S. BANACH, W. SIERPIŃSKI i W. STOŻEK

ARYTMETYKA I GEOMETRJA

DLA VII KL. SZKOŁY POWSZECHNEJ

CENA WRAZ ZE ZNACZKIEM
NA TOWARZYSTWO POPIERANIA BUDOWY
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH
WYNOSI zł. 1,50

KSIĄŻNICA - ATLAS
S. A. ZJEDN. ZAKŁADY KARTOGRAF. I WYDAWNICZE T. N. S. W.
LWÓW-WARSZAWA
1935

Przy rozwiązywaniu zadań z liczbami statystycznemi wskazane jest posługiwanie się danemi statystycznemi z wydawnictwa: Wąsowicz i Zierhoffer: *Świat w cyfrach*

2593

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

Działania liczbami całkowitemi i ułamkowemi

Liczby całkowite i ułamki

1. Przeczytaj liczby:
   a) 18 023 146; *b)* 4 280 612 532;
   c) 816 273 142 121; *d)* 31 230 001 304 021.
2. Jaka cyfra znajduje się na miejscu setek, dziesiątek tysięcy, jednostek miljonów, setek miljonów, dziesiątek miljardów, jednostek biljonów w liczbie:
   a) 3 504 021 568 727; *b)* 26 210 104 100 003;
   c) 102 010 241 000 615; *d)* 10 005 030 900 001?
3. Napisz następujące liczby:
   a) pięćset sześć miljonów dwadzieścia tysięcy trzy;
   b) trzy miljardy osiemset miljonów tysiąc dziewięć;
   c) trzynaście biljonów dwa miljardy osiemnaście miljonów sto cztery tysiące dwadzieścia sześć!
4. Narysuj odcinek o długości 6 *cm*, a obok $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$ tego odcinka!
5. Napisz następujące ułamki w postaci ilorazu: $\frac{2}{7}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{21}{4}$, $\frac{64}{16}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{126}{11}$!
6. Napisz następujące ilorazy w postaci ułamka 5 : 6, 11 : 4, 28 : 6, 4 : 17, 29 : 3, 125 : 2, 245 : 600!
7. Ile to jest *g*: $\frac{3}{4}$ *kg*, $\frac{5}{8}$ *kg*, $\frac{9}{25}$ *kg*, $\frac{17}{50}$ *kg*?
8. Ile to jest *cm*: $\frac{2}{5}$ *m*, $\frac{3}{4}$ *m*, $\frac{19}{20}$ *m*, $\frac{13}{50}$ *m*?
9. Wyraź w ułamkach *m*: 10 *cm*, 50 *cm*, 64 *cm*, 71 *cm*!
10. Wyraź w ułamkach *kg*: 30 *g*, 125 *g*, 850 *g*, 4 *g*!
11. Uporządkuj wedle wielkości rosnących:
    a) $\frac{37}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{4}$; *b)* $\frac{1}{20}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{17}{20}$;
    c) $\frac{60}{15}$, $\frac{60}{12}$, $\frac{60}{3}$, $\frac{60}{45}$; *d)* $\frac{87}{3}$, $\frac{87}{5}$, $\frac{87}{2}$, $\frac{87}{16}$.

12. Zamień na liczbę mieszaną następujące ułamki:

a) $\frac{57}{4}$, $\frac{83}{7}$, $\frac{46}{11}$, $\frac{123}{15}$, $\frac{125}{18}$; *b)* $\frac{146}{13}$, $\frac{169}{15}$, $\frac{300}{29}$, $\frac{350}{47}$, $\frac{400}{91}$.

13. Zamień następujące liczby mieszane na ułamki:

a) $1\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$, $7\frac{5}{11}$, $10\frac{11}{12}$, $30\frac{1}{10}$; *b)* $21\frac{1}{55}$, $14\frac{6}{73}$, $25\frac{11}{60}$, $46\frac{13}{61}$.

14. Uprość następujące ułamki:

a) $\frac{4}{6}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{25}{75}$, $\frac{15}{60}$, $\frac{42}{105}$; *b)* $\frac{75}{90}$, $\frac{78}{90}$, $\frac{68}{442}$, $\frac{125}{135}$, $\frac{208}{304}$, $\frac{825}{915}$;

c) $\frac{108}{270}$, $\frac{288}{384}$, $\frac{342}{494}$, $\frac{221}{289}$, $\frac{252}{342}$, $\frac{225}{405}$;

d) $\frac{3\cdot 4}{3}$, $\frac{5}{3\cdot 10}$, $\frac{6}{2\cdot 18}$, $\frac{7}{14\cdot 6}$, $\frac{9}{3\cdot 5}$, $\frac{18}{6\cdot 7}$;

e) $\frac{12}{9\cdot 8}$, $\frac{16}{12\cdot 3}$, $\frac{24}{18\cdot 5}$, $\frac{30}{45\cdot 7}$, $\frac{63}{42\cdot 2}$, $\frac{24}{5\cdot 36}$.

15. Zamień ułamki:

a) $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{12}$ na ułamki o mianowniku 24;

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{19}{30}$, na ułamki o mianowniku 60;

c) $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{31}{36}$ na ułamki o mianowniku 72.

16. Zamień ułamki:

a) $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{12}{11}$ na ułamki o liczniku 24;

b) $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{2}{17}$, $\frac{30}{31}$, $\frac{15}{19}$, $\frac{20}{13}$ na ułamki o liczniku 60;

c) $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{24}{19}$ na ułamki o liczniku 72.

17. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:

a) $\frac{1}{2}=\frac{x}{4}$, $\frac{1}{2}=\frac{x}{8}$; *b)* $\frac{1}{2}=\frac{4}{x}$, $\frac{1}{2}=\frac{8}{x}$;

c) $\frac{2}{5}=\frac{x}{10}$, $\frac{2}{5}=\frac{x}{15}$; *d)* $\frac{2}{5}=\frac{6}{x}$, $\frac{2}{5}=\frac{8}{x}$;

e) $5=\frac{x}{4}$, $7=\frac{x}{9}$; *f)* $5=\frac{20}{x}$, $7=\frac{63}{x}$.

18. Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika:

a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{6}$ i $\frac{3}{11}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{30}$;

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$ i $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ i $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ i $\frac{1}{10}$;

c) $\frac{7}{16}$, $\frac{5}{14}$ i $\frac{11}{112}$; $\frac{11}{12}$, $\frac{19}{30}$ i $\frac{29}{18}$; $\frac{9}{35}$, $\frac{23}{21}$ i $\frac{17}{28}$;

d) $\frac{7}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{12}$ i $\frac{17}{18}$; $\frac{13}{24}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{41}{45}$ i $\frac{59}{60}$; $\frac{13}{30}$, $\frac{19}{45}$, $\frac{23}{50}$ i $\frac{31}{75}$;

e) $\frac{23}{54}$, $\frac{31}{60}$, $\frac{53}{72}$ i $\frac{1}{90}$; $\frac{29}{50}$, $\frac{11}{70}$, $\frac{62}{75}$ i $\frac{23}{175}$; $\frac{17}{30}$, $\frac{13}{42}$, $\frac{31}{63}$ i $\frac{41}{105}$.

19. Napisz ułamki $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$ w postaci liczb dziesiętnych!

20. Napisz ułamki $\frac{3}{10}$, $\frac{41}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{123}{100}$, $\frac{7}{1000}$, $\frac{246}{1000}$, $\frac{7}{10000}$, $\frac{164851}{10000}$ w postaci liczb dziesiętnych i przeczytaj je!

21. Ile to jest:

a) zł i *gr*: 2,34 *zł*, 5,02 *zł*, 0,45 *zł*, 0,04 *zł*;

b) m i *cm*: 5,06 *m*, 0,46 *m*, 1,02 *m*, 0,03 *m*;

c) km i *m*: 2,456 *km*, 1,53 *km*, 14,002 *km*, 0,045 *km*;

d) kg i *g*: 13,246 *kg*, 4,073 *kg*, 0,51 *kg*, 0,02 *kg*, 0,004 *kg*.

22. Zaokrąglij następujące liczby:

a) 2,61, 1,07, 0,456, 13,71, 0,061 do dziesiątych;

b) 2,456, 0,041, 1,006, 0,458, 1,0014 do setnych;

c) 1,2468, 0,0069, 0,0145, 0,1412 do tysięcznych;

d) 281, 246,1, 68,09, 164,9, 93 do dziesiątek;

e) 681, 214, 183,01, 1645, 2141,2 do setek;

f) 1681, 2142, 1893, 6421, 5140,2 do tysięcy.

Liczbę zaokrąglamy do jednostek pewnego rzędu, zastępując jednostki niższego rzędu zerami. Zer tych na rzędach dziesiętnych nie umieszczamy w zapisie. Natomiast, jeżeli ostatnią cyfrą po zaokrągleniu jest zero, to zero to zapisujemy, aby zaznaczyć, że niepewność ogranicza się do ostatniego zachowanego rzędu.

Np. Zaokrąglając 26,5034 do setnych, piszemy 26,50 (a nie 26,5).

Z opuszczonych rzędów bierzemy poprawkę, jeżeli cyfra najwyższego opuszczonego rzędu jest większa od 5.

Np. Zaokrąglając 28,793 do dziesiątych, piszemy 28,8.
„ „ 2347,5 do setek, piszemy 2300.

Dodawanie

1. Oblicz sumy:

a) 27 864 + 204 763, 58 624 215 + 19 735 249;

b) 3 716 272 + 147 689 541 + 983 211 857;

c) 7 360 942 863 + 316 654 273 306 + 83 164 279 411.

2. Oblicz:

a) $\frac{3}{5}+\frac{7}{25}$, $\frac{5}{9}+\frac{13}{36}$, $\frac{9}{10}+\frac{9}{40}$, $\frac{17}{18}+\frac{55}{144}$;

b) $\frac{17}{16}+\frac{11}{48}$, $\frac{11}{12}+\frac{13}{96}$, $\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{11}{35}$, $\frac{7}{24}+\frac{9}{16}+\frac{13}{48}$;

c) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}+\frac{1}{8}$, $\frac{3}{11}+\frac{4}{10}$, $\frac{1}{13}+\frac{2}{15}$, $\frac{52}{15}+\frac{1}{8}$;

d) $10\frac{5}{7}+\frac{19}{42}$, $\frac{7}{12}+14\frac{31}{36}$, $21\frac{15}{17}+18\frac{41}{51}$, $9\frac{13}{76}+5\frac{7}{19}$;

e) $10\frac{4}{15}+3\frac{5}{24}$, $12\frac{1}{11}+3\frac{5}{8}$, $6\frac{11}{50}+8\frac{7}{12}$, $3\frac{1}{18}+\frac{29}{36}$.

3. Dodaj wszystkie ułamki o wspólnym mianowniku 13 od $\frac{4}{13}$ do $\frac{10}{13}$ włącznie!

4. Oblicz:

a) $\frac{4}{7}+\frac{1}{5}+\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}+\frac{7}{18}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}+\frac{9}{10}+\frac{11}{12}+\frac{3}{6}$;

b) $6\frac{4}{11}+2\frac{1}{30}+5\frac{7}{22}$, $4\frac{9}{28}+15\frac{29}{70}+4\frac{19}{21}$, $40\frac{1}{52}+23\frac{13}{65}$;

c) $7\frac{11}{14}+2\frac{17}{35}+8\frac{5}{21}+3\frac{23}{30}$, $28\frac{19}{21}+3\frac{1}{42}+7\frac{11}{36}+25\frac{23}{84}$;

d) $8\frac{9}{35}+4\frac{1}{14}+6\frac{13}{21}+12\frac{29}{30}$, $16\frac{5}{14}+7\frac{5}{21}+14\frac{11}{28}+3\frac{51}{112}$;

e) $7\frac{1}{3}+4\frac{9}{10}+\frac{13}{30}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{5}$, $6\frac{5}{8}+4\frac{2}{5}+5\frac{7}{40}+1\frac{1}{10}$;

f) $6\frac{4}{9}+2\frac{3}{8}+11\frac{5}{12}+7\frac{23}{72}+\frac{17}{18}$, $7\frac{3}{8}+8\frac{4}{5}+10\frac{5}{16}$;

g) $8\frac{9}{14}+2\frac{5}{16}+3\frac{1}{4}+\frac{55}{112}+\frac{1}{8}$, $10\frac{11}{12}+4\frac{1}{8}+8\frac{3}{16}$.

5. Oblicz: $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}+\frac{7}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{11}{100}$, $1\frac{1}{10}+4\frac{7}{10}+$ $+12\frac{4}{100}+5\frac{23}{100}$! Powtórz rachunek, pisząc ułamki, jako liczby dziesiętne!

6. Oblicz:

a) 24,63 + 59,46 + 815,19; 0,526 + 63,2 + 463,12 + 1,5;

b) 618,2 + 46,583 + 1,649 + 118,7;

c) 0,649 + 0,512 + 6,211 + 214,25;

d) 3,72 + 248,4 + 12,78 + 2,9 + 46,35;

e) 6,4 + 0,48 + 25,04 + 1,4 + 0,62;

f) 8,94 + 1,0423 + 20,645 + 257,28 + 2,4385.

7. Oblicz:

a) 6,25 *m* + 14,4 *m* + 26,85 *m* + 236,2 *m* + 14,15 *m*;

b) 216,45 *zł* + 340,36 *zł* + 84,50 *zł* + 87,74 *zł* + 410,90 *zł*;

c) 0,95 *hl* + 4,84 *hl* + 11,4 *hl* + 200,04 *hl* + 25,6 *hl*;

d) 25,5 *km* + 65,624 *km* + 410,85 *km* + 0,432 *km*.

8. Następujące liczby są przybliżone:

a) 2,547, *b)* 13,48, *c)* 0,046, *d)* 0,0063, *e)* 1,00026, *f)* 0,000068.

Błąd każdej jest niewiększy od jednostki najniższego jej rzędu; wyznacz, w jakich granicach znajduje się dokładna liczba.

Rozwiązanie: Jeżeli 0,047 jest liczbą przybliżoną, to liczba dokładna może być co najwyżej o 0,001 większa od 0,047 albo też co najwyżej o 0,001 mniejsza od 0,047. Wynosi zatem co najwyżej 0,047 + 0,001 = 0,048, a co najmniej 0,047 — 0,001 = 0,046.

9. Oblicz, następujące sumy liczb przybliżonych (błąd w każdej liczbie jest nie większy od jednostki jej najniższego rzędu):

a)	*b)*	*c)*	*d)*
7,654	64,96	371,2	5,092
6,78	87,421	12,316	4,58
45,01	0,19	8,49	9,8
0,588	46,639	2,097	67,912
12,13	0,38	104,48	0,7

e) 1,4 + 69,342 + 1,3 + 136,52 + 0,48 + 30,8;

f) 8,18 + 9,579 + 0,2 + 21,263 + 0,42 + 8,1 + 6,12;

g) 846,4 + 1,2 + 8,45 + 0,532 + 1,7 + 216,48 + 7,912;

h) 142 + 7,4 + 18 + 489,8 + 65 + 9,1 + 16,23.

W sumie zachowujemy te miejsca dziesiętne, które występują we wszystkich składnikach. Z pozostałych miejsc możemy wziąć poprawkę.

Np.

3,25	76
18,20	
3,56	1
25,02	

Liczymy 1 + 7 = 8; poprawka 1, a następnie dodajemy jak zwykle.

Aby ocenić błąd w wyniku, zauważmy, że w każdym składniku błąd nie przekracza liczby 0,01. Ponieważ składników jest 3, więc błąd w sumie nie przekracza 3 · 0,01 = 0,03.

Oceń w ten sposób błąd w każdem zadaniu!

Często zależy nam na tem, aby w przybliżeniu oszacować wynik. W tym celu liczby, na których mamy wykonać działania, zaokrąglamy do jednego lub dwóch najwyższych rzędów. Obliczenia przeprowadzamy następnie, jak wyżej.

Np. Oszacować sumę: 517,6 + 389,5 + 24,6. Zachowując najwyższe rzędy, obliczamy sumę:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 00 \\ 4 & 00 \\ & 20 \\ \hline \end{array}$$

Otrzymujemy w przybliżeniu: $9|00$.

Dokładna wartość: 931,7.

Rachunek powyższy można było wykonać w pamięci.

W zadaniach staraj się oszacować wynik. Uchroni cię to od ewentualnych grubych błędów.

Ćwiczenia

1. Robotnik pracował w ciągu tygodnia: $7\frac{3}{4}$ godz., $8\frac{1}{3}$ godz., $7\frac{1}{2}$ godz., $6\frac{3}{4}$ godz., $7\frac{1}{3}$ godz., $7\frac{2}{3}$ godz. *a)* Oblicz, ile godzin pracował w ciągu całego tygodnia! *b)* Powtórz to zadanie, wyrażając czas pracy w każdym dniu zapomocą godzin i minut!
2. Jaś wydał: $2\frac{1}{10}$ *zł*, $3\frac{3}{4}$ *zł*, $1\frac{2}{5}$ *zł*, $2\frac{9}{10}$ *zł*; oblicz, ile razem wydał: *a)* dodając liczby mieszane, *b)* wyrażając poszczególne wydatki w *zł* i *gr*, *c)* wyrażając poszczególne wydatki w liczbach dziesiętnych złotego.
3. Kupiec sprzedał towaru: $1\frac{1}{4}$ *kg*, $\frac{3}{8}$ *kg*, $2\frac{3}{4}$ *kg*, $5\frac{1}{10}$ *kg*, $1\frac{1}{5}$ *kg*; oblicz, ile razem sprzedał: *a)* dodając liczby mieszane, *b)* wyrażając ciężary w *kg* i *g*, *c)* wyrażając ciężary w liczbach dziesiętnych *kg*.
4. Długość dróg bitych w Polsce w r. 1932 była następująca (w tysiącach *km*): województwa centralne 15,6,

wschodnie 3,6, zachodnie 12,6, południowe 15,5. Oblicz łączną długość dróg bitych!
5. Światowa produkcja aluminjum w 1930 r., wyrażona w tysiącach tonn wynosiła: w Stanach Zjednoczonych 103,9; w Kanadzie 34,9; w Niemczech 30,2; we Francji 26; w Norwegji 24,7; w Szwajcarji 20,5; w innych krajach 26,9; ile wynosiła razem?
6. Oblicz obwód podłogi w kształcie prostokąta o wymiarach (liczby przybliżone):
   a) 4,56 *m* i 3,4 *m*; *b)* 11,7 *m* i 8,65 *m*!
7. Oblicz obwód parceli w kształcie pięciokąta o bokach (liczby przybliżone):
   a) 5,8 *m*, 14 *m*, 12,5 *m*, 8,6 *m* i 7,2 *m*;
   b) 25,8 *m*, 49,6 *m*, 23 *m*, 18,7 *m* i 32,4 *m*!
8. Obwiązano paczkę w kształcie prostopadłościanu wzdłuż i wszerz sznurkiem. Długość tej paczki wynosiła 60 *cm*, szerokość $\frac{7}{12}$ długości, wysokość zaś $\frac{4}{5}$ szerokości; jak długi musiał być sznurek, jeśli 9 *cm* liczymy na węzeł?

Odejmowanie

1. Oblicz:
   a) 1 289 642 — 846 753, 3 238 256 — 1 948 368;
   b) 115 443 617 — 98 547 723;
   c) 247 861 000 — 158 947 216;
   d) 32 193 718 879 — 9 204 625 984.
2. Oblicz:
   a) $\frac{7}{11}-\frac{5}{11}$, $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$, $\frac{9}{7}-\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}-\frac{5}{12}$, $\frac{23}{22}-\frac{8}{11}$;
   b) $2-\frac{4}{7}$, $5-\frac{8}{15}$, $12-\frac{7}{30}$, $8-\frac{59}{60}$, $24-\frac{11}{13}$;
   c) $7\frac{1}{2}-3\frac{1}{2}$, $12\frac{3}{4}-9\frac{1}{4}$, $25\frac{4}{13}-12\frac{1}{13}$, $8\frac{31}{60}-2\frac{17}{60}$;
   d) $9\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$, $14\frac{3}{8}-9\frac{5}{8}$, $12\frac{1}{12}-7\frac{7}{12}$, $15\frac{3}{16}-9\frac{7}{16}$;
   e) $11\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{3}-2\frac{5}{6}$, $8\frac{11}{12}-3\frac{5}{8}$, $6\frac{7}{9}-2\frac{5}{6}$;
   f) $23\frac{2}{15}-11\frac{3}{10}$, $18\frac{1}{30}-15\frac{4}{5}$, $12\frac{5}{12}-6\frac{4}{9}$, $11\frac{7}{24}-2\frac{1}{36}$.

3. Jaką liczbę należy dodać do $3\frac{7}{10}$, aby otrzymać $5\frac{1}{2}$?
4. Jaką liczbę nalęży odjąć od $12\frac{9}{16}$, aby otrzymać $4\frac{3}{4}$?
5. Jaka liczba jest o $2\frac{3}{4}$ mniejsza od $5\frac{1}{2}$?
6. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:
   a) $4\frac{1}{2} + x = 8$, $x + 8\frac{11}{12} = 12$, $x + 4\frac{5}{6} = 8\frac{1}{4}$;
   b) $4\frac{7}{12} = 2\frac{1}{3} + x$, $8\frac{1}{2} = x + 3\frac{1}{6}$, $5\frac{3}{7} - x = 2\frac{1}{14}$.
7. Uzupełnij (zn. odejmij):
   a) $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{13}$ do 1; $1\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{4}$, $5\frac{4}{7}$, $7\frac{5}{12}$ do 10;
   b) $2\frac{3}{4}$ do 5; $7\frac{8}{11}$ do 13; $6\frac{5}{7}$ do 15, $25\frac{5}{21}$ do 40.
8. Oblicz:
   a) $16\frac{1}{12} + 4\frac{5}{12} - 8\frac{7}{12} - 2\frac{11}{12} + 4\frac{1}{12} - 3\frac{5}{12}$;
   b) $2\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + 3\frac{1}{4}$, $8\frac{5}{9} + 3\frac{1}{6} - 2\frac{3}{4}$, $12\frac{7}{15} - \frac{1}{2} + 4\frac{23}{30}$;
   c) $3 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$, $24\frac{7}{10} - 8\frac{1}{2} + 2\frac{5}{6} - 1\frac{4}{9}$;
   d) $12\frac{11}{16} - 8\frac{1}{3} + 2\frac{4}{9} - 3\frac{5}{6} + 1\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.
9. Oblicz:
   a) $14\frac{1}{2} - (6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{8})$, $20\frac{3}{4} - (8\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8}) - (1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2})$;
   b) $(22\frac{5}{9} + \frac{1}{2}) - (12\frac{3}{4} - 6\frac{1}{8})$, $(2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2}) - (4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{3})$;
   c) $45 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}) - (8\frac{3}{4} - 6\frac{1}{8})$.
10. Odejmuj, jak długo się da:
    a) 0,5 od 5,8; *b)* 0,6 od 10,9; *c)* 0,04 od 0,18.
11. Oblicz:
    a) $28{,}16 - 12{,}14$; $56{,}81 - 9{,}92$; $45{,}21 - 5{,}93$;
    b) $264{,}5 - 14{,}65$; $73{,}8 - 29{,}3814$; $15{,}4 - 8{,}9006$;
    c) $8{,}0245 - 1{,}721$; $76{,}844 - 12{,}4659$; $85{,}4 - 67{,}9432$.
12. Oblicz:
    a) $(47{,}82 - 16{,}704) + (23{,}44 - 12{,}084)$;
    b) $(64{,}25 - 12{,}354) - (8{,}02 - 4{,}26)$;
    c) $640{,}85 - (24{,}01 + 15{,}64) - 25{,}11$;
    d) $241{,}012 + (63{,}04 - 26{,}145) - (21{,}63 + 0{,}49)$;
    e) $(620 - 48{,}02) - (302{,}4 + 26{,}18) + 205{,}24$.
13. Oblicz:
    a) 84,18 *zł* — 62,46 *zł*, 4,83 *m* — 2,94 *m*;
    b) 12,48 *ha* — 9,83 *ha*, 15,8 *t* — 12,94 *t*, 4,5 *l* — 2,25 *l*;

    c) 4,85 *kg* — 3 *kg* 416 *g*, 15 *km*² 86 *ha* — 9 *km*² 95 *ha*;
    d) 8 *t* — 5 *t* 645 *kg*, 105 *ha* — 18 *ha* 9 *a*.
14. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:
    a) $25{,}84 + x = 35{,}96$; $x - 45{,}18 = 10$;
    b) $x - 2{,}6 = 3{,}45$; $64{,}13 - x = 4{,}02$;
    c) $(114{,}64 - x) + 18{,}4 = 96{,}04$;
    $(x - 8{,}14) + 12{,}2 = 15{,}04$;
    d) $(25{,}45 + x) + 5{,}6 = 80{,}01$;
    $(48{,}2 + x) - 10{,}2 = 100{,}06$.
15. Oblicz następujące różnice liczb przybliżonych (błąd w każdej liczbie jest nie większy od jednostki jej najniższego rzędu):

a)	18,645	*b)*	24,02	*c)*	4,0056	*d)*	6,432
	— 6,85		— 8,245		— 3,843		— 4,2845

Uwaga. Podobnie jak przy dodawaniu, zachowujemy i w odejmowaniu tylko te miejsca dziesiętne, które występują równocześnie w danych liczbach. Liczymy więc: *a)* $18{,}64 - 6{,}85 = 11{,}79$.

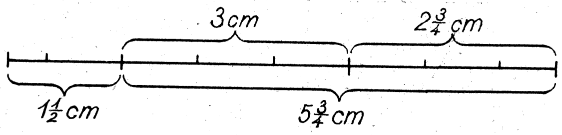
16. Oszacuj, a następnie oblicz następujące wyrażenia, w których występują liczby przybliżone. (Błąd jest nie większy od jednostki najniższego rzędu):
    a) $64{,}281 - 2{,}14 + 8{,}645 + 10{,}16 - 3{,}24 - 2{,}461$;
    b) $104{,}2 - 6{,}461 - 0{,}61 + 3{,}65 + 5{,}84 - 10{,}24$;
    c) $280{,}12 - 40{,}2 - 1{,}45 - 2{,}651 + 15{,}8 - 20{,}46$;
    d) $615{,}2 - 89{,}0 + 2{,}1 - 3{,}46 - 18{,}2 + 3{,}45$.

Zmiany sumy i różnicy

I. Mamy dwa odcinki: jeden o długości 3 *cm*, drugi o długości $2\frac{3}{4}$ *cm* (rys. 1). Ich suma wynosi $5\frac{3}{4}$ *cm*. Gdybyśmy jeden z nich (np. większy) powiększyli o $1\frac{1}{2}$ *cm*, to o $1\frac{1}{2}$ *cm* wzrośnie także suma obu odcinków. Zatem:

$$(3 + 1\tfrac{1}{2}) + 2\tfrac{3}{4} = 5\tfrac{3}{4} + 1\tfrac{1}{2}.$$

A więc, o ile zwiększymy jeden składnik sumy, o tyle zwiększy się suma.

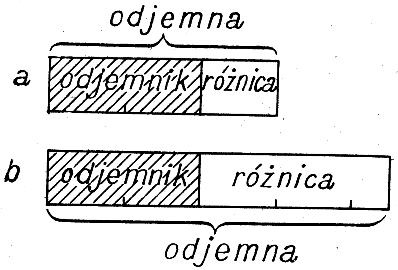


Rys. 1.

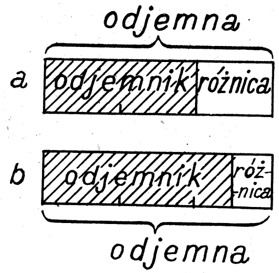
Oczywiście, że możemy powiedzieć: o ile zmniejszymy jeden składnik sumy, o tyle zmniejszy się suma.

II. Na rys. 2 *a* mam pasek o długości 3 *cm*, z którego odcięliśmy (część zacieniowaną) 2 *cm*. Pozostało więc *cm*: $3-2=1$. Gdybyśmy wzięli pasek o $1\frac{1}{2}$ *cm* większy, jak poprzednio i odcięli to samo (rys. 2 *b*), to różnica byłaby o $1\frac{1}{2}$ *cm* większa. A więc: $(3+1\frac{1}{2})-2=1+1\frac{1}{2}$. Widzimy zatem, o ile powiększymy odjemną, o tyle powiększy się różnica.

Podobnie przekonamy się, o ile pomniejszymy odjemną, o tyle pomniejszy się różnica.



Rys. 2.



Rys. 3.

III. Przypuśćmy, jak poprzednio, że z paska o długości 3 *cm* (rys. 3 *a*) odcięliśmy pasek o długości 2 *cm*. Pozostało więc *cm*: $3-2=1$. Gdybyśmy odcięli pasek o $\frac{1}{2}$ *cm* dłuższy niż poprzednio (rys. 3 *b*), to różnica byłaby o $\frac{1}{2}$ *cm* krótsza. A więc:

$$3-(2+\tfrac{1}{2})=1-\tfrac{1}{2}.$$

Widzimy stąd, o ile powiększymy odjemnik, o tyle pomniejszy się różnica.

Podobnie przekonywamy się, o ile pomniejszymy odjemnik, o tyle powiększy się różnica.

Zadania

1. Jeden składnik sumy powiększyliśmy o *a)* $2\frac{3}{4}$, *b)* 1,45, drugi o *a)* $1\frac{3}{8}$, *b)* 2,34. O ile zwiększyła się suma?
2. Jeden składnik sumy zwiększyliśmy o *a)* $5\frac{1}{9}$, *b)* 1,04, drugi zaś zmniejszyliśmy o *a)* $1\frac{2}{3}$, *b)* 0,12. O ile zwiększyła się suma?
3. Jeden składnik sumy zmniejszyliśmy o *a)* $8\frac{5}{12}$, *b)* 10,04, drugi o *a)* $3\frac{1}{4}$, *b)* 6,41. O ile zmniejszyła się suma?
4. W sumie liczb przybliżonych jeden składnik jest o 0,008 większy od liczby dokładnej, drugi zaś o 0,01. O ile suma liczb przybliżonych jest większa od sumy liczb dokładnych?
5. Jak zmieni się różnica, jeżeli:

   a) odjemną powiększymy o 4, $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{10}$, 3,4, 8,64;
   b) odjemną pomniejszymy o 6, $3\frac{1}{4}$, $8\frac{3}{5}$, 9,6, 1,02;
   c) odjemnik powiększymy o 3, $2\frac{7}{5}$, $4\frac{1}{6}$, 8,2, 0,41;
   d) odjemnik pomniejszymy o 5, $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{8}$, 0,6, 1,82.

   Objaśnij odpowiedzi na przykładach!
6. Jak zmieni się różnica, jeżeli:

   a) odjemną zwiększymy o $8\frac{1}{6}$, odjemnik zaś o $4\frac{1}{2}$;
   b) odjemną zwiększymy o 6,21, odjemnik zaś zmniejszymy o 4,16;
   c) odjemną zmniejszymy o $12\frac{1}{4}$, odjemnik zaś zwiększymy o $4\frac{1}{6}$;
   d) odjemną zmniejszymy o 0,04, odjemnik zaś o 2,1.

   Objaśnij odpowiedzi na przykładach!

Ćwiczenia

1. Rolnik ma dwa kawałki gruntu: jeden o powierzchni 3,4 *ha* i drugi o 75 *a* mniejszy; ile ma razem?
2. W naczyniu o pojemności 5 *l* było $2\frac{3}{4}$ *l* mleka, poczem odlano $1\frac{1}{2}$ *l*, a następnie dolano $1\frac{3}{4}$ *l*; ile *l* mleka brakuje, aby naczynie było pełne?
3. Ciężar brutto wynosi: *a)* 264 *kg*, *b)* 786,2 *kg*, *c)* 460 *kg*, *d)* $64\frac{1}{2}$ *kg*, netto zaś wynosi: *a)* 248,35 *kg*, *b)* 644,8 *kg*, *c)* 428,75 *kg*, *d)* $62\frac{3}{4}$ *kg*; ile wynosi tara?
4. 25 *kg* szynki waży po uwędzeniu 21,24 *kg*; ile wynosi strata na wadze wskutek uwędzenia?
5. Jajko waży $59\frac{1}{2}$ *g*, białko $29\frac{3}{4}$ *g*, żółtko zaś $21\frac{9}{10}$ *g*; ile waży skorupa?
6. Liczba listów, wyrażona w miljonach, wynosiła w Polsce: 584,4 w 1924 r., 672,3 w 1925 r., 736,1 w 1926 r., 832,7 w 1927 r., 933,8 w 1928 r., 999,2 w 1929 r.; oblicz przyrost z roku na rok i w czasie od 1924 r. do 1929 r. włącznie!
7. Światowy obrót handlowy, wyrażony w miljardach złotych, wynosił w roku 1929: w Europie 333,8, w Ameryce 162, w Azji 94,7, w Afryce 24,5, w Australji 16,6. W roku 1930 wynosił zaś: w Europie 287,2, w Ameryce 117,3, w Azji 72,9, w Afryce 20,2, w Australji 11,5. Oblicz ubytek obrotu handlowego w poszczególnych częściach świata i na całym świecie!
8. Obwód prostokąta wynosi: *a)* $35\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 38,4 *m*, *c)* 41,385 *km*, jeden zaś z boków: *a)* 7 *cm*, *b)* 10,75 *m*, *c)* 11,2 *km*; oblicz długość drugiego boku! Liczby w *b)* i *c)* są przybliżone.
9. W prostokącie jeden bok wynosi: *a)* $64\frac{3}{4}$ *m*, *b)* 8,7 *km*, *c)* 4,65 *m*; drugi jest o *a)* $5\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 1,325 *km*, *c)* 0,86 *m* krótszy. Oblicz obwód! Liczby w *b)* i *c)* są przybliżone.

Mnożenie

1. *a)* Pomnóż przez 10, 100, 1000, 10 000, następujące liczby: 3856, 20 780, 3100;
   b) Oblicz iloczyny:
   $54\,238 \cdot 12$, $41 \cdot 84\,523$, $580\,000 \cdot 210$,
   $71\,459\,000 \cdot 32$, $25\,000 \cdot 760\,000$.
2. Ile to jest:
   a) $\frac{3}{4}$ z 150 *l*, $\frac{5}{8}$ z 4 *kg*, $\frac{2}{3}$ z $\frac{6}{11}$ *hl*, $\frac{41}{15}$ z 8 *t*, $\frac{17}{12}$ z $\frac{21}{4}$ *g*;
   b) $\frac{4}{5}$ z 6 *dcm*, $\frac{11}{18}$ z 9 *km*, $\frac{11}{12}$ z $\frac{60}{7}$ m^2, $\frac{19}{7}$ z 8 m^3;
   c) $\frac{3}{5}$ z 8, $\frac{4}{7}$ z $\frac{2}{11}$, $\frac{13}{8}$ z 5, $\frac{4}{9}$ z $\frac{141}{12}$.
3. Oblicz:
   a) $15 \cdot \frac{3}{7}$, $\frac{4}{5} \cdot 8$, $7 \cdot \frac{5}{9}$; *b)* $35 \cdot \frac{2}{35}$, $\frac{11}{12} \cdot 12$, $9 \cdot \frac{7}{9}$;
   c) $45 \cdot \frac{8}{15}$, $\frac{5}{6} \cdot 18$, $32 \cdot \frac{7}{8}$; *d)* $4 \cdot \frac{11}{16}$, $\frac{5}{22} \cdot 11$, $23 \cdot \frac{19}{69}$;
   e) $8 \cdot \frac{5}{6}$, $\frac{11}{40} \cdot 50$, $12 \cdot \frac{7}{8}$; *f)* $2\frac{3}{4} \cdot 6$, $4\frac{1}{8} \cdot 2$, $5\frac{1}{2} \cdot 8$.
4. Oblicz:
   a) $\frac{7}{11} \cdot 12$, $\frac{7}{11} \cdot 10$; *b)* $\frac{15}{24} \cdot 25$, $\frac{15}{24} \cdot 23$;
   c) $\frac{11}{19} \cdot 20$, $\frac{11}{19} \cdot 18$; *d)* $\frac{11}{60} \cdot 61$, $\frac{11}{60} \cdot 59$;
   e) $\frac{23}{29} \cdot 30$, $\frac{23}{29} \cdot 28$; *f)* $\frac{29}{48} \cdot 49$, $\frac{29}{48} \cdot 47$.
   Licz: $\frac{3}{8} \cdot 9 = \frac{3}{8}(8+1) = \frac{3}{8} \cdot 8 + \frac{3}{8} \cdot 1 = 3\frac{3}{8}$;
   $\frac{3}{8} \cdot 7 = \frac{3}{8}(8-1) = 3 - \frac{3}{8} = 2\frac{5}{8}$.
5. Oblicz:
   a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$, $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{6}$, $\frac{12}{25} \cdot \frac{3}{5}$, $\frac{7}{9} \cdot \frac{14}{5}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$;
   b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$, $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{15}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3}$, $\frac{5}{24} \cdot \frac{9}{10}$, $\frac{7}{18} \cdot \frac{9}{2}$;
   c) $5\frac{4}{9} \cdot 2\frac{4}{7}$, $9\frac{2}{7} \cdot 3\frac{3}{13}$, $8\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$;
   d) $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 11} \cdot \dfrac{11}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{8 \cdot 9}{5} \cdot \dfrac{15}{16 \cdot 18}$, $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{11 \cdot 13} \cdot \dfrac{26 \cdot 33}{4 \cdot 25 \cdot 7}$;
   e) $343 \cdot \frac{65}{49}$, $27 \cdot \frac{53}{729}$, $693 \cdot \frac{127}{462}$;
   f) $\frac{72}{125} \cdot \frac{25}{36}$, $\frac{121}{117} \cdot \frac{39}{77}$, $\frac{729}{304} \cdot \frac{76}{81}$;
   g) $\frac{19}{225} \cdot \frac{63}{95}$, $26\frac{13}{27} \cdot \frac{21}{52}$, $15\frac{45}{64} \cdot 36\frac{72}{75}$.

   Uwaga. Uprość przed wykonywaniem mnożenia!
6. Oblicz:
   a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{10}{9}$, $\frac{11}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4}$, $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{13}{2}$;
   b) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$, $3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot 3$, $2\frac{3}{5} \cdot 2\frac{2}{5} \cdot 2$;

c) $\frac{8}{15}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{3}$, $\frac{4}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{8}$, $\frac{10}{21}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{3}{2}$;
d) $\frac{75}{100}\cdot\frac{63}{48}\cdot\frac{27}{72}$, $\frac{42}{21}\cdot\frac{57}{91}\cdot\frac{26}{19}$, $\frac{42}{75}\cdot\frac{39}{95}\cdot\frac{38}{91}\cdot\frac{45}{60}$;
e) $\frac{1}{8}\cdot 5\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}$, $3\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{14}\cdot\frac{8}{3}$, $\frac{33}{30}\cdot 2\frac{2}{11}\cdot\frac{56}{44}$.

$$\text{Np.:}\quad \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{7}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\overset{2}{\cancel{10}}\cdot\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot\underset{1}{\cancel{7}}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\underset{3}{\cancel{6}}}=\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}=\frac{2}{9}.$$

7. Oblicz następujące wyrażenia:
a) $(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{7})\cdot(\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{11})$; *b)* $\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2})\cdot\frac{7}{9}$; *c)* $\frac{1}{4}\cdot(2\cdot\frac{4}{5})\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11})$;
d) $\frac{3}{7}\cdot(\frac{2}{5}+\frac{1}{10})\cdot\frac{5}{9}$; *e)* $\frac{3}{5}\cdot(\frac{4}{3}-\frac{1}{2})\cdot(\frac{2}{7}+1)$.

8. Sprawdź następujące równości:
a) $(\frac{5}{12}+\frac{7}{8})\cdot\frac{6}{5}=(\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{5})+(\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{5})$;
b) $(\frac{25}{48}-\frac{15}{64})\cdot\frac{36}{125}=(\frac{25}{48}\cdot\frac{36}{125})-(\frac{15}{64}\cdot\frac{36}{125})$.

9. Oblicz:
a) $6{,}21\cdot 10$; $13{,}5\cdot 10$; $1{,}253\cdot 10$; $6{,}21\cdot 100$, $13{,}5\cdot 100$; $1{,}253\cdot 100$; $6{,}21\cdot 1000$; $13{,}5\cdot 1000$; $1{,}253\cdot 1000$;
b) $2{,}35\cdot 0{,}1$; $6{,}325\cdot\frac{1}{10}$; $2{,}55\cdot 0{,}1$; $2{,}35\cdot 0{,}001$; $6{,}524\cdot\frac{1}{100}$; $4{,}82\cdot\frac{1}{1000}$; $14{,}21\cdot\frac{1}{10000}$; $63{,}81\cdot 0{,}001$.

10. Oblicz:
a) $2{,}5\cdot 3{,}1$; $4{,}2\cdot 7{,}3$; $35\cdot 2{,}1$; $7{,}5\cdot 4$; $0{,}3\cdot 0{,}03$;
b) $7{,}3\cdot 2{,}01$; $0{,}5\cdot 0{,}2$; $7{,}35\cdot 0{,}031$; $25{,}01\cdot 0{,}5$;
c) $0{,}07\cdot 0{,}083$; $0{,}00032\cdot 0{,}000075$; $0{,}105\cdot 0{,}0024$.

11. Oblicz:
a) $3{,}8\cdot 0{,}4\cdot 1{,}6$; $14{,}5\cdot 0{,}9\cdot 0{,}002$; $0{,}031\cdot 40\cdot 3{,}84$;
b) $1{,}8\cdot 4{,}6\cdot 500\cdot 0{,}2$; $3{,}8\cdot 2{,}9\cdot 0{,}4\cdot 20$; $2{,}83\cdot 0{,}356\cdot 30\cdot 0{,}06$;
c) $2{,}7\cdot 3{,}4\cdot 0{,}5$; $0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}5$; $0{,}273\cdot 0{,}9\cdot 5$; $60{,}8\cdot 4{,}6\cdot 0{,}9$; $84\cdot 0{,}08\cdot 0{,}2$.

