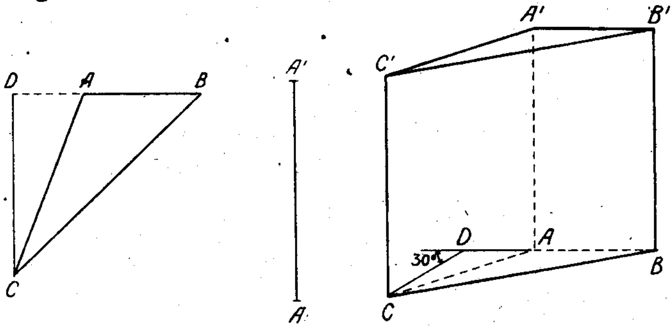
III. Odcinki prostopadłe do płaszczyzny rzutów, jak CD, rysujemy dwa razy krótsze; odcinki takie kreślimy ukośnie pod kątem 45^0 do odcinków poziomych, równoległych do płaszczyzny rzutów (w naszym wypadku np. do AB).

A więc CD jest na rysunku dwa razy mniejsze, niż w rzeczywistości i kąt pomiędzy CD i AB wynosi na rysunku 45^0.

Rysunek graniastosłupa sporządzamy w następujący sposób: rysujemy krawędź AB w naturalnej wielkości i na niej zaznaczamy punkt D (punkt, w którym wysokość przecina podstawę trójkąta ABC) tak, by odcinki AD i DB były również naturalnej wielkości. Z punktu D kreślimy odcinek DC dwa razy mniejszy niż w rzeczywistości pod kątem 45^0 do AB. Łącząc punkt C z punktami A i B, otrzymamy rysunek podstawy graniastosłupa w rzucie ukośnym. Z punktów A, B, C kreślimy teraz krawędzie AA', BB', CC' prostopadle do AB i naturalnej wielkości. Łącząc wkońcu punkty A', B', C', otrzymujemy rysunek graniastosłupa w rzucie ukośnym. Na rysunku krawędzie niewidoczne, jak AB, zaznaczamy linją przerywaną. Rysunek staje się przez to bardziej wyrazisty.

U w a g a. Odcinki prostopadłe do płaszczyzny rzutów (jak poprzednio DC) rysujemy czasami również pod $\sphericalangle\ 30^0$ lub 60^0 do odcinków poziomych, równoległych do płaszczyzny rzutów.

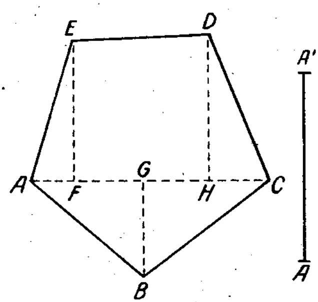
Na rys. 57 mamy rzut ukośny graniastosłupa prostego trójkątnego, w którym wysokość podstawy CD przecina przedłu-



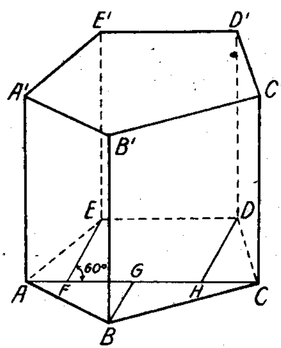
Rys. 57.

żenie AB. Na rysunku tym CD tworzy z AB kąt 30°. Tutaj również odcinki AD i DB są naturalnej wielkości.

Na rys. 59 przedstawiony jest graniastosłup prostokątny pięciokątny w rzucie ukośnym, a na rys. 58 jego podstawa i krawędź boczna w naturalnej wielkości. Graniastosłup jest



Rys. 58.



Rys. 59.

tak ustawiony przed płaszczyzną rzutów, że przekątna podstawy AC jest do płaszczyzny rzutów równoległa.

Rysujemy najpierw przekątną AC i zaznaczamy na niej punkty F, G, H, gdzie prostopadłe do AC, poprowadzone z wierzchołków E, D, B, trafiają przekątną AC. Oczywiście odcinki AF, FG, GH, HC, AC, jako równoległe do płaszczyzny rzutów, są na rysunku w naturalnej wielkości. Z punktów F, G, H kreślimy pod kątem 60° odcinki FE, GD, HB dwa razy mniejsze niż w rzeczywistości. Łącząc odpowiednio punkty A, B, C, D, E, otrzymujemy rysunek podstawy w rzucie równoległym ukośnym. Następnie z punktów A, B, C, D, E rysujemy prostopadle do AC krawędzie AA', BB', CC', DD', EE' w naturalnej wielkości. Są one bowiem równoległe do płaszczyzny rzutów. Łącząc wkońcu punkty A', B', C', D', E', otrzymujemy żądany rysunek. Krawędzie niewidoczne są przerywane.

Zadania

Następujące rysunki sporządź, przyjmując, że odcinek poziomy równoległy do płaszczyzny rzutów z odcinkiem prostopadłym do płaszczyzny rzutów tworzy na rysunku kąt *a)* 45°, *b)* 60°!

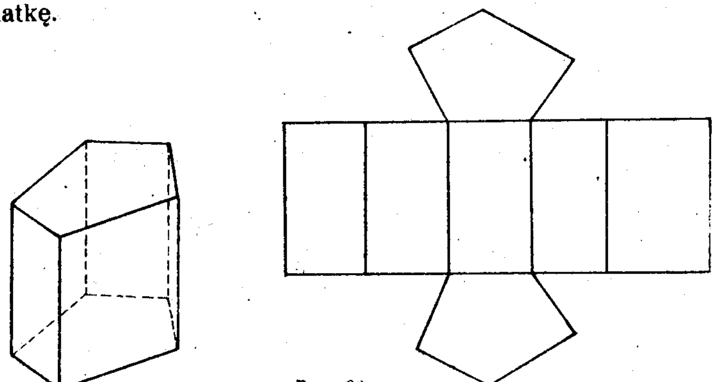
1. Ustaw przed sobą pudełko zapałek tak, aby jedna ściana boczna była równoległa do płaszczyzny rzutów! Zrób rysunek tak ustawionego pudełka!
2. Ustaw przed sobą pudełko zapałek tak, aby krawędzie boczne i przekątna podstawy były równoległe do płaszczyzny rzutów! Zrób rysunek tak ustawionego pudełka!
3. Narysuj prostopadłościan o wymiarach *a)* 4,5 *cm*, 3,5 *cm*, 6 *cm*; *b)* 2,5 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, przyjmując, że jedna ze ścian bocznych jest równoległa do płaszczyzny rzutów!
4. Narysuj graniastosłup prosty o wysokości 8 *cm*; podstawą jest trójkąt równoboczny o boku 5 *cm*. Jedna ściana boczna jest równoległa do płaszczyzny rzutów!
5. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego dwa sąsiednie boki tworzą kąt 60° i mają wymiary 2 *cm* i 4 *cm*. Narysuj ten graniastosłup, przyjmując, że

a) jedna ściana jest równoległa do płaszczyzny rzutów, *b)* krawędzie boczne i jedna przekątna podstawy jest równoległa do płaszczyzny rzutów!

6. Obierz dowolny czworokąt za podstawę graniastosłupa prostego o wysokości 5 *cm*. Narysuj ten graniastosłup!
7. Obierz dowolny pięciokąt za podstawę graniastosłupa prostego o wysokości 6 *cm*. Narysuj ten graniastosłup, przyjmując, że krawędzie boczne i przekątna podstawy są równoległe do płaszczyzny rzutów!

Pole powierzchni graniastosłupa prostego

Na rys. 60 mamy graniastosłup prosty pięciokątny i jego siatkę.



Rys. 60.