12. Oblicz:
a) $0{,}1^2$, $0{,}01^2$, $2{,}4^2$, $1{,}02^2$, $0{,}054^2$;
b) $0{,}1^3$, $0{,}2^3$, $0{,}4^3$, $2{,}1^3$, $0{,}01^3$, $0{,}21^3$.

13. Oblicz następujące iloczyny, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne: $\frac{7}{4}\cdot 2{,}13$; $\frac{15}{16}\cdot 0{,}32$; $0{,}01\cdot\frac{6}{25}$.

14. Pomnóż przez 40, 600, 8000 następujące liczby:
a) $19{,}465\ m$, $9{,}435\ kg$, $251{,}46$ *zł*;
b) $84{,}78\ ha$, $96{,}7225\ km^2$, $105{,}6425\ t$.

15. Zamieniając liczby mianowane na liczby dziesiętne *a) km*, *b) kg*, *c)* m^2, oblicz następujące iloczyny:
a) $2{,}4\cdot 13\ km\ 420\ m$; $5{,}4\cdot 1\ km\ 610\ m$; $4\cdot 12\ m\ 3\ dcm$;
b) $5\cdot 5\ kg\ 410\ g$; $0{,}2\cdot 27\ kg\ 350\ g$, $0{,}08\cdot 2\ kg\ 4\ dkg$;
c) $6{,}6\cdot 7\ m^2\ 14\ dcm^2$; $1{,}6\cdot 12\ m^2\ 4\ dcm^2$.

16. Oblicz:
a) $4{,}26\cdot\frac{3}{2}$; $0{,}24\cdot\frac{2}{3}$; $0{,}045\cdot\frac{4}{5}$; $2{,}12\cdot\frac{5}{4}$;
b) $0{,}0042\cdot\frac{5}{8}$; $4{,}125\cdot\frac{8}{3}$; $1{,}02\cdot 0{,}05\cdot\frac{11}{2}$.

17. Oblicz:
a) $(45{,}893-16.686)\cdot 0{,}8$; $(94{,}672-86{,}548)\cdot 0{,}9$;
b) $(23{,}46+11{,}394)\cdot 0{,}5$; $(16{,}444-3{,}846)\cdot 0{,}7$;
c) $(2{,}3+4{,}5)\cdot(0{,}3+3{,}6)$; $3{,}2\cdot(2{,}5\cdot 0{,}4)-0{,}7$;
d) $14{,}37-(2{,}54\cdot 3)+(5{,}19\cdot 5)$.

18. Oszacuj a następnie oblicz podane iloczyny, przyjmując, że 1) pierwszy czynnik jest dokładny, pozostałe zaś są przybliżone, 2) wszystkie czynniki są przybliżone. (Błąd w liczbach przybliżonych jest mniejszy od jednostki najniższego zachowanego rzędu):
a) $8{,}56\cdot 3{,}4$, $7{,}96\cdot 4{,}1$, $4{,}56\cdot 8{,}2$, $4{,}3\cdot 8{,}12$;
b) $3{,}4\cdot 0{,}35$, $4{,}8\cdot 0{,}34$, $76{,}9\cdot 0{,}41$, $0{,}62\cdot 0{,}041$;
c) $0{,}21\cdot 3{,}4\cdot 2{,}3$, $1{,}4\cdot 3{,}15\cdot 0{,}85$, $25{,}08\cdot 4{,}1\cdot 0{,}05$;
d) $1{,}87\cdot 0{,}24\cdot 2{,}005$, $0{,}04\cdot 1{,}256\cdot 2{,}0042$.

Rozwiązanie: cyframi znaczącemi liczby przybliżonej nazywamy te cyfry na rzędach zachowanych, które otrzymamy po odrzuceniu zer początkowych. Liczbę cyfr znaczących nazywamy stopniem dokładności przybliżenia.

Np. 0,00305 ma trzy cyfry znaczące, 0,00030 ma dwie cyfry znaczące. Zatem stopień dokładności liczby 0,00305 jest trzeci, liczby 0,00030 drugi. Jeżeli w iloczynie dwu liczb tylko jedna jest przybliżona, to iloczyn zaokrąglamy do tego stopnia dokładności, który posiada liczba przybliżona. Jeżeli obie liczby są przybliżone, to iloczyn zaokrąglamy do stopnia dokładności tej liczby, której stopień dokładności jest mniejszy (względnie do wspólnego stopnia, jeżeli obie liczby mają równy stopień dokładności).

Np. $7{,}41 \cdot 0{,}25 = 1{,}8525$.

Jeżeli 7,41 ma III st. dokł., zaś 0,25 jest liczbą dokładną, to iloczyn zaokrąglamy do trzeciego stopnia dokładności i jako wynik dostajemy 1,85.

Jeżeli obie liczby są przybliżone, pierwsza w III stopniu dokładności, druga w II stopniu dokł., to zaokrąglamy do II stopnia dokładności i otrzymujemy na wynik 1,8 (lub z poprawką 1,9).

Jeżeli chcemy oszacować wynik w mnożeniu lub dzieleniu, to liczby zaokrąglamy do I (lub II) stopnia dokładności. Rachunek przeprowadzamy następnie w podany już sposób. Np. Oszacuj iloczyn $0{,}42 \cdot 2{,}75$.

Zaokrąglając do I stopnia znaczącego otrzymujemy

$$0{,}4 \cdot 3 = 1{,}2.$$

Dokładna wartość wynosi 1,155.

19. Oceń błąd, jaki popełniasz przy obliczaniu iloczynu przybliżonego w zadaniu poprzedniem *a)* i *b)*.

Rozwiązanie: Iloczyn liczb przybliżonych (w II st. dokł.) 2,6 i 0,37 wynosi 0,96. W iloczynie dokładnym mogą być czynniki co najwyżej o jednostkę najniższego rzędu większe, względnie mniejsze.

Iloczyn dokładny wynosi zatem co najwyżej: $2{,}7 \cdot 0{,}38 = 1{,}026$ a co najmniej $2{,}5 \cdot 0{,}36 = 0{,}9$. Porównując oba te wyniki z wartością przybliżoną iloczynu widzimy, że błąd jest mniejszy od 0,1.

Ćwiczenia

1. Ziemia przebiega w ciągu jednej sekundy $30\frac{13}{25}$ *km*; ile *km* przebiegnie w ciągu roku ($365\frac{1}{4}$ dni)?

2. Śruba wkręca się o $\frac{3}{16}$ *mm* za każdym obrotem; jak głęboko wkręci się po $15\frac{2}{9}$ obrotach?
3. Dwaj robotnicy za wykonanie pewnej pracy otrzymali razem 120 *zł*; pierwszy wykonał $\frac{3}{4}$ pracy, drugi resztę. Ile każdy z nich zarobił?
4. Z dwóch miejscowości odległych od siebie o 100 *km*, wychodzą równocześnie naprzeciwko siebie dwaj posłańcy; jeden przebywa w ciągu godziny $4\frac{3}{5}$ *km*, drugi $5\frac{1}{4}$ *km*. W jakiej odległości od siebie będą po $6\frac{1}{2}$ godzinach?
5. Kwotę 3256 *zł* rozdzielono między cztery osoby tak, że pierwsza otrzymała $\frac{2}{5}$, druga $\frac{1}{8}$, trzecia $\frac{1}{4}$, a czwarta resztę. Ile otrzymała każda osoba?
6. Ktoś mierzył fałszywym metrem, mianowicie o $1\frac{1}{4}$ *cm* krótszym i wymierzył $15\frac{1}{2}$ *m*. Jaka jest prawdziwa długość?
7. Wapno gaszone zajmuje $3\frac{1}{2}$ razy większą objętość, aniżeli przed gaszeniem. Jaką objętość będzie miało $5\frac{3}{4}$ m^3 wapna po gaszeniu?
8.* Obwód pola w kształcie prostokąta wynosi 545,6 *m*, a szerokość jego wynosi 0,6 długości. Jaka jest wartość tego pola, jeśli 1 m^2 kosztuje 0,20 *zł*?
9. Oblicz w stopniach, minutach i sekundach kąt, jaki opisuje wskazówka mała (godzinowa) zegara w:
   a) $\frac{7}{15}$ godz.; *b)* $\frac{5}{12}$ godz.; *c)* $1\frac{3}{4}$ godz.?
10. Trawa, po wysuszeniu na siano, traci $\frac{13}{20}$ swego ciężaru. Jaka jest wartość zbiorów z łąki, która po pierwszem skoszeniu dała 12 *t* trawy, a przy drugiem $\frac{2}{3}$ tej ilości, jeśli *t* siana kosztuje 8 *zł*?
11.* Ile będzie kosztowało wybrukowanie trzech ulic o wymiarach 11,5 *m* i 98,2 *m*, 18,25 *m* i 72,5 *m*, 12,4 *m* 110,75 *m*, jeśli 1 m^2 kosztuje 1,5 *zł*?

---

* Liczby, w zadaniach oznaczonych gwiazdką (*), są przybliżone.

12. 30 mężczyzn, 20 kobiet i 15 dzieci urządziło wycieczkę, która przeciętnie kosztowała 2 zł za jedno dziecko, za jedną kobietę $\frac{7}{4}$ tego, co za dziecko i za jednego mężczyznę $\frac{5}{2}$ tego, co za dziecko; ile kosztowała wycieczka?

13. Ogrodzono plac w kształcie kwadratu o boku: a) $28\frac{1}{2}$ m, b)* 31,5 m, c)* 29,75 m płotem, którego 1 m kosztował: a) 4 zł, b)* 4,5 zł, c)* 4,2 zł; ile kosztowało całe ogrodzenie?

14.* Oblicz obwód koła, którego promień równa się: a) 4 cm, b) 1,75 m, c) 2,25 dcm, przyjmując $\pi = 3{,}14$!

15.* Jedno z kół samochodu wykonało podczas jazdy z miasta A do miasta B 60 000 obrotów (II stopień dokładności). Jaka jest odległość tych miast, jeżeli promień koła wynosi 0,33 m?

16. Duża wskazówka zegara ma 2 cm, mała 14 mm, wskazująca zaś sekundy 6 mm. Jaką drogę opisze koniec każdej z tych wskazówek w ciągu: a) doby, b) tygodnia, c) roku?

17. Oblicz pole kwadratu o boku: a) $3\frac{1}{2}$ m, b) $5\frac{3}{4}$ cm, c)* 2,4 dcm, d)* 0,2 cm!

18.* Stół kwadratowy o boku 0,9 m przykryty jest serwetą, która zwisa dookoła stołu na szerokość 0,25 m; jakie jest pole tej serwety?

19. Oblicz pole prostokąta o wymiarach: a) $5\frac{1}{2}$ m i $4\frac{3}{4}$ m, b)* 2,4 dcm i 5,8 dcm, c)* 6,75 km i 7,2 km!

20. Oblicz pole równoległoboku, którego podstawa wynosi: a) 3 m, b)* 4,6 m, c)* 2,75 dcm, wysokość zaś: a) $1\frac{1}{2}$ m, b)* 3,64 m, c)* 1,8 dcm!

21.* W ścianie o długości 6,28 m mają być wybite drzwi szerokości 1,26 m, w ten sposób, żeby krawędzie boczne drzwi były równo odległe od odpowiednich krawędzi bocznych ściany. Oblicz a) odległość bocznej krawędzi drzwi od odpowiedniej bocznej krawędzi

ściany, b) pole drzwi, jeżeli ich wysokość wynosi 2,15 m, c) pole ściany (bez drzwi), jeśli wysokość ściany wynosi 4,25 m!

22. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego podstawa wynosi: a) $6\frac{3}{4}$ cm, b)* 8,4 dcm, c)* 10,74 m wysokość zaś: a) $4\frac{1}{2}$ cm, b)* 10,85 dcm, c)* 12,9 m!

23. Oblicz pole trójkąta, którego podstawa wynosi: a) $15\frac{5}{8}$ m, b)* 16,45 dcm, c)* 12,86 km, wysokość zaś: a) $14\frac{1}{2}$ m, b)* 18,55 dcm, c)* 14,6 km!

24. Oblicz pole trapezu, którego boki równoległe mają: a) 3 m i 5 m, b)* 2,8 dcm i 4,6 dcm, c)* 3,25 m i 5,4 m, a wysokość: a) $2\frac{1}{2}$ m, b)* 3,5 dcm, c)* 4,8 m!

25.* Przekątna czworokąta ma długość 157,4 m i dzieli ten czworokąt na 2 trójkąty, z których jeden ma wysokość 74,6 m, drugi zaś 96,4 m, przyczem wysokości te są prostopadłe do przekątnej; oblicz pole tego czworokąta! Rysunek w skali 1 : 500!

26. Oblicz pole koła, którego promień równa się: a) 3 m, b) $4\frac{1}{5}$ cm, c)* 8,7 cm, d) $5\frac{3}{4}$ dcm, przyjmując za liczbę π raz $\frac{22}{7}$, drugi raz 3,14!

27. Oblicz pole pierścienia, zawartego między dwoma kołami współśrodkowemi o promieniach: a) 6 m i 4 m, b)* 4,6 dcm i 2,8 dcm, c) $5\frac{1}{4}$ km i $4\frac{1}{8}$ km!

28. W kwadrat o obwodzie 55 dcm wpisano koło. Oblicz jego pole! O ile jest ono mniejsze od pola kwadratu? Rysunek w skali 1 : 10!

29. Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi: a) $3\frac{1}{2}$ cm, b)* 5,8 dcm, c) $14\frac{3}{8}$ m! Narysuj siatkę w odpowiedniej skali!

30.* Bryłę marmuru w kształcie sześcianu o krawędzi 1,4 m, oszlifowano na całej powierzchni; ile zapłacono za tę pracę, jeśli za 1 m^2 płacono 8,50 zł?

31. Oblicz powierzchnię prostopadłościanu o wymiarach: *a)* $2\frac{1}{2}$ *cm*, $5\frac{3}{4}$ *cm*, 8 *cm*; *b)** 3,4 *dcm*, 5,8 *dcm*, 6 *dcm*; *c)** 4,5 *m*, 6,25 *m*, 7,42 *m*! Narysuj siatki!

32.* Pokój ma 8 *m* długości, 4,5 *m* szerokości, a 4,2 *m* wysokości. Podłoga kosztowała po 15 *zł* za 1 m^2, tynkowanie zaś po 5 *zł* za 1 m^2. Ile kosztowały razem podłoga i tynkowanie pokoju?

33. Oblicz powierzchnię graniastosłupa prostego o wysokości 8,4 *cm*, którego podstawa jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych 4,2 *cm* i 6 *cm*. Siatka!

34. Oblicz powierzchnię graniastosłupa prostego o wysokości 6 *cm*, którego podstawa jest trójkątem równoramiennym, przyczem podstawa tego trójkąta ma $4\frac{1}{2}$ *cm*, wysokość zaś $5\frac{1}{2}$ *cm*. Brakujące wymiary znajdź przy pomocy rysunku i pomiaru!

35. Oblicz powierzchnię walca prostego, którego podstawa jest kołem o promieniu: *a)* $4\frac{1}{2}$ *dcm*, *b)** 8,6 *dcm*, *c)* $9\frac{3}{4}$ *m*, a wysokość wynosi: *a)* 5 *dcm*, *b)** 12,4 *dcm*, *c)* $20\frac{1}{2}$ *m*.

36.* Podstawa rury walcowej ma promień wewnętrzny 4,5 *cm*, zewnętrzny 6,5 *cm*, długość zaś rury wynosi 3,6 *m*; oblicz powierzchnię tej rury!

37. Oblicz objętość sześcianu, którego krawędź wynosi: *a)* $9\frac{4}{5}$ *cm*, *b)** 4,6 *m*, *c)** 8,75 *dcm*.

38.* Jaki jest ciężar sześcianu, o krawędzi 1,2 *m*, wykutego z granitu, którego 1 cm^3 waży 2,65 *g*?

39. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach: *a)* 2 *cm*, $4\frac{1}{2}$ *cm*, $5\frac{1}{2}$ *cm*, *b)** 4,2 *dcm*, 5,4 *dcm*, 6,0 *dcm*, *c)** 2,5 *m*, 4,8 *m*, 6,75 *m*!

40. Ciało zanurzone w płynie traci pozornie tyle na swym ciężarze, ile waży płyn przez to ciało wyparty (t. zn. płyn tej samej objętości, co ciało). Np. 1 dcm^3 mosiądzu w powietrzu waży 8,5 *kg*, a 1 dcm^3 wody 1 *kg*. Zatem 1 dcm^3 mosiądzu w wodzie waży 8,5 *kg*, — 1 *kg* = 7,5 *kg*. Sześcian z mosiądzu o krawędzi: *a)* 4 *cm*, *b)* 8,7 *cm*, *c)* $6\frac{3}{4}$ *cm*, wrzucono do wody; ile waży w wodzie?

41. Graniastosłup prosty, zrobiony z drzewa dębowego, o wysokości $8\frac{1}{2}$ *cm*, ma za podstawę romb, w którym przekątne wynoszą $4\frac{1}{5}$ *cm* i $3\frac{3}{4}$ *cm*; oblicz ciężar tego graniastosłupa. 1 cm^3 drzewa dębowego waży 0,7 *g*!

42. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 7,5 *cm* jest czworokąt, w którym jedna przekątna wynosi 3 *cm* i dzieli go na dwa trójkąty o wysokościach 4,5 *cm* i 2,4 *cm*, (przekątna jest wspólną podstawą trójkątów). Oblicz objętość tego graniastosłupa!

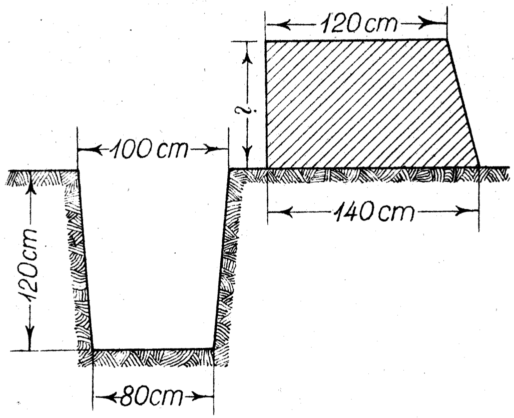
43. Rów długości 8 *m* ma kształt graniastosłupa prostego, którego podstawa jest trapezem równoramiennym o bokach równoległych 2 *m* i 3 *m*, wysokości zaś 1,8 *m*. Oblicz, ile *hl* wody ten rów pomieści!

44. Oblicz objętość walca obrotowego, którego podstawa ma promień: *a)* 7 *cm*, *b)** 4,8 *dcm*, *c)** 6,75 *m*, a którego wysokość wynosi: *a)* $1\frac{1}{2}$ *dcm*, *b)** 8,2 *dcm*, *c)** 10,2 *m*!

45.* Oblicz, ile waży rura walcowa żelazna długości 3,5 *m*, której promień zewnętrzny wynosi 2,8 *dcm*, wewnętrzny zaś 2,4 *dcm*; 1 m^3 żelaza waży 7,25 *t*!

46. Do menzurki, której podstawa ma promień 5 *cm*, wrzucono ciało tak, że zupełnie się zanurzyło, wskutek czego poziom wody w menzurce podniósł się o 14 *cm*. Jaka jest objętość tego ciała?

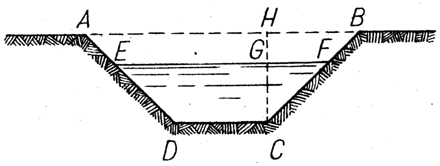
47. Piechota wykopała rów strzelecki, a następnie zrobiła z wykopanej ziemi zasłonę (rys. 4). Zarówno przekrój rowu strzeleckiego, jak i zasłony są trapezami o wymiarach podanych na rysunku. Oblicz: *a)* pole przekroju rowu, *b)* wysokość zasłony, *c)* ilość wykopanej ziemi, jeśli rów był na 500 *m* długi, *d)* liczbę żołnierzy potrzebnych do wykopania tego rowu w przeciągu



Rys. 4.

$2\frac{1}{2}$ godziny, jeśli jeden żołnierz w ciągu jednej godziny wykopie $\frac{1}{2}$ m^3 ziemi.

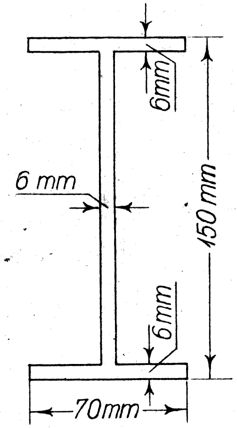
48. Wykopano rów osuszający, którego przekrój jest trapezem równoramiennym (rys. 5), przyczem $AB = 3{,}6$ *m*,



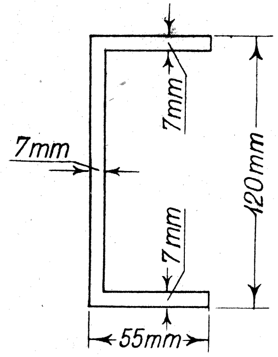
Rys. 5.

$DC = 1{,}2$ *m*, $EF = 2{,}8$ *m*, $CG = 0{,}8$ *m*, $GH = 0{,}4$ *m*. Oblicz: *a)* pole trapezu $ABDC$ (tak zwane pole wykopu), *b)* pole trapezu $EFCD$ (pole przekroju wody), *c)* objętość wody w rowie długim na 800 *m*, *d)* rys. 5 przedstawia plan przekroju rowu w skali 1 : 100; zmierz długość odcinka ED i oblicz długość linji łamanej $EDCF$, czyli t. zw. obwód zwilżony, *e)* oblicz pole powierzchni zwilżonej rowu, długiego na 600 *m*!

49. Na rys. 6 zaznaczone są wymiary przekroju dźwigara żelaznego. Oblicz: *a)* pole tego przekroju, *b)* objętość dźwigara długiego na 8 *m*, *c)* ciężar 6 takich dźwigarów, podtrzymujących sufit, przyjmując, że 1 cm^3 żelaza waży 7,5 *g*.



Rys. 6.



Rys. 7.

50. Na rys. 7 zaznaczone są wymiary przekroju dźwigara żelaznego. Oblicz: *a)* pole tego przekroju, *b)* objętość dźwigara długiego na 6,5 *m*, *c)* jego ciężar, przyjmując, że 1 cm^3 żelaza waży 7,5 *g*.

Dzielenie

1. Oblicz:
   a) 574 186 : 14, 2 560 489 : 25;
   b) 7 859 600 : 130, 768 400 000 : 125 000;
   c) 69 848 764 : 2400, 976 532 400 : 120 000.
2. Przed wykonaniem dzielenia uprość:
   a) $\frac{7}{9} : 3$, $\frac{12}{13} : 4$, $\frac{14}{15} : 7$, $\frac{8}{15} : 8$, $\frac{9}{16} : 9$;
   b) $\frac{24}{25} : 6$, $\frac{24}{25} : 8$, $\frac{48}{125} : 6$, $\frac{48}{125} : 12$, $\frac{48}{125} : 24$;
   c) $\frac{8}{9} : 12$, $\frac{12}{25} : 42$, $\frac{16}{15} : 24$, $\frac{56}{77} : 72$, $\frac{72}{99} : 96$;

d) $5\frac{1}{11} : 7$, $11\frac{5}{9} : 13$, $14\frac{1}{4} : 9$, $5\frac{1}{7} : 6$, $10\frac{10}{17} : 15$;
e) $8\frac{1}{2} : 17$, $10\frac{2}{3} : 24$, $8\frac{4}{5} : 22$, $18\frac{3}{4} : 50$, $13\frac{1}{3} : 75$.

3. Podaj odwrotności następujących liczb:
a) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$; *b)* 3, 5, 10; *c)* $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $7\frac{2}{5}$, $5\frac{1}{3}$!

4. Oblicz (Po zamianie ilorazu na iloczyn uprość!):
a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{3}$, $\frac{7}{5} : \frac{8}{25}$, $\frac{4}{3} : \frac{8}{3}$, $\frac{7}{15} : \frac{7}{25}$, $\frac{12}{25} : \frac{18}{5}$;
b) $4 : \frac{2}{3}$, $5 : \frac{5}{6}$, $2 : \frac{2}{5}$, $9 : \frac{3}{4}$, $10 : \frac{100}{101}$;
c) $2\frac{1}{5} : \frac{7}{5}$, $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$, $5 : 2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} : 1\frac{1}{5}$, $7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$;
d) $\frac{8}{15} : \frac{4}{15}$, $\frac{1}{6} : \frac{1}{42}$, $\frac{5}{6} : \frac{1}{48}$, $\frac{20}{21} : \frac{4}{7}$, $\frac{22}{31} : \frac{11}{2}$;
e) $8 : \frac{4}{5}$, $6 : \frac{2}{7}$, $\frac{65}{72} : \frac{13}{72}$, $\frac{99}{90} : \frac{11}{90}$, $\frac{8}{5} : \frac{4}{45}$;
f) $7\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$, $4\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$, $5\frac{5}{12} : \frac{13}{12}$, $1\frac{11}{12} : \frac{23}{2}$, $6\frac{14}{15} : 1\frac{11}{15}$;
g) $3\frac{5}{24} : 3\frac{1}{18}$, $19\frac{1}{4} : \frac{22}{5}$, $4\frac{21}{25} : 5\frac{2}{15}$, $2\frac{5}{6} : \frac{34}{3}$, $15\frac{6}{20} : \frac{17}{3}$;
h) $369 : \frac{41}{37}$, $27 : \frac{108}{113}$, $\frac{51}{26} : \frac{68}{65}$;
i) $17\frac{3}{13} : \frac{49}{52}$, $107 : 35\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{32} : 7\frac{13}{16}$;
j) $6\frac{86}{121} : \frac{2}{121}$, $5\frac{7}{121} : 5\frac{35}{44}$, $\frac{477}{187} : \frac{252}{561}$.

5. Ile wynosi mnożna, jeżeli:
a) iloczyn wynosi $\frac{3}{4}$, a mnożnik $\frac{5}{7}$;
b) iloczyn wynosi $1\frac{1}{2}$, a mnożnik $\frac{8}{11}$;
c) iloczyn wynosi $3\frac{4}{5}$, a mnożnik $1\frac{8}{9}$?

6. Ile wynosi mnożnik, jeżeli:
a) iloczyn wynosi $\frac{17}{4}$, a mnożna $\frac{5}{8}$;
b) iloczyn wynosi $3\frac{1}{6}$, a mnożna $\frac{23}{12}$;
c) iloczyn wynosi $4\frac{1}{2}$, a mnożna $3\frac{1}{4}$?

7. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce litery x:
a) $x \cdot \frac{3}{4}$ *zł* $= 18$ *zł*, $x \cdot \frac{3}{10}$ *l* $= 1\frac{1}{2}$ *l*;
b) $x \cdot \frac{4}{5}$ *kg* $= \frac{17}{2}$ *kg*, $x \cdot \frac{2}{5}$ godz. $= 2\frac{1}{2}$ godz.;
c) $\frac{5}{4} \cdot x$ *cm* $= 1\frac{1}{2}$ *cm*, $\frac{11}{4} \cdot x$ *l* $= \frac{3}{5}$ *l*;
d) $1\frac{1}{2} \cdot x$ *kg* $= 3\frac{1}{5}$ *kg*, $1\frac{1}{12} \cdot x$ godz. $= 24$ godz.

8. Przekonaj się o prawdziwości następujących równości:
a) $(\frac{2}{3} + \frac{1}{7}) : \frac{4}{5} = (\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) + (\frac{1}{7} : \frac{4}{5})$;
b) $(\frac{11}{24} + 5\frac{2}{5} - \frac{14}{15}) : \frac{7}{8} = (\frac{11}{24} : \frac{7}{8}) + (5\frac{2}{5} : \frac{7}{8}) - (\frac{14}{15} : \frac{7}{8})$.

9. Przez co trzeba pomnożyć liczbę $3\frac{1}{2}$, aby otrzymać 4?

10. Iloczyn dwóch liczb wynosi $\frac{11}{8}$, jedna z tych liczb jest $2\frac{1}{3}$. Ile wynosi druga?

11. Jaka liczba podzielona przez: *a)* $\frac{3}{2}$, *b)* $2\frac{1}{3}$, *c)* $5\frac{3}{7}$, daje iloraz: *a)* $\frac{4}{5}$, *b)* $\frac{11}{8}$, *c)* $3\frac{1}{6}$?

12. Oblicz:
a) 17,4 : 6, 0,414 : 9, 8,0037 : 9, 5,92 : 16;
b) 40,32 : 24, 248,16 : 75, 557,91 : 15, 0,728 : 140;
c) 225,36 : 18, 0,1568 : 49, 11,322 : 306, 0,4263 : 87.

13. Podziel następujące liczby: 3,71; 23,573; 0,941; 0,2 przez: *a)* 0,1; *b)* 0,01; *c)* 0,001!

14. Oblicz:
a) 3,45 : 100, 17,51 : 1000, 1272,7 : 10, 0,1 : 10, 0,01 : 100, 0,001 : 1000;
b) 2,34 : 0,1, 0,45 : 0,01, 18,12 : 0,001, 0,02 : 0,0001, 47 : 0,01, 1 : 0,001.

15. Oblicz następujące ilorazy:
a) 2,7 : 1,2, 36,54 : 4,5, 7,2 : 2,5, 2,8 : 11,2;
b) 5,6 : 0,35, 0,231 : 022, 0,003 : 9,6, 0,102 : 0,34;
c) 2295,06 : 5,8, 176,244 : 0,38, 7,0567 : 1,19;
d) 65142 : 0,6, 22,62 : 0,006, 5,068 : 2,8;
e) 2,508 : 0,66, 9,7704 : 9,2, 0,617 28 : 0,0096;
f) 0,000 03 : 0,002, 0,000 07 : 0,000 005, 3 : 0,000 016;
g) 0,53 : 0,2, 5,7 : 0,5, 15,7 : 3,51, 0,083 : 0,0005.

16. Oblicz:
a) 2 *m* 7 *cm* : 0,3; 3 *km* 240 *m* : 1,8; 1 *m* 2 *dcm* 6 *cm* : 0,24;
b) 5 *q* 67 *kg* : 2,1; 4 *t* 5 *q* 76 *kg* : 0,11; 7 *kg* : 0,056. Zamień liczby mianowane na dziesiętne odpowiedniej jedności!

17. Przez jaką liczbę należy pomnożyć: *a)* 3,7, *b)* 75,6, *c)* 0,803, *d)* 0,00025, aby otrzymać *a)* 0,0037, *b)* 0,756, *c)* 80,3, *d)* 2,5?

18. Oblicz:
a) $8{,}82 : \frac{5}{6}$, $0{,}16 : \frac{4}{5}$, $2{,}4 : \frac{8}{7}$, $2{,}1 : \frac{6}{5}$;
b) $19{,}23 : \frac{51}{8}$, $10{,}152 : 3\frac{11}{12}$, $11{,}652 : 2\frac{1}{9}$;
c) $6{,}832 : \frac{103}{12}$, $14{,}186 : 1\frac{5}{8}$, $9{,}085 : 4\frac{1}{6}$.

19. Przedstaw następujące ułamki: $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{32}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{8}{13}$, jako ilorazy i oblicz ich wartość do trzech miejsc znaczących.
20. Oszacuj a następnie oblicz podane ilorazy: 1) gdy dzielna jest dokładna a dzielnik przybliżony, 2) gdy dzielna i dzielnik są przybliżone.
Błąd liczb przybliżonych jest mniejszy od jednostki ostatniego zachowanego rzędu.
a) 2,4 : 1,65, 0,41 : 1,25, 4,62 : 0,056;
b) 0,000485 : 0,021, 245,1 : 0,45, 2684 : 0,16.

Jeżeli w ilorazie dwóch liczb jedna liczba jest przybliżona, to iloraz zaokrąglamy do stopnia dokładności liczby przybliżonej. Jeżeli natomiast obie liczby są przybliżone, to iloraz zaokrąglamy do stopnia dokładności tej liczby, której stopień jest mniejszy (względnie do wspólnego stopnia dokładności, jeżeli obie liczby posiadają ten sam stopień dokładności). Np. $3,26 : 0,045 = 72,4\ldots$

Jeżeli dzielna jest dokładna, zaś dzielnik ma III stop. dokł., to na wynik przyjmujemy 72,4. Jeżeli dzielnik ma II, zaś dzielna III stop. dokł., to na wynik przyjmujemy 72.

Zmiany iloczynu i ilorazu

Zmiany iloczynu. Przypuśćmy, że iloczyn: $15 \cdot 17 \cdot \frac{2}{3}$ chcemy pomnożyć przez jakąś liczbę np. przez $2\frac{1}{2}$; zatem mamy obliczyć iloczyn: $2\frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 17 \cdot \frac{2}{3})$.

Ponieważ w iloczynie możemy w dowolnym porządku działania wykonywać, więc

$$2\tfrac{1}{2} \cdot (15 \cdot 17 \cdot \tfrac{2}{3}) = (2\tfrac{1}{2} \cdot 15) \cdot 17 \cdot \tfrac{2}{3} = 15 \cdot (2\tfrac{1}{2} \cdot 17) \cdot \tfrac{2}{3} = 15 \cdot 17 \cdot (2\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}).$$

Zatem iloczyn mnożymy przez liczbę, mnożąc jeden czynnik (którykolwiek) przez tę liczbę.

Przypuśćmy, że iloczyn: $15 \cdot 17 \cdot \frac{2}{3}$ chcemy podzielić przez $2\frac{1}{2}$ t. j. $\frac{5}{2}$; mamy zatem obliczyć iloraz: $(15 \cdot 17 \cdot \frac{2}{3}) : \frac{5}{2}$.

Lecz $(15 \cdot 17 \cdot \frac{2}{3}) : \frac{5}{2} = (15 \cdot 17 \cdot \frac{2}{3}) \cdot \frac{2}{5} = (15 \cdot \frac{2}{5}) \cdot 17 \cdot \frac{2}{3}$.

Z uwagi na to, że: $15 \cdot \frac{2}{5} = 15 : \frac{5}{2}$, otrzymujemy:

$$(15 \cdot 17 \cdot \tfrac{2}{3}) : \tfrac{5}{2} = (15 : \tfrac{5}{2}) \cdot 17 \cdot \tfrac{2}{3}.$$

Podobnie postępując, otrzymamy:

$$(15 \cdot 17 \cdot \tfrac{2}{3}) : \tfrac{5}{2} = 15 \cdot (17 : \tfrac{5}{2}) \cdot \tfrac{2}{3} = 15 \cdot 17 \cdot (\tfrac{2}{3} : \tfrac{5}{2}).$$

A więc iloczyn dzielimy przez liczbę, dzieląc jeden czynnik (którykolwiek) przez tę liczbę.

Uwaga. Z powyższego wynika, że jeżeli jakiś czynnik iloczynu pomnożymy (wzgl. podzielimy) przez jakąś liczbę, to przez to cały iloczyn pomnożymy (wzgl. podzielimy) przez tę liczbę.

Zmiany ilorazu. Przypuśćmy, że iloraz $5 : 6$ mamy pomnożyć przez 2. A więc mamy obliczyć: $(5 : 6) \cdot 2$.

Zamieniając iloraz na ułamek, otrzymamy:

$$\frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{5 \cdot 2}{6} = \frac{5}{6 : 2}.$$

Zatem: $(5 : 6) \cdot 2 = (5 \cdot 2) : 6 = 5 : (6 : 2)$.

Widzimy stąd, że iloraz mnożymy przez liczbę, mnożąc dzielną lub dzieląc dzielnik przez tę liczbę.

Podobnie przekonywamy się, że iloraz dzielimy przez liczbę, dzieląc dzielną lub mnożąc dzielnik przez tę liczbę.

Np. Mamy obliczyć: $(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}) : \frac{7}{2}$. Wyrażenie powyższe wynosi: $(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}) \cdot \frac{2}{7}$. Mamy teraz iloraz pomnożyć przez liczbę, zatem możemy mnożyć dzielną lub dzielić dzielnik.

Otrzymamy więc albo: $(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}) : \frac{5}{6}$ albo $\frac{3}{4} : (\frac{5}{6} : \frac{2}{7})$.

Wyrażenie powyższe możemy napisać w postaci:

$$(\tfrac{3}{4} : \tfrac{7}{2}) : \tfrac{5}{6} \text{ albo: } \tfrac{3}{4} : (\tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{2}).$$

Pierwsze wyrażenie wskazuje, że iloraz dzielimy przez liczbę, dzieląc dzielną, drugie zaś, że iloraz dzielimy, mnożąc dzielnik.

Zadania

1. W iloczynie $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{9}$ powiększ jeden z czynników: *a)* 3 razy, *b)* 5 razy, *c)* 13 razy; ile razy powiększy się iloczyn? Sprawdź rachunkiem!
2. W iloczynie *a)* $\frac{4}{11} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{13}{15}$, *b)* $4{,}2 \cdot 3{,}1 \cdot 1{,}6$ powiększ jeden czynnik 2 razy, inny 7 razy; ile razy powiększy się iloczyn? Sprawdź rachunkiem!
3. W iloczynie $\frac{4}{11} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{6}{17}$ powiększ jeden czynnik 3 razy, a drugi czynnik pomniejsz 5 razy; jak zmieni się iloczyn? Sprawdź rachunkiem!
4. W ilorazie $\frac{4}{7} : \frac{3}{11}$ powiększ dzielną *a)* 2 razy, *b)* 5 razy, *c)* $\frac{5}{9}$ razy; jak za każdym razem zmieni się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
5. W ilorazie $\frac{5}{13} : \frac{17}{21}$ powiększ dzielnik: *a)* 6 razy, *b)* $\frac{13}{3}$ razy, *c)* $\frac{9}{2}$ razy; jak za każdym razem zmieni się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
6. W ilorazie $4{,}2 : 0{,}8$ powiększono dzielną 5 razy, dzielnik zaś zmniejszono 5 razy; jak zmienił się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
7. W ilorazie $\frac{7}{19} : \frac{23}{16}$ powiększono dzielną 5 razy, dzielnik zaś zmniejszono 8 razy; jak zmienił się iloraz? Sprawdź rachunkiem!

Ćwiczenia

1. $\frac{5}{8}$ *kg* pewnego towaru kosztuje $\frac{5}{2}$ *zł*; ile kosztuje 1 *kg* tego towaru?
2. Ile kosztuje gram złota, jeśli $2\frac{1}{2}$ *g* złota kosztuje $14\frac{1}{2}$ *zł*?
3. Automobil przebiegł w $5\frac{1}{2}$ godziny 260 *km*; jaką drogę przebiegł w 1 godzinie?
4. Robotnik za $3\frac{1}{2}$ godziny pracy otrzymał $8\frac{3}{4}$ *zł*; ile płacono mu za 1 godzinę pracy?
5. W ciągu $\frac{5}{6}$ godziny robotnik wykonał $\frac{2}{5}$ przyjętej pracy; w jakim czasie wykona całą pracę?

6. 12 *l* wina rozlano w butelki o pojemności $\frac{3}{4}$ *l*; ile butelek napełniono?
7. Ile razy odcinek $13\frac{1}{2}$ *m* jest dłuższy od odcinka $2\frac{1}{4}$ *m*?
8. Kilogram cukru kosztuje $1\frac{1}{2}$ *zł*; ile *kg* cukru otrzymamy za $6\frac{1}{4}$ *zł*?
9. Zegar przyśpiesza dziennie o $2\frac{2}{9}$ minuty; po ilu dniach przyśpieszy godzinę?
10. Ile kamizelek można uszyć ze sztuki 6 *m* sukna, jeśli na jedną kamizelkę potrzeba $\frac{3}{5}$ *m* sukna?
11. Metr ma około $1\frac{3}{4}$ łokcia; ile to jest metrów $4\frac{1}{5}$ łokcia?
12. Śruba wkręca się o $\frac{3}{4}$ *mm* za jednym obrotem; ile razy trzeba śrubę obrócić, aby wkręciła się o $3\frac{3}{4}$ *mm*?
13. Oblicz bok kwadratu, którego obwód wynosi: *a)* $21\frac{3}{4}$ *cm*, *b)** 15,48 *dcm*, *c)* $18\frac{1}{16}$ *km*!
14.* Obwód kwadratu równa się obwodowi prostokąta o wymiarach 4,51 *m* i 7,6 *m*. Oblicz bok tego kwadratu! Rysunek w skali 1 : 100!
15.* Pole w kształcie kwadratu można obejść w 1,7 minuty, przyjmując, że idzie się z prędkością 4,5 *km* na godzinę. Oblicz długość boku tego kwadratu!
16. Oblicz promień koła, którego obwód wynosi: *a)** 18,84 *cm*, *b)* 5 *dcm*, *c)* $2\frac{1}{8}$ *m*!
17. Jaka jest wysokość prostokąta, w którym podstawa równa się: *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *b)** 4,5 *dcm*, *c)* $4\frac{1}{5}$ *m*, *d)* $\frac{7}{4}$ *m*, *e)** 2,4 *m*, a którego pole wynosi: *a)* $17\frac{1}{2}$ cm^2, *b)** 14,4 dcm^2, *c)* $15\frac{9}{40}$ m^2, *d)* 0,7 m^2, *e)** 0,6 m^2?
18.* Zamieniono pole w kształcie prostokąta o wymiarach 156 *m*, 75 *m*, w cenie 3,75 *zł* za 1 m^2, na pole w cenie 2,5 *zł* za 1 m^2; ile pola na zamianie zyskano?
19.* W ogrodzie w kształcie prostokąta, o polu 10,08 *a*, przeprowadzono równolegle do dłuższego boku drogę

* Liczby, w zadaniach oznaczonych gwiazdką (*), są przybliżone.

na 2,5 *m* szeroką, wskutek czego uprawna część zmniejszyła się o 1,05 *a*; jakie były wymiary ogrodu?