Siatka pobocznicy jest prostokątem, którego podstawa równa się obwodowi podstawy graniastosłupa, wysokość zaś wysokości graniastosłupa; pole powierzchni graniastosłupa otrzymamy, dodając do pola pobocznicy podwójne pole podstawy.

Zadania

1. Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi *a)* 8 *cm*, *b)* $3\frac{1}{2}$ *m*, *c)* 5,63 *dcm*, *d)* $12\frac{1}{5}$ *m*!

2. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego, którego wysokość wynosi *a)* 25 *cm*; *b)* 1,4 *m*; *c)* 5,8 *m*, a którego podstawa jest trójkątem *a)* o boku 6 *cm* i wysokości 5 *cm*; *b)* o boku 0,4 *m* i wysokości 0,3 *m*; *c)* o boku 1,2 *m* i wysokości 0,8 *m*. Liczby w zadaniach *b)* i *c)* są przybliżone!
3. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego o wysokości *a)* 8 *cm*; *b)* 14,5 *m*; *c)* 1,12 *m*, którego podstawa jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych *a)* 4 *cm* i 5 *cm* (siatka)! *b)* 2,4 *m* i 5,8 *m*, *c)* 0,4 *m* i 0,7 *m*. Liczby w zadaniach *b)* i *c)* są przybliżone!
4. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prostego o wysokości 6 *cm*, którego podstawa jest trójkątem równoramiennym; podstawa tego trójkąta ma $4\frac{1}{2}$ *cm*, wysokość zaś $5\frac{1}{2}$ *cm*. Brakujące wymiary znajdź przy pomocy rysunku i pomiaru!
5. Oblicz pole powierzchni pudełka zapałek o krawędziach 8 *cm*, 5 *cm*, 2 *cm*!
6. Ile kosztuje obicie czterech ścian sali, mającej kształt prostopadłościanu o bokach 10 *m*, 6 *m*, 4,5 *m* (wysokość) materją, której sztuka, mająca 25 *m* długości, a 80 *cm* szerokości, kosztuje 75 *zł* (odlicz na drzwi i okna 24 m^2).
7. Podłoga klasy o wysokości 4 *m* jest kwadratem o boku 8 *m*; w klasie znajdują się trzy okna szerokości 1,5 *m* i wysokości 1,8 *m*, oraz drzwi szerokości tej samej co okna, a o wysokości 2,25 *m*. Ile kosztuje wybielenie ścian i powały klasy, jeżeli wybielenie 1 m^2 kosztuje 0,4 *zł*? (siatka w skali 1 : 100!)
8. Graniastosłup prosty o wysokości $3\frac{1}{2}$ *m* ma za podstawę równoległobok o bokach $1\frac{1}{2}$ *m* i 2 *m* i kącie 30° między niemi zawartym; oblicz pole powierzchni graniastosłupa! (Narysuj siatkę w skali 1 : 50 i na planie zmierz te wielkości, które będą potrzebne do obliczenia pola równoległoboku!)
9. Oblicz ciężar pudełka o wymiarach 4,5 *cm*, 6 *cm*, 8 *cm*, zrobionego z blachy, której 1 cm^2 waży 0,52 *g*.

10. Narysuj siatkę sześcianu, o powierzchni 54 *cm*²!
11. Podaj wymiary prostopadłościanu, którego pole powierzchni wynosi 128 *cm*², przyczem podstawą jest kwadrat o boku 4 *cm*. Narysuj siatkę!
12. Podstawa pieca w kształcie graniastosłupa, wysokiego na 2 *m* jest trójkątem równobocznym o boku 80 *cm*. Palenisko znajduje się w wysokości 60 *cm* nad podstawą. Oblicz pole tej części pobocznicy pieca, która się wznosi nad paleniskiem!
13. Bryłę marmurową w kształcie sześcianu o krawędzi 1,4 *m* oszlifowano na całej powierzchni; ile zapłacono za tę pracę, jeśli za 1 *m*² płacono 8 *zł* 50 *gr*?
14. Pokój ma 8 *m* długości, 4,5 szerokości, a 4 *m* wysokości. Podłoga kosztowała po 15 *zł* za 1 *m*², tynkowanie zaś po 5 *zł* za 1 *m*²; ile kosztowały razem podłoga i tynkowanie pokoju?
15. Pole powierzchni prostopadłościanu, którego podstawa jest kwadratem o boku: *a)* 5 *cm*, *b)* 3,5 *cm* wynosi: *a)* 130 *cm*², *b)* 103,25 *cm*²; jak wysoki jest ten prostopadłościan?
16. Narysuj dowolny *a)* czworokąt, *b)* pięciokąt, *c)* sześciokąt. Przyjmując ten wielokąt za podstawę graniastosłupa prostego o wysokości 8 *cm*, oblicz pole powierzchni tego graniastosłupa!

Objętości

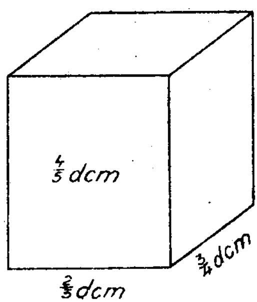
Metryczne jednostki miary objętości i pojemności

1. Ile to jest *mm*³: *a)* 3 *cm*³, *b)* 2 *dcm*³, *c)* 1 *dcm*³ 4 *cm*³?
2. Ile to jest *cm*³: *a)* 5 *dcm*³, *b)* 4 *dcm*³ 7 *cm*³, *c)* 11 *dcm*³ 124 *cm*³?
3. Ile to jest *dcm*³: *a)* 3 *m*³, *b)* 5 *m*³ 150 *dcm*³, *c)* 56 *m*³ 284 *dcm*³?
4. Ile to jest *cm*³ i *mm*³: *a)* 1246 *mm*³, *b)* 11 400 *mm*³?
5. Ile to jest *m*³ i *dcm*³: *a)* 1458 *dcm*³, *b)* 13 500 *dcm*³?
6. Ile to jest *l*: *a)* 2 *m*³, *b)* 8 *m*³, *c)* 4 *m*³ 145 *dcm*³?
7. Ile to jest *hl*; *a)* 5 *m*³, *b)* 2 *m*³ 350 *dcm*³?

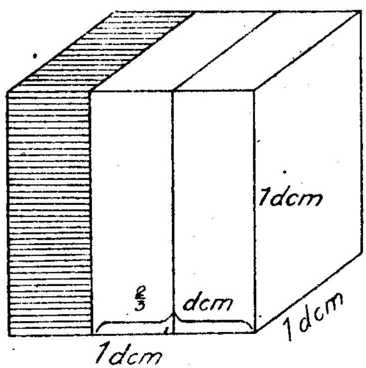
8. Ile to jest m^3: *a)* 15 *hl*, *b)* 420 *hl*, *c)* 20 000 *l*?
9. Ile cm^3 zawiera: *a)* 3 *dcl*, *b)* 8 *cl*?
10. Wyraź w cm^3: 0,35 dcm^3; 1,008 dcm^3; 4,2 dcm^3; 6,836 dcm^3!
11. Wyraź w cm^3: 19,238 *l*; 0,92 *l*; 4,13 *l*; 0,9 *l*!
12. Wyraź w m^3: 3 m^3 428 dcm^3; 729 *l*; 3 *hl* 9 *l*!

Objętość prostopadłościanu

Mamy obliczyć objętość prostopadłościanu o wymiarach $\frac{2}{3}$ *dcm*, $\frac{3}{4}$ *dcm*, $\frac{4}{5}$ *dcm* (rys. 61). Prostopadłościan ten możemy otrzymać w następujący sposób: podzielmy najpierw sześcian o boku 1 *dcm* na 3 równe części, jak na rys. 62 i weźmy



Rys. 61.



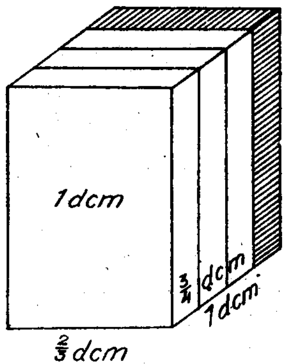
Rys. 62.

takich części 2. Otrzymany prostopadłościan podzielmy teraz na 4 równe części, jak na rys. 63 i weźmy takich części 3. Ten wkońcu prostopadłościan podzielmy na 5 równych części, jak na rys. 64 i biorąc takich części 4, utworzymy nasz prostopadłościan. Sposób, w jaki można otrzymać nasz prostopadłościan, podaje nam również rys. 65.

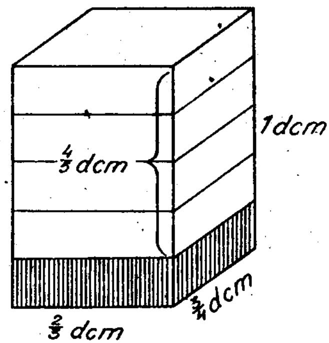
Sześcian na rys. 62 ma objętość 1 dcm^3. Prostopadłościan niezacieniowany na rys. 62 ma objętość $\frac{2}{3}$ dcm^3.

Prostopadłościan niezacieniowany na rys. 63 ma objętość:

$$\frac{3}{4} \text{ z } \left(\frac{2}{3}\ dcm^3\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\ dcm^3.$$



Rys. 63.



Rys. 64.

Nasz wreszcie prostopadłościan (niezacieniowany rys. 64) ma objętość $\frac{4}{5}$ z poprzedniego prostopadłościanu, t. j.:

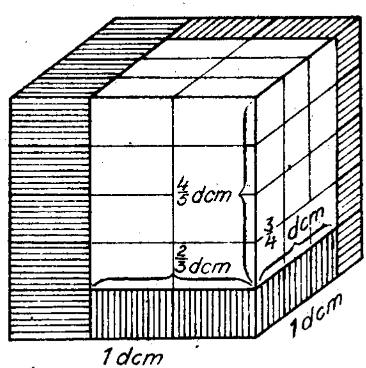
$$\tfrac{4}{5} \text{ z } (\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{2}{3})\ dcm^3 = (\tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{2}{3})\ dcm^3 = \tfrac{2}{5}\ dcm^3.$$

Aby więc obliczyć objętość prostopadłościanu np. w *dcm*³, należy utworzyć iloczyn liczb, wyrażających w *dcm* wymiary prostopadłościanu.

Uwaga 1.

Mamy: $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = (\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}) \cdot \frac{4}{5}$.

Lecz $(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3})$ *dcm*² jest to pole podstawy naszego prostopadłościanu. Możemy więc powiedzieć, że objętość prostopadłościanu w *dcm*³ otrzymamy, mnożąc liczbę, wyrażającą pole podstawy w *dcm*² przez liczbę, wyrażającą wysokość w *dcm*.



Rys. 65.

Zadania

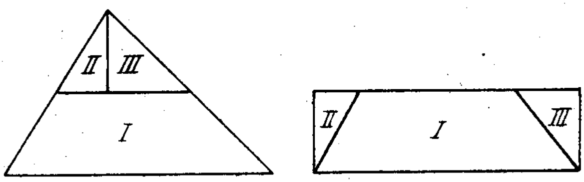
1. Sporządź model sześcianu, którego krawędź wynosi 5 *cm* i oblicz jego objętość!
2. Oblicz objętość sześcianu, którego krawędź wynosi: *a)* $9\frac{4}{5}$ *cm*, *b)* 4,6 *m*, (liczba przybliżona), *c)* $8\frac{3}{8}$ *dcm*.
3. Pudełko w kształcie sześcianu ma krawędź: *a)* 16 *cm*, *b)* 27 *cm*; ile zmieści się w nim sześcianów o krawędzi: *a)* 2 *cm*, *b)* 3 *cm*?
4. Jaki jest ciężar sześcianu o krawędzi 1,2 *m*, wykutego z granitu, którego 1 cm^3 waży 2,65 *g*?
5. Jaką ma długość krawędź sześcianu, którego objętość wynosi: *a)* 8 cm^3, *b)* 27 dcm^3, *c)* 0,125 m^3?
6. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach: $2\frac{1}{2}$ *cm*, 4 *cm*, 6 *cm*!
7. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach: *a)* 2 *cm*, $4\frac{1}{2}$ *cm*, $5\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* $2\frac{1}{2}$ *m*, $4\frac{3}{5}$ *m*, 6 *m*; *c)* 4,2 *dcm*, 5,4 *dcm*, 6 *dcm*, *d)* 6,3 *m*, 8,4 *m*, 15,2 *m*. Liczby w zadaniach *c)* i *d)* są przybliżone!
8. Jaka jest wysokość prostopadłościanu, którego objętość wynosi: *a)* 140 cm^3, *b)* 33,12 dcm^3, *c)* $38\frac{1}{2}$ m^3, a którego podstawa ma: *a)* 40 cm^2, *b)* 14,4 dcm^2, *c)* $19\frac{1}{4}$ m^2?
9. Jak wysoką powinna być sala o długości 9 *m* i szerokości $6\frac{1}{2}$ *m*, jeśli ma mieścić 48 uczniów, przyczem liczymy po 7 m^3 powietrza na 1 osobę?
10. Jaki jest ciężar prostopadłościanu z ołowiu, którego 1 cm^3 waży 11,34 *g*, jeśli wymiary prostopadłościanu są: *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*; 4 *cm*, $5\frac{3}{4}$ *cm*; *b)* 4,2 *cm*, 5,4 *cm*, 8 *cm*; *c)* $6\frac{3}{4}$ *cm*, $8\frac{1}{5}$ *cm*, 10 *cm*?
11. Kostka cukru ma wymiary 22 *mm*, 24 *mm*, 8 *mm*; oblicz, ile kostek cukru przypada na 1 *kg*, jeżeli 1 cm^3 cukru waży 1,6 *g*. Jaką objętość zajmuje 1 *kg* cukru?
12. Czterech chłopców chce podnieść głaz, mający kształt prostopadłościanu o wymiarach 80 *cm*, 40 *cm* i 55 *cm*. Pierwszy z nich jest w stanie wznieść 40 *kg*, trzej inni

po 25 *kg*. Czy są oni w stanie dźwignąć ten kamień, jeżeli 1 cm^3 waży 2,5 *g*?

13. Oblicz ciężar szyny żelaznej 25 *m* długości, jeżeli przekrój poprzeczny jest prostokątem o bokach 15 *cm* i 18 *cm*. Ilu robotników trzeba użyć do podniesienia tej szyny, jeżeli ciężar 1 cm^3 szyny wynosi 7,5 *g* i jeżeli jeden robotnik jest w stanie dźwignąć 75 *kg*?
14. Przedział kolejowy na 8 osób jest prostopadłościanem o wymiarach 2 *m*, 1,5 *m*, 2,5 *m*. Ile powietrza zawiera? Na jak długo wystarczyłoby tego powietrza, gdyby nie było dopływu świeżego, jeżeli przytem jeden człowiek zużywa w godzinie 7 m^3 powietrza?

Objętość graniastosłupa prostego

Na rys. 66 mamy przedstawione, w jaki sposób z trójkąta można utworzyć prostokąt o tem samem polu.