20.* Dokoła ogrodu w kształcie prostokąta biegnie ścieżka 0,85 *m* szeroka. Pole ogrodu wraz z ścieżką ma 37,96 *a*, długość zaś 73 *m*; jakie jest pole ścieżki?

21. Ile wynosi podstawa równoległoboku, którego pole ma: *a)* $22\frac{1}{2}$ *cm*², *b)** 36,72 *dcm*², *c)* $43\frac{1}{8}$ *m*², wysokość zaś: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)** 5,4 *dcm*, *c)* $5\frac{3}{4}$ *m*?

22. Ile wynosi wysokość równoległoboku, którego pole ma: *a)* $6\frac{3}{5}$ *dcm*², *b)** 115,5 *m*², *c)* $85\frac{1}{2}$ *km*², *d)** 2,8 *cm*², *e)* $\frac{5}{8}$ *m*², podstawa zaś: *a)* 3 *dcm*², *b)** 15,4 *m*, *c)* $11\frac{1}{4}$ *km*, *d)** 3,5 *cm*, *e)* 1,6 *m*?

23.* Przez pole w kształcie równoległoboku, o podstawie 85,6 *m* i wysokości 62,5 *m*, poprowadzono równolegle do podstawy drogę na 2,6 *m* szeroką, resztę zaś sprzedano po 55 *zł* za ar; jaką kwotę uzyskano?

24. Jaka jest wysokość trójkąta, którego pole wynosi: *a)* 1 *m*², *b)** 2,2 *a*, *c)* 1 *ha*, podstawa zaś: *a)* $1\frac{1}{2}$ *m*, *b)** 20,5 *m*, *c)* $175\frac{3}{4}$ *m*?

25. Pole trapezu wynosi: $39\frac{1}{8}$ *cm*², *b)** 0,388 *ha*, *c)* 1,815 *a*, boki zaś równoległe mają: *a)* 4 *cm* i $11\frac{1}{4}$ *cm*, *b)** 112,4 *m* i 81,6 *m*, *c)* $14\frac{1}{8}$ *m* i $16\frac{1}{8}$ *m*; oblicz wysokość trapezu!

26. Pole w kształcie trapezu sprzedano za 5760 *zł*, licząc po 48 *zł* za 1 *a*; wysokość trapezu wynosiła 80 *m*, jeden zaś z boków równoległych miał 135 *m*. Oblicz długość drugiego boku równoległego!

27. Obwód koła wynosi: *a)* 8 *m*, *b)** 14,5 *dcm*, *c)* $4\frac{2}{5}$ *cm*; oblicz jego pole!

28. Pole koła o promieniu 3,4 *cm* równa się polu prostokąta o podstawie 8 *cm*; oblicz wysokość prostokąta!

29. Prostopadłościan, którego podstawa jest kwadratem o boku: *a)* 5 *cm*, *b)** 3,5 *cm*, ma pole: *a)* 130 *cm*², *b)** 103,25 *cm*²; jak wysoki jest prostopadłościan?

30. Pole pobocznicy walca wynosi: *a)** 15,7 *dcm*², *b)** 36,424 *a*, *c)* 35,325 *m*², wysokość zaś walca: *a)** 2,5 *dcm*, *b)** 4,5 *m*, *c)* $3\frac{3}{4}$ *m*; jaki jest promień podstawy walca!

31. Powierzchnia walca wynosi: *a)* 125,6 *cm*², *b)* 357 *dcm*², *c)** 486,7 *m*²; promień zaś podstawy: *a)* 2 *cm*, *b)* $2\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)** 5,4 *m*. Oblicz wysokość walca?

32. Jaka jest wysokość prostopadłościanu, o objętości: *a)* 140 *cm*³, *b)** 33,12 *dcm*³, *c)* $81\frac{13}{16}$ *m*³, którego podstawa ma: *a)* 40 *cm*², *b)** 14,4 *dcm*², *c)* $19\frac{1}{4}$ *m*²?

33. Jak wysoką powinna być sala o długości 9 *m* i szerokości $4\frac{1}{2}$ *m*, jeśli ma pomieścić 45 uczniów, przyczem liczymy po 4 *m*³ powietrza na 1 osobę?

34.* Kostka cukru ma wymiary 22 *cm*, 24 *cm*, 0,8 *cm*; oblicz, ile kostek cukru przypada na 1 *kg*, jeżeli 1 *cm*³ cukru waży 1,6 *g*!

35. Lampa gazowa zużywa 24 *m*³ powietrza na godzinę, lampa naftowa 20 *m*³, świeca 6 *m*³, wreszcie człowiek przez oddychanie 7 *m*³. Pokój ma 4,8 *m* długości, 3,8 *m* szerokości, a 3,4 *m* wysokości; *a)* w jakim czasie 5 osób zużyłoby całkowicie powietrze w tym pokoju, gdyby nie było dopływu świeżego powietrza? *b)* w jakim czasie powietrze będzie zużyte, jeśli nadto pali się lampa gazowa lub naftowa, albo też świeca?

36. Objętość graniastosłupa prostego wynosi: *a)* 1080 *cm*², *b)* 25 *dcm*³, *c)* $871\frac{7}{8}$, podstawa zaś: *a)* 135 *cm*², *b)* 6,25 *dcm*², *c)* 5625 *m*²; jaka jest wysokość tego graniastosłupa?

37. Objętość graniastosłupa prostego wynosi: *a)** 14,7 *cm*³, *b)* $261\frac{27}{32}$ *dcm*³, *c)** 162,4 *m*³, wysokość zaś: *a)** 7,5 *cm*, *b)* $9\frac{1}{2}$ *dcm*, *c)** 8,5 *m*; jakie jest pole podstawy tego graniastosłupa?

38. Jaka jest wysokość walca o objętości: *a)* 60,68 cm^3, *b)** 81,4 dcm^3, *c)* 211,6 m^3, którego promień podstawy ma: *a)* $4\frac{1}{2}$ *cm*, *b)** 2,4 *dcm*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *m*?

39. Do naczynia kształtu walca, w którem podstawa ma promień 6 *cm*, wlano wody, a następnie wrzucono prostopadłościan o wymiarach 5 *cm*, 6,24 *cm*, 8 *cm*; o ile wskutek tego podniósł się poziom wody?

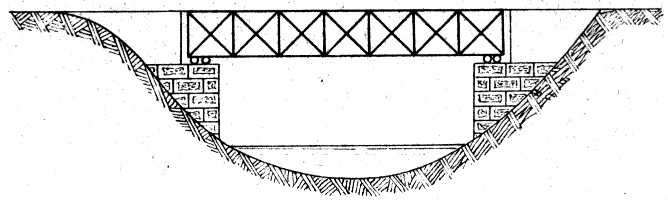
40.* Tunel prowadzący przez górę św. Gotarda w Alpach zbudowano w czasie od 4 lipca 1872 r. do 5 lutego 1880 r. Tunel ma 14,9 *km* długości, a koszty jego budowy wyniosły 102,8 miljonów *zł*. Oblicz: *a)* koszty budowy 1 *m* tunelu, *b)* ile przeciętnie czasu potrzeba było, aby wybudować 1 *m* tunelu, *c)* ile czasu potrzebuje pociąg, aby przejechać przez tunel z prędkością 60 *km* na godz.?

41. Najszybszy pociąg w Europie jedzie na przestrzeni Paryż—Calais (298 *km*) z prędkością 93 *km* na 1 godz.; oblicz: *a)* ile *m* na 1 sek. przebiega ten pociąg, *b)* czas jazdy z Paryża do Calais?

42.* Średnia prędkość parowca wynosi 23 mil morskich na godz. (1 mila morska = 1,852 *km*); jak długo jedzie parowiec z Gdańska do New Yorku (6800 *km*, II stop. dokł.)?

43. Odległość bieguna od równika mierzona na południku wynosi 90°, albo 10 000 *km*. Z Warszawy, której szerokość geograficzna wynosi 52°13′5″, wystartował lotnik, lecąc wzdłuż południka przeciętnie z prędkością 180 *km* na godz.; po jakim czasie przyleci nad biegun północny?

44. Przez rzeczkę o szerokości 16 *m* poprowadzono most o rozpiętości 21 *m*. Belka kwadratowa żelaznej konstrukcji (kratownica) składa się (rys. 8) z 7 kwadratów o boku 3 *m*; *a)* oblicz koszty budowy tego mostu, jeśli 1 *m* bieżący kratownicy kosztuje 1300 *zł*,



Rys. 8.

a $\frac{2}{3}$ kosztów budowy całego mostu przypada na obie kratownice; *b)* oblicz ciężar obu kratownic, jeśli ciężar 1 *m* bieżącego kratownicy wynosi 2,75 *t*; *c)* podaj rysunek w skali 1 : 200 kratownicy o rozpiętości 27 *m*, złożonej z 9 kwadratów!

Stosunek. Przedstawienia graficzne

Stosunek dwóch lub kilku wielkości

Przypuśćmy, że mamy dane dwie wielkości, np. dwa odcinki AB i CD (rys. 9). Przyjmijmy, że odcinek a mieści się 5 razy w AB, 3 razy zaś w CD

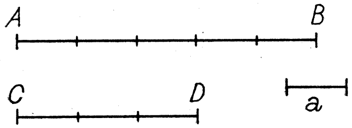
Iloraz 5 : 3 nazywamy **wykładnikiem stosunku** odcinka AB do CD.

Wykładnik stosunku odcinka AB do CD oznaczamy:

$$AB : CD \text{ lub } \frac{AB}{CD}.$$

Zatem: $AB : CD = 5 : 3 = \frac{5}{3}$ lub $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}$.

Czytamy: AB jest w stosunku do CD, jak 5 do 3.



Rys. 9.

Z rys. 9 widzimy, że odcinek AB jest $\frac{5}{3}$ odcinka CD. Wykładnik stosunku dwóch odcinków wskazuje więc, jakim ułamkiem odcinka drugiego jest odcinek pierwszy.

Jeżeli odcinek a obierzemy za jednostkę długości, to długość odcinka AB wyrazi się liczbą 5, długość zaś odcinka CD liczbą 3.

Wykładnik stosunku $\frac{5}{3}$ jest więc równy ilorazowi długości odcinków AB i CD (wyrażonych w tych samych jednostkach długości).

P r z y k ł a d: Jaki jest wykładnik stosunku odcinków AB i CD, o długości: $5\frac{1}{2}$ *cm* i $3\frac{1}{5}$ *cm*?

R o z w i ą z a n i e: Ponieważ wykładnik stosunku jest równy ilorazowi długości (przy tej samej jednostce), więc:

$$AB : CD = 5\tfrac{1}{2} : 3\tfrac{1}{5} = \tfrac{55}{32}.$$

Czytamy: odcinek AB jest w stosunku do CD, jak $5\frac{1}{2}$ do $3\frac{1}{5}$.

U w a g a: To samo odnosi się do innych wielkości, jak pola, objętości, ciężary i t. p.

a) Jeżeli mamy dwa kwadraty o polach odpowiednio 4 cm^2 i 9 cm^2, to mówimy, że są do siebie w stosunku jak 4 do 9, lub, że wykładnik stosunku pól wynosi $4 : 9 = \frac{4}{9}$.

b) Dwa ciężary jeden $2\frac{1}{4}$ *kg*, drugi $3\frac{1}{2}$ *kg* są do siebie w stosunku jak $2\frac{1}{4}$ do $3\frac{1}{2}$; wykładnik stosunku tych ciężarów wynosi $2\frac{1}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{9}{14}$.

Z a d a n i e 1. Odcinek AB ma 5 *cm*; jak wielki jest odcinek CD, jeżeli $CD : AB = 2 : 3$.

R o z w i ą z a n i e: Oznaczmy przez x długość (w *cm*) odcinka CD. Mamy: $x : 5 = 2 : 3$, więc $x : 5 = \frac{2}{3}$.

Ponieważ szukamy dzielnej, więc $x = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.

Zatem odcinek CD ma $\frac{10}{3}$ *cm*.

Z a d a n i e 2. Odcinek AB ma 2 *cm*; jak wielki jest odcinek CD, jeżeli $AB : CD = 3 : 5$.

R o z w i ą z a n i e: Oznaczmy przez x długość (w *cm*) odcinka CD. Mamy: $2 : x = 3 : 5$, więc $2 : x = \frac{3}{5}$.

Ponieważ szukamy dzielnika, więc $x = 2 : \frac{3}{5} = \frac{10}{3}$. Zatem odcinek CD ma $\frac{10}{3}$ *cm*.

Zadania

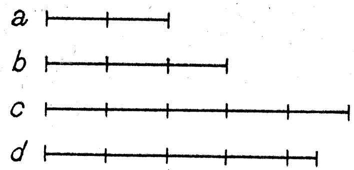
1. W jakim stosunku jest odcinek AB do odcinka CD, jeśli odcinek AB ma: *a)* 2 *cm*, *b)* $\frac{3}{4}$ *dcm*, *c)* 0,8 *dcm*, odcinek zaś CD: *a)* 3 *cm*, *b)* $\frac{4}{5}$ *dcm*, *c)* 1,2 *dcm*?
2. W jakim stosunku są do siebie pola kwadratów o bokach: *a)* 5 *cm* i 3 *cm*, *b)* $\frac{1}{2}$ *dcm* i $\frac{2}{3}$ *dcm*, *c)* 0,6 *dcm* i 0,8 *dcm*? W jakim stosunku są do siebie obwody tych kwadratów?
3. W jakim stosunku są do siebie dwa ciężary: *a)* 3 *kg* i 8 *kg*, *b)* $\frac{5}{4}$ *kg* i $\frac{3}{10}$ *kg*, *c)* 0,6 *kg* i 1,6 *kg*?
4. W jakim stosunku są do siebie dwie pojemności: *a)* 5 *l* i 8 *l*, *b)* $\frac{3}{4}$ *l* i $\frac{1}{2}$ *l*, *c)* 1,2 *l* i 0,8 *l*?
5. Dwa odcinki są do siebie w stosunku jak: *a)* 2 : 3, *b)* 5 : 4, *c)* $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, *d)* 1,7 : 2,3; dłuższy z nich ma: *a)* 7 *cm*, *b)* 35 *km*, *c)* $2\frac{5}{7}$ *dcm*, *d)* 13,5 *km*. Ile wynosi krótszy?
6. Dwa ciężary są do siebie w stosunku jak: *a)* 3 : 1, *b)* 6 : 8, *c)* 1,2 : $\frac{4}{3}$, *d)* $\frac{5}{3} : \frac{4}{7}$; mniejszy ma: *a)* 2,5 *kg*, *b)* $\frac{5}{12}$ *kg*, *c)* 7,5 *kg*, *d)* $3\frac{2}{5}$ *kg*. Ile *kg* ma większy?
7. Jedno naczynie napełnimy, wlewając $2\frac{1}{2}$ szklanki wody, drugie, wlewając $4\frac{1}{2}$ takich szklanek wody. Jaki jest wykładnik stosunku pojemności tych naczyń do siebie? Jaka jest pojemność mniejszego naczynia, jeżeli większe ma pojemność 0,9 *l*?
8. Dwa prostokąty mają równe podstawy, a wysokości są w stosunku jak 2 : 3. Przekonaj się, że ich pola są również w stosunku jak 2 : 3, przyjmując np., że podstawa ma: *a)* 1 *cm*, *b)* $2\frac{1}{2}$ *cm*, *c)* 1,5 *cm*, wyso-

kość zaś pierwszego prostokąta wynosi: *a)* 2 *cm*, *b)* $3\frac{1}{4}$ *cm*, *c)* 2,5 *cm*.

9. Dwa ciężary są do siebie w stosunku jak $1\frac{1}{2} : 2$. Narysuj obok siebie dwa prostokąty o równej podstawie np. 1 *cm*, których wysokości będą w stosunku $1\frac{1}{2} : 2$. Pola tych prostokątów będą również w stosunku $1\frac{1}{2} : 2$. W ten sposób uzmysłowisz sobie ciężary i ich stosunek. Powtórz to zadanie, gdy ciężary są do siebie w stosunku, jak *a)* $2 : 3$, *b)* $3 : 2\frac{1}{2}$!

Podział w danym stosunku

Mówimy, że kilka odcinków np. a, b, c, d (rys. 10) są do siebie w stosunku jak liczby 2, 3, 5, $4\frac{1}{2}$, jeżeli wykładnik stosunku dwóch odcinków równa się ilorazowi odpowiednich liczb.



Rys. 10.

A więc: $a : b = 2 : 3$, $a : c = 2 : 5$, $c : d = 5 : 4\frac{1}{2}$, $c : a = 5 : 2$ i t. d.

Zapisujemy to: $a : b : c : d = 2 : 3 : 5 : 4\frac{1}{2}$.

Uwaga. Pomnóżmy liczby 2, 3, 5, $4\frac{1}{2}$ przez jakąkolwiek liczbę (różną od zera) np. przez 2. Otrzymamy liczby 4, 6, 10, 9. Oczywiście iloraz odpowiednich liczb nie zmieni się. Mamy bowiem $2 : 3 = 4 : 6$, $3 : 4\frac{1}{2} = 6 : 9$ i t. d. Możemy więc napisać:

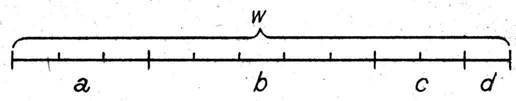
$$a : b : c : d = 4 : 6 : 10 : 9.$$

Przypuśćmy, że stosunek kilku odcinków dany jest przy pomocy liczb ułamkowych np.: $a : b : c : d =$

$= \frac{2}{3} : \frac{5}{4} : \frac{7}{12} : \frac{5}{6}$; mnożąc te liczby przez ich wspólny mianownik (t. j. 12) otrzymamy:

$$a : b : c : d = 8 : 15 : 7 : 10.$$

Stosunek kilku odcinków wyraziliśmy więc przy pomocy liczb całkowitych.

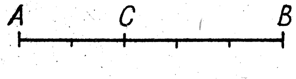


Rys 11.

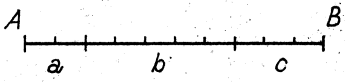
Na rys. 11 mamy odcinek w, podzielony na odcinki a, b, c, d takie, że $a : b : c : d = 3 : 5 : 2 : 1$.

Mówimy, że odcinek w został podzielony w stosunku $3 : 5 : 2 : 1$ (czytaj 3 do 5 do 2 do 1).

Na rys. 12 mamy odcinek AB podzielony na dwa odcinki w stosunku $2 : 3$.



Rys. 12.



Rys 13.

Zadanie: Odcinek AB o długości 4 *cm* podzielić w stosunku $2 : 5 : 3$.

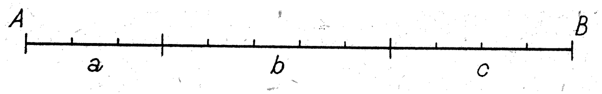
Dzielimy w tym celu odcinek na $2 + 5 + 3$ t. j. 10 równych części (rys. 13).

Odcinki a, b, c, mające odpowiednio 2, 5, 3 takie części, są oczywiście szukanemi odcinkami. Mamy bowiem $a : b : c = 2 : 5 : 3$.

Ponieważ $\frac{1}{10}$ odcinka AB ma 0,4 *cm*, więc odcinki a, b, c, mają odpowiednio długości: 0,8 *cm*, 2 *cm*, 1,2 *cm*.

Uwaga. Gdyby stosunek, w jakim mamy podzielić dany odcinek, nie był wyrażony w liczbach całkowitych, to te liczby mnożymy przez ich wspólny mianownik.

Np.: Chcemy podzielić dany odcinek AB w stosunku



Rys. 14.

$\frac{1}{2} : \frac{5}{6} : \frac{2}{3}$. Mnożąc liczby te przez 6, widzimy, że należy odcinek podzielić w stosunku: $3 : 5 : 4$. Dzielimy odcinek AB na $3 + 5 + 4$ t. j. 12 równych części. Odcinki a, b, c, zawierające odpowiednio 3, 5, 4 takich części, są szukanemi odcinkami. (Rys. 14).

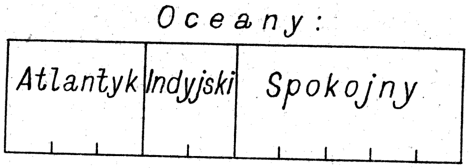
Zadania

1. Podziel odcinek: *a)* 10 *cm* w stosunku $2 : 3$, *b)* 120 *cm* w stosunku $7 : 8$, *c)* 85 *cm* w stosunku $3 : 7$.
2. Podziel odcinek *a)* 10 *cm* w stosunku $\frac{2}{3} : 1 : \frac{5}{3}$, *b)* 12 *cm* w stosunku $\frac{1}{2} : \frac{5}{6} : \frac{2}{3}$, *c)* 20 *cm* w stosunku $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{12}$.
3. Podziel liczbę: *a)* 24 w stosunku $1 : 2 : 5$, *b)* 663 w stosunku $2 : 3 : 8$, *c)* 4000 w stosunku $1 : 7 : 8$.
4. Podziel liczbę: *a)* 385 w stosunku $5 : 7 : 11 : 12$, *b)* 3854 w stosunku $6 : 8 : 10 : 12$, *c)* 3120 w stosunku $2 : 3 : 4 : 6$.
5. Podziel pole prostokąta o bokach 2 *cm* i 8 *cm* równoległemi do krótszego boku w stosunku $\frac{2}{3} : 1 : \frac{3}{2} : \frac{13}{16}$.
6. Podziel pole kwadratu o boku 6 *cm* (równoległemi do jednego z boków) w stosunku $\frac{3}{2} : \frac{5}{2} : 2$.
7. Podziel: *a)* 48 *kg* w stosunku $3 : 5$, *b)* 165 *zł* w stosunku $2 : 7 : 9$, *c)* 684 *l* w stosunku $2 : 4 : 5 : 7$, *d)* 1863 m^3 w stosunku $4 : 6 : 5 : 9$.

Uwaga. Narysuj dowolny prostokąt, podziel jego podstawę w stosunku $3 : 5$ i poprowadź przez punkt podziału równoległą do wysokości. Jeżeli pole całego prostokąta uzmysławia ciężar 48 *kg*, to mniejsze prostokąty uzmysławiają części, na które 48 *kg* podzieliliśmy. Zrób taki rysunek w zadaniu *b)*, *c)*, *d)*!

8. Dwaj kupcy włożyli we wspólny interes: pierwszy 25 000 *zł*, drugi 38 000 *zł*. Przy likwidacji spółki otrzymano 94 900 *zł*; jak mają się tem podzielić? (Rozdziel w stosunku włożonych kapitałów!).

9. Dwóch rolników wynajęło łąkę za 1400 *zł*. Jeden z nich wypasał na tej łące 36 wołów, drugi zaś 27 wołów; ile każdy z nich powinien zapłacić za łąkę? (W stosunku liczby wołów).
10. Ktoś przekazał w testamencie 5160 *zł* na pokrycie swych zobowiązań, a winien był jednemu 2400 *zł*, drugiemu 2800 *zł*, trzeciemu 3400 *zł*. Jak należy między nich 5160 *zł* rozdzielić? (W stosunku kwot wyrażających zobowiązania).
11. Trzej przemysłowcy włożyli we wspólny interes handlowy: pierwszy 12 000 *zł*, drugi 30 000 *zł*, trzeci 7500 *zł*. Jak podzielili się zyskiem, który wynosił 6435 *zł*? (W stosunku włożonych kwot).
12. Czterech przemysłowców włożyło we wspólne przedsiębiorstwo: pierwszy 7200 *zł*, drugi 7500 *zł*, trzeci 8000 *zł* i czwarty 9100 *zł*. Jak należy podzielić między nich stratę, która wynosi 1272 *zł*? (W stosunku włożonych kwot).
13. Trzej kupcy włożyli we wspólny interes jednakowe kapitały. Jak mają podzielić się zyskiem 12 835 *zł*, jeżeli kapitał pierwszego kupca był w obrocie 1 rok, drugiego $1\frac{1}{2}$ roku, a trzeciego $2\frac{1}{2}$ lat? (W stosunku liczb wyrażających czas obrotu).
14. Czterej robotnicy zarobili razem 232 *zł* 50 *gr*; ile zarobił każdy z nich, jeżeli pierwszy pracował 6 dni, drugi i trzeci po 8 dni, czwarty zaś 9 dni?
15. Powierzchnie oceanów: Atlantyckiego, Indyjskiego, Spokojnego są do siebie w stosunku jak $3 : 2 : 5$. Rys. 15 przedstawia obrazowo (graficznie) stosunek powierzchni tych oceanów.



Rys. 15.

Pole całego prostokąta podzielono w stosunku 3 : 2 : 5. Prostokąty te uzmysławiają powierzchnie oceanów.

16. Największemi stawami w Tatrach są: Wielki Staw (pow. 34 *ha*), Morskie Oko (pow. 33 *ha*), Czarny Staw nad Morskiem Okiem (pow. 21 *ha*). Przedstaw graficznie stosunek powierzchni tych stawów. (Podstawę całego prostokąta, uzmysławiającego powierzchnię tych trzech stawów, należy podzielić na 34 + 33 + 21 t. j. 88 równych części. Wygodnie jest więc obrać podstawę długości np. 88 *mm*).

17. Powierzchnie, jakie zajmują w Polsce lasy: sosnowe, świerkowe, olchowe, dębowe są do siebie w stosunku 60 : 12 : 6 : 5. Przedstaw graficznie!

18. W r. 1933 Polska sprzedawała zagranicę głównie: 1) produkty spożywcze, 2) surowce i półfabrykaty, 3) wyroby gotowe, 4) inne. Wartości tych towarów w *zł* były do siebie w stosunku, jak 13 : 24 : 12 : 1. Wartość wywozu wynosiła w przybliżeniu 1 miljard *zł*. Za ile *zł* wywieziono poszczególnych towarów? Przedstaw graficznie stosunek ich cen!

19. Liczby mieszkańców Europy, Azji, Afryki, Ameryki, Australji (wraz z Oceanją) są (w przybliżeniu) do siebie w stosunku, jak 48 : 113 : 14 : 24 : 1. Ludność całego świata wynosi 2 miljardy. Ile ludzi mieszka w każdej części świata? Przedstaw graficznie stosunek mieszkańców poszczególnych części świata!

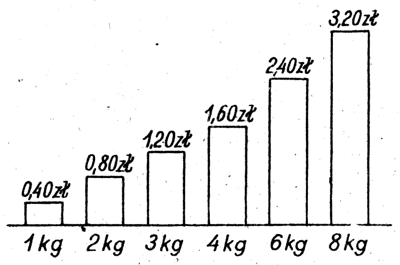
Tabele i przedstawienia graficzne

1. Tabelka poniżej wskazuje nam ceny różnych ilości soli. Liczby, stojące w pierwszym wierszu, wskazują ilość soli w *kg*, liczby w drugim, odpowiednią cenę soli w *zł*. A więc 1 *kg* kosztuje 0,40 *zł*, 3 *kg* — 1,20 *zł* i t. d.

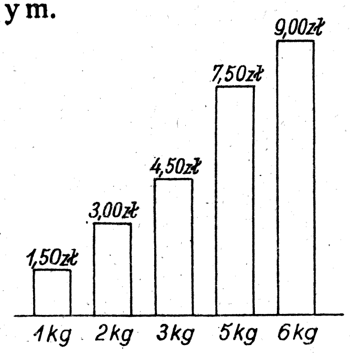
Ilość soli w *kg*...	1	2	3	4	6	8
Cena soli w *zł*...	0,40	0,80	1,20	1,60	2,40	3,20

Moglibyśmy jeszcze w inny sposób przedstawić ceny rozmaitych ilości soli. Kreślimy prostokąty o równych podstawach i o wysokościach 0,40 *cm*, 0,80 *cm*, 1,20 *cm* i t. d. (rys. 16). Wysokości te wskazują nam cenę soli w ten sposób, że 1 *cm* wysokości odpowiada 1 *zł*. A więc prostokąt o wysokości 1,40 *cm* wskazuje, że odpowiednia ilość soli kosztuje 1,40 *zł* i t. d.

Powyższy sposób przedstawienia nazywa się sposobem wykreślnym lub graficznym.



Rys. 16.



Rys. 17.

2. Tabelka poniżej podaje ceny różnych ilości cukru.

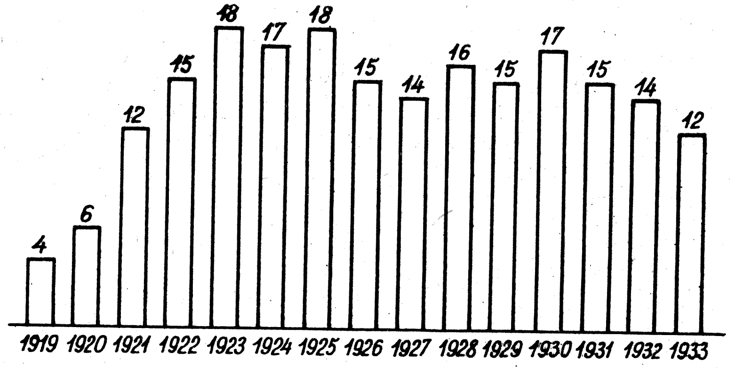
Ilość cukru w *kg*...	1	2	3	5	6
Cena cukru w *zł*...	1,50	3,00	4,50	7,50	9,00

Na rys. 17 przedstawioną mamy tabelkę powyższą graficznie; na $\frac{1}{2}$ *cm* wysokości prostokątów wypada 1 *zł*, t. zn., że np. 3,00 *zł* zaznaczono prostokątem o wysokości 1,5 cm.

3. Tabelka poniżej przedstawia nam przyrost ludności w Polsce, przypadający na każdy tysiąc mieszkańców w latach 1919 — 1933.

Rok	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933
Przyrost roczny	4	6	12	15	18	17	18	15	14	16	15	17	15	14	12

Rys. 18 przedstawia powyższą tabelkę graficznie.



Rys. 18.

Na $\frac{1}{4}$ *cm* wysokości prostokąta wypada przyrost ludności o 1 człowieka. Prostokąt więc o wysokości 3 *cm* wskazuje przyrost o 12 mieszkańców.

Zadania

1. 1 *kg* towaru kosztuje 20 *zł*. Ile kosztuje: 2 *kg*, 3 *kg*, 4 *kg*, 5 *kg*, 6 *kg*? Sporządź tabelkę i przedstaw ją

graficznie; przyjmij, że na 1 *cm* wysokości prostokątów przypada 20 *zł*!

2. Ile wynosi: *a)* obwód, *b)* pole kwadratu, jeśli jego bok ma 1 *cm*, $1\frac{1}{2}$ *cm*, 2 *cm*, $2\frac{1}{2}$ *cm*, 3 *cm*? Sporządź tabelkę i przedstaw ją graficznie!
3. Tabelka poniżej daje cenę III kl. pociągu osobowego w zależności od liczby *km*; przedstaw ją graficznie!

km	1—5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
zł	0,40	0,40	0,60	0,60	0,60	0,80	0,80	0,80	1	1	1	1,20	1,20

4. Sporządź tabelkę, w której w pierwszym wierszu są liczby od 1 do 9, w drugim zaś odpowiednio iloczyny tych liczb przez $\frac{1}{2}$. Przedstaw tę tabelkę graficznie!
5. Komunikacja lotnicza w Polsce zaznaczona jest tabelką, w której podana jest liczba zaokrąglona lotów w odnośnym roku.

Rok	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933
Liczba lotów	250	600	800	1500	2700	2900	3700	3900	6100	6000	6000	5500	6000

Przedstaw ją graficznie, przyjmując, że na 2 *mm* wysokości prostokątów przypada 100 lotów.

Wykresy

1. W ciągu dnia od godziny 8 do 20, zapisywano co godzinę temperaturę powietrza, jak wskazuje załączona tabelka. (Znaki — wskazują temperaturę poniżej 0).

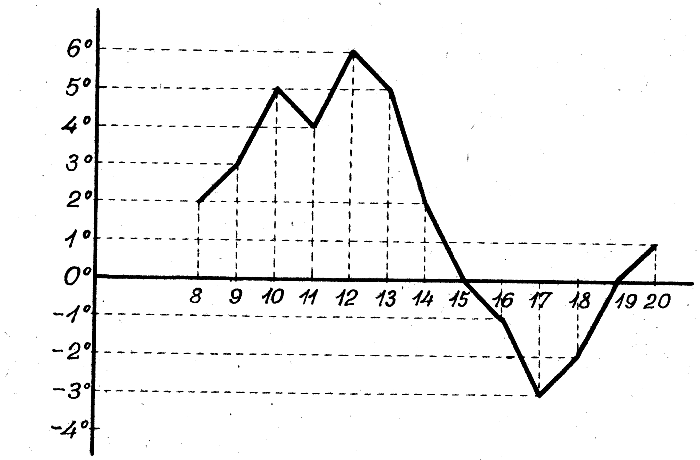
Godzina	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Temperatura w °C	2	3	5	4	6	5	2	0	—1	—3	—2	0	1

Przebieg temperatury możemy przedstawić graficznie w następujący sposób.

Na prostej poziomej (rys. 19) zaznaczamy punktami (licząc od pewnego punktu) godziny 8, 9, 10 i t. d. np. co $\frac{1}{2}$ *cm*. W punktach tych kreślimy do góry odcinki prostopadłe do prostej poziomej. Odcinki te będą wskazywać odpowiednią temperaturę w ten sposób, że np. $\frac{1}{2}$ *cm* odpowiadać będzie 1^0 C. A więc rysujemy pokolei odcinki pionowe do góry o długościach 1 *cm*, $1\frac{1}{2}$ *cm*, $2\frac{1}{2}$ *cm*, 2 *cm* i t. d. O godzinie 15 jest 0^0 C; temperaturę tę zaznaczamy punktem na prostej poziomej. Podobnie o godz. 19. W godzinach 16, 17, 18 temperatury są poniżej 0^0 C. Dla zaznaczenia rysujemy odpowiednie odcinki w dół.

Dla łatwiejszego odczytania, jakie temperatury dane odcinki przedstawiają, rysujemy na boku prostą prostopadłą do poziomej. Następnie zaznaczamy na niej co $\frac{1}{2}$ *cm* stopnie C powyżej i poniżej 0^0 (przyczem 0^0 C obieramy w punkcie przecięcia się obu prostych).

Łącząc wreszcie końce narysowanych odcinków linją łamaną, otrzymujemy t. zw. w y k r e s przebiegu temperatury w ciągu dnia (rys. 19).



Rys. 19.

Wygodnię jest wykres sporządzać na papierze kratkowanym lub milimetrowym.

Z wykresu łatwo możemy sobie przedstawić wahania temperatury w ciągu dnia.

Widzimy np. że od 8^h do 10^h temperatura podnosiła się. Potem nastąpił spadek, wkońcu temperatura znowu się podniosła. Od 12^h do 17^h temperatura wciąż opadała. Od 17^h do 20^h temperatura podnosiła się. Najwyższa temperatura była o 12^h (6^0 C), najniższa o 17^h (— 3^0 C).

Z wykresu możemy w przybliżeniu odczytać temperaturę nawet w czasie nienotowanym.

Np. Chcemy się dowiedzieć, jaka była temperatura o godzinie $9\frac{1}{2}$. Zaznaczamy w tym celu na prostej poziomej godz. $9\frac{1}{2}$ w odległości $\frac{1}{4}$ *cm* od godz. 9. (A więc w połowie między 9 godz. a 10 godz.). W zaznaczonym punkcie kreślimy odcinek prostopadły, aż do przecięcia się z wykresem. Długość tego odcinka wynosi 2 *cm*; odpowiada temu temperatura 4^0 C. (Możemy to odczytać bez mierzenia tego odcinka, posługując się prostą pionową, na której są zaznaczone temperatury).

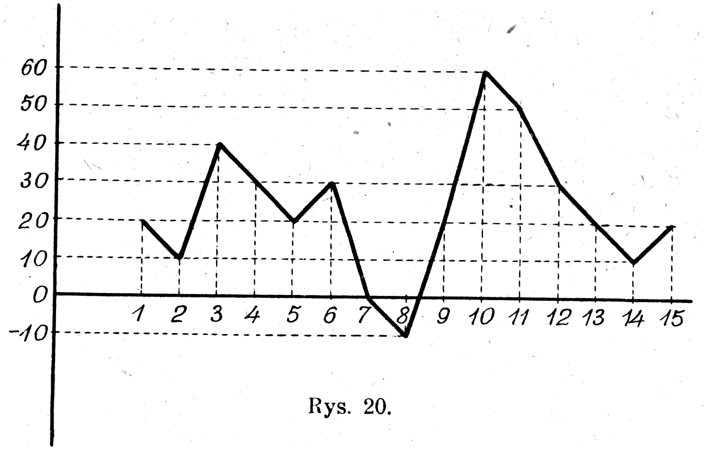
A więc o godz. $9\frac{1}{2}$ temperatura wynosiła w przybliżeniu 4^0 C powyżej 0.

2. Stan poziomu wody w rzece w pierwszej połowie miesiąca, w odniesieniu do stanu normalnego podaje tabelka:

Dzień	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Stan w *cm*	20	10	40	30	20	30	0	—10	20	60	50	30	20	10	20

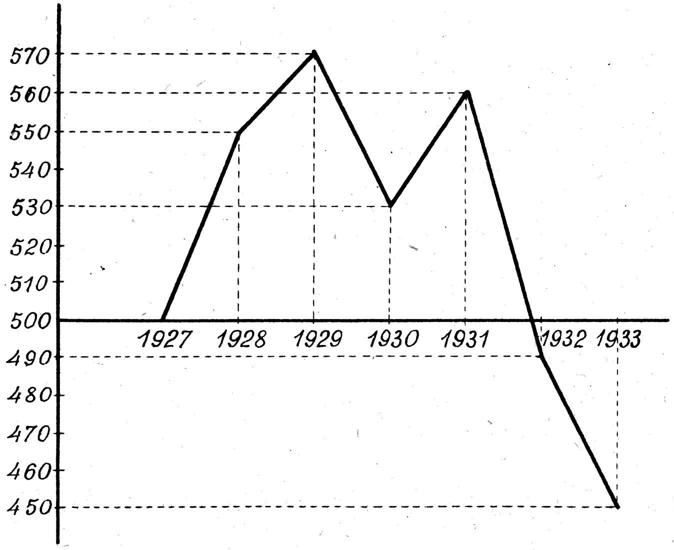
Znak — oznacza poziom niższy od normalnego.

Rys. 20 przedstawia wykres zmian poziomu wody w rzece w pierwszej połowie miesiąca. Na prostej pozio-



Rys. 20.

mej odcinaliśmy dnie co $\frac{1}{2}$ *cm*. Na prostej pionowej 1 *cm* oznacza zmianę poziomu wody o 20 *cm* (w odniesieniu do stanu normalnego).



Rys. 21.

3. W latach 1927—1933 produkcja soli kamiennej wynosiła w Polsce w tysiącach tonn:

1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933
500	550	570	530	560	490	450

Aby wykonać wykres, zaznaczamy na prostej poziomej lata w równych odstępach. Następnie wygodnie będzie zaznaczyć odcinkami nie produkcję w poszczególnych latach, tylko nadwyżkę produkcji ponad 500 tysięcy tonn, względnie obniżkę.

Na rys. 21 mamy w ten sposób wykonany wykres. Jeżeli produkcja przewyższa 500 tysięcy tonn, rysujemy odpowiednie odcinki wgórę, w przeciwnym wypadku wdół. Produkcje, odpowiadające tym odcinkom, zaznaczone są na prostej pionowej.

Zadania

1. Temperatura chorego wynosiła w pewnym dniu:

Godzina	6	8	10	12	14	16	18	20
	37^0	$37{,}2^0$	$37{,}8^0$	$37{,}9^0$	$38{,}1^0$	$38{,}5^0$	$38{,}5^0$	$38{,}3^0$

Przedstaw na wykresie przebieg temperatury!

2. W pewnym dniu temperatura powietrza wynosiła:

Godz.	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	$-3{,}2^0$	$-2{,}8^0$	$-2{,}2^0$	$-1{,}5^0$	$-0{,}9^0$	$-0{,}5^0$	0^0	$+0{,}4^0$	$+0{,}6^0$

Przedstaw na wykresie przebieg temperatury!

3. Stan wody w rzece, mierzony co 1-go każdego miesiąca wynosił w metrach:

	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Powyżej	0,24	0,18	0,09					0,00	0,06	0,04
Poniżej normalnego poziomu				0,02	0,12	0,15	0,08			

Wykonaj wykres!

4. W latach 1927—1933 produkcja żyta w Polsce wynosiła w miljonach kwintali:

1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933
59	61	70	70	57	61	71

Wykonaj wykres!

5. Bilans sklepu wynosił w poszczególnych miesiącach w *zł*:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Zysk . . .	247	210	238	252	183	100				154	172	242
Strata . .							112	127	30			

Wykonaj wykres!

6. W latach 1927—1933 roczne zbiory w Polsce wynosiły w miljonach kwintali:

	Pszenica	Żyto	Jęczmień	Owies	Ziemniaki	Buraki cukrowe
1927	16,6	58,9	12,8	21,4	267,7	36,2
1928	16,1	61,1	15,3	25,0	276,6	49,0
1929	17,9	70,1	16,6	29,5	317,5	49,7
1930	22,4	69,6	14,6	23,5	309,0	47,2
1931	22,6	57,0	14,8	23,1	309,9	27,6
1932	13,5*	61,1	14,0	23,9	299,7	23,8
1933	21,7	70,7	14,4	26,8	283,3	18,5

* Spadek nastąpił z powodu pojawienia się rdzy.