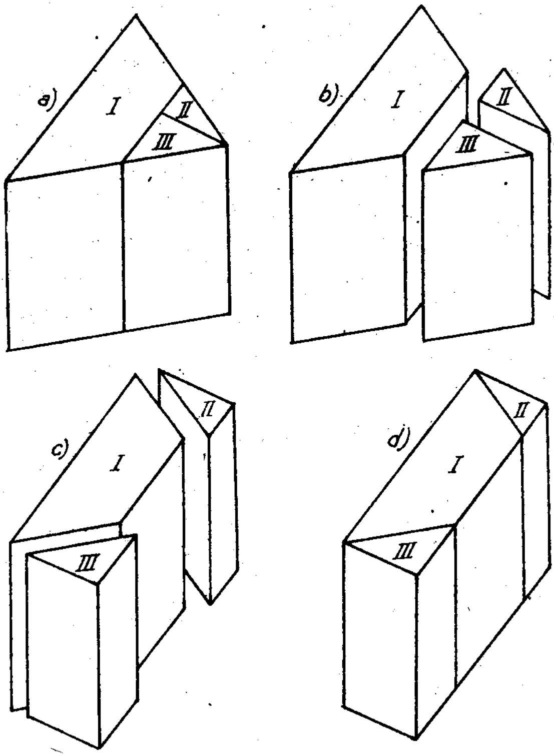


Rys. 66.

Rys. 67 *a*, *b*, *c*, *d* przedstawia, w jaki sposób można podobnie z graniastosłupa prostego o podstawie trójkątnej utworzyć prostopadłościan o równej podstawie i równej wysokości.

Widzimy stąd, że objętość graniastosłupa prostego o podstawie trójkątnej równa się objętości prostopadłościanu o tej samej podstawie i wysokości.

Aby więc obliczyć objętość np. w dcm^3, graniastosłupa prostego o podstawie trójkątnej, należy pomnożyć liczbę, wyrażającą w dcm^2 pole podstawy, przez liczbę, wyrażającą w *dcm* wysokość.



Rys. 67.

Rys. 68 przedstawia nam, w jaki sposób można rozłożyć graniastosłup prosty o dowolnej podstawie na graniastosłupy proste o podstawach trójkątnych.

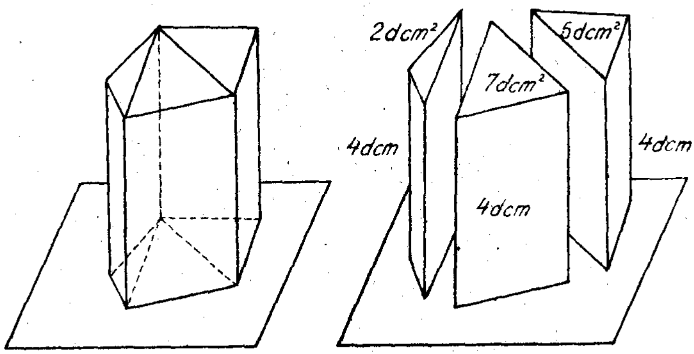
Przypuśćmy, że graniastosłupy trójkątne, na które rozbiliśmy nasz graniastosłup (rys. 68), mają odpowiednie podstawy: 2 dcm^2, 7 dcm^2, 5 dcm^2; wspólna ich wysokość niech wynosi 4 *dcm*.

Objętość zatem naszego graniastosłupa wyraża się w dcm^3 liczbą:

$$(2 \cdot 4) + (7 \cdot 4) + (5 \cdot 4)$$

czyli:

$$(2 + 7 + 5) \cdot 4.$$



Rys. 68.

Wyrażenie w nawiasie przedstawia nam oczywiście w dcm^2 pole podstawy danego graniastosłupa.

Aby zatem obliczyć objętość graniastosłupa prostego np. w dcm^3, należy pomnożyć liczbę, wyrażającą w dcm^2 pole podstawy, przez liczbę, wyrażającą w *dcm* wysokość.

Zadania

1. Sporządź model graniastosłupa prostego o wysokości 5 *cm*, którego podstawa jest trójkątem równobocznym o boku 2 *cm*; oblicz jego objętość, mierząc na modelu wysokość podstawy!
2. Trójkąt *a)* o podstawie $1\frac{1}{2}$ *m* i wysokości $\frac{3}{4}$ *m*, *b)* o podstawie 4,5 *dcm* i wysokości 2,25 *dcm* jest podstawą graniastosłupa prostego o wysokości *a)* $3\frac{1}{8}$ *m*, *b)* 5,6 *dcm*; oblicz objętość tego graniastosłupa!
3. Trójkąt *a)* o podstawie 2,1 *m* i wysokości 0,4 *m*, *b)* o podstawie 0,6 *dcm* i wysokości 0,45 *dcm*, *c)* o podstawie 5 *cm* i wysokości 3,4 *cm* jest podstawą graniastosłupa prostego o wysokości *a)* 8,6 *m*, *b)* 4,2 *dcm*, *c)* 11,5 *cm*; oblicz objętość tego graniastosłupa! (Liczby są przybliżone!)
4. Równoległobok *a)* o podstawie $3\frac{1}{2}$ *cm* i wysokości $2\frac{3}{4}$ *cm*, *b)* o podstawie 4,2 *dcm* i wysokości 3,52 *dcm* jest pod-

stawą graniastosłupa prostego o wysokości *a)* $6\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 8,6 *dcm*; oblicz objętość tego graniastosłupa! Wszystkie liczby w tem zadaniu są przybliżone!

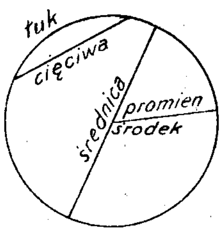
5. Równoległobok *a)* o podstawie 3,2 *m* i wysokości 0,8 *m*, *b)* o podstawie 0,4 *dcm* i wysokości 0,35 *dcm* jest podstawą graniastosłupa prostego o wysokości: *a)* 7,4 *m*, *b)* 2,6 *dcm*; oblicz objętość tego graniastosłupa!
6. Oblicz objętość graniastosłupa prostego o wysokości 8 *cm*, którego podstawa jest równoległobokiem o bokach 3 *cm* i 5 *cm* i o kącie między niemi zawartym 30^0; wysokość równoległoboku odczytaj z rysunku!
7. Graniastosłup prosty, zrobiony z drzewa dębowego, o wysokości 8 *cm*, ma za podstawę romb, w którym przekątne wynoszą 4 *cm* i 3 *cm*; oblicz ciężar tego graniastosłupa, wiedząc, że 1 cm^3 drzewa dębowego waży 0,7 *g*!
8. Objętość graniastosłupa prostego wynosi: *a)* 1080 cm^3, *b)* 25,4 dcm^3, *c)* 161,4 m^3, podstawa zaś *a)* 135 cm^2, *b)* 3,82 dcm^2, *c)* 10,5 m^2; jaka jest wysokość graniastosłupa? Liczby w zadaniach *b)* i *c)* są przybliżone!
9. Objętość graniastosłupa wynosi: *a)* 14,7 cm^3, *b)* 261,6 dcm^3, *c)* 162,4 m^3, wysokość zaś: *a)* 7,5 *cm*, *b)* 9,55 *dcm*, *c)* 8,5 *m*; jakie jest pole podstawy tego graniastosłupa? Wszystkie liczby w tem zadaniu są przybliżone!
10. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 7,4 *cm* jest czworokąt, w którym jedna przekątna wynosi 3 *cm* i dzieli go na 2 trójkąty o wysokościach 4,5 *cm* i 2 *cm*, przyczem ta przekątna jest wspólną podstawą; oblicz objętość tego graniastosłupa!
11. Rów długości 8,5 *m* ma kształt graniastosłupa prostego, którego podstawa jest trapezem równoramiennym, o bokach równoległych 2 *m* i 3 *m* i wysokości 1,8 *m*; oblicz ile *hl* wody ten rów pomieści!
12. Narysuj dowolny trójkąt i pomierz kilkakrotnie podstawę i wysokość. Oblicz następnie objętość graniastosłupa, wysokiego na 20 *cm*, którego podstawą byłby ten trójkąt.
13. Pudło ma kształt graniastosłupa prostego, którego pod-

stawa jest trójkątem prostokątnym, o przyprostokątnych 18 *cm* i 6 *cm*. Ile waży to pudło próżne, jeżeli 1 cm^2 blachy, z którego jest zrobione waży 0,77 *g*? Ile waży to pudło napełnione oliwą, jeżeli 1 cm^3 oliwy waży 0,916 *g*?