Wykonaj odpowiednie wykresy: *a)* dla pszenicy, jęczmienia i owsa (jeden rysunek), *b)* dla żyta i buraków cukrowych (jeden rysunek), *c)* dla ziemniaków.

Znakowania literowe

Porządek wykonywania działań

Jeżeli mamy obliczyć wartość jakiegoś wyrażenia, jak np.: $8 + 4 \cdot 5$, to nie jest rzeczą obojętną, w jakim porządku będziemy wykonywali naznaczone działania. Jeżeli najpierw wykonamy dodawanie, a potem mnożenie, to rachunek przedstawi się następująco: $8 + 4 = 12$, $12 \cdot 5 = 60$.

Wykonajmy teraz najpierw mnożenie, a potem dodawanie; a więc: $4 \cdot 5 = 20$, $8 + 20 = 28$.

Widzimy, że tym razem otrzymaliśmy inny wynik, niż poprzednio. Potrzebne więc są reguły, w jakim porządku należy wykonywać działania.

Reguły te są następujące:

I. Jeżeli w wyrażeniu występują tylko znaki dodawania i odejmowania, to wartość takiego wyrażenia obliczamy, wykonując pokolei naznaczone działania.

Np. $16 - 5 - 3 + 7 - 2$.

Obliczamy: $16 - 5 = 11$, $11 - 3 = 8$, $8 + 7 = 15$, $15 - 2 = 13$.

A więc wartość naszego wyrażenia wynosi 13.

Zadania

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:
   a) $16 - 5 + 3 - 1$; *b)* $8 - 2 - 3 + 5 - 4$;
   c) $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{16}$; *d)* $5 - 4 - 1 + 3$;
   e) $7 - 1 + 8 - 8$; *f)* $2 - 1{,}7 + \frac{2}{5} - \frac{1}{8}$.

II. Jeżeli w wyrażeniu (oprócz dodawania i odejmowania) występują mnożenia, to wykonywamy najpierw wszystkie naznaczone mnożenia, a potem pokolei dodawania i odejmowania.

Np. *a)* $3 + 4 \cdot 5$.

Obliczamy: $4 \cdot 5 = 20$; otrzymujemy więc wyrażenie $3 + 20$; wartością jego jest 23.

b) $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4$.

Obliczamy: $3 \cdot 5 = 15$, $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, $5 \cdot 4 = 20$.

Wstawiając zamiast iloczynów ich wartości, otrzymujemy wyrażenie: $15 - 12 + 20 = 23$.

c) $10 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 10 - 6 + 10 = 14$.

Zadania

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $3 \cdot 4 - 2$; $8 + 2 \cdot 3$; $\frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; $2{,}1 + \frac{1}{3} \cdot 4$;

b) $3{,}5 - 2{,}1 \cdot 1{,}3$; $\frac{3}{4} - 0{,}3 \cdot \frac{1}{8}$; $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4}$;

c) $30 - 2 \cdot 3 \cdot 4$; $2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5$; $3{,}6 - 2 \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}4$;

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$; $4{,}5 - 1{,}2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$.

2. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$, $4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 3$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$;

b) $4 \cdot 7 - 3 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot \frac{1}{2}$, $18 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7$;

c) $5 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 6 - 7 \cdot 2$, $20 + 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 + 3$;

d) $80 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 - 8$, $\frac{15}{2} - \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{8} \cdot 5 + \frac{3}{8}$;

e) $40 \cdot 2{,}3 + 18 - 4{,}7 \cdot 5 - 1{,}2 \cdot 3$;

f) $\frac{11}{3} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} + 5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

III. Jeżeli w wyrażeniu występują mnożenia i tylko jedno dzielenie, zaznaczone dwukropkiem, to wykonywamy najpierw wszystkie mnożenia, a w końcu dzielenie.

Np. $5 \cdot 4 \cdot 3 : 2 \cdot 3 = 60 : 6 = 10$; $10 \cdot 8 \cdot 6 : \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 2 = 72$.

W następnym ustępie zajmiemy się innemi wyrażeniami, w których występują dzielenia, zaznaczone dwukropkiem.

Zadania

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $5 \cdot 8 : 4 \cdot 2$, $4 \cdot 12 : 3 \cdot 2$, $2 \cdot 10 \cdot 7 : 5 \cdot 4$;

b) $4 \cdot 5 \cdot 20 : 8 \cdot 10$, $\frac{5}{2} \cdot 6 : 3 \cdot 5$, $0{,}8 \cdot 4 : 2 \cdot 12$;

c) $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 8 : 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6$, $\frac{6}{5} \cdot 12 \cdot 3 : 8 \cdot \frac{5}{6} \cdot 9$.

IV. Jeżeli w wyrażeniu występują potęgi, to najpierw obliczamy potęgi:

Np. *a)* $8 + 3^2 = 8 + 9 = 17$;

b) $4 + 2 \cdot 5^2 = 4 + 2 \cdot 25 = 4 + 50 = 54$;

c) $2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 5 + 4^2 \cdot 3 = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 + 16 \cdot 3 =$
$= 18 - 15 + 48 = 51$;

d) $3^2 \cdot 5 \cdot 8 : 2^2 \cdot 3 = 9 \cdot 5 \cdot 8 : 4 \cdot 3 = 360 : 12 = 30$.

Uwaga. Wartości ułamków jak np. $\dfrac{3 + 4 \cdot 5}{2 + 3 \cdot 5}$ obliczamy, obliczając osobno wartość wyrażenia, które jest licznikiem i osobno wartość wyrażenia, które jest mianownikiem, a następnie dzieląc wyniki przez siebie.

Liczymy zatem:

$3 + 4 \cdot 5 = 3 + 20 = 23$; $2 + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = 17$,

a więc $$\frac{3 + 4 \cdot 5}{2 + 3 \cdot 5} = \frac{23}{17}.$$

Jeżeli w wyrażeniach występują takie ułamki, to najpierw obliczamy wartości tych ułamków, a następnie wykonywamy działania wedle poznanej reguły.

$$\text{Np. } 4 \cdot 5 + \frac{1 + 5 \cdot 7}{14 - 2} = 4 \cdot 5 + \frac{1 + 35}{12} = 4 \cdot 5 + \tfrac{36}{12} = 23.$$

Zadania

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $5^2 + 7$, $16 - 3^2$, $6^2 - 5$, $1 + 2^3$, $4^3 - 18$;

b) $5 + 3 \cdot 2^2$, $5 \cdot 2^3 - 8$, $30 - 4 \cdot 2^2$, $75 - 2 \cdot 3^3$;

c) $2^2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 8 \cdot 3^2$, $16 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2^3$;

d) $2 \cdot 7 - \frac{6}{3} + 4^2 \cdot 7$, $3^3 \cdot 5 - 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 7 + \frac{6}{2}$;

e) $\frac{16}{2^2} + 4 \cdot 7$, $\frac{15}{3} + 2 \cdot 4 + \frac{5^2}{3}$, $7^2 \cdot 5 + \frac{4^2}{2} - 4 \cdot 6$;

f) $\frac{125}{5^2} - 8 \cdot \frac{3}{5} + 3^2 \cdot \frac{40}{5}$, $\frac{3^2}{2^2} \cdot 8 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 3^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{7}{6}$.

2. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $100 - 3 \cdot \frac{4^2}{12} + 8 \cdot 6$, $45 + \frac{3}{4^2} - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 7$;

b) $40 \cdot 2^2 + 2 \cdot 10 - \frac{4}{5^2} - \frac{3^2}{2}$, $\frac{12}{4} + 2^3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - \frac{2^4}{4}$;

c) $5 \cdot 2 \cdot 10 - \frac{2^3}{4} - \frac{27}{3^2} + 5 \cdot 4$, $3 \cdot \frac{8}{2^2} + 30 \cdot 2^2 - 3 \cdot 7$;

d) $2 \cdot 8 \cdot \frac{14}{2^4} + 5 - 7 \cdot 2 + \frac{24}{3}$, $18 + 3 \cdot 9 \cdot \frac{5}{3^3} + \frac{7}{2} - \frac{2^4}{3}$;

e) $6 \cdot 5^3 \cdot 4 : 2^3 \cdot 25$, $2^3 \cdot 3 \cdot 21 : 3^2 \cdot 4 \cdot 7$.

3. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $3 + \frac{5-1}{8+3}$, $2 + \frac{5+4}{8-3}$, $16 + \frac{2 \cdot 3 + 5}{4 - 1}$,

$20 - \frac{7 + 4 \cdot 5}{8 + 6 \cdot 8}$;

b) $5 + \frac{4 + 5 \cdot 7}{8 \cdot 3 + 2}$, $\frac{6 \cdot 8 - 8}{40 - 2 \cdot 3} + 11$, $12 - \frac{4 \cdot 11 - 3 \cdot 7}{8 \cdot 15 - 6 \cdot 7}$;

c) $\frac{4 + 2 \cdot 5}{8 - 3} \cdot 2$, $3 \cdot \frac{7 \cdot 8 - 2 \cdot 3}{5 \cdot 6 - 14} + 1$,

$18 - 2 \cdot \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{8 - 2 \cdot 3}$.

Obliczanie wartości wyrażeń, zawierających nawiasy

Jeżeli chcemy, aby działania wykonywano w innym porządku, niż podaje reguła, wówczas używamy nawiasów. Zwykle używa się następujących nawiasów:

( ) [ ] { }

Powyższe nawiasy mogą być rozmaitej wielkości.

Nauczymy się teraz obliczać wartości wyrażeń, w których występują nawiasy. Rozróżniamy dwa przypadki:

1. W wyrażeniu: $3 \cdot (4 + 2) + 7 \cdot (5 - 3)$ występują nawiasy, które nie zawierają wewnątrz innych nawiasów. Obliczamy wartości takich wyrażeń, obliczając najpierw wartości wyrażeń zawartych w nawiasach (opuszczając nawiasy), a następnie wykonywając działania według reguły działań. A więc:

$3 \cdot (4 + 2) + 7 \cdot (5 - 3) = 3 \cdot 6 + 7 \cdot 2 = 18 + 14 = 32.$

$(5 + 3) \cdot (5 - 3) + 4 \cdot (\frac{8}{2} + 1) = 8 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 16 + 20 = 36.$

2. W wyrażeniu: $5 \cdot (10 - 7) + [3 \cdot 4 + 5 \cdot (8 - 2)]$ nawias graniasty zawiera nawias okrągły. Wartości takich wyrażeń (w których występują nawiasy, zawierające w swojem wnętrzu inne nawiasy) obliczamy, obliczając najpierw wartości wyrażeń zawartych w tych nawiasach, w których wnętrzu niema już innych nawiasów.

Obliczamy więc najpierw wartości wyrażeń, zawartych w nawiasach: $(10 - 7)$ i $(8 - 2)$.

Otrzymamy zatem: $5 \cdot 3 + [3 \cdot 4 + 5 \cdot 6]$.

Wartość tego wyrażenia obliczamy, jak w przypadku 1:

$5 \cdot 3 + [3 \cdot 4 + 5 \cdot 6] = 5 \cdot 3 + [12 + 30] = 5 \cdot 3 + 42 =$
$= 15 + 42 = 57.$

Podobnie:

$11 + \{[8 + (6 - 2)] - 5\} = 11 + \{[8 + 4] - 5\} =$
$= 11 + \{12 - 5\} = 11 + 7 = 18.$

Uwaga 1. Jeżeli w wyrażeniu występują dzielenia, zaznaczone dwukropkiem, to każdy iloraz bierzemy w nawias.

Np. $(8 : 4) + (6 : 2) - (10 : 5) = 2 + 3 - 2 = 3,$
$(12 : 4) \cdot (8 : 2) - (8 + 2) = 3 \cdot 4 - 10 = 2.$

Uwaga 2. Jeżeli chcemy w wyrażeniu zastąpić znak kreski ułamkowej znakiem dwóch kropek, należy uważać, aby porządek działań w myśl przyjętych reguł był zachowany, co da się zrobić przez użycie nawiasów. Np.:

$$\frac{3+7}{4\cdot 5}=(3+7):(4\cdot 5);\qquad 2+\frac{5+6}{8}=2+[(5+6):8].$$

Zadania

1. Oblicz wartości wyrażeń:
   a) $(2+3)\cdot(4+7)$, $(9-2)\cdot(8+3)$, $(10-3)\cdot(7-4)$;
   b) $(\frac{1}{2}+1)\cdot(\frac{2}{3}+2)$, $(\frac{11}{2}-1)\cdot(2+\frac{1}{2})$, $(3\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\cdot(6-\frac{2}{5})$;
   c) $(3+1)\cdot(5-2)+2\cdot(5\cdot 7)$,
   $(8-3)\cdot(6+7)-3\cdot(8:4)$;
   d) $(16:4)\cdot(8:2)-(4-1)$, $(24:3)-(20:5)+(4\cdot 5:2)$.
2. Oblicz wartości wyrażeń:
   a) $3\cdot 2+[5+4\cdot(7+1)]$,
   $2\cdot(16-4)+[20-2\cdot(3-1)]$;
   b) $35\cdot(4-1)-[8-(4+1)]$,
   $15\cdot(3+7)-[11-(5-1)]$;
   c) $[17+(3+1)\cdot 2]\cdot 4$, $[15-(7-5)]\cdot 2+2\cdot(4-1)$;
   d) $3\cdot(4\cdot 2)-[(2+4):3]$, $[(7+1):2]:3$.
3. Oblicz wartości wyrażeń:
   a) $18-\{[10-(4+1)]:2+6\}$,
   $\{[20-(8-6)]\cdot 3-5\}\cdot 4$;
   b) $\{[7\cdot(5:2)]\cdot 4-1\}\cdot 2$,
   $6\cdot(8-1)-\{[3\cdot(5-1)+1]\cdot 2-1\}$;
   c) $\{20-[15-(8+4)]\}:5$, $\{[(2+1)\cdot 3+4]\cdot 5\}:3$;
   d) $[(4\cdot 7:3)-2]\cdot 5-\{[14-(7+5)]\cdot 3-1\}$.
4. Oblicz wartości wyrażeń:
   a) $\dfrac{3+(4-1)\cdot 5}{18-(6-4)\cdot 4}$; *b)* $\dfrac{[4+(7+2)\cdot 3]\cdot 4}{46-[(18-5)\cdot 3-1]}$;
   c) $\dfrac{[17-(4-1)]\cdot 2+5}{12-[(0{,}2+0{,}8)\cdot 3-1]}$;
   d) $\dfrac{11-\{[(3+5)-7]\cdot 2+1\}}{[(6+4)\cdot 5+1]\cdot 3-(2\cdot 5)}$;
   e) $\dfrac{\{30-[18-(2+5)]\}\cdot 4}{[18+(6+1)\cdot 3]\cdot 15}$;

   f) $\dfrac{[8-(3-1)]\cdot 2-[5-(3+1)]}{5\cdot[8-(2+5)]-[(4+1)\cdot 2-8]}$.
5. Oblicz wartości wyrażeń:
   a) $5+\dfrac{3\cdot 7+1}{5\cdot 6-2}-(4-1)$,
   $\dfrac{3+(4-1)\cdot 5}{2\cdot 5-1}+18-[9-(5+1)]$;
   b) $(7:3)+\dfrac{4-(3-1)}{5-(4-2)}$, $20-\left[\dfrac{(5+1)\cdot 4-2}{(7-2)\cdot 3+5}+2\right]$;
   c) $16+\dfrac{15-[4-(3-1)]}{4+(6-2)\cdot 3}-3$,
   $\dfrac{[(8-3)\cdot 4-2]\cdot 5-20}{[15-(4+1)]\cdot 2+1}-[(6-5):7]$.
6. Pamiętając o porządku, w jakim działania należy wykonywać, opuść zbyteczne nawiasy:
   a) $(2+3)+5$, $[(4-1)+3]+1$, $(5\cdot 4)+1$,
   $6+(4\cdot 3)$;
   b) $1+(6\cdot 2)$, $(2\cdot 5)+(7-3)\cdot 2$, $3\cdot(2^2)+4$,
   $(3\cdot 2)^2+4$;
   c) $(7-4)+(3+2)$, $(6+8)-(4+5)$,
   $2+(4\cdot 6\cdot 3)$, $[2+(4\cdot 6)]:3$;
   d) $\{[(5+2)+3]+1\}+2$,
   $(18+5)-\{[(8-3)-(4-2)]+6\}$,
   $\{[(4\cdot 6)+8]:8\}\cdot 3-1$.

Używanie nawiasów

W poprzednim ustępie nauczyliśmy się obliczać wartości wyrażeń, w których występują nawiasy. Zajmiemy się teraz zadaniem:

Ktoś poda nam liczby i działania, jakie na tych liczbach mamy wykonać; jak zapisać to przy pomocy nawiasów?

P r z y k ł a d 1. Od 8 odejmij sumę liczb 2 i 3.

Rozwiązanie: Piszemy sumę liczb 2 i 3 w nawiasie: $(2+3)$, a następnie różnicę: $8-(2+3)$.

Przykład 2. Sumę liczb 4 i 5 pomnóż przez 7.

Rozwiązanie: Piszemy sumę liczb 4 i 5 w nawiasie: $(4+5)$, a następnie iloczyn: $(4+5)\cdot 7$.

Przykład 3. Sumę liczb 8 i 5 pomnóż przez różnicę liczb 7 i 4.

Rozwiązanie: Piszemy sumę liczb 8 i 5 w nawiasie: $(8+5)$, następnie różnicę liczb 7 i 4 w nawiasie: $(7-4)$, wreszcie iloczyn: $(8+5)\cdot(7-4)$.

Przykład 4. Sumę liczb 2 i $3\frac{1}{4}$ odejmij od 8, a otrzymany wynik pomnóż przez 5.

Rozwiązanie: Piszemy najpierw: $(2+3\frac{1}{4})$, a następnie: $[8-(2+3\frac{1}{4})]$, wreszcie: $[8-(2+3\frac{1}{4})]\cdot 5$.

Uwaga: Do liczby 2 dodaj iloczyn liczb 3 i 4.

Rozwiązanie: Piszemy najpierw iloczyn: $(3\cdot 4)$, a następnie sumę: $2+(3\cdot 4)$.

Wyrażenie to napiszemy prościej, opuszczając nawias:

$$2+3\cdot 4.$$

Wiemy bowiem, że wartość wyrażenia oblicza się, wykonywając najpierw mnożenia, a potem dodawania. W układaniu wyrażeń lepiej jest jednak na początku dawać i zbyteczne nawiasy. Zbyteczny bowiem nawias nie szkodzi, brak potrzebnego nawiasu jest natomiast błędem i zmienia wartość wyrażenia.

Zadania

W następujących zadaniach zaznacz nawiasami porządek, w którym działania masz wykonywać i oblicz wartości, otrzymanych wyrażeń:

1. *a)* do liczby 5 dodać sumę liczb 3 i 4;
   b) od liczby 8 odjąć sumę liczb 2 i 3;
   c) do liczby 6 dodać różnicę liczb 7 i 2;
   d) od liczby 10 odjąć różnicę liczb 6 i 4.

2. *a)* sumę liczb 3 i 7 pomnóż przez 4;
   b) pomnóż 5 przez sumę liczb 10 i 4;
   c) utwórz iloczyn sumy liczb 8 i 7 przez liczbę 9;
   d) sumę liczb 11 i 4 podziel przez liczbę 3!
3. *a)* sumę liczb 2 i 3 pomnóż przez sumę liczb 4 i 1;
   b) sumę liczb 8 i 11 pomnóż przez różnicę liczb 10 i 3;
   c) różnicę liczb 18 i 12 pomnóż przez różnicę liczb 10 i 4!
4. *a)* do 8 dodaj sumę liczb 3 i 11, a wynik pomnóż przez 2;
   b) do 14 dodaj różnicę liczb 7 i 1, a wynik pomnóż przez 4;
   c) od 18 odejmij sumę liczb 3 i 5, a wynik pomnóż przez 11;
   d) od 24 odejmij różnicę liczb 13 i 9, a wynik podziel przez 5!
5. Do 5 dodaj 2, wynik pomnóż przez 3 i wreszcie dodaj 6!
6. Od 7 odejmij 4, wynik podziel przez 3 i wreszcie odejmij 1!
7. Do ilorazu liczby 10 przez różnicę liczb 8 i 6 dodaj 4 i wynik pomnóż przez 11!
8. Sumę liczb 5 i 7 pomnóż przez różnicę liczb 10 i 6, do wyniku dodaj 3, a następnie wynik podziel przez 4!
9. Od ilorazu sumy liczb 8 i 3 przez 5 odejmij 1, wynik pomnóż przez 2, a następnie podziel przez 3!
10. Obierz jakąś liczbę, np. 17, dodaj do niej 11, wynik pomnóż przez 2 i od tego iloczynu odejmij 20. To, co otrzymasz pomnóż przez 5, następnie odejmij iloczyn obranej liczby (17) przez 10, a na wynik otrzymasz 10. Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!
11. Obierz jakąś liczbę, np. 21, pomnóż ją przez 15, do wyniku dodaj 60 i to, co otrzymasz podziel przez 3.

Pomnóż teraz obraną liczbę (21) przez 5 i wynik ten odejmij od poprzednio otrzymanej liczby. Ostateczny wynik będzie 20. Powtórz, obierając inną liczbę!

12. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 18, pomnóż ją przez 2, do wyniku dodaj 1, to, co otrzymasz pomnóż przez 5 i dodaj jeszcze 3; jeśli w wyniku odrzucisz cyfrę jednostek, otrzymasz obraną liczbę (18). Powtórz to zadanie obierając inną liczbę!
13. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 23, dodaj do niej 2, wynik pomnóż przez 3, a od tego, co otrzymasz, odejmij 4, pomnóż następnie przez 3 i dodaj wkońcu obraną liczbę (23); jeśli w wyniku odrzucisz cyfrę jednostek, otrzymasz obraną liczbę (23). Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!

Plan zadania

Rozwiązując jakieś zadanie, nie zawsze wykonywamy odrazu działania konieczne do rozwiązania; czasami naznaczamy je tylko przy pomocy nawiasów, czyli tworzymy t. zw. plan zadania.

Przykład 1. Z dwóch miast wyszli naprzeciw siebie równocześnie dwaj posłańcy. Jeden szedł z prędkością 6 *km* na godz., drugi 7 *km* na godz.; spotkali się po 4 godzinach. Jaka jest odległość tych miast od siebie?

Rozwiązanie: Pierwszy posłaniec przeszedł w 4 godzinach $4 \cdot 6$ *km*, drugi w tym samym czasie $4 \cdot 7$ *km*. Odległość więc obu miast wynosi w *km*: $4 \cdot 6 + 4 \cdot 7$.

Otrzymaliśmy więc plan zadania, wskazujący, jakie działania należy wykonywać.

Przykład 2. Ojciec zarabiał dziennie 12 *zł*, syn 8 *zł*, na utrzymanie zaś domu wydawano dziennie 10 *zł*; ile zaoszczędzono w ciągu 6 dni?

Rozwiązanie. Dziennie zaoszczędzano *zł*: $(12 + 8 - 10)$, zatem w ciągu 6 dni zaoszczędzono *zł*: $6 \cdot (12 + 8 - 10)$.

Zadania

1. Balon wzniósł się na wysokość 3600 *m*, potem opadł o 350 *m*, następnie wzniósł się o 450 *m* i znowu opadł o 640 *m*; na jakiej wysokości znajduje się balon?
2. Dwaj wspólnicy rozdzielili zysk 8540 *zł* w ten sposób, że pierwszy otrzymał 4936 *zł*, a drugi resztę; o ile więcej otrzymał pierwszy wspólnik, niż drugi?
3. Kupiec sprzedał w trzech dniach $163\frac{1}{2}$ *kg* herbaty. W pierwszym dniu sprzedał $57\frac{3}{4}$ *kg*, w drugim o $3\frac{1}{2}$ *kg* mniej, a w trzecim resztę; o ile więcej *kg* sprzedał w pierwszym dniu, niż w trzecim?
4. Właściciel trzech kamienic miał z jednej kamienicy dochód roczny 5600 *zł*, z drugiej o 1200 *zł* więcej, a z trzeciej o 4300 *zł* mniej niż z obu pierwszych razem; ile wynosił jego roczny dochód z tych trzech kamienic?
5. Kwotę 8316 *zł* rozdzielono między 4 osoby w ten sposób, że pierwsza otrzymała $\frac{2}{7}$ tej kwoty, druga $\frac{3}{11}$, trzecia $\frac{8}{27}$, a czwarta resztę; ile otrzymała czwarta osoba?
6. Ktoś posiadał narożną parcelę w kształcie prostokąta o wymiarach 26 *m* długości i 19 *m* szerokości. Wskutek regulacji miasta stracił 3 *m* na długości i 2 *m* na szerokości. Ile stracił pieniędzy, jeśli mógł przedtem sprzedać tę parcelę po 1000 *zł* za 1 *ar*, a miasto zapłaciło mu za zabrany grunt po 600 *zł* za 1 *ar*?
7. Do naczynia o pojemności 45 *l* rura dopływowa dostarcza $6\frac{1}{2}$ *l* wody w 1 minucie, rura zaś odpływowa odprowadza $2\frac{3}{4}$ *l* wody w 1 minucie; w jakim czasie

napełni się to naczynie, jeśli obie rury będą równocześnie otwarte?

8. Kupiec otrzymał 3 paczki towaru: pierwsza ważyła 24,5 *kg*, druga o 2,4 *kg* mniej, a trzecia o 3,6 *kg* mniej, niż druga. Pierwsza paczka zawierała towar w cenie 15 *zł* za 1 *kg*, druga w cenie 10,5 *zł* za 1 *kg*, a trzecia w cenie 12,4 *zł* za 1 *kg*; ile kupiec zarobił, jeśli cały ten towar sprzedał za 980 *zł*?

Znakowanie literowe

1. Bok kwadratu ma 5 *cm*; oblicz obwód!

Obwód kwadratu wynosi w *cm*: $4 \cdot 5$.

Podobnie, jeżeli bok kwadratu ma 6 *cm*, 7 *cm*, 8 *cm* i t. d., wówczas obwód wynosi w *cm* odpowiednio: $4 \cdot 6$, $4 \cdot 7$, $4 \cdot 8$ i t. d.

Gdybyśmy przez O oznaczyli liczbę mierzącą obwód w *cm*, zaś przez b liczbę mierzącą bok w *cm*, to moglibyśmy napisać: $O = 4 \cdot b$.

Wzór powyższy wyraża krótko i przejrzyście następującą ogólną regułę: Obwód kwadratu w *cm* otrzymamy, mnożąc przez 4 liczbę mierzącą bok w *cm*. W powyższym wzorze można za b podstawiać rozmaite liczby, zależnie od długości boku kwadratu; za każdym razem otrzymamy jego obwód.

2. Robotnik zarabia dziennie $7\frac{1}{2}$ *zł*; ile zarobi w ciągu 3, 4, 5, 8 dni?

Zarobek jego w *zł* wynosi odpowiednio; $3 \cdot 7\frac{1}{2}$, $4 \cdot 7\frac{1}{2}$, $5 \cdot 7\frac{1}{2}$, $8 \cdot 7\frac{1}{2}$.

Jeżeli przez z oznaczymy zarobek w *zł*, zaś przez d liczbę dni pracy, to będziemy mogli napisać: $z = d \cdot 7\frac{1}{2}$.

3. Jak wiemy, pole prostokąta np. w cm^2 obliczamy, mnożąc przez siebie liczby, mierzące podstawę i wysokość w *cm*.

Podaj kilka przykładów liczbowych!

Jeżeli przez P oznaczymy pole prostokąta w cm^2, przez p długość podstawy w *cm*, przez w wysokości w *cm*, wówczas możemy napisać: $P = p \cdot w$.

4. Jeżeli przez b oznaczymy ciężar towaru wraz z opakowaniem w *kg*, przez t ciężar opakowania w *kg*, przez n ciężar samego towaru w *kg*, wówczas: $b = t + n$.

5. Obwód koła w *cm* obliczamy, mnożąc liczbę, wyrażającą w *cm* długość średnicy przez π.

Jeżeli oznaczymy przez O liczbę wyrażającą w *cm* obwód koła, przez d liczbę wyrażającą w *cm* średnicę koła, wówczas: $O = \pi \cdot d$.

We wzorze powyższym O i d oznaczać mogą rozmaite liczby, zależnie od wielkości koła. Litera π oznacza zawsze tę samą liczbę, zw. ludolfiną, t. j. 3,14...

Zadania

1. *a)* Opierając się na przykładzie 3 str. 62, oblicz pole prostokąta, gdy: *a)* $p = 8$ *cm*, $w = 3$ *cm*; *b)* $p = 12$ *cm*, $w = 5$ *cm*; *c)* $p = 71$ *cm*, $w = 16$ *cm*! Ułóż zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a)*, *b)*, *c)*!
   b) Opierając się na przykładzie 4 str. 63, oblicz wagę brutto, gdy: *a)* $t = \frac{1}{2}$ *kg*, $n = 5$ *kg*; *b)* $t = 2$ *kg*, $n = 17$ *kg*; *c)* $t = 2\frac{1}{4}$ *kg*, $n = 21\frac{2}{5}$ *kg*! Ułóż zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a)*, *b)*, *c)*!
2. Oznacz przez P pole trójkąta wyrażone w cm^2, przez p długość podstawy w *cm*, przez w długość wysokości w *cm* i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć pole trójkąta P, znając p i w. Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* $p = 16$ *cm*, $w = 9$ *cm*; *b)* $p = 5$ *cm*, $w = 4\frac{1}{2}$ *cm*; *c)* $p = 10$ *cm*, $w = 4{,}6$ *cm* i ułóż zadania, jakie rozwiązałeś w *a)*, *b)*, *c)*!
3. Oznacz przez a cenę 1 *kg* towaru, przez b liczbę,

wyrażającą, ile *kg* towaru kupiłeś, przez *c* cenę zakupionego towaru w *zł*, i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć cenę towaru *c* znając *a* i *b*. Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* za *a* — 3 *zł*, za *b* — 8 *kg*; *b)* za *a* — 2 *zł* 40 *gr*, za *b* — 12 *kg*; *c)* za *a* — 4 *zł* 20 *gr*, za *b* — $6\frac{1}{2}$ *kg* i ułóż zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach *a)*, *b)*, *c)*!

4. Oznacz przez *c* drogę w *m*, jaką przebywa samolot w 1 sek., przez *t* liczbę sekund, wyrażającą czas trwania lotu, przez *s* długość przebytej drogi w *m*. Napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć przebytą drogę *s*, znając *c* i *t*. Podstaw w otrzymanym wzorze: *a)* za *t* — 50 sek., za *c* — 35 *m* w 1 sek., *b)* za *t* — 60 sek.,, za *c* — 45 *m* w 1 sek., *c)* za *t* — 100 sek., za *c* — 60 *m* w 1 sek. i ułóż zadania, jakie rozwiązałeś!

Wartości liczbowe wyrażeń

1. Przypuśćmy, że mamy jakieś wyrażenie, jak np.:

$$2 \cdot a + 3.$$

Jeżeli za *a* podstawimy jakąś liczbę, np. 5, wówczas otrzymamy wyrażenie: $2 \cdot 5 + 3$.

Obliczając to wyrażenie, otrzymamy na wynik 13. Mówimy, że 13 jest wartością liczbową wyrażenia $2 \cdot a + 3$ dla $a = 5$.

Jeżeli za *a* podstawimy np. 7, otrzymamy jako wartość liczbową wyrażenia liczbę 17.

Możemy utworzyć tabelkę, pisząc w pierwszym wierszu liczby, jakie podstawiamy za *a*, w drugim otrzymane wartości liczbowe:

a	1	2	3	4	5	7
$2 \cdot a + 3$	5	7	9	11	13	17

Podobnie tabelka poniżej przedstawia wartości liczbowe wyrażenia: $3 \cdot (a + 1)$:

a	1	2	3	4	5
$3 \cdot (a + 1)$	6	9	12	15	18

2. Mamy wyrażenie $2 \cdot a + b$.

Jeżeli podstawimy np. $a = 1$, $b = 3$, to otrzymamy jako wartość liczbową $2 \cdot 1 + 3$, t. j. 5.

Tabelka poniżej podaje nam wartości liczbowe tego wyrażenia, otrzymane przez podstawienie za *a* i *b* rozmaitych liczb:

a	1	1	2	2	3	3	3
b	1	2	1	2	1	2	3
$2 \cdot a + b$	3	4	5	6	7	8	9

Moglibyśmy również zapisać wartości liczbowe w postaci tabliczki (podobnej do tabliczki mnożenia).

b \ a	1	2	3
1	3	5	7
2	4	6	8
3	5	7	9

Jeżeli chcemy wiedzieć jaką wartość liczbową otrzymamy np. dla $a = 3$, $b = 2$, to bierzemy pod uwagę pole w 3-ciej kolumnie w 2-gim wierszu; liczba 8, znajdująca się na tem polu, jest szukaną wartością liczbową.

U w a g a 1: Jeżeli przed literą stoi znak $\cdot$ lub $\times$, oznaczający mnożenie, to znak ten możemy opuścić.

A więc $2 \cdot a = 2a$, $a \cdot b = ab$, $5a + 1 = 5 \cdot a + 1$, $3 + 5a = 3 + 5 \cdot a$, $3ab + 7a = 3 \cdot a \cdot b + 7 \cdot a$ i t. d.

Znaków $+$ $-$: nie wolno opuszczać.

U w a g a 2: Nie zawsze wyrażenie ma wartość liczbową. Np. wyrażenie: $a - 5$ nie ma wartości liczbowej dla $a = 3$, bo nie można od 3 odjąć 5.

Podobnie wyrażenie: $\frac{1}{a}$ nie ma wartości liczbowej dla $a = 0$, gdyż symbol $\frac{1}{0}$ nic nie znaczy.

Zadania

1. Oblicz wartości liczbowe i sporządź tabelkę:
   a) $a + 4$ dla $a = 1, 2, 5, 7, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{4}{7}$;
   b) $b - 1$ dla $b = 2, 3, 4, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{7}$;
   c) $x + \frac{1}{2}$ dla $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 7, \frac{2}{8}, \frac{4}{5}, \frac{1}{9}$;
   d) $y - \frac{1}{2}$ dla $y = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 6, \frac{9}{4}, \frac{7}{5}, \frac{13}{11}$;
   e) $5a$ dla $a = 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 4, 15, \frac{3}{7}, \frac{8}{11}$;
   f) $\frac{2}{3}c$ dla $c = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 7, 18, \frac{13}{2}$;
   g) $3x + 2$ dla $x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$;
   h) $\frac{2}{5}y - 1$ dla $y = 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6$.
2. Oblicz wartości liczbowe i sporządź tabelkę:
   a) $\frac{2a+1}{3a-1}$ dla $a = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5$;
   b) $\frac{8d-5}{5d+2}$ dla $d = 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{6}{5}, 3, \frac{7}{2}, \frac{9}{4}$;
   c) $\frac{\frac{2}{3}z+1}{\frac{5}{4}z+2}$ dla $z = 0, \frac{3}{2}, 2, \frac{12}{5}, 3, 4, 9$;
   d) $\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}}$ dla $x = 2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}$.
3. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $2a + 3b - 1$ dla $a = 0, b = 1$; $a = 1, b = 0$; $a = 1, b = 1$;
   b) $4x - 2y + 5$ dla $x = 1, y = 0$; $x = 2, y = 1$; $x = 3, y = 4$;
   c) $\frac{5c+2d-2}{3c+d+4}$ dla $c = 0, d = 1$; $c = 1, d = 0$; $c = 5, d = 9$.

4. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:
   a) $(3x + 8) - (2x - 6)$ dla $x = 3, 4, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5$;
   b) $(6x - 1)(5x + 8) - (7x - 3)$ dla $x = 3, \frac{3}{7}, 2, 2\frac{1}{2}, 1$;
   c) $2x^3 + 5x^2 + 7x + 2$ dla $x = 0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$;
   d) $\frac{3x-8}{2x+5} - \frac{4x-18}{7x-5}$ dla $x = 5, 6, 7, 8, 9$;
   e) $(2x + 3)(5y + 7) - (8xy - 23)$ dla $x = 3, y = 2$; $x = 2, y = 3$; $x = 2, y = 2$;
   f) $(2x + 3y - 1)(3x + 2y + 1) - (xy + 2)$ dla $x = 5, y = 7$; $x = 7, y = 5$; $x = 1, y = 1$; $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$; $x = 2, y = 0$;
   g) $\frac{7a+3b+1}{4a+5b+8} + \frac{8b-1}{5a+2}$ dla $a = 2, b = 3$.
5. Oblicz wartość liczbową wyrażenia: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   a) dla $n = 1, 10, 15, 20, 100$;
   b) przekonaj się, że np. dla $n = 3$ wartość powyższego wyrażenia wynosi $1^2 + 2^2 + 3^2$;
   c) sprawdź jeszcze na kilku przykładach, że wzór powyższy daje sumę kwadratów pierwszych n liczb.
6. Zastąp literę x taką liczbą, aby:
   a) $x + 7 = 15$; *b)* $x - 2 = 9$; *c)* $x \cdot 5 = 20$;
   d) $x : 3 = 7$; *e)* $2 \cdot x = 10$; *f)* $\frac{x}{3} = 24$;
   g) $\frac{8}{x} = 4$; *h)* $\frac{1,7}{x} = 3,4$; *i)* $\frac{2,8}{x} = 0,7$.
7. Oblicz:
   a) a^2 dla $a = 3, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}$; *b)* a^3 dla $a = \frac{1}{3}, 2, 6$;
   c) $\frac{1}{2}a^3$ dla $a = 1, \frac{1}{2}, 2$; *d)* $5x^2$ dla $x = 2, \frac{1}{4}, 3$.
8. Oznaczmy ciężar ciała, wyrażony w gramach, przez Q, ciężar 1 cm^3 tego ciała (wyrażony w g) przez q, objętość zaś tego ciała wyrażoną w cm^3 przez V; w takim razie mamy wzór: $Q = V \cdot q$. Oblicz Q, jeżeli:
   a) $V\ cm^3 = 5\ cm^3$, $q\ g = 21,4\ g$ (platyna);

b) $V\ cm^3 = 8\ cm^3$, $q\ g = 19{,}3\ g$ (złoto);
c) $V\ cm^3 = 15\ cm^3$, $q\ g = 11{,}34\ g$ (ołów).

9. Jeśli boki równoległe trapezu mają $a\ cm$ i $b\ cm$, wysokość zaś $w\ cm$, to pole P (w cm^2) tego trapezu wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot w$$

Oblicz pole trapezu, gdy:
a) $a\ cm = 3\ cm$, $b\ cm = 2\ cm$, $w\ cm = 1\ cm$;
b) $a\ cm = 8\ cm$, $b\ cm = 5\ cm$, $w\ cm = 3\ cm$;
c) $a\ cm = 10\ cm$, $b\ cm = 7\ cm$, $w\ cm = 4\ cm$.

10. Kamień wolno puszczony po upływie t sekund przebiega drogę $s\ cm$, która wyraża się wzorem: $s = 4{,}91\ t^2$. Oblicz na podstawie tego wzoru s, gdy *a)* $t = 5$, *b)* $t = 10$, *c)* $t = 30$, *d)* $t = 40$.
Wyjaśnij, jakie za każdym razem rozwiązałeś zadanie!

11. Jeśli bok trójkąta równobocznego ma $a\ cm$, to pole p (w cm^2) wyraża się w przybliżeniu wzorem: $p = 0{,}433 \cdot a^2$. Oblicz na podstawie tego wzoru pole trójkąta równobocznego o boku *a)* $3\ cm$, *b)* $5{,}7\ cm$, *c)* $4\frac{1}{2}\ cm$! Sprawdź za każdym razem otrzymany wynik, mierząc na rysunku wysokość trójkąta i obliczając jego pole w znany sposób!

12. Jeśli obwód koła wynosi $a\ cm$, to jego pole p (w cm^2) wyraża się wzorem: $p = \frac{1}{4\pi} \cdot a^2 = 0{,}0796\ a^2$.
Oblicz pole koła, którego obwód wynosi: *a)* $20\ cm$, *b)* $5{,}4\ cm$, *c)* $15{,}2\ dcm$.

13. Jeśli przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają $a\ cm$ i $b\ cm$, przeciwprostokątna zaś $c\ cm$, to:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Narysuj kilka trójkąt prostokątnych, zmierz ich boki (w cm) i sprawdź powyższy wzór.

14. Oznaczmy przez l długość drutu miedzianego, wyrażoną w m, w temperaturze 0^0 C, przez L długość tego drutu (wyrażoną w m) po ogrzaniu, do t stopni C; w takim razie, jak doświadczenie uczy, mamy wzór:

$$L = l\,(1 + 0{,}000017\ t).$$

Oblicz na podstawie tego wzoru L, gdy:
a) $l\ m = 8\ m$, $t^0\ C = 12^0\ C$;
b) $l\ m = 20\ m$, $t^0\ C = 15^0\ C$;
c) $l\ m = 1{,}5\ m$, $t^0\ C = 21^0\ C$.
Jakie zadanie za każdym razem rozwiązałeś?

15. Objętość ostrosłupa (str. 166) wyraża się wzorem:

$$V = \frac{pw}{3}.$$

Oblicz objętość ostrosłupa, jeżeli:
a) $w\ cm = 4\ cm$, $p\ cm^2 = 5{,}4\ cm^2$;
b) $w\ cm = \frac{3}{5}\ m$, $p\ m^2 = 0{,}4\ m^2$.

16. Objętość stożka (str. 169) wyraża się wzorem:

$$V = \pi r^2 \frac{w}{3}.$$

Oblicz objętość, jeżeli (w cm):
a) $r = 5$, $w = 7$; *b)* $r = 3{,}5$, $w = 5{,}6$.