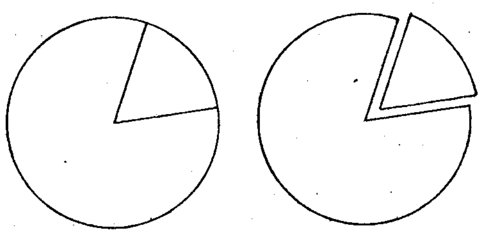
Obwód i pole koła

Narysujmy cyrklem okrąg koła (rys. 69). Punkt, w którym wbiliśmy ostrze nazywamy *środkiem* koła.

Narysujmy odcinek, łączący środek koła z dowolnie obranym punktem okręgu koła. Taki odcinek nazywa się *promieniem* koła. Wszystkie promienie koła są sobie równe.



Rys. 69.



Rys. 70.

Odcinek, łączący dwa punkty okręgu koła, nazywa się *cięciwą*.

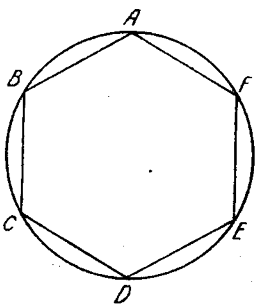
Cięciwa, przechodząca przez środek koła, nazywa się *średnicą*. Ponieważ średnica jest sumą dwóch promieni, więc wszystkie średnice są sobie równe.

Cięciwa dzieli okrąg koła na dwie części, z których każda nazywa się *łukiem*.

Jeżeli koło przetniemy wzdłuż dwóch promieni, to ono rozpadnie się na dwie części, z których każdą nazywamy *wycinkiem* (rys. 70).

Obwód koła

Aby zmierzyć obwód koła, należy ułożyć nitkę tak, aby przyiegała wszędzie do okręgu koła, a następnie zmierzyć długość nitki, potrzebnej do owinięcia całego okręgu. Obierzmy dowolny punkt A (rys. 71) na okręgu koła i wziąwszy w otwór cyrkla promień tego koła, odkładajmy kolejno na jego okręgu punkty B, C, D, E i F. Postępując w ten sposób, dojdziemy wkońcu do punktu A. Jeżeli teraz połączymy te punkty pokolei odcinkami, otrzymamy sześciokąt $ABCDEFA$, którego wszystkie boki są równe promieniowi koła. Obwód okręgu koła jest większy od obwodu tego sześciokąta. Widzimy więc, że obwód koła jest większy od 6 promieni t. j. 3 średnic.



Rys. 71.

Liczbę wskazującą, ile razy obwód koła jest większy od średnicy nazywamy liczbą „Pi" i oznaczamy literą grecką π.

W rachunkach jako wartość przybliżoną liczby π przyjmujemy zazwyczaj liczbę 3,14. Przedstawia ona liczbę π w trzecim stopniu dokładności. Liczba 3,14 różni się od π o mniej, niż 0,01.

Dokładniejszą wartością liczby π jest 3,14159; błąd jest mniejszy od jednostki ostatniego miejsca, t. j. od 0,00001.

A b y z a t e m o b l i c z y ć o b w ó d k o ł a, np. w cm, n a l e ż y p o m n o ż y ć π p r z e z l i c z b ę w y r a ż a j ą c ą w cm d ł u g o ś ć ś r e d n i c y.

Np.: Obwód okręgu koła o promieniu 2,58 m równa się:

$$5{,}16 \cdot 3{,}14\ m = 16{,}2024\ m.$$

Wynik ten zaokrąglamy do 16,2 m, gdyż π przyjęliśmy w III stopniu dokładności.

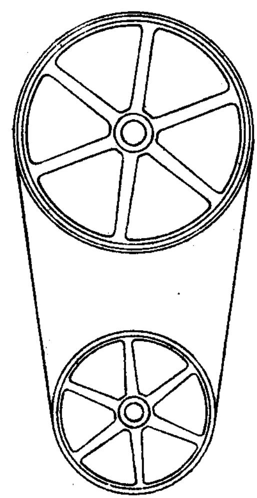
Jeżeli promień koła wynosi 2,7 m, przyczem liczba ta jest przybliżoną, to dla obliczenia obwodu wystarczy na π przyjąć 3,1. Mamy: $2{,}7 \cdot 3{,}1\ m = 8{,}37\ m$, albo zaokrąglając: 8,4 m.

Zadania

1. Oblicz obwód koła, którego promień równa się: *a)* $5\frac{1}{2}$ *m*, *b)* $6\frac{3}{4}$ *cm*, *c)* 7,2 *dcm*, *d)* 5,25 *m*!
2. Oblicz obwód koła, którego promień równa się:

a) 12,4 *cm*, *b)* 1,6 *dcm*, *c)* 0,45 *m*, *d)* 1,02 *m*, *e)* 0,054 *m*! Wszystkie liczby w tem zadaniu są przybliżone!

3. Ile razy zwiększy się obwód koła, jeżeli średnica zwiększy się 2, 3, 4 razy?
4. Obwód koła równa się: *a)* 6 *m*, *b)* $3\frac{1}{4}$ *m*, *c)* 4,56 *m*, *d)* $2\frac{1}{8}$ *dcm*; ile wynosi promień?
5. Obwód koła równa się: *a)* 1,28 *m*, *b)* 6,5 *cm*, *c)* 0,64 *m*, *d)* 0,028 *m*, *e)* 1,02 *m*; ile wynosi promień? Wszystkie liczby w tem zadaniu są przybliżone!
6. Koło u wozu ma promień 7,2 *dcm*; oblicz drogę, jaką wóz odbył, jeśli koło wykonało 2400 obrotów.
7. Koń, zaprzężony w kieracie do dyszla o długości 2,75 *m*, wykonuje przeciętnie 180 obrotów w godzinie; jaką drogę zrobił w ciągu 4 godzin?
8. Promień koła równika ziemskiego równa się 6370 *km*. W jakim czasie pociąg, jadący z prędkością 60 *km* na godzinę, objedzie dookoła równik?
9. Dwa koła, jedno o promieniu 2,4 *cm*, drugie o promieniu 3,6 *cm*, połączono pasem, jak na rys. 72. Ile obrotów wykonało większe koło, jeśli mniejsze wykonało 240 obrotów?
10. Dookoła placu w kształcie koła, o promieniu 19,5 *m*, zrobiono chodnik szerokości 2,4 *m*; ile kosztowało ogrodzenie z obu stron tego chodnika, jeśli 1 *m* kosztował 3 *zł* 40 *gr*, przyczem 16 *m* należy odliczyć na wejścia? Rysunek w skali 1:400!
11. Duża wskazówka zegara ma 2 *cm*, mała 14 *mm*, a wskazująca sekundy 6 *mm*. Jaką drogę opisze koniec każdej z tych wskazówek w ciągu: *a)* doby, *b)* tygodnia, *c)* roku?
12. Jako wartość liczby π przyjmowali: *a)* Babilończycy liczbę 3,

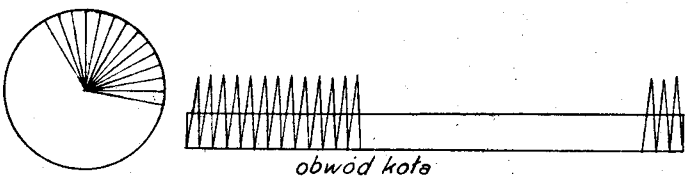


Rys. 72.

b) Egipcjanie liczbę $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, *c)* Hindusi liczbę $\frac{62832}{20000}$, *d)* Chińczycy liczbę $\frac{157}{50}$, *e)* Ptolomeusz liczbę $3\frac{17}{120}$, *f)* Archimedes liczbę $\frac{22}{7}$, *g)* A. Metius liczbę $\frac{355}{113}$. Zamień wszystkie te ułamki na liczby dziesiętne z dokładnością do tysięcznych i porównaj z liczbą 3,141, przedstawiającą liczbę π z dokładnością do tysięcznych!