17. Objętość pryzmy (str. 172) wyraża się wzorem:

$$V = \frac{w}{6}\,[ab + cd + (a + c)(b + d)].$$

Oblicz objętość pryzmy, jeżeli (w cm):
a) $w = 7$, $a = 4$, $b = 5$, $c = 2$, $d = 3$;
b) $w = 9{,}5$, $a = 6{,}4$, $b = 4{,}3$, $c = 3{,}5$, $d = 2{,}7\ cm$.

18. Objętość klina (str. 175) wyraża się wzorem:

$$V = \tfrac{1}{6}\,bw\,(2a + c).$$

Oblicz objętość klina, jeżeli (w cm):
a) $w = \frac{3}{5}$, $b = 2{,}7$, $a = 4{,}5$, $c = 3{,}1$;
b) $w = 3{,}7$, $b = 4$, $a = 3{,}6$, $c = 2{,}6$.

19. Objętość beczki (str. 176) wyraża się wzorem:

$$V = \tfrac{4}{15}\,\pi w\,(2R^2 + Rr + \tfrac{3}{4}r^2).$$

Oblicz objętość beczki, jeżeli (w *dcm*):

a) $R = 6$, $r = 3$, $w = 18$;

b) $R = 5{,}1$, $r = 2{,}3$, $w = 14$.

20. Ilość dachówek, potrzebna na pokrycie 1 m^2 dachu, wynosi: $\dfrac{10500}{(d-n)\,s}$, gdzie d oznacza długość dachówki w *cm*, s jej szerokość w *cm*, a n długość w *cm*, wzdłuż której dwie dachówki zachodzą na siebie. Oblicz w przybliżeniu:

a) ile dachówek o wymiarach 30 *cm* i 15 *cm* potrzeba na 1 m^2, jeżeli długość, wzdłuż której zachodzą na siebie wynosi 4 *cm*?

b) ile kosztuje pokrycie dachu, którego pole wynosi 140 m^2, jeżeli 1000 sztuk dachówek kosztuje 160 *zł*?

21. *a)* Kupiec zmieszał a *kg* kawy jednego gatunku po p *zł* za 1 *kg* i b *kg* kawy drugiego gatunku po q *zł* za 1 *kg*; ile kosztował 1 *kg* mieszaniny?

Rozwiązanie:

a *kg* kawy I gat. kosztuje $a \cdot p$ *zł*

b *kg* kawy II gat. kosztuje $b \cdot q$ *zł*

Razem mieszanina kosztuje *zł*: $ap + bq$.

Ponieważ ciężar mieszaniny w *kg* wynosi $a + b$, przeto, oznaczając przez C cenę (w *zł*) 1 *kg* tej mieszaniny, mamy:

$$C = \frac{ap + bq}{a + b}.$$

b) Kupiec zmieszał 6 *kg* tytoniu po 56 *zł* za 1 *kg* i 8 *kg* tytoniu po 48 *zł* za 1 *kg*; ile kosztował 1 *kg* tej mieszaniny?

(Rozwiąż wprost i na podstawie wzoru!).

c) Do 2 *kg* kwasu siarkowego po 5 *zł* za 1 *kg* dolano 20 *kg* wody; ile kosztował 1 *kg* mieszaniny?

d) Do 7 *l* spirytusu po 11 *zł* za 1 *l* dolano 8 *l* wody; ile kosztował 1 *l* mieszaniny?

e) Handlarz win zmieszał 400 *l* wina po 4 *zł* za 1 *l* i 300 *l* po 6 *zł* za 1 *l*; ile kosztował 1 *l* mieszaniny?

22. *a)* Kupiec zmieszał a *kg* herbaty po p *zł* za 1 *kg*, b *kg* herbaty po q *zł* za 1 *kg* i c *kg* herbaty po r *zł* za 1 *kg*. Przekonaj się, że, oznaczając przez C cenę w *zł* za 1 *kg* tej mieszaniny, mamy:

$$C = \frac{ap + bq + cr}{a + b + c}.$$

b) Zmieszano trzy gatunki tytoniu: 8 *kg* po 56 *zł* za 1 *kg*, 12 *kg* po 44 *zł* za 1 *kg* i 5 *kg* po 60 *zł* za 1 *kg*; ile kosztował 1 *kg* mieszaniny?

c) Kupiec zmieszał trzy gatunki wina: 100 *l* po 5 *zł* za 1 *l*, 150 *l* po 4 *zł* za 1 *l* i 50 *l* po 8 *zł* za 1 *l*; ile kosztował 1 *l* tej mieszaniny?

Wielkości proporcjonalne

Wielkości wprost proporcjonalne

1. Cena, jaką płacimy za sól, zależy od jej ilości, t. j. od wagi.

Tabelka wskazuje ceny różnych ilości *kg* soli.

Ilość soli w *kg* . .	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Cena soli w *zł* . .	0,40	0,80	1,20	1,60	0,20	0,10	0,05

Za 2, 3, 5 razy większą ilość soli zapłacimy odpowiednio 2, 3, 5 razy więcej.

Z tabelki mamy np.: 2 *kg* kosztuje 0,80 *zł*,
4 *kg* kosztuje 1,60 *zł*.

Iloraz 4 : 2 jest wykładnikiem stosunku obu ilości soli, zaś 1,60 : 0,80 wykładnikiem stosunku ich cen. Oba wykładniki są równe, bo 4 : 2 = 1,60 : 0,80.

Widzimy zatem, że wykładnik stosunku dwóch ilości soli jest równy wykładnikowi stosunku odpowiednich cen.

Mówimy, że cena i ilość soli są do siebie wprost proporcjonalne.

Podobnie zachowuje się cena i ilość wielu innych towarów (np. kawy, herbaty, mleka i t. p.). Za dwa razy większą ilość kawy (herbaty, mleka), musimy zapłacić dwa razy więcej, za trzy razy większą ilość, trzy razy więcej i t. d. Cena i ilość takich towarów są do siebie wprost proporcjonalne.

Jeżeli 3 *kg* soli kosztuje 1,20 *zł*, to 1 *kg* kosztuje *zł*:

$$1{,}20 : 3 = 0{,}40.$$

Liczbę 0,40 nazywamy współczynnikiem proporcjonalności. Współczynnik proporcjonalności jest więc ilorazem liczb mierzących, odpowiednie sobie wielkości. W naszym przypadku współczynnik proporcjonalności oznacza w *zł* cenę 1 *kg* soli.

Uwaga. Niezawsze cena i waga towaru są do siebie wprost proporcjonalne. Np. cena diamentu zmienia się w ten sposób z jego wagą, że diament dwa razy cięższy kosztuje 4 razy więcej, 3 razy cięższy 9 razy więcej i t. d. A więc cena diamentu nie jest proporcjonalna do jego wagi.

2. Jeżeli płaca robotnika wynosi dziennie np. 3 *zł*, to jego zarobek zależy od liczby dni roboczych. W czasie dwa razy większym zarobi dwa razy więcej, w czasie trzy razy większym, trzy razy wiecej i t. d.

Mówimy i tutaj, że zarobek robotnika jest wprost proporcjonalny do liczby dni roboczych.

W 4, 5, 8 i t. d. dniach robotnik zarobi odpowiednio 12 *zł*, 15 *zł*, 24 *zł* i t. d.; jego dzienny zarobek wynosi 12 *zł* : 4 = 15 *zł* : 5 = 24 *zł* : 8 = 3 *zł*.

Iloraz 12 : 4 (lub 15 : 5, 24 : 8) jest współczynnikiem proporcjonalności. Wyraża on dzienny zarobek robotnika.

3. Jeżeli samolot przelatuje przeciętnie w 1 sek. np. 40 *m*, to droga, jaką przeleci, zależy od czasu. W czasie dwa razy dłuższym przeleci dwa razy większą drogę, w czasie trzy razy dłuższym, trzy razy większą drogę i t. d.

Mówimy, że droga, jaką samolot przelatuje, jest wprost proporcjonalna do czasu, zużytego na jej przebycie.

Samolot przeleci w 5 sek., 10 sek. i t. d. odpowiednio 200 *m*, 400 *m* i t. d.; zatem w 1 sek. przeleci 200 *m* : 5 = = 400 *m* : 10 = 40 *m*.

Iloraz 200 : 5 (lub 400 : 10 i t. d.) jest współczynnikiem proporcjonalności. Wyraża on w *m* drogę samolotu w 1 sek., czyli prędkość samolotu.

Mówimy, że prędkość samolotu wynosi 40 *m* na sek., co piszemy 40 *m*/sek. Tak samo, jeżeli pociąg przebiega 70 *km* na godzinę, wówczas prędkość jego wynosi 70 *km* na godz., co zapisujemy 70 *km*/godz.

4. Kawałek ołowiu objętości 5 cm^3 waży 56,7 *g*, zatem 10 cm^3 ołowiu waży 2 razy więcej, t. j. 113,4 *g*, 15 cm^3 ołowiu waży 3 razy więcej, t. j. 170,1 *g* i t. d.

Ciężar ołowiu jest więc wprost proporcjonalny do objętości.

Iloraz 56,7 : 5 (lub 113,4 : 10, 170,1 : 15 i t. d.) jest współczynnikiem proporcjonalności. Wyraża on w *g* ciężar 1 cm^3 ołowiu czyli t. zw. ciężar właściwy. Mówimy, ciężar właściwy ołowiu wynosi 11,34 *g* na cm^3, co zapisujemy 11,34 g/cm^3.

1 cm^3 złota waży 19,3 *g*, zatem ciężar właściwy złota wynosi 19,3 g/cm^3 (co czytamy 19,3 *g* na cm^3).

W przykładach 1, 2, 3, 4 występowały dwie wielkości od siebie zależne: 1) cena soli zależy od liczby *kg* soli, 2) zarobek robotnika zależy od liczby dni roboczych, 3) droga samolotu zależy od czasu lotu, 4) ciężar ołowiu zależy od objętości.

Wielkości, występujące w każdym z powyższych przykładów, nazwaliśmy **wprost proporcjonalnemi**.

Aby się przekonać, czy dwie wielkości zależne od siebie są wprost proporcjonalne, należy zbadać:

czy zwiększając jedną 2, 3, ... razy, zwiększamy tem samem drugą odpowiednio 2, 3, ... razy.

Zadania

1. W następujących zadaniach sporządź odpowiednie tabelki i wskaż te wielkości, które są do siebie wprost proporcjonalne. Oblicz, ile wynosi współczynnik proporcjonalności i podaj co oznacza! Sporządź wkońcu wykres w odpowiedniej skali!
   a) Kula karabinowa przebiega w 1 sek. 600 *m*; ile przebiega w 2, 3, 4, 7, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{15}$ sek.?
   b) 1 cm^3 złota waży 19,3 *g*; ile waży 2 cm^3, 5 cm^3, 10 cm^3, 1 dcm^3, $\frac{1}{2}$ cm^3, $\frac{1}{4}$ cm^3, $\frac{3}{4}$ cm^3?
   c) Pociąg jedzie z prędkością 60 *km*/godz.; jaką drogę zrobi w 2, 3, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ godziny?
   d) 1 *l* wina kosztuje 6 *zł*; ile kosztuje: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ *l*?
   e) Parowiec w 1 sek. przepływa średnio 13 *m*; ile przepływa w 2, 3, 4, 5, 6, 7 godzinach?
2. Narysuj trójkąty równoboczne o boku 1 *cm*, 4 *cm*, 6 *cm* i mierząc ich wysokości, przekonaj się, że wysokości są wprost proporcjonalne do boków; ile wynosi współczynnik proporcjonalności?
3. Czy obwód koła jest wprost proporcjonalny do promienia? Ile wynosi współczynnik proporcjonalności?
4. Czy pole kwadratu jest wprost proporcjonalne do długości boku?
5. Prostokąt ma podstawę 3 *cm*; czy jego pole jest wprost proporcjonalne do wysokości?
6. Kamień wolno puszczony przebiega w pierwszej sek. 5 *m*, w dwóch pierwszych sek. 20 *m*, w trzech pierwszych sek. 45 *m*, w czterech pierwszych sek. 80 *m*; czy możemy powiedzieć, że droga, jaką kamień przebiega, jest wprost proporcjonalna do czasu?

7. Płytka metalowa kwadratowa, o boku 1 *cm*, kosztuje 10 *gr*; ile kosztuje płytka kwadratowa o boku 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*? Czy cena płytki jest wprost proporcjonalna do długości boku?
8. Jaką liczbę trzeba wstawić w miejsce litery x?
   a) $x : 6 = \frac{1}{2}$, $x : 15 = \frac{7}{10}$, $x : 3 = \frac{5}{18}$;
   b) $4 : x = \frac{7}{11}$, $9 : x = 4{,}5$, $7 : x = \frac{4}{13}$;
   c) $\frac{2}{5} = x : 2{,}5$, $\frac{8}{3} = x : 15$, $12{,}6 = x : \frac{7}{3}$;
   d) $\frac{3}{7} = 2 : x$, $4{,}9 = 7 : x$, $\frac{14}{5} = \frac{2}{3} : x$.
   Rozwiązuj w następujący sposób:
   a) Ponieważ w równości $x : \frac{2}{3} = \frac{24}{5}$, szukaną liczbą jest dzielna, więc: $x = \frac{24}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{5}$;
   b) Ponieważ w równości $\frac{3}{4} : x = \frac{7}{2}$, szukaną liczbą jest dzielnik, zatem: $x = \frac{3}{4} : \frac{7}{2} = \frac{3}{14}$.

Reguła trzech prosta

(Dla wielkości wprost proporcjonalnych)

Sztuka sukna długości 15 *m* kosztuje 300 *zł*; ile kosztuje 4 *m* tego sukna?

Zadanie to rozwiążemy dwoma sposobami:

I. Wyznaczmy współczynnik proporcjonalności. Wynosi on $300 : 15 = 20$. Współczynnik proporcjonalności oznacza w naszym przypadku w *zł* cenę 1 *m* sukna. Ponieważ 1 *m* sukna kosztuje 20 *zł*, więc 4 *m* sukna kosztują 80 *zł*. Rozumowanie powyższe możemy zapisać w następujący sposób:

	15 *m* kosztuje 300 *zł*
więc	1 *m* kosztuje 300 *zł* : 15 = 20 *zł*,
a zatem	4 *m* kosztują 4 · 20 *zł* = 80 *zł*.

II. Oznaczając przez x liczbę *zł*, które trzeba zapłacić za 4 *m* sukna, zapisujemy zadanie następująco:

$$\begin{array}{l} 15\ m \text{ kosztuje } 300\ zł \\ \underline{4\ m \text{ kosztuje } \ x\ \ zł} \end{array}$$

Ponieważ wykładnik stosunku dwóch ilości towaru równa się wykładnikowi stosunku ich cen, więc otrzymujemy: $\frac{15}{4} = 300 : x$. Szukamy dzielnika, więc

$$x = 300 : \tfrac{15}{4} = 300 \cdot \tfrac{4}{15} = 80.$$

4 *m* sukna kosztują więc 80 *zł*.

Każdy sposób rozwiązywania zadań, dotyczących wielkości wprost proporcjonalnych (przyczem trzy wielkości są dane, a poszukuje się czwartej), nazywamy **regułą trzech prostą**.

Uwaga. Rozwiążmy sposobem pierwszym zadanie: 3 jaja kosztują 18 *gr*; ile jaj otrzymamy za 12 *gr*?

Ponieważ za 18 *gr* otrzymujemy 3 jaja
więc za 1 *gr* otrzymujemy $\frac{3}{18}$ jaja
a za 12 *gr* otrzymamy $12 \cdot \frac{3}{18}$ jaja $= 2$ jaja.

W tem zadaniu sposób pierwszy ma tę niedogodność, że zmusza nas do rozważania części przedmiotów, które są praktycznie niepodzielne. Łatwo się przekonać, że ta trudność zniknie, jeżeli rozwiązywać będziemy to zadanie drugim sposobem.

Zadania

1. 18 *kg* kawy kosztuje 432 *zł*; ile kosztuje: *a)* 5 *kg*, *b)* 9 *kg*, *c)* $2\frac{1}{2}$ *kg*, *d)* $\frac{3}{4}$ *kg*?
2. 5 *l* wina kosztuje 30 *zł*; ile kosztuje: *a)* 7 *l*, *b)* 4,75 *l*, *c)* $3\frac{1}{2}$ *l*?
3. Za 4 *m* sukna zapłacono 72 *zł*; ile należy zapłacić za: *a)* $1\frac{1}{2}$ *m*, *b)* 3,2 *m*, *c)* 6,5 *m*?
4. Za 5 cytryn zapłacono 75 *gr*; ile cytryn można kupić za: *a)* $1\frac{1}{2}$ *zł*, *b)* 1 *zł* 20 *gr*, *c)* 1,05 *zł*?

5. Za 3 *kg* soli zapłacono 1 *zł* 20 *gr*; ile *kg* soli można kupić za: *a)* 4 *zł* 40 *gr*, *b)* 3 *zł*, *c)* 4,7 *zł*?
6. Na wyżywienie 8 osób zakupiono 30 *kg* mąki i 40 *kg* mięsa; ile potrzeba *kg* mąki i ile *kg* mięsa na wyżywienie 15 osób przez ten sam przeciąg czasu?
7. 5 górników wydobywa dziennie 9 tonn węgla; ile tonn węgla wydobędzie w jednym dniu 9 górników?
8. Ile zarobi w ciągu 5 tygodni robotnik, który zarabia w ciągu 7 tygodni 364 *zł*?
9. 18 robotników zarobiło w pewnym czasie 1314 *zł*; ilu robotników zarobiłoby w tymże czasie 2044 *zł*?
10. Na towarze kupionym za 3000 *zł* zyskał kupiec 450 *zł*; ile *zł* zyskał na towarze kupionym za 250 *zł*?
11. Kupiec sprzedał 7 *kg* towaru i zarobił 45 *zł*; ile musiałby sprzedać tego towaru, żeby zarobić 261 *zł*?
12. Pociąg przebył 350 *km* w 7 godz.; jaką drogę zrobi w 12 godz., jadąc z tą samą prędkością? Ile czasu zużyje na przebycie 1000 *km*?
13. 4^0 Reamur'a wynoszą tyle, co 5^0 Celsjusza; ile stopni C wynoszą: 5^0, 8^0, 17, 35^0, 62^0, $73{,}6^0$ R. Ile stopni R wynoszą: 9^0, 12^0, 15^0, $19{,}5^0$, 72^0 C?
14. Za 50 dolarów zapłacono 264,8 *zł*; ile dolarów zakupiono za 53,13 *zł*? Ile zapłacono za 14,5 dolarów?
15. 100 franków francuskich kosztuje 34,86 *zł*; zamień na franki 732,6 *zł*! Zamień na złote 75,5 franków!
16.* 25 *m* drutu waży 3,85 *kg*; jak długi jest drut o wadze 18,5 *kg*?
17. Wahadło robi w 5 sekundach 12 wahań; ile wahań robi na minutę? W jakim czasie wykona 100 wahań?
18. Koło robi 7296 obrotów w 2 godz. 32 min.; ile obrotów zrobi w 4 godz. 15 min.? W jakim czasie zrobi 1000 obrotów?

* Liczby, w zadaniach oznaczonych gwiazdką (*), są przybliżone.

19. Przednie koło robi 60 obrotów, gdy równocześnie tylne robi 45 obrotów; ile obrotów wykona przednie koło, gdy tylne zrobi 81 obrotów, a ile wykona tylne koło, gdy przednie zrobi 96 obrotów?
20. Odległość miejscowości *A* od *B* wynosi 9 *km*, na mapie zaś odległość ta wynosi 12 *cm*. Jaka jest odległość miejscowości *C* od *D*, jeśli na tej samej mapie wynosi 15 *cm*? W jakiej skali mapa jest zrobiona?
21. Pociąg w 20 min. przebiega 24 *km*; w jakim czasie przebiegnie 90 *km*? Jaką drogę przebiegnie w $1\frac{1}{4}$ godz.?
22. Oświetlenie sali 5 żarówkami kosztuje dziennie 1 *zł* 20 *gr*; ile kosztowałoby dziennie oświetlenie tej sali 8 żarówkami?
23. Światło przebiega drogę od słońca do ziemi, wynoszącą 150 000 000 *km*, w 8 min.; jak odległa jest od ziemi gwiazda, z której światło dochodzi do ziemi po jednym roku?
24. Głos przebiega 1 *km* w 3 sek.; w jakiej odległości od nas uderzył piorun, gdy huk usłyszeliśmy po upływie 17 sek. od ujrzenia błyskawicy?
25. Za naprawę 100 *m* drogi żąda przedsiębiorca 240 *zł*; ile trzeba zapłacić za naprawę 1870 *m* drogi?
26. Potrzeba 10 000 *kg* (t. j. jednego wagonu) blendy smolistej dla wydobycia 40 *mg* radu; ile blendy potrzeba na 1 *g* radu?
27.* 5 cm^3 lodu o temperaturze 0^0 C waży 4,584 *g*; ile waży bryła lodu o objętości 7,3 cm^3?
28. W wycieczkach górskich liczy się przeciętnie na 1 godz. czasu 275 *m* drogi wgórę; ile czasu potrzeba na wejście na szczyt o wysokości (licząc od podstawy): *a)* 1100 *m*, *b)* 412 *m*, *c)* 962 *m*, *d)* 1375 *m*?
29. Na długości 6 *km* droga wzniosła się o 102 *m*; o ile wznosi się przeciętnie na długości: *a)* $1\frac{1}{2}$ *km*, *b)* 5 *km*?

30.* Na przestrzeni 340 *km* (II stop. dokład.), lokomotywa ciągnąca pociąg towarowy, zużyła 5,2 tonn węgla; ile tonn zużywa przeciętnie na 100 *km*?
31. 1000 *l* benzyny kosztuje 760 *zł;* ile kosztuje 635 *l* benzyny?
Rozwiążemy to zadanie t. zw. metodą **włoską** czyli kupiecką.
Rozwiązanie:

500 *l*	benzyny	kosztuje	760 *zł* : 2 =	380 *zł*
100 *l*	„	„	760 *zł* : 10 =	76 *zł*
10 *l*	„	„	76 *zł* : 10 =	7 *zł* 60 *gr*
20 *l*	„	„	2 · 7 *zł* 60 *gr* =	15 *zł* 20 *gr*
5 *l*	„	„	380 *zł* : 100 =	3 *zł* 80 *gr*

Razem 635 *l* benzyny kosztuje . . . . . . 482 *zł* 60 *gr*

Oblicz w podobny sposób, ile kosztuje: *a)* 735 *l*, *b)* 245 *l*, *c)* 821 *l*, *d)* 57 *l*?
32. 7 *l* mleka daje 1,05 *l* masła; ile *l* masła otrzymamy z $24\frac{3}{5}$ *l* mleka?
Rozwiążemy to zadanie metodą włoską.

21 *l*	mleka	daje	masła	$3 \cdot 1{,}05\ l = 3{,}15\ l$
1 *l*	„	„	„	$1{,}05\ l : 7 = 0{,}15\ l$
2 *l*	„	„	„	$2 \cdot 0{,}15\ l = 0{,}30\ l$
$\frac{1}{5}$ *l*	„	„	„	$0{,}15\ l : 5 = 0{,}03\ l$
$\frac{2}{5}$ *l*	„	„	„	$2 \cdot 0{,}03\ l = 0{,}06\ l$

Razem $24\frac{3}{5}$ *l* mleka daje masła. . . . . 3,69 *l*

Oblicz w ten sposób, ile *l* masła otrzymasz z: *a)* $15\frac{3}{4}$ *l* mleka, *b)* $22\frac{1}{2}$ *l* mleka, *c)* $33\frac{3}{5}$ *l* mleka?
33. Za przewóz $\frac{3}{2}$ *t* towaru zapłacił kupiec 150 *zł* 30 *gr;* ile zapłaci za przewóz 5 *t* towaru? Oblicz metodą włoską!
34. Pewien kapitał przynosi w 8 miesiącach 1680 *zł* dochodu; jaki dochód przyniesie w: *a)* 20 miesiącach, *b)* $2\frac{1}{2}$ latach, *c)* $1\frac{1}{2}$ roku? Oblicz metodą włoską!

35. 1 m^2 blachy (pewnej grubości) waży 20 *kg*; jakie pole ma blacha, której ciężar wynosi: *a)* 115 *kg*, *b)* 85 *kg*, *c)* 162 *kg*? Oblicz metodą włoską!

36. W głębokości 350 *m* jest temperatura 33^0 C, a w głębokości 25 *m* jest 8^0 C; w jakiej głębokości jest temperatura 21^0 C, jeśli przyjmiemy, że (począwszy od 25 *m*) przyrost temperatury jest wprost proporcjonalny do przyrostu głębokości?

Wielkości odwrotnie proporcjonalne

1. Ilość płótna, jaką można kupić za pewną kwotę np. 60 *zł*, zależy od tego, ile kosztuje 1 *m* płótna, jak wskazuje tabelka:

Cena 1 *m* płótna w *zł*	1	2	3	4	5	6
Ilość *m* kupiona za 60 *zł*	60	30	20	15	12	10

Jeżeli 1 *m* płótna jednego gatunku kosztuje 2, 3, 4 i t. d. razy więcej niż 1 *m* drugiego gatunku, to oczywiście za 60 *zł* kupimy odpowiednio 2, 3, 4 i t. d. razy mniej płótna pierwszego gatunku niż drugiego.

Za 60 *zł* można kupić np.:

30 *m* płótna po 2 *zł* za 1 *m*,
lub 15 „ „ „ 4 „ „ 1 „

Ułamek $\frac{30}{15}$ jest wykładnikiem stosunku ilości płótna obu gatunków. Ułamek $\frac{2}{4}$ jest wykładnikiem stosunku odpowiednich cen za 1 *m*. Ponieważ

$$\frac{30}{15} = \frac{4}{2}$$ więc:

w y k ł a d n i k s t o s u n k u i l o ś c i d w ó c h g a t u n k ó w p ł ó t n a (które kupimy za tę samą sumę) j e s t r ó w n y o d w r o t n o ś c i w y k ł a d n i k a s t o s u n k u i c h c e n z a 1 *m*.

Mówimy, że ilość metrów płótna, jaką możemy kupić za pewną kwotę, jest o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n a do ceny 1 *m* tego płótna.

Podobnie rzecz przedstawia się z wieloma innemi towarami. Jeżeli cena 1 *kg* jakiegoś towaru jest 2, 3,... razy większa niż drugiego, to za tę samą kwotę pieniędzy (np. za 60 *zł*) kupimy 2, 3,... razy mniej pierwszego towaru, niż drugiego.

Mówimy, że liczba *kg* towaru, jaką możemy kupić za pewną kwotę, jest o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n a do ceny 1 *kg* tego towaru.

U w a g a: Jeżeli 1 *m* płótna kosztuje 3 *zł*, to 20 *m* kosztuje: $20 \cdot 3$ *zł* = 60 *zł*.

Mnożąc więc liczbę *m* przez cenę 1 *m*, otrzymujemy kwotę wydaną. Wynika stąd, że mnożąc przez siebie odpowiednie liczby w tabelce, otrzymamy 60. Zatem:

$$1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10 = 60.$$

2. Jeżeli 1 robotnik wystawi mur w 12 dniach, to 2 robotników wykona tę pracę w czasie dwa razy krótszym, t. j. w 6 dniach, 3 robotników w czasie 3 razy krótszym, t. j. w 4 dniach, 6 robotników — w 2 dniach, 12 robotników w 1 dniu. Widzimy zatem, że czas potrzebny na wykonanie pewnej pracy zależy od liczby robotników w ten sposób, że 2, 3, 4 razy więcej robotników wykona tę samą pracę w czasie odpowiednio 2, 3, 4 razy krótszym.

Czas, potrzebny do wykończenia pewnej pracy, jest odwrotnie proporcjonalny do liczby zajętych robotników.

Iloczyn odpowiednich liczb wynosi 12, gdyż

$$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 12.$$

Mówimy, że do wystawienia muru potrzeba 12 dni roboczych.

3. W tabelce, zaznaczone mamy czasy, zużyte na przebycie 60 *m* drogi, przy odpowiednich prędkościach.

Prędkość w *m*/sek.	Pociąg osobowy 10	Pociąg posp. 20	Samochód 30	Samolot 40	Kula karabinowa 600
Czas zużyty na przebycie 60 *m* podany w sek.	6	3	2	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Z tabelki powyższej widzimy, że pociąg pospieszny, jadący z prędkością dwa razy większą, niż pociąg osobowy, przebywa tę samą drogę w czasie dwa razy krótszym; samochód, jadący z szybkością trzy razy większą, niż pociąg osobowy, przebywa tę drogę w czasie trzy razy krótszym i t. d.

Czas, potrzebny na przebycie pewnej drogi, jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do prędkości.

Iloczyn odpowiednich liczb wynosi 60, mamy bowiem:

$$6 \cdot 10 = 3 \cdot 20 = 2 \cdot 30 = 1\tfrac{1}{2} \cdot 40 = \tfrac{1}{10} \cdot 600 = 60.$$

Iloczyn ten przedstawia w *m* drogę przebytą.

W przykładach 1, 2, 3 występowały dwie wielkości od siebie zależne: 1) liczba *m* płótna (jaką możemy kupić za pewną kwotę pieniędzy, np. za 60 *zł*) zależy od ceny 1 *m* płótna; 2) czas potrzebny do wykonania pewnej pracy zależy od liczby robotników; 3) czas potrzebny na przebycie pewnej drogi zależy od prędkości.

Wielkości, występujące w każdym z powyższych przykładów, nazwaliśmy odwrotnie proporcjonalnemi.

Aby sie przekonać, czy dwie wielkości zależne od siebie są odwrotnie proporcjonalne, należy zbadać:

czy zwiększając jedną 2, 3... razy, tem samem zmniejszamy drugą odpowiednio 2, 3... razy.

Zadania

1. W następujących zadaniach sporządź odpowiednie tabelki i wskaż te wielkości, które są do siebie odwrotnie proporcjonalne. Oblicz iloczyn odpowiednich liczb i podaj co oznacza! Sporządź wkońcu wykres graficzny w odpowiedniej skali!
   a) 30 robotników wykonywa pewną pracę w 1 dniu; ilu robotników wykona tę pracę w: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 5, *d)* 6, *e)* 10, *f)* 15 dniach?
   b) Jeżeli pewien odcinek podzielimy na 12 równych części, to taka część wynosi 1 *cm*; jaka jest długość części, jeśli dany odcinek podzielimy na: *a)* 3, *b)* 4, *c)* 6, *d)* 24, *e)* 120 równych części?
   c) Jeśli koło na pewnej drodze zrobiło 100 obrotów. to ile obrotów na tej samej drodze wykona koło o obwodzie: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4 razy mniejszym, *e)* 2, *f)* 4, *g)* 25 razy większym?
   d) Wiedząc, że w 1 sekundzie człowiek pływając, robi drogę 1 *m*, w chodzie 1,5 *m*, wioślarz 2 *m*, człowiek w biegu 3 *m*, na rowerze 6 *m*, oblicz kolejno czasy, potrzebne na przebycie drogi 60 *m*!
2. Narysuj prostokąty o polu 6 cm^2 i o podstawie: 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm*; przekonaj się, że wysokości są odwrotnie proporcjonalne do podstawy!
3. Narysuj trójkąty o polu 4 cm^2 i o wysokości: 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*, 6 *cm*; przekonaj się, że podstawy są odwrotnie proporcjonalne do wysokości!
4. Jeden robotnik wykonywa pewną pracę w tygodniu, pracując dziennie 6 godzin; ile godzin dziennie musi pracować: *a)* 2, *b)* 3, *c)* 4, *d)* 5, *e)* 6 robotników, aby tę pracę również w tygodniu wykonać? Przekonaj się, że liczba robotników jest odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennej pracy!

Reguła trzech prosta

(Dla wielkości odwrotnie proporcjonalnych)

Pewną pracę wykonało 20 robotników w 18 dniach; w ilu dniach wykonywa tę pracę 12 robotników?

Zadanie to rozwiążemy dwoma sposobami:

I. 20 robotników potrzebuje 18 dni, 1 robotnik potrzebuje 20 razy więcej dni, t. j. 360 dni, 12 robotników potrzebuje 12 razy mniej dni, t. j. 30 dni.

A więc 12 robotników wykonywa tę pracę w 30 dniach.

II. Oznaczając przez x liczbę dni, w których 12 robotników wykonywa pracę, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

20 robotników wykonywa pracę w 18 dniach
12 „ „ „ „ x „

Wykładnikiem stosunku liczby robotników jest ułamek $\frac{20}{12}$; wykładnikiem stosunku odpowiednich dni pracy iloraz $18 : x$. Ponieważ liczba robotników jest odwrotnie proporcjonalna do liczby dni potrzebnych do wykonywania danej pracy, więc odwrotność ułamka $\frac{20}{12}$ równa się ilorazowi $18 : x$.

Zatem $\frac{12}{20} = 18 : x$

Stąd $x = 18 : \frac{12}{20} = 30.$

A więc 12 robotników wykonywa pracę w 30 dniach.

Zadania

1. 12 robotników wykonywa pewną pracę w $2\frac{1}{2}$ dniach; w ilu dniach wykonywa tę samą pracę 15 robotników?
2. 30 robotników wykonywa pewną pracę w 16 godzinach; ilu robotników wykonywa tę samą pracę w 12 godzinach?
3. Pewien zapas żywności wystarczy dla 6 ludzi na 10 dni; na ile dni starczy tenże zapas dla 4 ludzi?

4. Pewien zapas żywności wystarczy dla 16 ludzi na 35 dni; dla ilu ludzi wystarczy ten zapas na 28 dni?
5. Pociąg, jadący z prędkością 50 *km* na godzinę, przebywa pewną drogę w $7\frac{1}{2}$ godzinach; z jaką prędkością musiałby jechać pociąg, aby tę samą drogę przebyć w 6 godzinach?
6.* Dla przebycia pewnej drogi musi piechur zrobić 1400 kroków (II stopień dokładności), o długości 0,75 *m*; ile kroków musiałby zrobić piechur, gdyby długość każdego kroku wynosiła 0,80 *m*?
7.* Kupiono 1000 dolarów złotych, płacąc 9,03 *zł* za dolara; ileby kupiono dolarów za tę samą kwotę, gdyby 1 dolar złoty kosztował 9,05 *zł*?
8. Zarządca majątku otrzymał pewną kwotę pieniędzy, by wypłacić 72 robotnikom zarobek tygodniowy (t. j. 6-dniowy). Okazało się jednak, że było zatrudnionych 108 robotników; iludniowy zarobek może im zarządca wypłacić?
9. Posłaniec, idąc z prędkością $4\frac{1}{2}$ *km* na 1 godzinę, odbywa drogę z miejscowości *A* do *B* w 6 godzinach; ile *km* musi robić w 1 godzinie, skoro ma przebyć tę drogę w 5 godzinach?
10. Stefek, chcąc sobie sprawić rakietę tenisową, musiałby składać na ten cel przez 3 miesiące po 40 *gr* dziennie; po ile musi składać, jeżeli chce kupić rakietę po 2 miesiącach?
11. Gdy rurą wpływa 21 *l* wody na minutę, to zbiornik napełni się w 12 godzinach; ile musiałoby wpływać wody na minutę, by zbiornik napełnił się w 9 godzinach? W jakim czasie napełniłby się zbiornik, gdyby rurą wpływało 36 *l* wody na minutę?
12.* Przednie koło u wozu ma 3,20 *m* obwodu, tylne zaś

* Liczby, w zadaniach oznaczonych gwiazdką (*), są przybliżone.

3,75 *m*; ile obrotów zrobiło w czasie jazdy tylne koło, gdy przednie zrobiło 460 obrotów? (II stopień dokładności).

13. Pewną sumę rozdzielono równo między 7 osób, przyczem każda otrzymała 30 *zł*; ile otrzymałaby każda osoba, gdyby tę sumę podzielono równo między 15 osób? Między ile osób należałoby podzielić tę sumę, chcąc aby każda otrzymała po 21 *zł*?

14. Pewien odcinek podzielono na 12 równych części, o długości 8 *cm*; na ile równych części należałoby podzielić ten odcinek, aby każda część miała długość 6 *cm*? Jaką długość miałaby każda część, gdyby odcinek nasz podzielono na 64 równych części?

15. Kąt 42^0 mieści się w pewnym kącie 6 razy; ile razy mieści się w tym kącie kąt 36^0?

16. Dwa prostokąty mają równe pola; jeden z tych prostokątów ma podstawę 8 *cm*, wysokość 4 *cm*, drugi zaś ma podstawę: *a)* 6 *cm*, *b)* 10 *cm*, *c)* $7\frac{1}{2}$ *cm*. Jaka jest wysokość drugiego prostokąta? Rysunek!

17.* Na pokrycie mebli potrzeba 24,5 *m* materji, szerokości 2,1 *m*; ile potrzeba *m* materji, szerokości 1,8 *m*?

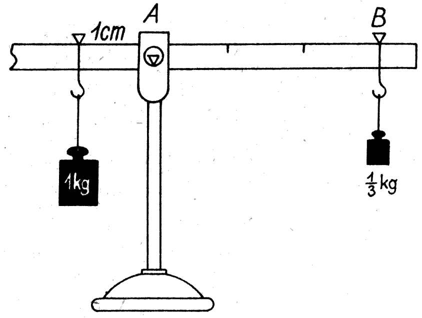
18. Z pewnej ilości wełny można otrzymać 72 *m* sukna, szerokości $1\frac{3}{4}$ *m*; *a)* ile *m* sukna, szerokości $2\frac{1}{4}$ *m*, można otrzymać z tej samej ilości wełny? *b)* jak szerokie będzie sukno, długości 63 *m*?

19.* Na pokrycie podłogi zużyto 750 desek (II stopień dokładności), przyczem pole deseczki wynosiło 2,7 dcm^2; ile deseczek zużytoby na pokrycie tej podłogi, jeśliby pole deseczki wynosiło 3,2 dcm^2?

20. Dwa trójkąty mają równe pola; jeden z nich ma podstawę 6 *cm*, wysokość 4 *cm*; drugi zaś ma:
a) podstawę: *a)* 8 *cm*, *b)* 6 *cm*, *c)* 3 *cm*; jaka jest wysokość drugiego trójkąta?

b) wysokość: *a)* 2 *cm*, *b)* 5 *cm*, *c)* 3 *cm*; jaka jest podstawa drugiego trójkąta?

21. Na rys. 22 mamy dźwignię, t. j. belkę sztywną, która może obracać się około punktu *A*. Po lewej stronie



Rys. 22.

belki zawieszono ciężar 1 *kg* w odległości 1 *cm* od punktu *A*. Ciężar ten możemy zrównoważyć wieszając w dowolnym punkcie *B* (po prawej stronie) odpowiedni ciężarek. Doświadczenie uczy, że: *a)* wielkość tego ciężarka jest odwrotnie proporcjonalna do odległości *AB*; *b)* ciężarek wynosi 1 *kg*, jeśli *AB* ma 1 *cm*.
a) Jaki ciężarek należy powiesić, jeśli *AB* ma długość: 2 *cm*, $2\frac{1}{2}$ *cm*, $3\frac{3}{4}$ *cm*, 5 *cm*, $\frac{1}{2}$ *cm*, $\frac{3}{4}$ *cm*?
b) Ile wynosi *AB*, jeśli ciężarek ma: 1 *kg*, $\frac{1}{2}$ *kg*, $\frac{3}{4}$ *kg*, 200 *g*, 2 *kg*?

Reguła trzech złożona

Wiele zagadnień, w których występuje więcej wielkości, można sprowadzić do zadań, które rozwiązuje się przy pomocy znanej już reguły trzech prostej.

Przykłady:

1) 16 robotników wykonało pewną pracę w 15 dniach, pracując po 9 godzin dziennie; w ilu dniach wykona-

łoby tę pracę 12 robotników, pracując po 8 godzin dziennie?

R o z w i ą z a n i e: Praca wymaga godzin roboczych

$$16 \cdot 15 \cdot 9$$

t. j. 2160 godzin roboczych. 12 robotników, pracując po 8 godzin dziennie, daje $12 \cdot 8$ t. j. 96 godzin roboczych w jednym dniu. Ponieważ na wykonanie pracy potrzeba 2160 godzin roboczych, więc druga partja robotników wykona pracę w (2160 : 96) dniach, t. j. w $22\frac{1}{2}$ dniach.

2) 14 robotników w 6 dniach zarobiło 210 *zł*; ile *zł* zarobi 23 robotników w 4 dniach?

R o z w i ą z a n i e: 14 robotników, pracując przez 6 dni, daje $14 \cdot 6$ t. j. 84 dni robocze. 23 robotników, pracując przez 4 dni, daje $23 \cdot 4$ t. j. 92 dni robocze. Zostaje więc do rozwiązania zadanie:

za 84 dni robocze płaca wynosi 210 *zł*
za 92 „ „ „ „ x *zł*

Mamy stąd: $x = 230$. Zatem druga partja robotników zarobi 230 *zł*.

3) Wykopano rów długości 35 *m*, szerokości 1,5 *m* i głębokości 0,5 *m* za 105 *zł*; ile *m* rowu szerokości 2 *m* i głębokości 1,5 *m* można wykopać za 600 *zł*?

R o z w i ą z a n i e: Przekrój rowu wykopanego ma $(0,5 \cdot 1,5)\, m^2 = 0,75\ m^2$; zatem objętość rowu wynosi $(0,75 \cdot 35)\, m^3 = 26,25\ m^3$. Rozwiązujemy zadanie:

26,25 m^3 rowu kosztuje 105 *zł*
x „ „ „ 600 *zł*

Stąd $x = 150\ m^3$, a więc za 600 *zł* można wykopać 150 m^3 rowu. Ponieważ drugi rów ma przekrój $(2 \cdot 1,5)\, m^2 = 3\ m^2$, więc długość jego wynosi $(150 : 3)\ m = 50\ m$.