Pole koła

Aby obliczyć pole koła, dzielimy je zapomocą promieni (rys. 73) na tyle równych wycinków, aby łuk każdego wycinka niewiele różnił się od cięciwy, łączącej końce tego łuku.



Rys 73.

Takie wycinki w przybliżeniu możemy uważać za trójkąty. Narysujmy wszystkie te trójkąty obok siebie i zastąpmy każdy przez równoważny mu prostokąt o tej samej podstawie i wysokości dwa razy mniejszej. Otrzymamy w ten sposób prostokąt, w którym w przybliżeniu podstawa równa się obwodowi koła, a wysokość połowie promienia koła.

Pole tego prostokąta równa się w przybliżeniu polu koła i błąd będzie tem mniejszy, im na więcej wycinków podzielimy dane koło. W ten sposób przekonano się, że pole koła równa się polu prostokąta, w którym podstawa równa się obwodowi koła, wysokość zaś połowie promienia koła.

Aby zatem otrzymać pole koła, np. w cm^2, należy pomnożyć przez siebie liczby, wyrażające w cm obwód koła i połowę promienia.

Np.: Mamy obliczyć pole koła o promieniu 2,58 m. Obliczamy najpierw obwód. Obwód równa się $3{,}14 \cdot 5{,}16$ $m =$

$= 16{,}2024\ m$. Ponieważ na π przyjęliśmy wartość 3,14 (III stopień dokładności), więc wynik zaokrąglamy do liczby 16,2 *m*.

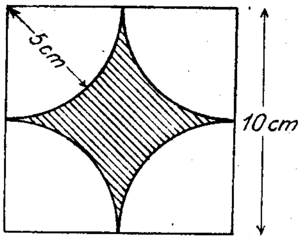
Pole koła równa się zatem:

$$16{,}2 \cdot 1{,}29\ m^2 = 20{,}898\ m^2.$$

Zaokrąglając wynik do III stopnia dokładności, otrzymujemy: 20,9 m^2.

Zadania

1. Ile wynosi pole koła o promieniu: *a)* 3 *m*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)* $5\frac{3}{4}$ *cm*, *d)* 2,6 *m*?
2. Ile wynosi pole koła o promieniu: *a)* 3,6 *dcm*, *b)* 0,25 *m*, *c)* 1,02 *m*, *d)* 0,245 *m*, *e)* 46,5 *cm*?
   Wszystkie liczby w tem żadaniu są przybliżone!
3. Dwa koła o tym samym środku mają promienie 4,6 *m* i 5,8 *m*; oblicz pole, zawarte pomiędzy temi kołami!
4. Dane są dwa koła, z których jedno ma promień 10 razy większy, niż drugie. Ile razy pole pierwszego koła jest większe od pola drugiego koła?
5. Koń na łące jest przywiązany do palika na sznurze o długości 8,5 *m*; ile wynosi pole, na którem koń może się paść?
6. Ile wozów piasku trzeba zużyć do wysypania areny cyrkowej, mającej kształt koła o promieniu 10 *m*, jeżeli 1 wóz wystarcza na wysypanie 75 m^2?
7. Obwód koła równa się: *a)* 106,4 *m*, *b)* $5\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)* $7\frac{1}{8}$ *cm*; ile wynosi pole?
8. Obwód koła równa się: *a)* 12,4 *m*, *b)* 5,6 *dcm*, *c)* 0,45 *m*, *d)* 2,40 *m*; ile wynosi pole?
   Wszystkie liczby w tem zadaniu są przybliżone!
9. Środek prostokąta o bokach 8,5 *cm* i 6,5 *cm* jest równocześnie środkiem koła o promieniu 2 *cm*; oblicz pole figury, otrzymanej po wycięciu tego koła z prostokąta!
10. Z kwadratu o boku 10 *cm* wycięto cztery ćwiartki koła o promieniu 5 *cm*, jak na rys. 74. Oblicz pole w ten sposób otrzymanej figury!
11. Ogród ma 53 *m* długości a 37 *m* szerokości, przyczem ścieżki zajmują 420 m^2. W środku ogrodu znajduje się



Rys. 74.

Rys. 75.

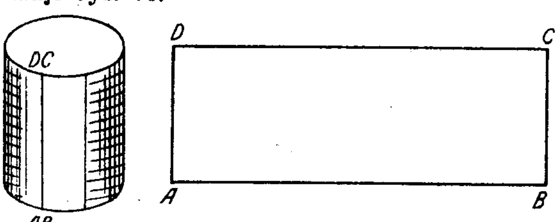
basen, którego promień wynosi 8 *m*. Oblicz pole uprawnej części ogrodu! Rysunek w skali 1 : 1000!

Walec obrotowy

Pole powierzchni walca obrotowego

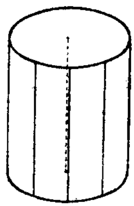
Weźmy kilka lub kilkanaście sztuk jednakowych monet (np. pięciogroszówek) i ustawmy je równo jedna na drugiej tak, żeby żadna nie wystawała. Otrzymana w ten sposób bryła nazywa się walcem obrotowym (rys. 75).

Jak widzimy, walec ograniczony jest dwoma kołami, zwanemi podstawami walca, oraz powierzchnią krzywą, zwaną pobocznicą walca. Powierzchnię taką możemy utworzyć, biorąc prostokąt z papieru i zlepiając dwa przeciwległe boki, jak wskazuje rys. 76.

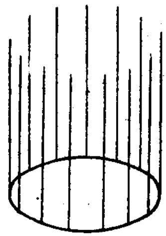


Rys. 76.

Można otrzymać model pobocznicy, ustawiając poziomo koło i wbijając pionowo na jego okręgu (dość gęsto) równe druty (rys. 78).



Rys. 77.

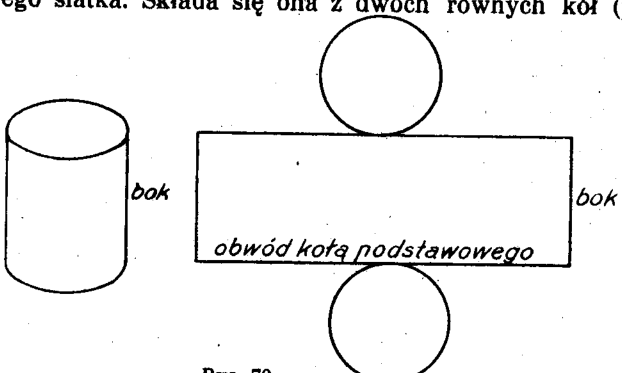


Rys. 78.

Kształt pobocznicy walca mają: rury wodociągowe, rynny. Kształt walca mają: ołówek okrągły, słup telegraficzny, niektóre puszki, świece i t. p.