Zadania

1. 18 robotników zarabia w 5 dniach 630 *zł*; ile zarobi 27 robotników w 6 dniach?
2. 7 robotników zarabia w 13 dniach 638 *zł* 82 *gr*; ilu robotników zarobi 1053 *zł* w 15 dniach?
3. 5 robotników zarabia w 7 dniach 254 *zł* 10 *gr*; w ilu dniach 11 robotników zarobi 638 *zł* 88 *gr*?
4. Piechur, idący przez 12 dni po 5 godzin dziennie, przechodzi 270 *km*; ile *km* przejdzie, idąc przez 16 dni po $5\frac{1}{2}$ godzin dziennie?
5. 15 robotników, pracujących po 9 godzin dziennie, wykopałoby w 4 dniach rów 100 *m* długi; w ilu dniach wykopie 9 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, rów długości 120 *m*?
6. Wykopanie rowu 15 *m* długości, 2 *m* szerokości i $\frac{3}{4}$ *m* głębokości kosztuje 135 *zł*; jakiej długości jest rów, którego wykopanie kosztuje 270 *zł*, a który ma $2\frac{1}{4}$ *m* szerokości i 80 *cm* głębokości?
7. Zapas chleba starczy dla 324 ludzi na 17 dni, jeżeli wydziela się dziennie po $\frac{3}{4}$ *kg* na osobę; na ile dni wystarczy ten zapas chleba dla 306 ludzi, otrzymujących dziennie $\frac{1}{2}$ *kg* na osobę!
8. Koło o obwodzie 3 *m* przejechało w 10 minut 6 *km*; w ilu minutach przejedzie 8 *km* koło o obwodzie $2\frac{1}{2}$ *m*, jeśli w minucie obraca się tyle razy, co poprzednie?
9. Za 10,5 *m* sukna o szerokości 1,75 *m* zapłacono 120,6 *zł*; ile zapłaconoby za 3,5 *m* tego sukna o szerokości 1,4 *m*?
10. Chodnik 100 *m* długości, $4\frac{1}{2}$ *m* szerokości ułożono z 3600 płyt; jakiej długości chodnik można ułożyć z 5400 takich płyt, jeżeli ma 6 *m* szerokości?
11. Zrobiono zapas siana na 40 tygodni dla 36 koni, licząc po $12\frac{1}{2}$ *kg* dziennie na konia; na jak długo wystar-

czy ten zapas siana dla 30 koni, jeśli dziennie wydawać się będzie 10 *kg* na konia?

12.* Z 12,1 *kg* przędzy otrzymuje się 130,2 *m* płótna, szerokości 0,75 *m*; ile *m* płótna, szerokości 1,25 *m*, otrzymamy z 18,5 *kg* przędzy?

13. 7 monterów potrzebuje 6 dni na założenie przewodu elektrycznego długości 273 *m*; w jakim czasie 5 monterów założy przewód długości 325 *m*?

14. Aby wypompować wodę z kopalni, potrzeba 20 pomp, pracujących przez 12 dni po 15 godzin dziennie. Po upływie 5 dni 4 pompy popsuły się, a pozostałe pompowały po 18 godzin dziennie; w jakim czasie wypompowano wodę?

15. 8 robotników zgodziło się wybrukować podwórze w 13 dniach; po 5 dniach, pracując 8 godzin dziennie, wykonali trzecią część pracy. Ile godzin przez pozostałe dni muszą dziennie pracować, aby na czas pracę wykończyć?

Procenty

Określenia

Jednym procentem jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{100}$ tej wielkości.

Np. jeden procent 7 $m = \frac{1}{100}$ z 7 $m = \frac{7}{100}\, m = 7$ *cm*.

Dwa, trzy, cztery procent jakiejś wielkości są to odpowiednio $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{4}{100}$ tej wielkości.

Np.: 8 procent 40 $m = 8 \cdot \frac{40}{100}\, m = \frac{16}{5}\, m$,

$\frac{5}{2}$ procent 1000 $= \frac{5}{2} \cdot \frac{1000}{100} = 25$,

150 procent 20 $= 150 \cdot \frac{20}{100} = 30$.

Procent oznaczamy %, a więc 4% oznacza 4 procent, $1\frac{1}{2}$% oznacza jeden i pół procentu.

Niechaj k oznacza jakąś liczbę, p zaś procent. Zapytajmy się, jaka to jest liczba d, która wynosi p procent liczby k.

Jedna setna część liczby k jest $k : 100$.

Ponieważ d zawiera p setnych części liczby k, więc

$$d = p \cdot (k : 100) = (pk) : 100.$$

A zatem $$d = \frac{pk}{100}.$$

Jeżeli np. $k = 12$, $p\% = 3\%$, to $d = \frac{3 \cdot 12}{100} = 0{,}36$.

Uwaga.

1. Wino zawiera 15% alkoholu t. zn., że w 100 *l* wina zawartych jest 15 *l* alkoholu.

2. W lasach polskich jest 66% sosny, t. zn., że przeciętnie na 100 morgów lasu jest w tem 66 morgów sosny.

3. Polska produkuje 14,4% światowej produkcji ziemniaków, to znaczy, że ze zbiorów całego świata na 100 *q* ziemniaków wypada 14,4 *q* ziemniaków z Polski.

4. Księgarz, zakupując hurtownie książki, otrzymuje 30% opustu, czyli rabatu, to znaczy, że za towar wartości 100 *zł* płaci o 30% mniej, to jest płaci 70 *zł*.

Zadania

1. Oblicz: 3% z 100, 15% z 20, $7\frac{1}{2}$% z 1000, 200% z $2\frac{1}{2}$, 1% z 700, 6% z 15 000, 50% z 72, $\frac{1}{10}$% z 10 000, 8% z 25, 10% z 40, 5% z 0,125, 100% z 7,23.
2. Oblicz: 2%, 3%, 4% z *a)* 257, *b)* 684, *c)* 960, *d)* 1256!
3. Oblicz: 3%, 4%, 8%, $7\frac{1}{2}$% z *a)* 420, *b)* 0,430, *c)* 1,862.
4. Ile to jest: 8% z 1 *m*, 4% z 1 *kg*, 12% z 1 *km*, 2% z 1 dcm^2, $3\frac{1}{2}$% z 1 m^3, 75% z 1 *l*?
5. Ile to jest: 1%, 3%, $1\frac{1}{2}$%, 8%, $5\frac{1}{2}$% z 300 *zł*?

6. Oblicz do pierwszej cyfry znaczącej 3% z 856.
Rozwiązanie: zaokrąglamy 856 do 900.
Ponieważ 3% z 900 $= \frac{3 \cdot 900}{100} = 27$, więc w przybliżeniu 3% z 856 wynosi 27.
Podobnie liczymy w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej 4% z 0,00641.
Ponieważ 4% z 0,006 $= \frac{4 \cdot 0{,}006}{100} = 0{,}00024$, więc 0,00024 jest w przybliżeniu 4% z 0,00641.
Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej: 1%, 2%, 3%, 4%, 5%, 8% z *a)* 645, *b)* 829, *c)* 1684, *d)* 20,83, *e)* 114,84, *f)* 0,0641, *g)* 0,00052.
7. Wyraź procentem następujące ułamki danej wielkości: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{50}$, $\frac{13}{25}$, $1\frac{1}{2}$.
8. Na towarze, kupionym za 7250 *zł*, kupiec zarobił 6%; ile *zł* zarobił i za ile sprzedał towar?
9.* Na towarze, kupionym za 5200 *zł*, kupiec stracił $1\frac{1}{2}$%; ile kupiec stracił i za ile sprzedał towar?
10. W klasie liczącej 35 uczniów, 80% przeszło do następnej klasy; ilu uczniów przeszło?
11. W bitwie, w której brało udział 1500 żołnierzy, zginęło 11%; ilu żołnierzy pozostało przy życiu?
12. Czynsz pewnej dzierżawy, wynoszący 2800 *zł* rocznie, podniesiono o 6%; ile wynosi zwiększony czynsz?
13. Za bilet 3-ciej klasy zapłacono 18 *zł* 30 *gr*; ile kosztuje bilet 2-giej klasy, jeśli jest o 50% droższy?
14. Cenę za towar, który kosztował 7 *zł* 50 *gr* obniżono o 8%; ile kosztował towar po obniżeniu?
15. Kupiec zakupił 1250 *l* wina za 8125 *zł*; po czemu sprzedaje 1 *l*, jeżeli zarabia 7%?
16. Przesiębiorstwo przyniosło 285 000 *zł* dochodu brutto; koszta produkcji wynosiły 62%, administracji 11%, podatki 13%. Jaki był czysty dochód?

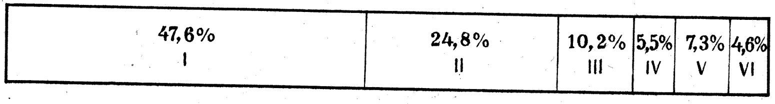
17. Szynka zawiera 28% wody, 25% białka, 36% tłuszczu, a resztę stanowią sole; oblicz ile każdej z tych substancyj zawiera się w $1\frac{1}{2}$ *kg* szynki?
18. Mięso wołowe traci wskutek gotowania 15% swego ciężaru; ile waży po ugotowaniu $\frac{3}{4}$ *kg* mięsa wołowego?
19. Las, którego stan drzewny wynosi 5800 m^3, posiada roczny przyrost $2\frac{1}{3}$%; jeśli 1 m^3 drzewa kosztuje 18 *zł*, to jaka jest wartość tego lasu po upływie roku?
20. Towar waży brutto (z opakowaniem): *a)* 18,5 *kg*, *b)* 5,6 *kg*, *c)** 4,6 *kg*, tara (opakowanie) zaś wynosi: *a)* 8%, *b)* $12\frac{1}{2}$%, *c)** 8,75% tego ciężaru; ile waży towar netto (bez opakowania)?
21. Sprzedano majątek ziemski za: *a)* 650 000 *zł*, *b)* 440 000 *zł*, *c)* 300 000 *zł*; pośrednik otrzymał: *a)* 1,4%, *b)* 1,2%, *c)* 1% ceny kupna czyli tak zwaną prowizję; ile otrzymał prowizji?
22. Ktoś ubezpieczył dom od ognia na: *a)* 60 000 *zł*, *b)* 20 000 *zł*, *c)* 16 000 *zł* i płacił zato rocznie: *a)* 1,6%, *b)* 3%, *c)* $\frac{1}{2}$% tej kwoty, czyli tak zwaną premję; ile wynosiła premja?
23. Kupiec przy sprzedaży towaru za 1250 *zł* dał 20% opustu; z kwoty, jaka stąd wynikła, dał dalszych 3% opustu, ponieważ towar był płacony gotówką. Ile otrzymał za towar?
24. Jednem „pro mille" jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{1000}$ tej wielkości i oznaczamy: ‰. Pro mille z jakiejś wielkości np. 5‰ z 60 000 oznacza $\frac{5}{1000}$ z 60 000 = 300. Oblicz: *a)* 6‰ z 1020 *zł*, *b)* 4‰ z 15 400 *zł*, *c)* 1‰ z 1 *kg*, *d)* 4‰ z 1 dcm^2, *e)* 5‰ z 1 dcm^3?
25.* *a)* Wisła ma 1090 *km* (III stop. dokł.) długości i posiada na całym biegu średnie nachylenie 1,05‰, to znaczy, że co 1 *km* poziom jej opada o 1,05‰

* Liczby, w zadaniach oznaczonych gwiazdką (*), są przybliżone.

z 1 *km*; oblicz, jak wysoko nad poziomem morza leżą źródła Wisły!

b) Niemen ma 990 *km* (II stop. dokł.) długości i posiada na całym biegu średnie nachylenie 0,201‰; jak wysoko nad poziomem morza leżą źródła Niemna?

26. W Polsce jest 47,6% pola ornego, 24,8% lasów, 10,2% łąk, 5,5% pastwisk, 7,3% nieużytków oraz 4,6% innych gruntów (np. sadów, ogrodów i t. p.). Przyjmując, że pole prostokąta o podstawie 1 *dcm* i o wysokości 1 *cm*



Rys. 23.

(rys. 23) jest obrazem powierzchni całej Polski, podzielono ten prostokąt na prostokąty I, II, III, IV, V i VI, które odpowiednio obrazują użycie ziemi w Polsce:

a) Jakie podstawy musiano obrać w tych prostokątach?

*b)** Przyjmując powierzchnię Polski 388 400 km^2 (IV stop. dokł.) oblicz powierzchnię: pola ornego, lasów, łąk, pastwisk, nieużytków oraz innych gruntów!

27.* Przedstaw, jak wyżej, rodzaj lasów w Polsce, wiedząc, że sosna stanowi 60% ogólnej powierzchni lasu, świerk 12%, dąb 5%, jodła 3%, inne gatunki 20%!

28.* Zbiór lnu w r. 1929 wyraża się następującemi procentami całkowitej produkcji światowej: Z. S. R. R. 57,9%, Polska 10,9%, Francja 4,2%, Litwa 5,6%, Belgja 3,1%, Łotwa 3,6%, Holandja 2,6%, Niemcy 1,7%, inne kraje 10,4%;

a) wiedząc, że światowa produkcja wynosi 6 000 000 *q* (II stop.), oblicz produkcję poszczególnych krajów!

b) przedstaw to obrazowo, jak w zadaniu 26!

29.* Długość linij kolejowych na świecie wynosi 1 230 000 *km* (III stop. dokł.), z czego na Europę przypada 31,8%, na Amerykę Północną 40,5%, Południową 7,3%, na Australję 3,9%, na Azję 11,7%, a na Afrykę 4,8%. Przyjmując odcinek 1 *dcm* jako obraz długości wszystkich linij kolejowych na świecie, zaznacz na nim kolejno obrazy linij poszczególnych części świata i oblicz ich długości!

30.* W roku 1931 zatrudnionych było w Polsce robotników: w górnictwie 22,7%, w hutnictwie 8,1%, w przemyśle włókienniczym 22,1%, metalowym 10,1%, mineralnym 7,5%, drzewnym 6,7%, spożywczym 7,9%, budowlanym 3,3%, chemicznym 5,6%, innym 6%:

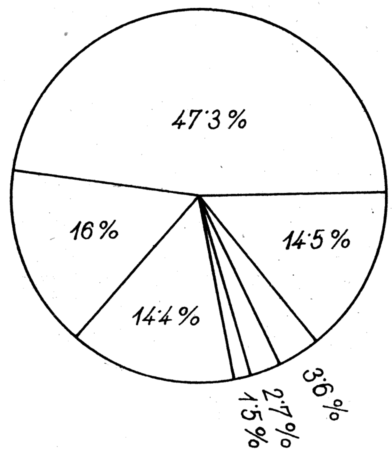
a) wiedząc, że razem robotników było 580 000 (II stop. dokł.), oblicz liczbę robotników, zajętych w poszczególnych gałęziach przemysłu!

b) przedstaw to obrazowo, jak w zadaniu 26!

31.* W roku 1930 wyprodukowano na całym świecie 480 000 000 *q* (II stop. dokł.) żyta, z czego przypada na: Z. S. R. R. 47,3%, Niemcy 16%, Polskę 14,5%, Czechosłowację 3,6%, Stany Zjednoczone 2,7%, Francję 1,5% i inne kraje 14,4%;

a) oblicz produkcję w poszczególnych krajach!

b) jeżeli powierzchnia koła przedstawia produkcję światową, to produkcję poszczególnych kra-



Rys. 24.

jów przedstawiają odpowiednie wycinki (rys. 24). Np. wycinek, dający obraz produkcji Z. S. R. R. ma kąt 47,3% z 360°. Jakim kątom odpowiadają wycinki?

32.* Powierzchnia lądu wynosi 148 900 000 km^2 (IV stop. dokł.), z czego przypada na: Europę 6,7%, Azję 29,7%, Afrykę 19,9%, Amerykę 28,2%, Australję 6%, Antarktydę 9,5%;

a) oblicz powierzchnię poszczególnych lądów!

b) przedstaw je obrazowo jak w zadaniu 31!

33.* W r. 1933 wywieziono z Polski towaru za 960 000 000 *zł* (II stop. dokł.), z której to kwoty przypada na: Niemcy 17,5%, Anglję 17,2%, Austrję 5,8%, Czechosłowację 5%, Z. S. R. R. 6,2%, Szwajcarję 1,5%, Holandję 5,7%, Francję 5,5%, a reszta na inne kraje.

a) oblicz wartość wywiezionego towaru do poszczególnych krajów!

b) przedstaw obrazowo, jak w zadaniu 31!

34.* Powietrze zawiera objętościowo 20,99% tlenu i 78,30% azotu; ile tlenu i azotu znajduje się w pokoju o wymiarach 4,5 *m*, 6,3 *m*, 3,2 *m*?

Obliczanie liczby, której procent jest znany

Przypuśćmy, że mamy dane dwie liczby d i p i pytamy się, jaka to jest liczba, której p% równa się d. Oznaczamy szukaną liczbę przez k. Otrzymaliśmy poprzednio wzór:

$$d = \frac{pk}{100} \text{ lub } d = (pk) : 100.$$

Ponieważ pk jest dzielną, więc $pk = 100\ d$.

W iloczynie pk znamy jeden czynnik p i wartość iloczynu $100\ d$. Zatem drugi czynnik k wynosi $100 d : p$. czyli:

$$k = \frac{100\ d}{p}.$$

Przykład. Jakiej kwoty 5% równa się 65 *zł*?

Rozwiązanie. Mamy $p = 5$, $d = 65$. Zatem z powyższego wzoru szukana kwota k *zł* wynosi

$$k = \frac{100 \cdot 65}{5} = 1300.$$

Moglibyśmy powyższe zadanie rozwiązać również w inny sposób:

Oznaczając przez x *zł* szukaną kwotę, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

od 100 *zł* mamy 5 *zł*

„ x „ „ 65 „

ponieważ występują tu wielkości wprost proporcjonalne, zatem: $x : 100 = 65 : 5 = 13.$

Stąd $x = 13 \cdot 100 = 1300.$

Zadania

1. Oblicz liczbę, której: *a)* 8% wynosi 16, *b)* 12% wynosi 20, *c)* 5,5% wynosi 45, *d)* 15% wynosi 105,5, *e)* $6\frac{1}{2}$% wynosi 1170, *f)* $3\frac{1}{2}$% wynosi 63, *g)* 4,5% wynosi 81.
2. Oblicz liczbę, której: *a)* 12% wynosi 6, *b)* 7% wynosi 2,1, *c)* 16% wynosi 0,4, *d)* $4\frac{1}{2}$% wynosi 1,8, *e)* 6% wynosi $1\frac{1}{2}$!
3. Oblicz liczbę, której: *a)* 100% wynosi 100, *b)* 18% wynosi 18, *c)* 1% wynosi 100, *d)* 12% wynosi 1, *e)* 100% wynosi 1!
4. Oblicz liczbę, której: *a)* 120% wynosi 18, *b)* 130% wynosi 285, *c)* 145% wynosi 2840, *d)* $110\frac{1}{2}$% wynosi 48, *e)* 102,5% wynosi 648!
5. Ile kosztował towar, na którym kupiec, zarabiając 12%, zyskał 210 *zł*. Za ile sprzedał ten towar?
6. Kupiec sprzedał towar ze stratą $5\frac{1}{2}$%, wynoszącą 88 *zł*; za ile kupił i za ile sprzedał towar?

7. Spłacono 70% długu, co wyniosło 2730 *zł*; jaki był dług?
8. Księgarz daje 8% rabatu; jaka jest cena sprzedażna książek, od których rabat wynosi 32 *zł* 48 *gr*?
9. W pewnem mieście było 5170 mężczyzn, t. j. 47% ogółu mieszkańców; ile kobiet było w tem mieście?
10. Do następnej klasy przeszło 23 uczniów, t. j. 92% ogółu uczniów w klasie; ilu uczniów było w klasie?
11.* Jaka była w r. 1932 światowa produkcja: *a)* srebra, *b)* złota, jeśli: *a)* 20,5%, *b)* 52,4% tej produkcji wynosiło: *a)* 1075,9 *t*, *b)* 391,4 *t*?
12. W pewnym powiecie jest 82% urodzajnej ziemi i 1125 km^2 nieurodzajnej; jaki procent jest ziemi nieurodzajnej i jak wielki jest ten powiat?
13. W roku 1932/33 było w szkołach średnich 59% chłopców, dziewcząt zaś 75 200; ilu było wszystkich uczni?
14.* 82,6% światowej produkcji siarki przypada na Stany Zjednoczone. Inne kraje produkują razem 548 000 *t* (III stop. dokł.). Ile wynosi roczna produkcja Stanów Zjednoczonych?
15.* Ludność Krakowa z początkiem r. 1934 wynosiła 230 000 (II stop. dokł.) t. j. 252,1% liczby mieszkańców z r. 1900; jaka była w r. 1900 ludność Krakowa?

Obliczanie procentu

Przypuśćmy, że mamy dane dwie liczby k i d i pytamy się, jakim procentem liczby k jest liczba d. Oznaczmy szukany procent przez p. Mamy:

$$d = \frac{pk}{100} \text{ lub } d = (pk) : 100.$$

Stąd:

$$pk = 100\ d.$$

W iloczynie pk znamy jeden czynnik k i wartość iloczynu 100 d. Zatem drugi czynnik wynosi:

$$p = (100\ d) : k$$

czyli

$$p = \frac{100\ d}{k}.$$

P r z y k ł a d. Jakim procentem kwoty 25 *zł* jest 3 *zł*?

R o z w i ą z a n i e: Mamy $k = 25$, $d = 3$, więc:

$$p = \frac{100 \cdot 3}{25} = 12.$$

Szukany procent jest 12%.

Moglibyśmy to zadanie rozwiązać również inaczej.

Oznaczając przez x szukany procent, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

od 25 *zł* mamy 3 *zł*,
„ 100 *zł* „ x *zł*.

Ponieważ występują tu wielkości wprost proporcjonalne, zatem:

$$x : 3 = 100 : 25 = 4$$

stąd

$$x = 12.$$

Szukany procent wynosi więc 12%.

Zadania

1. Jakim procentem pierwszej liczby jest druga liczba:
   a) 84 i 63, 120 i 6, 70 i 14, 75 i 3;
   b) 250 i 24, 3 i 21, 15 i 25, 120 i 270;
   c) 100 i 1, 26 i 26, 16 i 1, 1 i 14;
   d) 12,6 i 84, 1,46 i 0,2, 0,04 i 0,15, 0,2 i 1,84;
   e) $\frac{1}{2}$ i 10, $3\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{4}$, $5\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{3}$, $\frac{13}{5}$ i $\frac{11}{4}$.
2. Aby obliczyć w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem liczby 816 jest liczba 16, zaokrąglamy 816 do liczby 800.

Oznaczając przez x szukany procent, mamy:

$$x = \frac{16 \cdot 100}{800} = 2.$$

Zatem w przybliżeniu 2% z 816 równa się 16.

Chcąc podobnie obliczyć w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem liczby 2 jest liczba 0,0916, zaokrąglamy 0,0916 do liczby 0,09. Oznaczając przez x szukany procent, mamy:

$$x = \frac{0{,}09 \cdot 100}{2} = 4{,}5.$$

Zatem w przybliżeniu 4,5% z 2 równa się 0,0916.

Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem pierwszej liczby jest druga liczba:

a) 1983 i 20, 4,025 i 2, 62,145 i 8;

b) 4 i 108, 6 i 20,42, 5 i 0,0841;

c) 289,45 i 8, 3 i 1,946, 0,006932 i 0,2.

3. Przypuśćmy, że liczba 684 jest niedokładna, przyczem błąd nie przekracza 1 (t. j. jednostki najniższego rzędu). Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem liczby 684 jest liczba 1. Otrzymasz w ten sposób w przybliżeniu „błąd procentowy" liczby 684.

   Przyjmując, że błąd nie przekracza jednostki najniższego rzędu, oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej błąd procentowy liczb:
   a) 243, *b)* 23,1, *c)* 1,16, *d)* 0,0458, *e)* 0,000283, *f)* 3,845, *g)* 1,0641, *h)* 0,0004567.

4. Kupiec zapłacił za towar 7200 *zł*, a sprzedał go za 7700 *zł*; jaki % ceny kupna zyskał kupiec?

5. Kupiono towar za 364 *zł*, a sprzedano go za 336 *zł*; jaki procent ceny kupna stracono?

6. Kupiono towar za 824 *zł* i sprzedano go za 947 *zł*; jaki procent ceny kupna zarobiono?

7.* W pewnem mieście było 8500 mężczyzn i 9100 kobiet; jaki był procent mężczyzn, a jaki kobiet?

8.* Światowa produkcja ołowiu w r. 1933 wynosiła 1 150 000 *t*, z czego na Polskę przypada 12 000 *t*; jaki to jest procent światowej produkcji?

9.* Długość linij kolejowych na świecie wynosi: w Europie 390 000 *km*, w Ameryce Północnej 500 000 *km*, w Ameryce Południowej 90 000 *km*, w Australji 48 000 *km*, w Azji 140 000 *km*, w Afryce 60 000 *km*; jaki procent całej długości linji kolejowych przypada na poszczególne części świata?

10.* W Polsce w 1931 r. na ogólną liczbę mieszkańców 32 100 000 było wyznania: rzymsko-katol. 19 900 000, prawosławnego 3 850 000, grecko-katol. 4 390 000, mojżeszowego 3 000 000, ewangelickiego 840 000, innych 120 000; oblicz, jaki procent ogólnej liczby mieszkańców przypadał na poszczególne wyznania, i przedstaw wyniki zapomocą wycinków tego samego koła!

11.* Z Polski w r. 1933 wysłano 39 820 000 listów zagranicę, w czem 2 939 000 do Austrji, 3 061 000 do Czechosłowacji, 1 018 000 do Z.S.R.R., 4 440 000 do Francji, 4 506 000 do Stanów Zjednoczonych, 1 070 000 do Gdańska, 937 000 do Kanady, 12 980 000 do Niemiec, 787 000 do Wielkiej Brytanji, a do innych krajów resztę; oblicz jaki procent ogólnej liczby listów przypada na poszczególne kraje?

12.* W r. szk. 1932/33 było w Polsce 4 610 000 uczniów szkół powszechnych, 194 000 uczniów szkół średnich, 28 000 uczniów seminarjów nauczycielskich, 50 000 uczniów szkół zawodowych i 52 000 uczniów

---

* W zadaniach zaopatrzonych gwiazdką (*) od 7 do 19 liczby całkowite są przybliżone, przyczem cyfry niepewne zaznaczone są mniejszym drukiem.

szkół wyższych. Wyraź to w procentach ogólnej liczby uczącej się młodzieży!

13.* Ludność Polski wynosiła

w roku	1931	32 100 000
„	1932	32 300 000
„	1933	32 600 000
„	1934	32 900 000

Oblicz: *a)* dla każdego z lat 1932—1934 procentowy przyrost ludności; *b)* procentowy przyrost ludności od 1931—1934.

14.* Ludność Warszawy z początkiem roku 1934 wynosiła 1 200 000 osób; jaki jest to procent ludności polskiej (33 000 000) z tego roku?

15.* Dorzecze Dniestru posiada dróg wodnych 940 *km*, Dźwiny 540 *km*, Niemna 2800 *km*, Prutu 220 *km*, Prypeci 3600 *km*, Warty 810 *km*, Wisły 5300 *km*; jaki procent całej długości dróg wodnych w Polsce przypada na poszczególne dorzecza?

16.* W 1913 r., w którym Gdańsk należał jeszcze do Niemiec, zawinęło do portu 2900 okrętów. Odkąd Gdańsk jest Wolnem Miastem i pozostaje pod protektoratem Polski, ruch okrętów wzrósł i wynosił w 1931 r. 5960 okrętów, w 1932 r. 4640 okrętów, w 1933 r. 4280 okrętów; wyraź w procentach, o ile ruch okrętów w poszczególnych latach był większy, aniżeli w 1913 r.!

17.* O rozwoju założonego przez Polskę portu w Gdyni świadczą następujące liczby: w 1927 r. wypłynęło z portu 520 okrętów, wywożąc 880 000 *t* węgla,

w 1928	r. wywiozło	1090	okrętów	1 800 000	*t*
„ 1929	„ „	1560	„	2 500 000	„
„ 1930	„ „	3150	„	4 400 000	„
„ 1931	„ „	3140	„	4 380 000	„
„ 1932	„ „	3610	„	4 370 000	„
„ 1933	„ „	4360	„	4 670 000	„

Oblicz w procentach: *a)* o ile więcej wypłynęło okrętów w poszczególnych latach, niż w 1927, *b)* o ile więcej wywieziono węgla w poszczególnych latach aniżeli w 1927 r.

18.* Ilość radjoabonentów wynosiła: w 1931 r. 246 000, w 1932 r. 310 000, w 1933 r. 296 000, w 1934 r. 311 000; wyraź w procentach o ile wzrastała względnie malała liczba abonentów w wymienionych latach w porównaniu z 1931 r.

19.* Koleje żelazne w Polsce przewiozły: w 1930 r. 214 000 000 osób, w 1931 r. 194 000 000, w 1932 r. 166 000 000; o ile w latach 1930, 1931 przewóz był procentowo większy od przewozu w 1932 r.?

Procenty proste

Obliczanie dochodu

Kwotę, jaką dłużnik pożycza od kapitalisty nazywamy **kapitałem**. Kapitalista za wypożyczenie pewnego kapitału na przeciąg pewnego czasu otrzymuje wynagrodzenie, zwane **dochodem**.

Wynagrodzenie, jakie kapitalista pobiera od każdych 100 *zł*, pożyczonych na 1 rok, nazywamy **procentem rocznym** lub **stopą procentową**. Jeżeli np. kapitalista od każdych 100 *zł* pożyczonych na 1 rok pobiera 6 *zł*, wówczas mówimy, że pobiera za pożyczkę 6% rocznie.

A więc stopa procentowa wskazuje, jaki procent kapitału jest wynagrodzeniem za jeden rok.

Przy pożyczkach występują zatem cztery wielkości: kapitał (pożyczony), stopa procentowa, czas (na który kapitał pożyczono) i dochód.

Gdy trzy z tych wielkości są dane, to czwartą możemy obliczyć.

Oznaczmy przez K kapitał (liczbę *zł*), przez P stopę procentową, przez L liczbę lat (na którą kapitał pożyczono). Zapytajmy się, jaki będzie dochód. Niechaj D oznacza dochód (liczbę *zł*).

100 *zł* da przez 1 rok P *zł* dochodu. Przez L lat da L razy większy dochód t. zn. $L \cdot P$ *zł*.

Zatem 1 *zł* da po L latach $(P \cdot L) : 100$ *zł* dochodu. K *zł* da oczywiście K razy więcej dochodu. Należy więc iloraz $(P \cdot L) : 100$ pomnożyć przez K. Ponieważ iloraz mnożymy, mnożąc dzielną więc:

$$D = (KPL) : 100 \text{ lub } D = \frac{KPL}{100} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

P r z y k ł a d. Obliczyć dochód od 7648 *zł* danych na 8%, a wypożyczonych na 5 lat.

R o z w i ą z a n i e. Mamy tutaj $K = 7648$, $P = 8$, $L = 5$.

Zatem: $$D = \frac{7648 \cdot 8 \cdot 5}{100} = 3059{,}20.$$

Dochód więc wynosi 3059,20 *zł*.

Możemy powyższe zadanie rozwiązać bez pomocy wzoru w następujący sposób:

Ponieważ 100 *zł* za 1 rok przynosi 8 *zł*, to 1 *zł* za 1 rok przynosi $\frac{8}{100}$ *zł*, a 7648 *zł* za 1 rok przynosi $\frac{8 \cdot 7648}{100}$ *zł*.

Zatem 7648 *zł* za 5 lat przynosi $\frac{8 \cdot 7648 \cdot 5}{100}$ *zł*.

Widzimy, że dochód $= \frac{8 \cdot 7648 \cdot 5}{100}$ *zł* $= 3059{,}20$ *zł*.

U w a g a 1. W zadaniach z procentu przyjmuje się, że rok ma 360 dni, czyli 12 miesięcy po 30 dni. Czas należy wyrażać w ułamkach lat np. 7 miesięcy $= \frac{7}{12}$ roku, 8 dni $= \frac{8}{360}$ roku i t. p.

Np. ile wynosi dochód od 800 *zł* wypożyczonych na 5% na 3 lata, 2 miesiące, 9 dni? Ponieważ 3 lata, 2 miesiące, 9 dni wyrażone w latach równają się:

$$3 + \tfrac{2}{12} + \tfrac{9}{360} = \tfrac{383}{120},$$

przeto: $$D = \frac{800 \cdot 5 \cdot \frac{383}{120}}{100} = \frac{383}{3} = 127{,}66.$$

Zatem dochód wynosił 127 *zł* 66 *gr*.

U w a g a 2. Jeśli do kapitału doliczymy dochód, to otrzymamy t. zw. w a r t o ś ć k o ń c o w ą k a p i t a ł u; kapitał pożyczony nazywamy w a r t o ś c i ą p o c z ą t k o w ą kapitału.

Np.: Kapitał 3000 *zł*, pożyczony na 4 lata na 5%, dał 600 *zł* dochodu. Zatem 3000 *zł* jest wartością początkową kapitału, a 3000 *zł* + 600 *zł* = 3600 *zł* jest wartością końcową kapitału. Oznaczając przez W wartość końcową kapitału, możemy napisać:

$$W = K + D.$$

Zadania

1. Oblicz dochód, jaki przynosi:

a) kapitał 225 *zł* oddany na 2 lata na 6%;
b) „ 2150 „ „ „ 3 lata i 4 miesiące na 6%;
c) „ 3265 „ „ „ $4\frac{1}{2}$ miesiąca na 8%;
d) „ 6836 „ „ „ $2\frac{1}{2}$ lat na $6\frac{3}{4}$%;
e) „ 5016 „ „ „ 1 miesiąc na $4\frac{1}{2}$%;
f) „ 1000 „ „ „ $\frac{1}{2}$ roku na 10%;
g) „ 6824 „ „ od 14/VII do 19/VIII na $7\frac{1}{2}$%.

2. Oblicz w zadaniu (1) wartość końcową kapitału!
3. Jaka jest wartość końcowa kapitału 380 *zł*, oddanego na 1 rok na 5%? Ponieważ dochód wynosi $\frac{5}{100} \cdot 380$ *zł*, a kapitał 380 *zł* $= \frac{100}{100} \cdot 380$ *zł*, więc wartość końcowa kapitału równa się:
$\frac{100}{100} \cdot 380$ *zł* $+ \frac{5}{100} \cdot 380$ *zł* $= \frac{105}{100} \cdot 380$ *zł* $= 399$ *zł*, czyli 105% kapitału 380 *zł*.

Oblicz w ten sposób wartość końcową kapitału: *a)* 495 *zł*, *b)* 3290 *zł*, *c)* 11 850 *zł*, oddanego na 1 rok na: *a)* 8%, *b)* 10,5%, *c)* $6\frac{3}{4}$%.

4. O kupno domu ubiega się dwóch kupców. Jeden daje gotówką 632 000 *zł*, drugi zaś 400 000 *zł* gotówką, a 250 000 *zł* po upływie roku; który z kupców daje lepsze warunki, jeżeli kapitał można umieścić na 6%? (Objaśnienie: porównaj warunki po upływie roku!).
5. Kapitał *a)* 870 *zł*, *b)* 2745 *zł* przynosi przy danym procencie i czasie procentowania: *a)* 15 *zł*, *b)* 247 *zł* 5 *gr* dochodu; jaki dochód w tych samych warunkach przyniesie kapitał: *a)* 610 *zł*, *b)* 3164 *zł*?
6. Kapitał: *a)* 8250 *zł*, *b)* 1247 *zł* przynosi przy danym procencie i czasie procentowania dochód: *a)* 680 *zł*, *b)* 87 *zł* 29 *gr*; jaki kapitał w tych samych warunkach przyniesie *a)* 510 *zł*, *b)* 143 *zł* 57 *gr* dochodu?
7. Kapitał oddany na pewien procent przyniósł po 6 latach 2530 *zł* dochodu; *a)* jaki dochód przyniesie ten kapitał po 3,5 latach, *b)* w ilu latach przyniesie 4521 *zł* dochodu?
8. Kapitał 580 *zł* oddano na 8%. Po roku doliczono do tego kapitału dochód i znowu pożyczono na 1 rok na 8%; jaka była wartość końcowa kapitału?

Obliczanie kapitału

Przypuśćmy, że znamy P (stopę procentową), L (liczbę lat, na które pożyczono kapitał), D (dochód po L latach). Zapytajmy się, jaki kapitał pożyczono. Oznaczmy ten kapitał, jak poprzednio, przez K. Mamy wzór:

$$D = \frac{KPL}{100} \text{ lub } D = (KPL) : 100.$$

Stąd $KPL = 100\,D$.

Ponieważ w iloczynie $KPL = K \cdot (PL)$, nieznanym czynnikiem jest K, więc $K = (100\,D) : (PL)$. A więc:

$$K = \frac{100\,D}{PL}.$$

Przykład. Jaki kapitał pożyczony na 4 lata na 9% przyniesie 2340 *zł* dochodu?

Rozwiązanie. Mamy $L = 4$, $P = 9$, $D = 2340$.

Zatem: $$K = \frac{100 \cdot 2340}{9 \cdot 4} = 6500.$$

Szukany więc kapitał wynosi 6500 *zł*.

Moglibyśmy to zadanie rozwiązać również przy pomocy reguły trzech. Oznaczmy przez x szukany kapitał.

100 *zł* (na 9% przez 4 lata) przyniesie 36 *zł* dochodu
x „ („ 9% „ 4 „) „ 2340 „ „

Kapitał jest wprost proporcjonalny do dochodu.

Więc: $x : 100 = 2340 : 36 = 65.$

Zatem: $x = 65 \cdot 100 = 6500.$

Zadania

1. Jaki kapitał oddany:

a)	na 5%	przyniesie	po 4 latach	2462 *zł*		dochodu
b)	„ 6%	„	„ 2 „	660 „		„
c)	„ $7\frac{1}{2}$%	„	„ 4 mies.	65 „		„
d)	„ 12%	„	„ 5 „	423 „		„
e)	„ $3\frac{1}{2}$%	„	„ 45 dniach	14 „		„
f)	„ 8%	„	od 3/III do 29/X	134 „		„
g)	„ 9%	„	miesięcznie	750 „		„
h)	„ 11%	„	po 2 lat. 11 mies.	14 341 „	25 *gr*	„

2. Majątek ziemski przynosi rocznie 12 750 *zł* dochodu; jaki kapitał, oddany na 8%, da ten sam dochód?
3. Kapitał *a)* 3240 *zł*, *b)* 7004 *zł* pożyczono na pewien czas na *a)* 8%, *b)* 9%; jaki kapitał, oddany na *a)* 6%, *b)* 8,5%, da w tym samym czasie ten sam dochód?

4. Kapitał *a)* 8040 *zł*, *b)* 1134 *zł* pożyczono na pewien czas na *a)* 9%, *b)* $8\frac{1}{2}$%; na jaki procent należy oddać kapitał *a)* 10 800 *zł*, *b)* 1071 *zł*, aby w tym samym czasie przyniósł ten sam dochód?
5. Kapitał *a)* 6184 *zł*, *b)* 5160 *zł* oddano na *a)* 5 lat, *b)* $4\frac{1}{2}$ lat na pewien procent; jaki kapitał, oddany na *a)* 8 lat, *b)* $6\frac{3}{4}$ lat, na ten sam procent, przyniesie ten sam dochód?
6. Kapitał *a)* 1480 *zł*, *b)* 558 *zł* oddano na *a)* 6 lat, *b)* 5,5 lat na pewien procent; na ile lat na ten sam procent trzeba pożyczyć kapitał *a)* 1620 *zł*, *b)* 396 *zł*, aby otrzymać ten sam dochód?

Czas oprocentowania

Przypuśćmy, że znamy K (kapitał pożyczony), P (stopę procentową), D (dochód). Zapytajmy się, na ile lat pożyczono kapitał. Oznaczmy przez L liczbę lat.

Otrzymaliśmy wzór: $D = \frac{KPL}{100}$, czyli $D = (KPL) : 100$.

Stąd $KPL = 100\, D$.

Ponieważ w iloczynie $KPL = (KP) \cdot L$ nieznanym czynnikiem jest l, zatem $L = (100\, D) : (KP)$.

A więc:
$$L = \frac{100\, D}{KP}.$$

Przykład. W jakim czasie kapitał 3610 *zł* oddany na 9% przyniesie 1949,4 *zł* dochodu?

Rozwiązanie. Mamy $D = 1949{,}4$ *zł*, $K = 3610$ *zł*, $P = 9$. Zatem:
$$L = \frac{100 \cdot 1949{,}4}{3610 \cdot 9} = 6.$$

A więc po 6 latach otrzymamy żądany dochód.

Moglibyśmy to zadanie rozwiązać również przy pomocy reguły trzech. Oznaczmy przez x liczbę lat.

(3610 *zł* na 9%) przez 1 rok przyniesie dochodu $\frac{9}{100} \cdot 3610$ *zł*
(3610 „ „ 9%) „ x lat „ „ 1949,4 „

Ponieważ liczba lat jest proporcjonalna do dochodu, więc:
$$x : 1 = 1949{,}4 : \frac{3610 \cdot 9}{100}.$$

Zatem $x = 6$.

Zadania

1. W jakim czasie:

a) 1248 *zł*	oddane na	8%	dadzą	37 *zł* 34 *gr*	dochodu
b) 7584 „	„ „	$9\frac{1}{2}$%	„	330 „ 02 „	„
c) 3600 „	„ „	8%	„	480 „	„
d) 1168 „	„ „	5%	„	1203 „ 09 „	„
e) 1640 „	„ „	6%	„	2132 „	„ .