Ustawmy jedną z podstaw walca poziomo. Jeżeli z dowolnego punktu, położonego na okręgu dolnej podstawy, poprowadzimy pionowo odcinek, to przekonamy się, że ten odcinek leży na pobocznicy. Odcinki pionowe, łączące punkty okręgu obu podstaw, nazywają się b o k a m i w a l c a. Wszystkie boki są sobie równe i są prostopadłe do obu podstaw. Odcinek, łączący środki obu podstaw walca obrotowego, nazywamy w y s o k o ś c i ą. Wysokość jest prostopadła do obu podstaw i równa się bokowi walca.

Rys. 79 przedstawia walec obrotowy. Obok narysowana jest jego siatka. Składa się ona z dwóch równych kół (pod-



Rys. 79.

staw walca) i z prostokąta (siatki pobocznicy walca). Jeżeli ten prostokąt zwiniemy, to otrzymamy pobocznicę walca. Zatem podstawa tego prostokąta równa się obwodowi koła podstawowego, wysokość zaś równa się bokowi walca.

Aby więc obliczyć pole pobocznicy walca obrotowego np. w cm^2, należy pomnożyć przez siebie liczby, wyrażające w *cm* obwód koła podstawowego i wysokość walca.

Aby obliczyć pole powierzchni walca, należy do pola pobocznicy dodać pola obu podstaw.

Np. Mamy obliczyć pole powierzchni walca o wysokości 3,2 *m*, a którego podstawa ma promień 0,4 *m*.

Obliczamy najpierw obwód okręgu koła podstawowego. Obwód ten równa się: $3{,}14 \cdot 0{,}8\ m = 2{,}512\ m$.

Przyjmujemy 2,51 *m*, gdyż π przyjęliśmy w III stopniu dokładności. Pole pobocznicy równa się zatem:

$$2{,}51 \cdot 3{,}2\ m^2 = 8{,}032\ m^2,\ \text{Przyjmujemy}\ 8{,}03\ m^2.$$

Pole koła równa się:

$$2{,}51 \cdot 0{,}2\ m^2 = 0{,}502\ m^2.\ \text{Przyjmujemy}\ 0{,}502\ m^2.$$

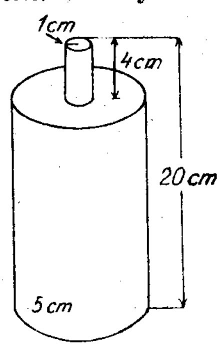
Pole powierzchni walca wynosi więc:

$$8{,}03\ m^2 + 0{,}502 \cdot 2\ m^2 = 9{,}034\ m^2.\ \text{Przyjmujemy}\ 9{,}03\ m^2.$$

Zadania

1. Sporządź model walca obrotowego o wysokości 9 *cm*, którego podstawa ma promień 3 *cm* i oblicz pole jego powierzchni!
2. Oblicz pole powierzchni walca obrotowego, którego podstawa jest kołem o promieniu: *a)* 5 *cm*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)* 2,4 *cm*, *d)* $3\frac{4}{5}$ *dcm*, a którego wysokość równa się: *a)* 22 *cm*, *b)* $11\frac{1}{4}$ *dcm*, *c)* 52,4 *cm*, *d)* $8\frac{3}{4}$ *dcm*!
3. Oblicz pole powierzchni walca obrotowego, którego podstawa jest kołem o promieniu: *a)* 4,25 *m*, *b)* 3,6 *dcm*, *c)* 0,84 *dcm*, *d)* 0,8 *dcm*, a którego wysokość równa się: *a)* 10,5 *m*, *b)* 8,4 *dcm*, *c)* 1,6 *dcm*, *d)* 1,2 *dcm*! Wszystkie liczby w tem zadaniu są przybliżone!

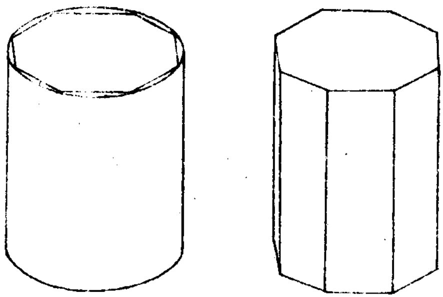
4. Pole pobocznicy walca wynosi: *a)* 15 dcm^2, *b)* $34\frac{1}{4}$ m^2, *c)* $\frac{1}{2}$ m^2, *d)* 35,2 dcm^2, wysokość zaś walca: *a)* $2\frac{1}{2}$ *dcm*, *b)* $5\frac{3}{8}$ *m*, *c)* $\frac{1}{8}$ *m*, *d)* 5,4 *dcm*; jaki jest promień podstawy walca?
5. Pole pobocznicy walca wynosi: *a)* 5,4 dcm^2, *b)* 1,64 m^2, *c)* 0,68 dcm^2, *d)* 42,1 m^2, wysokość zaś walca: *a)* 2,1 *dcm*, *b)* 0,26 *m*, *c)* 0,12 *dcm*, *d)* 5,8 *m*; jaki jest promień podstawy walca?
6. Pole powierzchni walca wynosi: *a)* $5\frac{1}{2}$ m^2, *b)* $45\frac{3}{4}$ cm^2, *c)* 4,26 m^2, *d)* 0,2 m^2, promień zaś podstawy: *a)* $1\frac{3}{4}$ *m*, *b)* $6\frac{1}{8}$ *cm*, *c)* 1,2 *m*, *d)* 0,05 *m*; jaka jest wysokość walca?
7. Pole powierzchni walca wynosi *a)* 125,6 cm^2, *b)* 367 dcm^2, *c)* 486,7 m^2, *d)* 0,75 m^2, *e)* 1,5 m^2, promień zaś podstawy: *a)* 2 *cm*, *b)* 2,5 *dcm*, *c)* 5,2 *m*, *d)* 0,2 *m*, *e)* 0,35 *m*; jaka jest wysokość walca i jakie pole pobocznicy? Wszystkie liczby w tem zadaniu są przybliżone!
8. Oblicz cenę garnka aluminjowego w kształcie walca o wysokości 1,7 *dcm*, którego podstawa jest kołem o promieniu 0,5 *dcm*, jeżeli przeciętnie za 1 dcm^2 pola płaci się 1 *zł* 20 *gr*!
9. Walec o wysokości 2 *m*, którego podstawa ma promień 9 *dcm*, toczył się po drodze i wykonał 45 obrotów. Jak wielkie pole opisał?
10. Oblicz pole pobocznicy naczynia, mającego kształt podany na załączonym rysunku; całkowita wysokość naczynia wynosi 20 *cm*, wysokość szyjki 4 *cm*, promień dna 5 *cm* i promień szyjki 1 *cm*. Narysuj siatkę tego naczynia w skali 1 : 5!
11. Oblicz pole zewnętrznej powierzchni rury walcowej długiej na 3,45 *m*, w której koło zewnętrzne ma promień 8 *cm*.



Rys. 80.

Objętość walca

Na rys. 81 mamy walec obrotowy. W koło, będące podstawą walca, wpiszmy wielokąt o wielkiej liczbie bardzo małych boków. Na wielokącie tym, jako podstawie, zbudujmy graniastosłup prosty o tej samej wysokości, co walec. Podstawy obu brył i ich objętości mało się od siebie różnią. Różnica będzie tem mniejsza, im więcej i im mniejszych



Rys. 81.

boków będzie miał wielokąt. W ten sposób przekonamy się, że objętość walca obrotowego oblicza się w podobny sposób, jak objętość graniastosłupa prostego.

Aby więc obliczyć objętość walca obrotowego np. w dcm^3, należy pomnożyć liczbę, wyrażającą pole podstawy w dcm^2, przez liczbę, wyrażającą wysokość w dcm.

Np. Mamy obliczyć objętość walca obrotowego o wysokości 5,8 m, którego podstawa ma promień 0,6 m.