2. W jakim czasie kapitał:
   a) 1200 *zł* oddany na 5% ma wartość końcową 1440 *zł*;
   b) 1650 *zł* oddany na 8% ma wartość końcową 1705 *zł*;
   c) 2144 *zł* oddany na 9% ma wartość końcową 2168 *zł*;
   d) 5940 *zł* oddany na $9\frac{1}{2}$% ma wartość końcową 8198 *zł*.
3. Ktoś wypożyczył 3500 *zł* na 6% na 2 lata; w jakim czasie otrzymałby ten sam dochód, gdyby wypożyczył swój kapitał na 8%?
4. Pewien kapitał oddano na *a)* 6%, *b)* $7\frac{1}{2}$%, na *a)* 9 lat, *b)* $8\frac{1}{2}$ lat; na jaki procent trzeba ten kapitał umieścić, aby po *a)* 8 latach, *b)* 5 latach przyniósł ten sam dochód?
5. Pewien kapitał oddano na *a)* 10%, *b)* $12\frac{1}{2}$% na *a)* $4\frac{1}{2}$ lat, *b)* 6 lat; w ilu latach ten kapitał przyniesie ten sam dochód, jeśli byłby oddany na *a)* 9%, *b)* 12%?

Stopa procentowa

Przypuśćmy, że znamy K (kapitał pożyczony), L (liczbę lat, na które kapitał pożyczono), D (dochód). Zapytajmy się, na jaki procent pożyczono. Niechaj P oznacza stopę procentową.

Mamy $\quad D = \frac{KPL}{100}$ lub $D = (KPL) : 100.$

Stąd $\quad KPL = 100\,D.$

Ponieważ w iloczynie $KPL = (KL) \cdot P$ nieznanym czynnikiem jest P, zatem $P = (100\,D) : (KL)$.

A więc $\quad P = \frac{100\,D}{KL}.$

P r z y k ł a d. Na jaki procent pożyczono kapitał 3500 *zł*, jeśli po 4 latach przyniósł 840 *zł* dochodu?

R o z w i ą z a n i e. Mamy $K = 3500$, $L = 4$, $D = 840$.

A więc $\quad P = \frac{100 \cdot 840}{3500 \cdot 4} = 6.$

Zatem kapitał pożyczono na 6%.

Moglibyśmy również to zadanie rozwiązać przy pomocy reguły trzech. Oznaczmy przez x stopę procentową.

(3500 *zł* po 4 latach) na 1% przyniesie dochodu $\frac{4}{100} \cdot 3500$ *zł*
(3500 „ „ „ „) „ x% „ „ 840 *zł*

Ponieważ dochód jest wprost proporcjonalny do stopy procentowej, więc:

$$x : 1 = 840 : \frac{3500 \cdot 4}{100}.$$

Zatem $x = 6$.

Zadania

1. Przy jakim procencie:

a) kapitał	2460 *zł* da po	3 latach	405 *zł* 90 *gr*	dochodu;
b) „	9725 „ „ „	9 mies.	291 „	„
c) „	2280 „ „ „	21 dniach	3 „ 99 „	„
d) „	2150 „ „ „	3 lat. 4 mies.	430 „	„

2. Przy jakim procencie:

a) kapitał	5600 *zł* ma po	5 latach	wart. końc.	6760 *zł*
b) „	2000 „ „ „	3 lat. 4 m.	„ „	2300 „
c) kapitał	9725 *zł* ma po	9 mies.	wart. końc.	10 016 *zł* 75 *gr*
d) „	5400 „ „ „	5 latach	„ „	6642 „

3. Kupiec zaciągnął 7 kwietnia pożyczkę 1300 *zł* i zobowiązał się wypłacić za nią 7 sierpnia 1352 *zł*; na jaki procent wziął pożyczkę?
4. Na jaki procent trzeba oddać 1 *zł*, aby jego wartość końcowa po $12\frac{1}{2}$ latach wynosiła dwa razy tyle, t. j. 2 *zł*?
5. Pewien kapitał, oddany na *a)* 8%, *b)* $7\frac{1}{2}$%, przyniósł po pewnym czasie *a)* 645 *zł*, *b)* 585 *zł* dochodu; na jaki procent należy ten kapitał umieścić, aby w tym samym czasie przyniósł *a)* 774 *zł*, *b)* 624 *zł* dochodu?
6. Pewien kapitał, oddany na *a)* 11%, *b)* $10\frac{1}{2}$%, przyniósł po pewnym czasie *a)* 1034 *zł*, *b)* 903 *zł* dochodu; jaki dochód w tym samym czasie da ten kapitał, jeśli będzie umieszczony na *a)* 9%, *b)* $10\frac{3}{4}$%?

Rabat, brutto, skonto, prowizja

1. Arkusz papieru kosztuje 4 *gr*. Przy zakupnie 100 arkuszy daje kupiec 10%, przy zakupnie 500 arkuszy 12%, a przy zakupnie 1000 arkuszy 15% rabatu; ile należy zapłacić za 100, za 500, za 1000 arkuszy?
2. Kupiec sprzedał 84 *m* sukna za 1108 *zł* 80 *gr*, dając 12% rabatu; ile kosztował 1 *m* tego sukna bez rabatu?
3. Kupiec sprzedał 120 *l* wina, którego litr kosztował 6 *zł*, z pewnym rabatem za 669 *zł* 60 *gr*; ile procent wynosił rabat?
4. W pace wysłano 80 *kg* owoców; ile waży paka, jeżeli opłata za przesyłkę 1 *kg* wynosi 16 *gr*, opłacono zaś 15 *zł* 20 *gr*?
5. Oblicz wagę netto, jeżeli waga brutto wynosi 20 *kg*, a tara $4\frac{1}{2}$% wagi brutto!
6. Oblicz wagę brutto, jeżeli waga netto wynosi 18 *kg*, a tara 15% wagi brutto!

7. Ile procent wynosi tara, jeżeli waga brutto wynosi 30 *kg*, a waga netto 26,45 *kg*?
8. Jeżeli ktoś kupuje towar w większej ilości, to otrzymuje opust na cenie, który nazwaliśmy rabatem. Należności za towar czasami nie płaci się natychmiast gotówką, ale dopiero po kilku miesiącach. Jeżeli ktoś jednak płaci gotówką, to otrzymuje na cenie towaru opust, który nazywa się skontem. Np. ktoś zakupił 20 *t* węgla po 63 *zł* za tonnę, a ponieważ płacił gotówką, zapłacił o 126 *zł* mniej. W tym wypadku skonto wynosi 126 *zł*; ile procent ceny węgla wynosi skonto?
9. Ktoś zakupił 40 tonn węgla po 63 *zł* za tonnę. Ponieważ płacił gotówką, zapłacił o 252 *zł* mniej; ile procent ceny węgla wynosi skonto?
10. Przy zakupnie towaru za 4350 *zł*, za który płacono gotówką, otrzymano $8\frac{1}{2}\%$ skonta; ile zapłacono?
11. Handlarz zakupił żelaza za 16 500 *zł* i zapłacił gotówką tylko 15 427 *zł* 50 *gr*; ile % skonta otrzymał?
12. Towar waży 2332 *kg* brutto, tara zaś wynosi 6%; ile należy zapłacić za ten towar, jeżeli 1 *kg* towaru netto kosztuje 72 *gr*, rabat zaś wynosi $2\frac{3}{4}\%$?
13. Pośrednik pobiera za sprzedanie towaru 8‰ prowizji (t. j. wynagrodzenia za pośrednictwo); ile *zł* otrzyma, jeżeli sprzedał za 25 000 *zł* towaru?
14. Za ubezpieczenie towaru zapłacił kupiec 26 *zł* 25 *gr*, t. j. $1\frac{3}{4}\%$ wartości towaru; oblicz wartość towaru!
15. Kupiec sprowadził 10 skrzyń kawy, z których każda ważyła 40 *kg* brutto. Tara wynosiła 10% wagi brutto; ile zapłaci za kawę, jeżeli przewozowe za 1 *kg* (brutto) wynosi 35 *gr*, a otrzymał 6% rabatu z ceny 20 *zł* za 1 *kg*?
16. Kupiec zakupił 460 *kg* winogron po 2 *zł* 40 *gr* za 1 *kg*, a płacąc gotówką, otrzymał 5% skonta. Zepsuło się 12% winogron; po czemu ma sprzedawać 1 *kg*, jeżeli chce zarobić 16% włożonej gotówki?

17. Za ubezpieczenie zboża na wypadek gradobicia zapłacono 120 *zł* tak zwanej premji, liczonej jako $\frac{3}{4}$‰ wartości zboża; jak wysoko oszacowano zboże?
18. Ajent handlowy w Wilnie sprzedał na rachunek fabrykanta w Poznaniu narzędzia rolnicze. Po odciągnięciu komisowego, wynoszącego 7%, przesłał mu 11 552 *zł*; za jaką kwotę sprzedał narzędzia?
19. Kupiec sprowadził towaru za 1200 *zł*, przyczem otrzymał 6% skonta, ponieważ płacił gotówką. Koszta przewozu wyniosły 88 *zł*, a pośrednikowi zapłacił 30 *zł*. Połowę towaru sprzedał za 640 *zł*; za ile musi sprzedać drugą połowę, jeżeli chce zarobić 20% wyłożonych pieniędzy?

Stopy

Zawartość szlachetnych metali, t. j. platyny, złota lub srebra w stopach (otrzymanych przez stopienie szlachetnego metalu z innemi metalami), określamy p r ó b ą. Próba jest to wykładnik stosunku ciężaru szlachetnego metalu, zawartego w stopie do ciężaru całego stopu.

Np. stop, zawierający 18 *g* czystego srebra i 2 *g* miedzi jest srebrem próby $\frac{18}{18+2} = \frac{18}{20} = 0{,}9$.

Ponieważ przy danej próbie ciężar szlachetnego metalu jest wprost proporcjonalny do ciężaru stopu, więc 1 *g* srebra próby 0,9 zawiera 0,9 *g* czystego srebra. Znając ciężar stopu i próbę, możemy obliczyć ciężar metalu szlachetnego, zawartego w stopie.

Np. Ile czystego srebra zawiera 680 *g* srebra próby 0,875?

Ponieważ 1 *g* stopu zawiera 0,875 *g* czystego srebra, więc 680 *g* stopu zawiera $680 \cdot 0{,}875$ *g* czystego srebra, czyli 595 *g* czystego srebra.

Zadania

1.* Jakiej próby są stopy, zawierające: *a)* 6,3 *g* czystego srebra i 2,7 *g* miedzi; *b)* 45 *g* czystego złota i 9 *g* miedzi; *c)* 52 *g* czystego srebra i 12 *g* miedzi?

2.* Ile czystego srebra znajduje się w stopie, który waży: *a)* 845 *g*, *b)* 0,65 *kg*, *c)* 0,712 *kg*, a jest próby: *a)* 0,76, *b)* 0,85, *c)* 0,68?

3. Karat równa się $\frac{1}{24}$ i służy (w systemie niemetrycznym) do wyrażania, ile *g* czystego złota przypada na 24 *g* stopu. Np. 14-karatowe złoto zawiera na 24 *g* stopu 14 *g* czystego złota i 10 *g* innych metali (miedzi). Jakiej próby jest złoto: *a)* 14-, *b)* 16-, *c)* 18-karatowe?

4.* Stopiono razem 32 *g* srebra próby 0,825, 40 *g* próby 0,85 i 75 *g* próby 0,924; jakiej próby będzie stop?

5.* Stopiono razem 83 *g* złota próby 0,75, 42 *g* próby 0,82 i 25 *g* czystego złota; jakiej próby będzie stop?

6. Dzwony leją ze stopu, który zawiera 390 *kg* miedzi, 110 *kg* cyny, 5 *kg* cynku i 4 *kg* ołowiu; ile *kg* każdego z tych metali potrzeba do dzwonu, który waży 1600 *kg*? (Podziel 1600 w stosunku 390 : 110 : 5 : 4).

7. Do odlewu rzeźb używa się bronzu, który zawiera 26 *kg* miedzi, 2 *kg* cyny, 1 *kg* cynku i 1 *kg* ołowiu; ile *kg* każdego z tych metali użyto przy odlewie rzeźby, wagi 2000 *kg*?

Kalkulacja i kosztorysy

Kalkulacja

Kalkulacja zakupu

Kalkulacja zakupu jest to obliczenie wszystkich wydatków, związanych ze sprowadzeniem zamówionego przez kupca towaru. Do tych kosztów należą: cena zakupu, prowizja dla pośrednika (o ile towar nie jest kupowany wprost u fabrykanta, względnie u grosisty), koszta przewozowe,

koszta ubezpieczenia towaru, cło, koszta przesłania pieniędzy za towar i t. p.

Koszta oblicza się, gdy towar jest na miejscu, ponieważ mógł nastąpić w czasie transportu ubytek towaru, np. ciecz mogła częściowo wyciec, część towaru mogła ulec zepsuciu, lub zniszczeniu. Nadto przy wypakowaniu niektórych towarów (np. masła) część jego przepada, gdyż towar nie da się w zupełności oddzielić od opakowania.

Przykład. Kalkulacja ceny 1 *kg* ryżu, sprowadzonego z Gdańska do Warszawy. Kupiec miał po sprowadzeniu 4583 *kg* ryżu netto. Za 1 *kg* ryżu (netto) płacił w Gdańsku 0,35 *G* (guldenów). Ekspedytor policzył za przewóz towaru na kolej i opłatę kolei do Tczewa 42 *G*. Rachunek za cło wynosił 545 *zł*. Przewóz Tczew—Warszawa wynosił 132 *zł*. Zwózka z kolei kosztowała 8 *zł* 50 *gr*.

Kalkulacja

4583 à 0,35 *G* licząc 1 *G* po 1,71 *zł* . . .	2742	*zł*	93	*gr*
Rachunek ekspedytora w Gdańsku za przewiezienie towaru ze składu na kolej i przewóz Gdańsk—Tczew 42 *G* à 1,71 *zł* . .	71	„	82	„
Opłata cłowa	545	„	—	„
Przewóz koleją Tczew—Warszawa	132	„	—	„
Zwózka z kolei na miejsce przeznaczenia .	8	„	50	„
Stemple i drobne wydatki	15	„	40	„
	3515	*zł*	65	*gr*

Więc 1 *kg* ryżu kosztuje kupca już na miejscu *zł*: 3515,65 : 4583 = 0,767.. w zaokrągleniu 0,77 *zł*.

Kalkulacja sprzedaży

Na podstawie samej ceny zakupu nie może jeszcze kupiec obliczyć po ile ma sprzedawać jednostkę towaru. Posiada bowiem rozmaite wydatki, połączone z prowadzeniem przedsiębiorstwa, jak np. czynsz za lokal, opłata za światło, opał, wynagrodzenie sił pomocniczych, ubezpieczenia, podatki, koszta reklamy i t. p. Ponieważ trudno jest przy jednym towarze określić, w jakim stopniu powyższe koszta wpływają na podwyższenie ceny towaru, przeto na podstawie bilansów rocznych (najlepiej z kilku lat) ustala się przeciętny procent podrożenia towaru wskutek wyżej wymienionych wydatków. Jeśli np. w ciągu roku zakupiony towar kosztował 12 580 *zł*, a koszta lokalu, światła, podatki i t. d. wyniosły w ciągu tego roku 1 190 *zł*, co stanowi 9,52% kwoty 12 500 *zł*, to kupiec przyjmie okrągło 10% kosztów zakupu towaru jako koszta prowadzenia przedsiębiorstwa. Suma kosztów zakupu i prowadzenia przedsiębiorstwa nazywa się c e n ą w ł a s n ą. Do tej ceny dolicza kupiec pewien procent jako zysk. Cena w ten sposób otrzymana nazywa się c e n ą s p r z e d a ż y.

P r z y k ł a d. Kalkulacja sprzedaży 1 *kg* ryżu. Widzieliśmy poprzednio na podstawie kalkulacji zakupu, że cena 1 *kg* ryżu na miejscu u kupca wynosiła 0,77 *zł*. Jeśli koszt prowadzenia przeesiębiorstwa wynosi 10% ceny zakupu, a kupiec chce zarobić 8% ceny własnej, to kalkulacja ceny sprzedażnej przedstawia się następująco:

Cena zakupu 1 *kg* ryżu	0,77 *zł*
+ 10% kosztów handlowych (w zaokrągleniu) .	0,08 „
cena własna .	0,85 *zł*
8% zysku (w zaokrągleniu) .	0,07 „
Cena sprzedaży .	0,92 *zł*

Zadania

1. Kupiec w Krakowie sprowadził z cukrowni w Przeworsku 25 skrzyń cukru ważących brutto 1750 *kg*, przyczem tara wynosiła 7%, w cenie 80 *zł* za 100 *kg* cukru (netto). Koszta dostawy cukru na stację w Przeworsku i ze stacji w Krakowie na miejsce przeznaczenia wynosiły 10 *zł* 50 *gr*, przewóz koleją z Przeworska do Krakowa 68 *zł* 40 *gr*. Stempel na rachunek

i drobne wydatki wyniosły 6 *zł* 50 *gr*. Wskutek wypakowania towaru był ubytek $\frac{1}{2}$% tego towaru. Oblicz:
a) cenę zakupu 1 *kg* cukru!
b) cenę sprzedażną, jeśli koszta prowadzenia przedsiębiorstwa wynoszą 8%, a kupiec chce zarobić 6%.
2. Kupiec w Wilnie sprowadził z Gdyni 150 dziesięciokilogramowych skrzyń bananów po 2 *zł* za 1 *kg* netto. Tara wynosiła 5%. Koszta całkowitego przewozu wyniosły 217 *zł*. Kupiec musiał odrzucić 2% towaru wskutek zepsucia.
a) oblicz cenę zakupu!
b) oblicz cenę sprzedażną, jeśli koszta handlowe wynoszą 11%, a kupiec chce zarobić 12%.
3. Kupiec sprowadził z Jaworzna 2 wagony po 10 *t* węgla po 28 *zł* za tonnę na miejscu w kopalni. Całkowite koszta przewozu wyniosły 215 *zł* 60 *gr*. Po przeważeniu na miejscu dostawy okazała się strata 300 *kg* węgla. Oblicz:
a) cenę zakupu!
b) cenę sprzedaży, jeśli koszta prowadzenia przedsiębiorstwa wynoszą 4%, a kupiec chce zarobić 6%.
4. Hurtownik sprowadził z Glasgowa 300 beczek śledzi „Matjasów“ po $57\frac{1}{2}$ *sh* za beczkę, licząc 1 *sh* po 1 *zł* 32 *gr*. Cena ta pokrywała również koszta przywozu do Gdyni. Stempel na rachunek wynosił 11 *sh*. Cło wynosiło 1513 *zł*, zwózka z okrętu na kolej według rachunku ekspedytora wyniosła 185 *zł*. Przewóz koleją do Warszawy 247 *zł* 55 *gr*. a zwózka na miejsce przeznaczenia 76 *zł*. Drobne wydatki 12 *zł* 50 *gr*.
a) Oblicz cenę zakupu!
b) Oblicz cenę sprzedaży, jeśli koszta handlowe wynoszą 6%, zysk zaś ma wynosić 15%!
5. Sprowadzono 25 worków kaszy po 100 *kg*, płacąc

20 *zł* za 100 *kg*. Przewóz kosztował 112 *zł* 60 *gr*, zwózka 24 *zł*. Po przeważeniu brakło 2 *kg* kaszy.
a) Oblicz cenę zakupu!
b) Oblicz cenę sprzedaży, jeśli koszta handlowe wynoszą 14%, zysk zaś 5%!

6. Kupiec sprowadził z Warszawy 2 bale skóry na zelówki po 106 *kg* netto każdy, płacąc 4 *zł* za 1 *kg*. Opakowanie kosztowało 4 *zł* 25 *gr*, kolej 9 *zł*, przewóz 2 *zł*.
a) Oblicz cenę zakupu!
b) Oblicz cenę sprzedaży za 1 *kg*, jeśli koszta prowadzenia przedsiębiorstwa wynoszą 12%, zysk zaś 8%!

7. Kupiec sprowadził 96 beczek cementu i otrzymał następujący rachunek:
96 beczek po 240 *kg* à 7 *zł* za 100 *kg* . . . .
Opakowanie po 2 *zł* 80 *gr* za beczkę . . . .
Opłaty stemplowe i kolejowe (zamagazynowanie) . . . . 14 *zł* 50 *gr*
Przewóz koleją . . . . 185 „ 25 „
Zwózka do miejsca przeznaczenia . . 54 „
Przy wypakowaniu okazała się strata 2% towaru.
a) Oblicz cenę zakupu!
b) Oblicz cenę sprzedaży, jeśli koszta handlowe wynoszą 5%, zysk zaś 10%!

8. Na koszta przedsiębiorstwa ślusarskiego składa sie w ciągu całego roku: czynsz za lokal 500 *zł*, opał i światło 300 *zł*, 5% odsetek od kapitału włożonego 1000 *zł*, zużycie narzędzi (wartości 500 *zł*) w wysokości 10%, płaca majstra 2000 *zł*, ubezpieczenie 250 *zł*, podatki 400 *zł*. Oblicz, ile wynosi koszt przedsiębiorstwa za 1 godz. pracy, licząc 8-godzinny dzień pracy i 280 dni roboczych w roku! Ile należy liczyć za wykonanie roboty, trwającej 5 godzin, jeśli zarobek ma wynosić 10% kosztów przedsiębiorstwa?

Kosztorysy

Jeżeli ktoś chce zbudować dom, to musi wiedzieć, ile budowa będzie kosztowała. Zwraca się więc do przedsiębiorcy budowlanego, a ten sporządza mu zestawienie wszystkich wydatków związanych z budową, czyli tak zwany kosztorys.

Np. gmina chce wybudować jednoklasową murowaną szkołę. Otrzymuje od przedsiębiorcy następujący kosztorys, sporządzony wedle wzorów, które wypełnij w ostatnich rubrykach:

1. Roboty ziemne:

Ilość	Przedmiot	Cena jednostki *zł*	Cena jednostki *gr*	Kwota obliczona *zł*	Kwota obliczona *gr*
55,40 m^3	Wykop ziemi	2	70		
94,50 m^3	Ziemi przy wyrównaniu terenu	1	80		
115,50 m^3	Wywóz ziemi	1	—		
	Razem . .				

2. Roboty murarskie:

Ilość	Przedmiot	Cena jednostki *zł*	Cena jednostki *gr*	Kwota obliczona *zł*	Kwota obliczona *gr*
159,40 m^3	Murów	32	—		
103,70 m^3	Warstwy izolacyjnej z papy asfaltowej	1	75		
513,0 m^2	Wyprawy wewnętrznej . .	3	50		
361,40 m^2	Wyprawy zewnętrznej . .	4	50		
228,20 m^2	Posadzki ceglanej . . .	4	10		
35,50	Nasypów pod podłogi . .	2	—		
	Razem . .				

3. Roboty ciesielskie:

Ilość	Przedmiot	Cena jednostki		Kwota obliczona	
		zł	gr	zł	gr
226 m^2	Więzby dachowej	12	60		
296,50 m^2	Łacenie dachu	5	80		
69,50 m^2	Szalowanie okapów . . .	6	50		
125,50 m^2	Stropu belkowego . . .	24	40		
103,70 m^2	Podłóg z desek sosn. 4 *cm* grubych	7	50		
	Razem . .				

4. Roboty stolarskie, ślusarskie, szklarskie i pokostnicze:

Ilość	Przedmiot	Cena jednostki		Koszt obliczony	
		zł	gr	zł	gr
8	Okna	15	—		
9	Drzwi	20	—		
	Roboty ślusarskie ryczałtem			300	—
42,20 m^2	Oszklenie okien	4	50		
110,60 m^2	Malowanie okien i drzwi .	3	—		
103,70 m^2	Zapuszczanie podłóg . .	2	50		
	Razem . .				

5. Roboty pozostałe:

Ilość	Przedmiot	Cena jednostki		Koszt obliczony	
		zł	gr	zł	gr
87,40 m^2	Płyt betonowych	13	20		
20,20 *m*	Stopni betonowych . . .	20	—		
2	Piece mieszkaniowe . . .	65	—		
1	Piec kuchenny	145	—		
323,40 m^2	Dachówki	8	50		
68,30 *m*	Rynien	5	10		
	Razem . .				

1. Zrób zestawienie wydatków od 1 do 5 i w ten sposób podaj kosztorys budowy całej szkoły (bez piwnic)!
2. Oblicz koszt stołu, jeżeli:

   a) zużyto drzewa po 250 *zł* za m^3:
   na 4 nogi o wymiarach 65 *cm*, 2,5 *cm*, 2,5 *cm*;
   na blat górny o wymiarach 45 *cm*, 45 *cm*, 2 *cm*;
   na blat dolny o wymiarach 28 *cm*, 28 *cm*, 2 *cm*;

   b) przykrojenie i klejenie wymagało 3 godz. pracy po 0,50 *zł* za godz.;
   toczenie i polerowanie nóg wymagało 14 godz. pracy po 0,60 *zł* za godz.;
   składanie stołu wymagało 10 godz. pracy po 0,40 *zł* za godz.;

   c) koszta handlowe wynoszą 45% kosztów pod *b)*, zysk zaś 16%.

Wiadomości o oszczędnościach i kredycie

Rachunek monet

Monety są środkiem płatniczym, sporządzonym wedle określonych przepisów. Monety wybija się zazwyczaj ze złota, srebra, niklu i miedzi. Ponieważ złoto i srebro są metalami miękkiemi, więc dodaje się przymieszkę innego metalu, najczęściej miedzi. Monety są więc wybijane ze stopu. Moneta nazywa się g ł ó w n ą, jeżeli istnieje obowiązek przyjmowania jej w każdej ilości. Moneta nazywa się z d a w k o w ą albo b i l o n e m, jeżeli niema obowiązku przyjmowania jej w każdej ilości.

Moneta zdawkowa służy głównie do drobnych wypłat.

Jeżeli w pewnym kraju wybija się monetę główną ze złota, to mówimy, że w tym kraju jest waluta złota.

W Polsce istnieje waluta złota. Jednostką monety jest złoty (*zł*), który dzieli się na 100 groszy (*gr*).

Polskie monety główne wybija się ze złota próby 0,900 w sztukach po 100 *zł*, 50 *zł*, 25 *zł*. Moneta 25 *zł* nazywa się dukatem polskim.

Polskie monety zdawkowe są: 10 *zł* wagi 22 *g* ze srebra próby 0,750; 5 *zł* wagi 11 *g* ze srebra próby 0,750; 2 *zł* wagi 4,4 *g* ze srebra próby 0,750; 1 *zł* wagi 7 *g* z czystego niklu; 50 *gr*, 20 *gr* i 10 *gr* z niklu; 5 *gr*, 2 *gr* i 1 *gr* z bronzu.

Bilon i „pieniądze papierowe" czyli banknoty są zastępczym środkiem pieniężnym i uprawniają do otrzymania w Banku Polskim tyle *zł* w złocie, na ile opiewają.

Tabelka podaje monety najważniejszych państw:

Państwo	Moneta	Waga jednostki w *g*	Liczba sztuk wybijanych z 1 *kg* czystego złota	Próba monety
Anglja	Suweren 1 £ .	7,9881	136,5675	0,916
Austrja	Szyling 1 *S* . .	0,23524	4723,2	0,900
Czechosłowacja	Korona czeska 1 *Kč*	0,04953	22432	0,900
Gdańsk	Gulden 1 *G* . .	0,31952	3414,2	0,917
Niemcy	Marka 1 *RM* .	0,39825	2790	0,900
Polska	Złoty 1 *zł* . .	0,18755	5924,44	0,900
Rosja	Rubel *R* . . .	0,86026	1291,60	0,900
Skandynawja .	Korona	0,44803	2480	0,900
Stany Zjednocz. Ameryki Pn.	Dolar 1 $ . .	1,67181	664,615	0,900
Szwajcarja . .	Frank szwajcarski 1 *Frs* . .	0,32258	3414,44	0,900
Węgry	Pengö 1 *P* . .	0,2924	3800	0,900

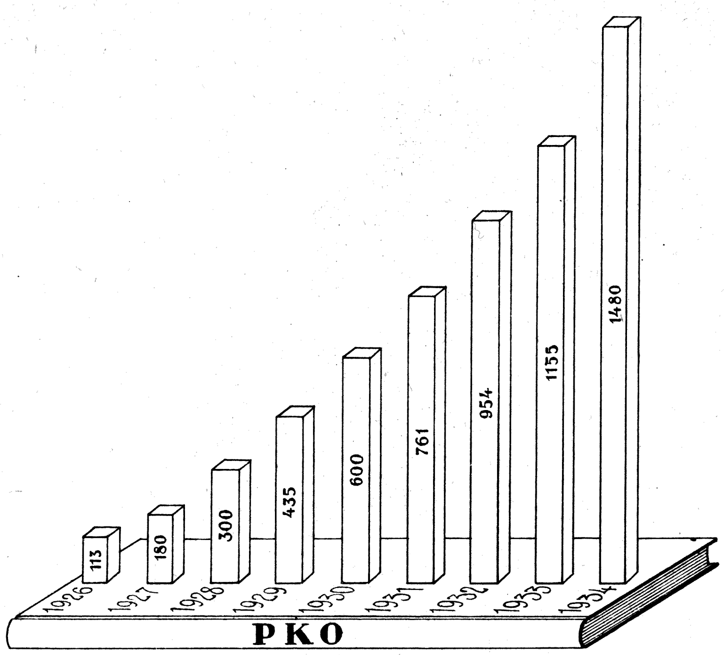
Zadania

1. Ile czystego złota zawiera: *a)* 1 £, *b)* 100 *S*, *c)* 25 *G*, *d)* 100 *Kč*, *e)* 20 *RM*, *f)* 25 *zł*, *g)* 10 *R*, *h)* 20 Koron Skandynawskich, *i)* 10 $, *j)* 20 *Frs*, *k)* 20 *P*?
2. Ile: *a)* £, *b) S*, *c) G*, *d) Kč*, *e) RM*, *f) zł*, *g) R*, *h)* Koron Skandynawskich, *i)* $, *j) Frs*, *k) P* kosztuje 1 *g* czystego złota?
3. Jaka jest wartość w *zł* funta tureckiego, który waży 7,216 *g* i jest próby 0,916?
4. Jakiej próby jest 20 jenów (moneta japońska), jeśli moneta ta waży 16,6 *g*, a z jednego *kg* czystego złota wybija się $66\frac{2}{3}$ sztuk tej monety?
5. Jaka jest wartość: *a)* 25 *G*, *b)* 10 *R*, *c)* 20 *Frs* w *zł*?
6. Jaka jest wartość: *a)* 20 *P* w *Frs*, *b)* 1 £ w *G*, *c)* 100 *Kč* w *RM*?

Instytucje finansowe

Instytucjami finansowemi są kasy oszczędności oraz banki. Ich zadaniem jest: *a)* gromadzić oszczędności społeczeństwa, *b)* udzielać kredytu (t. j. pożyczek), *c)* pośredniczyć w obrotach pieniężnych. Rozróżniamy instytucje finansowe prywatne, komunalne i państwowe. Np. Pocztowa Kasa Oszczędności i Bank Gospodarstwa Krajowego są instytucjami państwowemi; Miejskie Kasy Oszczędności w Warszawie, Lwowie, Krakowie i t. d. są instytucjami komunalnemi; prócz tego istnieje wiele banków prywatnych.

W Polsce najwygodniej jest składać oszczędności w Pocztowej Kasie Oszczędności (P. K. O.), to też liczba książeczek oszczędnościowych w P. K. O. stale wzrasta, jak to widać z rys. 25.



Rys. 25.

Wkłady oszczędnościowe, począwszy od 1 *zł* przyjmują: Kasa Centrali P. K. O. w Warszawie, Kasy Oddziałów P. K. O. i wszystkie urzędy pocztowe. Osoba, która złoży w P. K. O. pewną kwotę, otrzymuje książeczkę oszczędnościową, w której wpisuje się nazwisko właściciela i wysokość złożonej kwoty. Kwota złożona na książeczce daje obecnie 4% rocznie dochodu.

W odróżnieniu od innych instytucyj finansowych mają książeczki P. K. O. tę zaletę, że ich właściciele mogą w każdej chwili i w każdej miejscowości, w której znajduje się urząd pocztowy, podjąć codziennie kwotę do 100 *zł*. Jest to wielka wygoda, zwłaszcza podczas podróży i wycieczek.

Zadania

1. Ktoś złożył w P. K. O. 3/I 1933 r. 60 *zł*, a 1/I 1934 r. 85 *zł*; ile będzie posiadał I/I 1934 r., a ile 1/I 1935 r., jeśli uwzględnisz 4%?
2. Wartość 1 *zł* po upływie danej liczby lat przy 3%, 4%, 5%, 6%, 10%, 12% podaje tabelka:

	Lata								
	1	2	3	4	5	10	15	20	25
3%	1,03	1,0609	1,0927	1,1255	1,1593	1,3439	1,5580	1,8061	2,0938
4%	1,04	1,0816	1,1249	1,1699	1,2167	1,4802	1,8009	2,1911	2,6658
5%	1,05	1,1025	1,1576	1,2155	1,2763	1,6289	2,0789	2,6533	3,3864
6%	1,06	1,1236	1,1910	1,2625	1,3382	1,7908	2,3966	3,2071	4,2919
10%	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,6105	2,5939	4,1776	6,7280	10,8356
12%	1,12	1,2544	1,4044	1,5725	1,7606	3,1035	5,4701	9,6387	16,9882

W tabelce powyższej uwzględniono t. zw. procent składany. Przy procencie składanym (np. 5%), jeżeli złożyliśmy 100 *zł*, to po 1 roku mamy 105 *zł*; po upływie drugiego roku oblicza się procent nietylko od złożonych 100 *zł*, ale także od 5 *zł*, które przyrosły i t. d.

Uwaga. Wartość 1 *zł* oddanego na 5% wynosi po upływie 10 lat 1,6289 *zł* t. j. 1 *zł* 62 *gr* i 0,0089 *zł*. Jakkolwiek niema monety na tysięczne i dziesięciotysięczne 1 *zł*, to jednak cyfry tych jednostek są potrzebne, gdyż np. wartość 100 *zł* oddanych na 5% wynosi po upływie 10 lat 162 *zł* 89 *gr*.

Na początku 1930 r. złożono kwotę 2000 *zł* na 5%; do jakiej kwoty wzrośnie ten kapitał po upływie *a)* 5, *b)* 10, *c)* 15, *d)* 20 lat, licząc procent składany?

3. Na początku 1926 r. złożono do kasy 600 *zł* na procent składany 4%, na początku 1928 r. 300 *zł*, a na początku 1930 r. 400 *zł*; jaka będzie wartość wszystkich złożonych pieniędzy z końcem roku 1934?

Powtórz to zadanie, przyjmując: *a)* 3%, *b)* 5%, *c)* 6%, *d)* 10%, *e)* 12%!

4. Oblicz wartość 1 *zł*, oddanego na procent składany: *a)* 3%, *b)* 4%, *c)* 5%, *d)* 6%, *e)* 10%, *f)* 12% po upływie 50 lat!

Uwaga. Oblicz wartość 1 *zł* po upływie 25 lat a następnie wartość otrzymanej kwoty po upływie 25 lat!

5. Oblicz wartość 100 *zł*, oddanych na procent składany 4% po upływie: *a)* 40 lat, *b)* 60 lat, *d)* 45 lat!
6. Powtórz zadanie (5), biorąc inny procent składany!

Bezgotówkowe środki zapłaty

Pod względem gospodarczym jest bardzo dla państwa rzeczą ważną zastąpić częściowo obieg pieniężny środkami, nie wymagającemi natychmiastowej wypłaty gotówki.

Konta

Jeżeli ktoś w banku albo kasie oszczędności złoży gotówkę na t. zw. rachunek czekowy (konto czekowe), wówczas otrzymuje książeczkę czekową, zawierającą poszczególne blankiety, zwane czekami kasowemi. Właściciel takiej książeczki może np. kupując towar, wręczyć kupcowi czek zamiast gotówki.

Aby czek był ważny musi zawierać:

1. Miejsce i datę wystawienia czeku.
2. Nazwę banku lub kasy oszczędności, która ma wypłacić podaną kwotę.
3. Wydrukowane słowo „czek“ na blankiecie.
4. Polecenie wypłacenia oznaczonej kwoty pieniężnej, którą wyszczególnia się cyframi, a nadto słowami.
5. Podpis właściciela książeczki czekowej.

Niżej podajemy wzór ważnie wystawionego czeku:

BANK POLSKI

№ 0591401 A. zł *100* gr —

Bank Polski Oddział *we Lwowie*

wypłaci okazicielowi niniejszego czeku z mego ~~naszego~~ rachunku żyrowego

złotych *sto*

We Lwowie, dnia 1 sierpnia 1933.

Adam Górowski

Osoba która otrzymała czek, udaje się z nim do banku i otrzymuje wyszczególnioną na czeku kwotę pieniężną. Czek jest zatem bezgotówkowym środkiem zapłaty.

Można również posiadać konto w banku, czy też w kasie oszczędności, oparte na kredycie. Np.: fabrykant, posiadający zabudowania, maszyny, może uzyskać w banku kredyt do pewnej wysokości (np. do 10 000 *zł*), to znaczy, że może rozporządzać tą kwotą tak, jakby złożył gotówkę. Bank zabezpiecza sobie tę gotówkę na majątku fabrykanta. Zapomocą czeków można również nietylko zlecić wypłatę pewnej gotówki, ale także przekazać (przelać) pewną kwotę z konta jednego właściciela na konto drugiego.

Zadania

1. Wystaw czek z datą 8/III 1934 do Banku Dyskontowego w Warszawie z poleceniem wypłaty 600 *zł* p. Aleksandrowi Malinowskiemu!
2. Kupiec złożył do Banku na rachunek czekowy 5000 *zł*.

Zamawiając w różnych fabrykach potrzebne mu towary, płacił czekami zamiast gotówką i tak 1/II wystawił czek na 640 *zł*, 4/II na 250 *zł*. 10/II na 330 *zł*, 17/II na 150 *zł*, 22/II na 720 *zł*, 27/II na 90 *zł*; jaką kwotę posiada w dniu 1/III (saldo)?

3. Przemysłowiec posiadał konto czekowe, na które składał swe dochody i za pośrednictwem którego uskuteczniał wydatki. Rachunek jego konta przedstawiał się w sposób następujący:

Wpłynęło

Data	Kwota	
	zł	*gr*
1/II	1600	—
10/II	550	—
20/II	420	—
1/III	840	—
10/III	920	—
20/III	280	—

Wypłacono

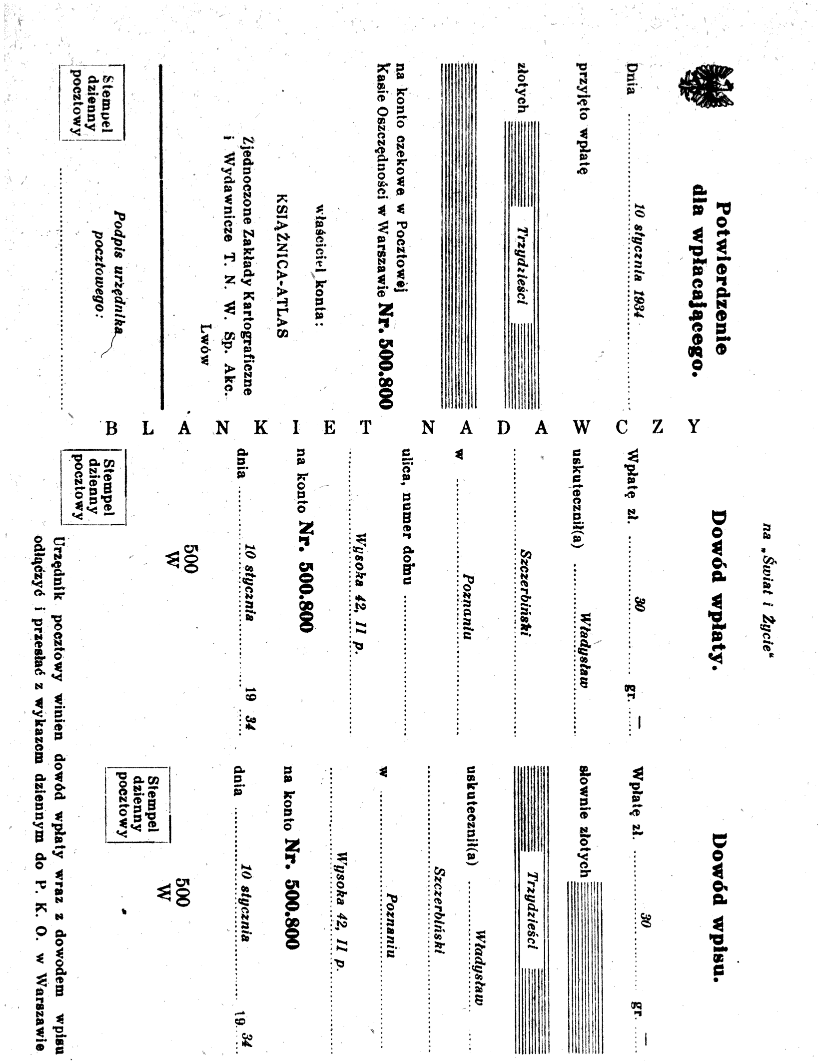
Data	Numer czeku	Kwota	
		zł	*gr*
3/II	26845	65	30
7/II	26846	190	50
11/II	26847	240	—
18/II	26848	85	20
25/II	26849	450	—
5/III	26850	620	50
12/III	26851	115	80
20/III	26852	320	40
28/III	26853	556	20

Oblicz saldo w dniu 1. IV!