Obliczamy najpierw obwód okręgu koła podstawowego. Obwód ten równa się:

$$3{,}14 \cdot 1{,}2\ m = 3{,}768\ m.$$

Przyjmujemy 3,77 m, gdyż π przyjęliśmy w III stopniu dokładności. Pole koła wynosi:

$$3{,}77 \cdot 0{,}3\ m^2 = 1{,}131\ m^2$$

Przyjmujemy: 1,13 m^2. Objętość walca równa się:

$$1{,}13 \cdot 5{,}8\ m^3 = 6{,}554\ m^3.$$

Przyjmujemy 6,55 m^3.

Zadania

1. Oblicz objętość walca obrotowego o wysokości:
   a) 6 *cm*, *b)* $8\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)* 2,4 *m*, *d)* $5\frac{3}{5}$ *dcm*, a którego podstawa ma promień:
   a) 2 *cm*, *b)* $2\frac{1}{4}$ *dcm*, *c)* 0,8 *m*, *d)* $1\frac{1}{8}$ *dcm*!
2. Oblicz objętość walca obrotowego o wysokości:
   a) 1,5 *dcm*, *b)* 8,2 *dcm*, *c)* 10,8 *m*, *d)* 0,69 *m*, *e)* 0,4 *m*, a którego podstawa ma promień:
   a) 0,7 *dcm*, *b)* 2,8 *dcm*, *c)* 4,65 *m*, *d)* 0,008 *m*, *e)* 0,05 *m*.
   Wszystkie liczby w tem zadaniu są przybliżone!
3. Jaka jest wysokość walca, którego objętość wynosi:
   a) $60\frac{3}{4}$ cm^3, *b)* 81,4 dcm^3, *c)* $\frac{3}{4}$ m^3, a którego promień podstawy ma:
   a) $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 2,4 *dcm*, *c)* $\frac{2}{5}$ *m*?
4. Jaka jest wysokość walca, którego objętość wynosi:
   a) 54,6 cm^3, *b)* 211,6 cm^3, *c)* 0,8 m^3, *d)* 2,4 dcm^3, a którego promień podstawy ma:
   a) 5,8 *cm*, *b)* 3,5 *cm*, *c)* 0,2 *m*, *d)* 1,2 *dcm*?
   Wszystkie liczby w tem zadaniu są przybliżone!
5. Oblicz, ile waży rura walcowa żelazna, 3,5 *m* długa, której promień zewnętrzny wynosi 2,8 *dcm*, wewnętrzny zaś 2,4 *dcm*, jeżeli 1 m^3 żelaza waży 7,25 *t*.
6. Jaka jest objętość ciała, które, zanurzone zupełnie w wodzie, znajdującej się w naczyniu kształtu walca, podniosło poziom wody w tem naczyniu o 14 *cm*, jeśli podstawa naczynia ma promień 5 *cm*?
7. Do naczynia kształtu walca, w którem podstawa ma promień 6 *cm*, wlano wody, a następnie wrzucono prostopadłościan o wymiarach 5 *cm*, 6,24 *cm*, 8 *cm*; o ile wskutek tego podniósł się poziom wody w tem naczyniu?
8. Naczynie w kształcie walca, którego promień podstawy ma 6 *cm*, waży pełne wody 8,5 *kg*, a jeśli odlać $\frac{1}{4}$ część tej wody, to waży 7 *kg*; *a)* jaka jest pojemność tego naczynia, *b)* ile waży naczynie próżne, *c)* jak wysokie jest to naczynie?

Treść

Ułamki 3

Ułamek jako część całości . . . 3
Zadania 3
Ułamki właściwe i niewłaściwe, liczby mieszane 5
Zadania 5
Rozszerzanie i skracanie ułamków 6
Zadania 6
Dodawanie i odejmowanie ułamków 8
Zadania 8
Ułamek jako wykładnik stosunku 11
Zadania 12

Ułamek jako iloraz dokładny 13

Iloraz dokładny 13
Zadania 13
Ułamek jako iloraz dokładny . 13
Zadania 14

Liczby dziesiętne 16

Wprowadzenie liczb dziesiętnych 16
Zadania 16
Dodawanie i odejmowanie liczb dziesiętnych 17
Zadania 17

Mnożenie i dzielenie ułamków 22

Mnożenie ułamka przez liczbę całkowitą 22
Określenie 22
Obliczanie iloczynu ułamka przez liczbę całkowitą 22
Zadania 25
Dzielenie ułamka przez liczbę całkowitą 26
Obliczanie ilorazu ułamka przez liczbę całkowitą 28
Zadania 29
Mnożenie ułamka przez ułamek 31
Ułamek wielkości lub liczby . 31
Zadania 32
Ułamek jako mnożnik 33
Zadania 34
Mnożenie liczby przez ułamek . 34
Zadania 36
Pole prostokąta 38
Zadania 38
Własności iloczynu 40
Ćwiczenia 43
Dzielenie przez ułamek 45
Wyznaczenie całości z jej ułamka 45
Zadania 46
Wyznaczanie, jakim ułamkiem jednej całości jest druga całość 46
Zadania 47
Iloraz liczb 48
Obliczanie ilorazu 49
Zadania 51
Własności ilorazu 52
Zadania . . . . 53—54
Ćwiczenia 55
Mnożenie i dzielenie liczb dziesiętnych 56
Mnożenie liczby całkowitej przez dziesiętną 56
Zadania 57
Dzielenie liczby dziesiętnej przez całkowitą 58
Zadania 60
Zaokrąglanie liczb 61
Zadania 63
Rozwinięcie ułamka zwykłego . 64
Zadania 64

Mnożenie i dzielenie liczby dziesiętnej przez ułamek . . . 65
Zadania 66
Mnożenie liczb dziesiętnych . . 66
Zadania 67
Dzielenie liczb dziesiętnych . . 69
Zadania 70
Iloraz w postaci ułamka 71
Zadania 71
Ćwiczenia 72
Liczby przybliżone 74
Działania na liczbach przybliżonych 75
Zadania 78

Zagadnienia praktyczne 81

Przeliczanie walut obcych . . . 81
Ciężar właściwy ciał 84
Zamiany różnych jednostek miary na metryczne 85
A) Dawne polskie miary długości 85
B) Dawne polskie miary powierzchni 85
C) Dawne polskie miary wagi . 86
D) Inne używane jednostki miar 86
Rachunki kupieckie, gospodarskie i inne 87
Procenty 94
Zadania 95
Skonto i rabat 99
Zadania 100
Obliczanie liczby, której procent jest znany 101
Zadania 101
Obliczanie procentu 103
Zadania 104

Powtórzenie wiadomości o trójkącie i wielokącie . . 106

Trójkąt 106
Suma kątów trójkąta 108
Zadania 108
Wielokąt 110

Pola 111

Metryczne jednostki miary pola 111
Pole prostokąta 112
Równoległobok 113
Zadania 114
Romb 115
Zadania 115
Pole równoległoboku 116
Zadania 117
Pole trójkąta 118
Zadania 119
Trapez 120
Zadania 121
Pole trapezu 122
Zadania 122
Pole wielokąta 124
Zadania 124
Graniastosłup prosty 129
Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych 129
Graniastosłup prosty o podstawie trójkątnej i wielokątnej 130
Zadania 132
Rzut równoległy skośny graniastosłupa prostego 133
Zadania 136
Pole powierzchni graniastosłupa prostego 137
Zadania 137
Objętości 139
Metryczne jednostki miary objętości i pojemności 139
Objętość prostopadłościanu . . 140
Zadania 142
Objętość graniastosłupa prostego 143
Zadania 145
Obwód i pole koła 147
Obwód koła 147
Zadania 148
Pole koła 150
Zadania 151
Walec obrotowy 152
Pole pow. walca obrotowego . . 152
Zadania 154
Objętość walca 155
Zadania 157