4. Firma „Przemysł Drzewny“ złożyła w dniu 2 stycznia 1933 r, na konto czekowe kwotę 30 000 zł. Z powyższej kwoty wypłacono I/IV 1933 r. 5000 *zł*, a I/VI 1933 r. — 4000 *zł*. Jaką kwotę posiada firma z końcem czerwca 1933 r. na rachunku czekowym, jeśli bank płaci 3% rocznie od wkładów czekowych. (Dodaj do 30 000 *zł* procenta za 3 miesiące, odejmij 5000 zł, do otrzymanej kwoty dodaj procenta za 2 miesiące, odejmij 4000 *zł* i dodaj procenta za 1 miesiąc).

Blankiety nadawcze P. K. O.

Jeżeli jakaś osoba lub firma posiada rozgałęzione stosunki handlowe lub finansowe, zwłaszcza w różnych miej-


Potwierdzenie dla wpłacającego.

Dnia 10 stycznia 1934

przyjęto wpłatę

złotych Trzydzieści

na konto czekowe w Pocztowej Kasie Oszczędności w Warszawie **Nr. 500.800**

właściciel konta:

KSIĄŻNICA-ATLAS

Zjednoczone Zakłady Kartograficzne i Wydawnicze T. N. W. Sp. Akc.

Lwów

Stempel dzienny pocztowy

Podpis urzędnika pocztowego:

B L A N K I E T N A D A W C Z Y

na „Świat i Życie“

Dowód wpłaty.

Wpłatę zł. 30 gr. —

uskuteczni(a) Władysław Szczerbiński

w Poznaniu

ulica, numer domu Wysoka 42, II p.

na konto **Nr. 500.800**

dnia 10 stycznia 19 34

500 W

Stempel dzienny pocztowy

Urzędnik pocztowy winien dowód wpłaty wraz z dowodem wpisu odłączyć i przesłać z wykazem dziennym do P. K. O. w Warszawie

Dowód wpisu.

Wpłatę zł. 30 gr. —

słownie złotych Trzydzieści

uskuteczni(a) Władysław Szczerbiński

w Poznaniu

Wysoka 42, II p.

na konto **Nr. 500.800**

dnia 10 stycznia 19 34

500 W

Stempel dzienny pocztowy

scowościach, wówczas zakłada swoje konta w P. K. O. Właściciel konta otrzymuje blankiety zwane nadawczemi, zaopatrzone numerem konta, a następnie rozsyła je osobom, od których ma otrzymać pieniądze. Osoba, która ma zapłacić, wypełnia blankiet nadawczy, poczem wypłaca wymienioną kwotę w Urzędzie Pocztowym. Blankiety nadawcze zastępują więc przekazy pieniężne pocztowe, a mają tę dogodność, że są połączone z małemi kosztami przesyłki. Blankiety nadawcze składają się z trzech części: *a)* potwierdzenia dla wpłacającego (tę część zatrzymuje nadawca), *b)* dowodu wpłaty (otrzymuje adresat), *c)* dowodu wpisu (zatrzymuje Urząd Pocztowy lub Oddział P. K. O.).

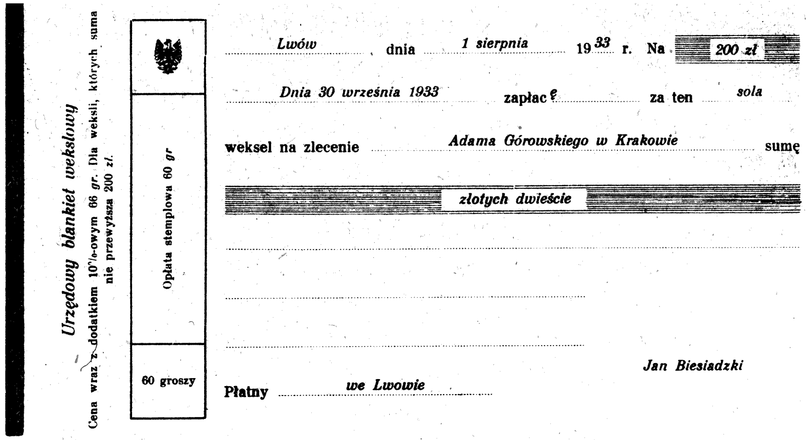
Powyżej mamy wzór, wypełnionego blankietu nadawczego.

1. Kup w Urzędzie Pocztowym blankiet nadawczy i wypełnij go na kwotę 20 *zł*, którą chcesz przesłać panu M. N., będącemu właścicielem konta Nr. 345 600.
2. Kupiec na prowincji spłacał pożyczkę przesyłając blankietem nadawczym P. K. O. przez cały rok co miesiąc 150 *zł*; ile zapłaciłby za przesyłkę zapomocą przekazów pieniężnych?

Zobowiązania pieniężne

Jeżeli ktoś chce pożyczyć w banku, względnie w Kasie Oszczędności pewną kwotę pieniędzy, wówczas składa zazwyczaj pisemne zapewnienie, że kwotę powyższą zwróci w oznaczonym czasie. Zapewnienie takie, wystawione na specjalnym urzędowym blankiecie, nazywamy wekslem. Jeżeli pożyczający (dłużnik) nie zwróci w oznaczonym czasie pożyczonych pieniędzy (t. j. nie wykupi weksla), wówczas wypożyczający (wierzyciel) może dłużnika zaskarżyć. Na skutek takiej skargi sąd w krótkim czasie zarządza przymusowe ściągnięcie należnej kwoty.

Obok podajemy wzór weksla.


Urzędowy blankiet wekslowy
Cena wraz z dodatkiem 10%-owym 66 *gr.* Dla weksli, których suma nie przewyższa 200 *zł.*
Opłata stemplowa 60 *gr*
60 groszy
Lwów, dnia *1 sierpnia* 19*33* r. Na *200 zł*
Dnia 30 września 1933 zapłać*?* za ten *sola*
weksel na zlecenie *Adama Górowskiego w Krakowie* sumę
złotych dwieście
Jan Biesiadzki
Płatny *we Lwowie*

Aby weksel był ważny musi zawierać:

a) miejsce i datę wystawienia,
b) datę terminu wykupienia weksla,
c) słowo „weksel" wydrukowane na blankiecie,
d) kwotę do zapłacenia wypisaną cyframi i słowami,
e) osobę, albo kasę (bank), której kwota ma być zapłacona,
f) własnoręczny podpis.

Cena blankietu zależy od kwoty, na którą weksel ma być wystawiony.

W handlu i przemyśle używa się weksli nietylko przy pożyczaniu pieniędzy, ale także przy płaceniu za towar. Jeżeli kupiec pobrał w fabryce towar, którego nie płaci gotówką, wówczas wystawia weksel na odpowiednią sumę. W ten sposób kupiec zyskuje czas do zebrania przez rozsprzedaż towaru potrzebnej gotówki.

Oprócz pożyczek na weksel, które są zazwyczaj krótkoterminowe (to znaczy musza być zwrócone w kilku miesiącach), istnieją pożyczki długoterminowe (zwrotne w ciągu kilkunastu albo nawet kilkudziesięciu lat), noszące nazwę hipotecznych. Pożyczkę hipoteczną można uzyskać, o ile posiada się ziemię, dom i t. p. Majątek dłużnika służy jako zabezpieczenie pożyczonej kwoty i nie może być sprzedany przed zapłaceniem długu bez zgody wierzyciela.

Zadania

1. Wypełnij weksel z datą dzisiejszą na kwotę 200 *zł* płatną w Banku Gosp. Kraj. w trzy miesiące od daty wystawienia.
2. Ktoś pożyczył na weksel: *a)* 600 *zł*, *b)* 800 *zł*, *c)* 1100 *zł* na: *a)* 9%, *b)* $9\frac{1}{2}$%, *c)* 10%. Kasa przy wypłacie gotówki potrąciła procent za 3 miesiące; ile gotówki otrzymał?
3. Weksel na 500 *zł* jest płatny za trzy miesiące. W chwili obecnej wart jest jednak mniej o pewien procent, zwany dyskontem. Oblicz wartość tego weksla w chwili obecnej, jeżeli dyskonto wynosi 12% t. j. oblicz, jaki kapitał oddany na 12% da po 3 miesiącach 500 *zł*!
4. Oblicz wartość weksla w dniu 1 kwietnia przy dyskoncie 9% na kwotę *a)* 600 *zł* płatnych 1 lipca, *b)* 850 *zł* płatnych 15 lipca, *c)* 1500 *zł* płatnych 20 lipca!
5. Kupiec zakupił towar za 5000 *zł*, przyczem część zapłacił gotowką, a nadto wystawił weksle; jeden na 1500 *zł*, płatny za 3 miesiące, i drugi na 2000 *zł*, płatny za 5 miesięcy; ile zapłacił gotówką, jeżeli dyskonto wynosiło 10%? (Oblicz wartość każdego weksla w chwili wystawienia!)
6. Kwota: *a)* 800 *zł*, *b)* 1200 *zł*, *c)* 2000 *zł*, pożyczona na weksel na: *a)* $9\frac{1}{2}$%, *b)* 9%, *c)* 10% ma być spłacona w ratach, płatnych co trzy miesiące, przyczem za każdym razem dłużnik spłaca: *a)* czwartą, *b)* ósmą, *c)* dziesiątą część pożyczonego kapitału i procent za trzy miesiące od pozostałego długu; ile wynosi każda rata? Licz: pierwsza rata w zadaniu *a)* wynosi 200 *zł* i $9\frac{1}{2}$% od 600 *zł* za 3 miesiące.

Podatki i ubezpieczenia

Najważniejsze podatki

Każdy kto ma dochód oddaje część dochodu skarbowi państwa, czyli płaci p o d a t e k d o c h o d o w y.

Dochody mogą pochodzić z nieruchomości gruntowej (np. z uprawy roli), z przedsiębiorstw handlowych i przemysłowych, z zajęcia zawodowego, z uposażeń służbowych i t. p.

Podatku dochodowego nie płacą ci, których dochód roczny jest niższy od 1500 *zł*, a przy uposażeniach służbowych niższy od 2500 *zł*. Podatek dochodowy płaci się rocznie od dochodu rocznego. Wysokość podatku zależy od wysokości dochodu, od tego, z czego dochód płynie i od wielu innych okoliczności, które są przez ustawę określone.

Poniżej podana jest zasadnicza skala podatku dochodowego od wszystkich dochodów z wyjątkiem uposażeń służbowych.

Wysokość dochodów rocznie w *zł* ponad — do	Podatek w *zł*
1500—1550	31
1550—1600	33
1600—1700	37
1700—1800	41
1800—1900	45
1900—2000	50
2000—2100	54

Wysokość dochodów rocznie w *zł* ponad — do	Podatek w *zł*
2100—2200	59
2200—2400	67
— — —	—
3400—3600	122
— — —	—
4400—4800	182
— — —	—
9200—10 000	530
— — —	—
19 000—20 000	1540
— — —	—
96 000—104 000	17 888
— — —	—
192 000—200 000	50 000

1) Jaki procent dochodu wynosi podatek od *a)* 1500 *zł*, *b)* 10 000, *c)* 100 000, *d)* 200 000?

2) Ktoś ma 9500 *zł* dochodu rocznie i oprócz podatku dochodowego płaci jeszcze 4% dochodu na rzecz samorządu. Ile mu zostaje?

Dochody z uposażeń służbowych, emerytur i wynagrodzeń za najemną pracę oblicza się według następującej tabeli podstawowej:

Uposażenie w stosunku rocznym w *zł* ponad — do	Stopa procentowa podatku
2500—2600	1,5
2600—2700	1,6
2700—2800	1,7
2800—2900	1,8
2900—3000	1,9
3000—3100	2
— — —	—

Uposażenie w stosunku rocznym w *zł* ponad — do	Stopa procentowa podatku
3400—3600	2,3
— — —	—
4400—4800	2,8
— — —	—
9600—10 400	4,3
— — —	—
19 000—20 000	7,7
— — —	—
96 000—104 000	17,2
192 000	25

Podatek pobiera się przy każdej wypłacie uposażeń w ten sposób, że służbodawca potrąca z uposażeń ten podatek i wpłaca do skarbu państwa.

Przykłady.

a) Pracownik otrzymuje miesięczne uposażenie za styczeń w kwocie 250 *zł*. Wysokość tego uposażenia w stosunku rocznym wynosi $12 \cdot 250$ *zł* = 3000. Stopa procentowa od rocznego dochodu 3000 *zł* wynosi 1,9. Zatem służbodawca potrąca przy wypłacie 1,9% z 250 *zł*, t. j. 4 *zł* 75 *gr*. Pracownik otrzymuje więc 245 *zł* 25 *gr*.

b) Pracownik otrzymuje w kwietniu za I kwartał uposażenia 1200 *zł*. Wysokość tego uposażenia w stosunku rocznym wynosi $4 \cdot 1200$ *zł* = 4800 *zł*. Stopa procentowa od 4800 *zł* wynosi 2,8%. Zatem służbodawca potrąca 2,8% z 4800 *zł* = 13 *zł* 44 *gr*.

c) Wynagrodzenie robotnika za tydzień wynosi 50 *zł*. Wysokość tego wynagrodzenia w stosunku rocznym wynosi $52 \cdot 50$ *zł* = 2600 *zł*. Stopa procentowa od 2600 *zł* wynosi 1,5%. Zatem służbodawca potrąca 1,5% z 50 *zł* = 0,75 *zł*.

1. Urzędnik w przedsiębiorstwie ma uposażenie miesięcznie *a)* 220 *zł*, *b)* 290 *zł*, *c)* 400 *zł*. Jaki płaci podatek miesięcznie a jaki rocznie?
2. Robotnik zarabia *a)* tygodniowo 56 *zł*, *b)* za dwa tygodnie 170 *zł*. Ile służbodawca potrąca przy wypłacie uposażenia; ile to wynosi rocznie?
3. Dochód kupca wynosi rocznie 4800 *zł*. Ile procent dochodu wynosi podatek? O ile więcej płaci rocznie od urzędnika mającego z uposażenia ten sam dochód roczny?

Przedsiębiorstwa płacą t. zw. podatek obrotowy. Obrotem np. w przedsiębiorstwie handlowem jest to suma, uzyskana za sprzedane towary. Jeżeli obrót w przedsiębiorstwie wynosił np. 10 000 *zł*, t. zn., że do kasy wpłynęło 10 000 *zł*. Kupiec miał rozmaite wydatki (np. płacił za towar), zatem 10 000 *zł* nie jest dochodem. Kupiec mógł nawet nie mieć dochodu, ale stratę.

Podatek obrotowy wynosi od 0,5%—4% obrotu. Osobno kupiec płaci podatek od dochodu.

1. Kupiec miał w ciągu roku 2600 *zł* dochodu, a obrót w sklepie wynosił 22 000 *zł*. Ile *zł* podatku kupiec zapłacił, jeżeli podatek obrotowy wynosił 1,5% od obrotu?
2. Przedsiębiorstwo miało 24 000 *zł* obrotu. Ile zapłacono podatku obrotowego, który wynosi 3,5% od obrotu?

Od nieruchomości (jak budynki mieszkalne, fabryki i t. p., place zajęte na przedsiębiorstwa handlowe i t. p.) płaci się w gminach miejskich podatek zwany podatkiem od nieruchomości. Jeżeli właściciel wynajmuje nieruchomość i pobiera czynsz (np. właściciel kamienicy za wynajęte mieszkania), to podatek wynosi 7% od czynszu.

Jeżeli nieruchomość nie jest wynajmowana (np. fabryka, willa i t. p.), to czynsz szacuje się na 5% wartości tej nieruchomości i od tej kwoty płaci się 7% podatku.

1. Właściciel kamienicy pobiera za wynajęte mieszkania tytułem czynszu 1900 *zł* miesięcznie. Ile płaci podatku od tej kamienicy? Ile płaci podatku dochodowego, jeżeli wydatki na kamienicę wynoszą 3600 *zł*.
2. Zabudowania fabryczne oszacowano na 135 000 *zł* Ile wynosi podatek od tej nieruchomości?

Ubezpieczenia społeczne

Pracownik narażony jest na rozmaite nieszczęścia (jak choroba, wypadek przy pracy, śmierć, bezrobocie), które uniemożliwiają mu zarobkowanie, albo powodują zmniejszenie zdolności do zarobkowania. Nieszczęście jest jeszcze większe, jeżeli pracownik ma rodzinę, którą utrzymuje ze swoich zarobków. Każdy pracownik musi ponadto pamiętać, że na starość nie będzie mógł pracować.

Państwo Polskie utworzyło instytucję, zwaną Ubezpieczalnią Społeczną, której celem jest zabezpieczenie pracownikowi, jak również jego rodzinie środków utrzymania w nieszczęśliwych okolicznościach. Pracownik, należący do ubezpieczalni płaci pewne składki. Za to ma zabezpieczoną pomoc w nieszczęśliwych wypadkach. Każdy pracownik w zasadzie jest zobowiazany należeć do ubezpieczalni. Obowiązkowi temu nie podlegają tylko niektórzy urzędnicy państwowi. Pracownik może być ubezpieczony:

a) na wypadek choroby,

b) od wypadków i chorób zawodowych,

c) na starość, na wypadek śmierci, na przedwczesną niezdolność do pracy,

d) na wypadek braku pracy.

Korzyści ubezpieczonego są duże.

Jeżeli np., ubezpieczony na wypadek choroby pracownik, zachoruje, wówczas Ubezpieczalnia udziela mu opieki lekarskiej, lekarstw, pomocy pieniężnej i t. p.

Ubezpieczony od wypadków w razie nieszczęśliwego wypadku i np. niezdolności do pracy uzyskuje oprócz leczenia stały zasiłek, zwany rentą. Nietylko ubezpieczony, lecz także i rodzina jego ma korzyści z Ubezpieczalni. Gdy ubezpieczony (na wypadek śmierci) umrze, wówczas rodzina jego dostaje zaopatrzenie.

Składka pracownika ubezpieczonego zależy od rodzaju ubezpieczenia, od wysokości zarobków, od tego, czy pracownik jest robotnikiem czy pracownikiem umysłowym i t. p.

Składkę za ubezpieczenie od wypadku płaci sam pracodawca. Składki na pozostałe rodzaje ubezpieczenia płaci w części pracodawca, w części pracownik.

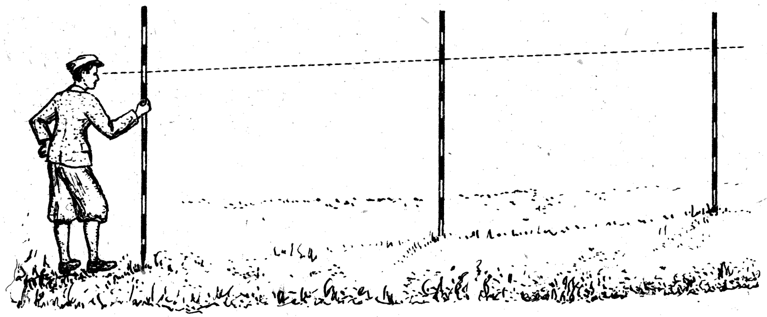
Składkę oblicza się od zarobku tygodniowego (6 dni roboczych). Np. składka za ubezpieczenie na wypadek choroby wynosi dla robotnika 5% zarobku tygodniowego. Np. Ile wynosi składka robotnika, zarabiającego dziennie 7 *zł*? Robotnik zarabia tygodniowo 42 *zł*. Składka wynosi 5% z 42 *zł* = 2,10 *zł*. Połowę składki płaci robotnik, połowę pracodawca.

Plany parcel i budynków

Pomiar długości

Punkty w terenie zaznaczamy palikami (kołkami), u dołu ostro zaciosanemi, u góry równo ściętemi.

Jeżeli mamy w terenie dwa punkty *A* i *B*, to możemy przy pomocy tyczek wyznaczyć (wytyczyć) inne punkty, leżące na prostej *AB*. W tym celu wbijamy w *A* i *B* pionowo dwie tyczki. Następnie staramy się nową tyczkę wbić (pionowo) w takim punkcie, aby celując wzdłuż dwóch tyczek nie było widać trzeciej (rys. 26).



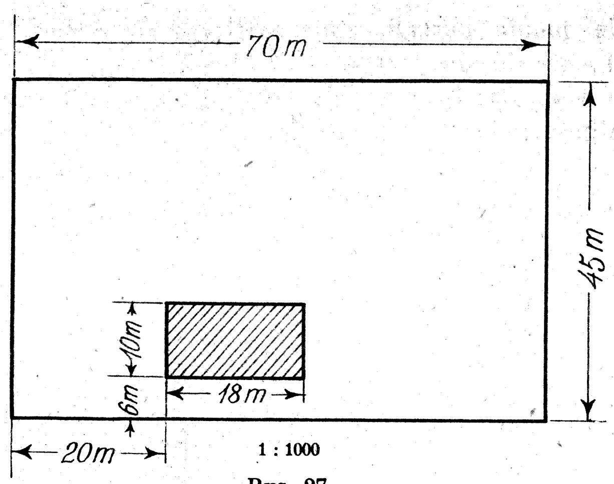
Rys. 26.

Nowa tyczka wyznacza wtedy punkt *C*, położony na prostej *AB*. W ten sposób możemy wytyczyć kilka punktów, położonych na odcinku *AB*, lub jego przedłużeniu. Do mierzenia długości posługujemy się tak zwaną taśmą mierniczą (20 *m* — 30 *m*).

Przy pomiarze odległości dwóch punktów w terenie wygodnie jest wbite w nie paliki połączyć mocno napiętym sznurem i wzdłuż sznuru mierzyć. Jeżeli punkty są zbyt odległe, to wytyczamy kilka punktów pośrednich.

Plan parceli

Jeśli mamy parcelę w kształcie prostokąta, to mierzymy długości jego boków, a następnie rysujemy plan tego prostokąta w odpowiedniej skali i wpisujemy na nim otrzymane wymiary (rys. 27). Jeżeli na parceli znajduje się budynek (zazwyczaj o podstawie prostokątnej i ścianach odpowiednio równoległych do boków parceli), to plan tego budynku wyznaczamy, mierząc odległości jego ścian

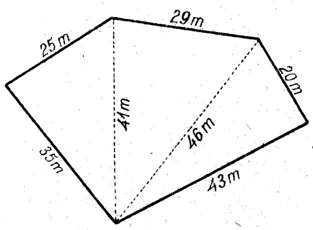


1 : 1000

Rys. 27.

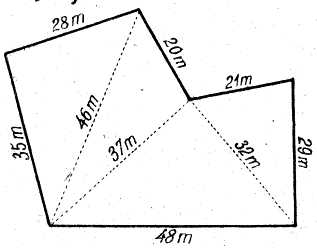
od odpowiednich boków parceli (rys. 27). Plan parceli wraz z zaznaczonemi budynkami jest t. zw. **planem sytuacyjnym.**

Jeżeli chcemy narysować plan parceli wielokątnej, to rysujemy na oko jej szkic. Następnie na szkicu przy pomocy przekątnych rozkładamy ją na trójkąty. Boki tych trójkątów mierzymy w terenie i wyniki pomiarów zapisujemy na szkicu. Plan parceli w pewnej skali otrzymamy, rysując w tej skali plany trójkątów w takiem ułożeniu, jak na parceli (rys. 28 *a*, *b*).



1 : 1500

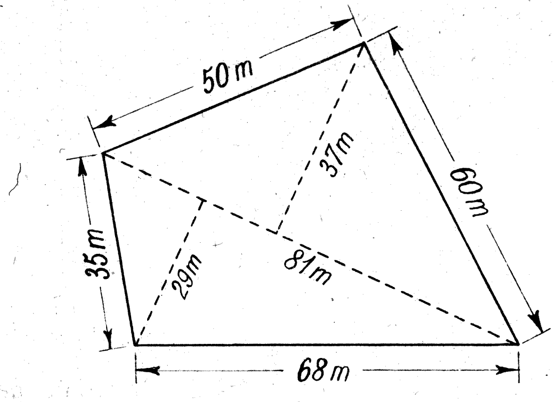
Rys. 28 *a*.



1 : 1500

Rys. 28 *b*.

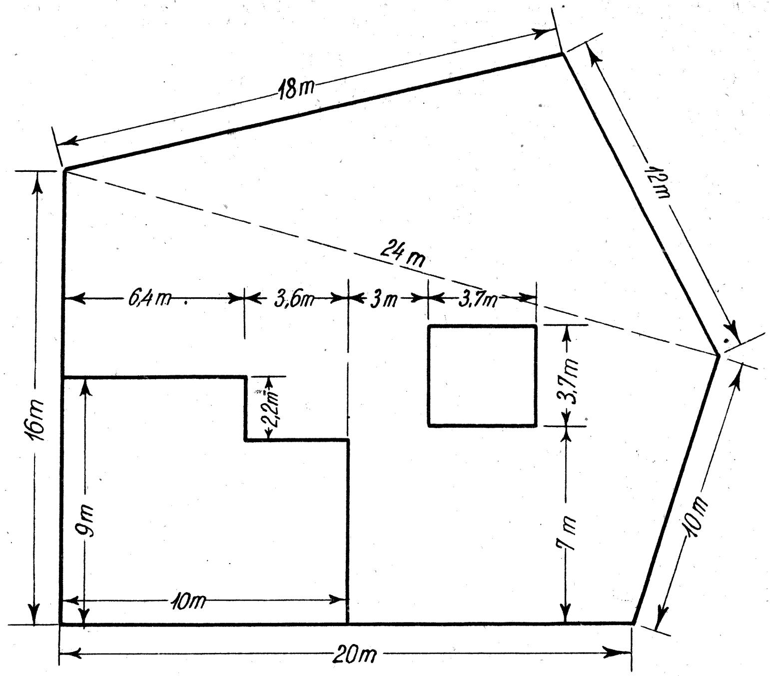
Na planie parceli, sporządzonym dla celów mierniczych, podaje się zazwyczaj długości boków parceli i długości wszystkich tych odcinków, przy pomocy których potrafimy obliczyć pole tej parceli (rys. 29).



Rys. 29.

Zadania

1. Zmierz: *a)* długość i szerokość budynku szkolnego! *b)* długość boków parceli np. ogrodu szkolnego!
2. Obierz w terenie dwa punkty dość odległe, wytycz prostą, łączącą te punkty, a następnie zmierz ich odległość! Powtórz to zadanie kilka razy!
3. Wbij 3 paliki tak, żeby utworzyły trójkąt i zrób plan tego trójkąta w dowolnie obranej skali!
4. Wbij 4 paliki tak, żeby utworzyły czworokąt, sporządź plan, a następnie mierząc na planie potrzebne wielkości, oblicz pole czworokąta!
5. Narysuj plan podwórza szkolnego!



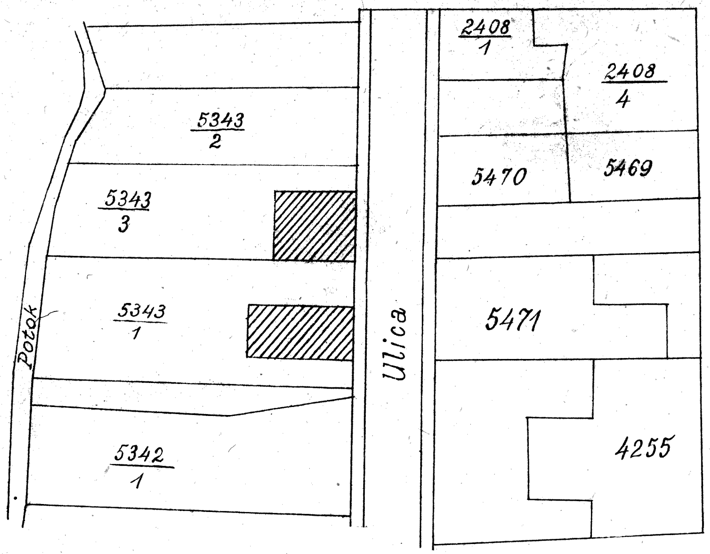
Rys. 30.

6. Na rys. 30 mamy plan parceli wraz z zaznaczonemi na niej budynkami. *a)* Przerysuj ten plan! *b)* Oblicz pole całej parceli (mierząc na planie potrzebne wielkości)! *c)* Oblicz pole części niezabudowanej!

Plany gruntowe

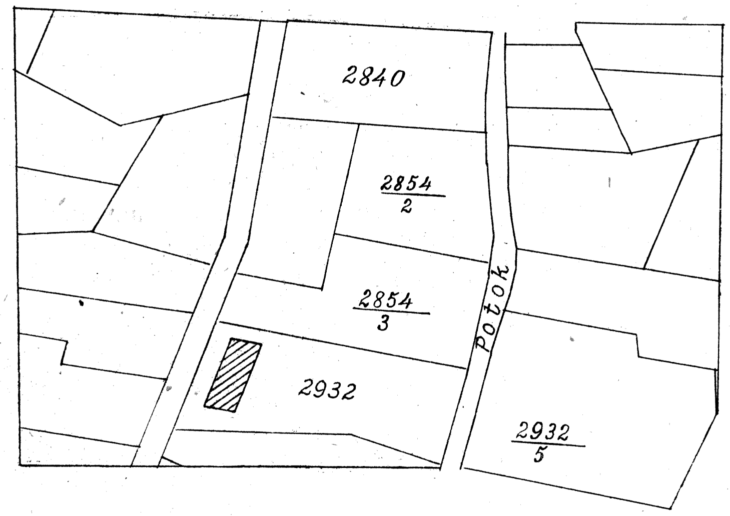
Planem gruntowym nazywamy plan gruntów, zrobiony w skali 1 : 1440 lub 1 : 2880.

Rys. 31 przedstawia plan gruntowy w skali 1 : 1440, a rys. 32 inny plan gruntowy w skali 1 : 2880.



1 : 1440

Rys. 31.



1 : 2880

Rys. 32.

Każda parcela, zaznaczona na planie gruntowym, ma swój numer np. 4255 (rys. 31) lub 2932 (rys. 32). Jeżeli parcelę o numerze np. 5343 podzielono na kilka części np. na 3, to te części oznacza się odpowiednio: $\frac{5343}{1}$, $\frac{5343}{2}$, $\frac{5343}{3}$.

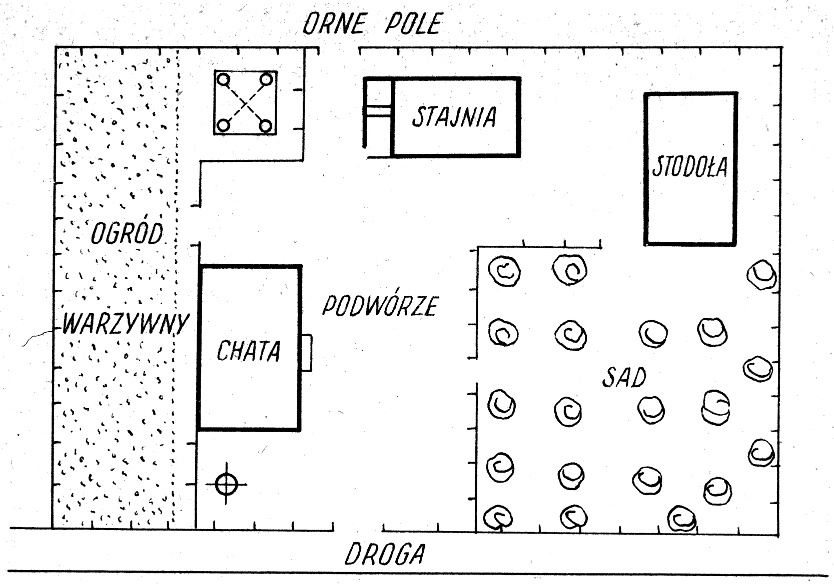
Zadania

1. Na planie gruntowym rys. 31 zmierz *a)* szerokość ulicy, *b)* szerokość potoku i podaj rzeczywistą szerokość!
2. Na planie gruntowym rys. 31 podaj: *a)* długość boków parceli nr. $\frac{5343}{1}$, *b)* wymiary podstawy budynku, znajdującego się na tej parceli, a następnie podaj rzeczywiste długości!
3. Na planie gruntowym rys. 32 zmierz szerokość drogi w kilku miejscach i podaj rzeczywiste szerokości w tych miejscach!
4. Na planie gruntowym rys. 32 podaj: *a)* długości boków parceli nr. 2932, *b)* wymiary budynku, znajdującego się na tej parceli, a następnie podaj rzeczywiste długości!
5. Przerysuj parcelę, której plan jest podany na rys. 32, nr. 2840 w skali 1 : 1440!
6. Przerysuj parcelę, której plan jest podany na rys. 31 nr. 4255 w skali 1 : 2880!
7. Przerysuj plan parceli nr. $\frac{2408}{1}$ na rys. 31, a następnie mierząc potrzebne wielkości, oblicz pole parceli!
8. Przerysuj plan parceli nr. $\frac{2854}{2}$ na rys. 32, a następnie mierząc potrzebne wielkości, podaj pole parceli!

Plan gospodarstwa wiejskiego

Plan sytuacyjny

Plan sytuacyjny rys. 33 daje nam obraz zagrody. Widzimy, że jest ogrodzona płotem, jakie budynki tam się znajdują, gdzie jest studnia, ogród warzywny, sad.



1 : 500

Plan sytuacyjny.

Rys. 33.

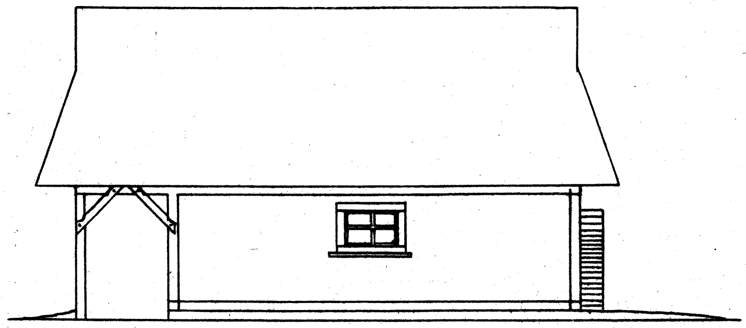
Poszczególne budynki przedstawiają dalsze plany: rys. 34 stajnię, rys. 35 stodołę, rys. 36 chatę.

Zadania

1. Przerysuj plan parceli!
2. Zmierz długość i szerokość planu parceli, oblicz stąd rzeczywistą długość i szerokość parceli, a następnie jej pole! Oblicz też pole sadu i ogrodu warzywnego!
3. Podaj na parceli położenie *a)* chaty, *b)* stajni, *c)* stodoły (to znaczy, podaj długości takich odcinków, które określają położenie budynku na parceli)!

Stajnia

Rys. 34 *a), b), c)* przedstawiają plany stajni. Rys. 34 *a* t. zw. **widok przedni** przedstawia (w skali 1 : 150), jak wygląda stajnia, gdy na nią patrzymy z przodu. Widzimy więc kształt dachu, okienko stajni, zewnętrzne schody i t. p. Możemy też na widoku przednim zmierzyć niektóre wielkości, jak np. długość stajni, szerokość i długość okienka, długość grzbietu dachu i t. p.



1 : 150

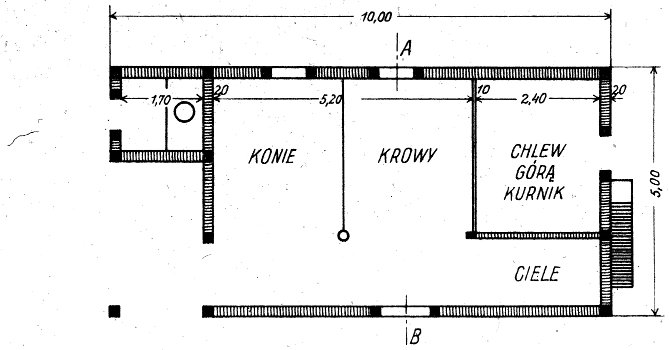
Widok przedni.

Rys. 34 *a*.

Oczywiście widok przedni nie wystarcza do odczytania wszystkich wymiarów, potrzebnych do wybudowania stajni.

Wyobraźmy sobie, że stajnię przecięliśmy w myśli płaszczyzną poziomą mniej więcej w połowie wysokości okien. Narysujmy plany (w skali 1 : 150) wszystkich linij przecięcia stajni tą płaszczyzną. Otrzymamy wówczas rysunek 34 *b*. Przekroje ścian są zacieniowane. Czarne kwadraciki są to przekroje słupów. Jeżeli dwa sąsiednie czarne kwadraciki połączone są dwoma równoległemi odcinkami, to oznacza to przekrój okna; brak jakiegokolwiek połą-

czenia oznacza drzwi, względnie brak ściany. Zewnętrzne schody zaznaczone są równoległemi odcinkami. Rysunek powyższy nazywa się **planem przyziemia** albo krótko **przyziemiem**.

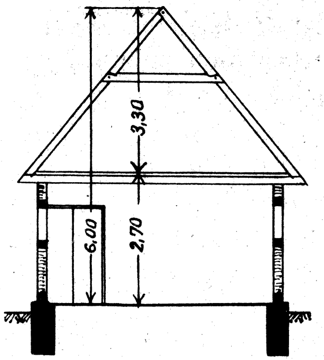


1 : 150

Przyziemie.

Rys. 34 *b*.

Widok przedni i przyziemie nie dają jeszcze całego obrazu stajni. Nie wiemy np. jak wysokie są ściany boczne, jakie jest wiązanie dachu i t. p. Aby podać potrzebne jeszcze wymiary, przecinamy w myśli stodołę płaszczyzną pionową prostopadle do ściany przedniej wzdłuż linji $A—B$. Przekrój ten rysujemy w skali 1 : 150. Na tym przekroju zaznaczamy to, co widzimy, stojąc przed płaszczyzną tnącą i odrzucając w myśli tę część budynku (i ziemi), która nas od tej płaszczyzny oddziela. Otrzymamy wówczas rys. 34 *c*. Widzimy na nim czarne prostokąciki, które oznaczają przekrój podmurowania stajni. Czarne kwadraciki, przylegające do nich są przekrojami belek podwaliny, czyli belek, spoczywających na podmurowaniu, a służących do utwierdzenia słupów. Przekroje górnych i dolnych belek okna są też zaznaczone czarnemi kwadracikami.



1 : 150

Przekrój *A—B*.

Rys. 34 *c*.

Części między niemi nie zacieniowane oznaczają okna stajni. Rysunek powyższy nazywa się krótko p r z e k r o-j e m p o p r z e c z n y m. Widok przedni, przyziemie i przekrój poprzeczny zawiera wszystkie wymiary potrzebne do zbudowania stajni.

Zadania

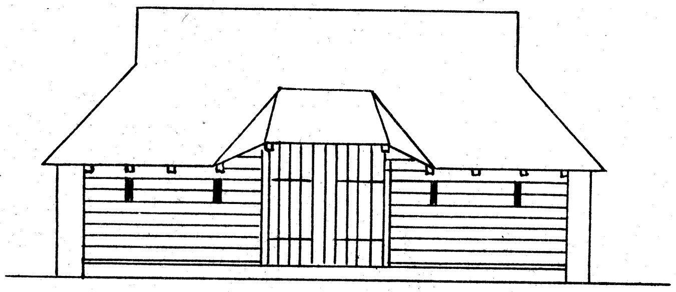
1. Przerysuj plan przyziemia stajni!
2. Odczytaj, albo zmierz na planie przyziemia: długość i szerokość stajni, grubość ścian, długość i szerokość poszczególnych ubikacyj, szerokość okien i drzwi!
3. Oblicz pole przekroju poziomego wszystkich ścian zewnętrznych (dodaj do siebie długość wszystkich ścian i pomnóż następnie przez ich grubość)!
4. Odczytaj, albo zmierz na planie przekroju poprzecznego: wysokość stajni, wysokość drzwi i okien, wysokość grzbietu dachu, grubość belek wiązania, wysokość najwyższej poziomej belki wiązania, głębokość i szerokość fundamentów!

5. Oblicz: *a)* objętość ścian bocznych,
   b) objętość fundamentów,
   c) objętość powały

   i podaj kosztorys budowy tej stajni, przyjmując, że 1 m^3 fundamentów kosztuje 45 *zł*, 1 m^3 ścian bocznych i powały 55 *zł*, 1 m^2 drzwi lub okien 10 *zł* i że koszta dachu wynoszą 20% kosztów ścian bocznych!

S t o d o ł a

Rys. 35 *a), b), c)* przedstawiają plany stodoły. Rys. 35 *a* przedstawia nam widok przedni.



1 : 200

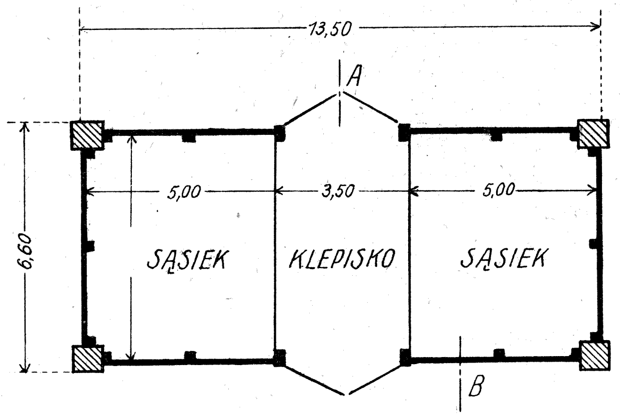
Widok przedni.

Rys. 35 *a*.

Wyobraźmy sobie, że stodołę przecięliśmy w myśli płaszczyzną poziomą mniej więcej w połowie wysokości okien:

Narysujmy plany (w skali 1 : 200) wszystkich linij przecięcia stodoły płaszczyzną tnącą, a otrzymamy plan przyziemia rys. 35 *b* (str. 150).

Czarne kwadraciki oznaczają przekroje słupów drewnianych. Odcinki, łączące słupy są to przekroje ścian bocznych stodoły, zbudowanych z dyli t. j. grubych desek. Cztery narożne zacieniowane kwadraciki są to przekroje



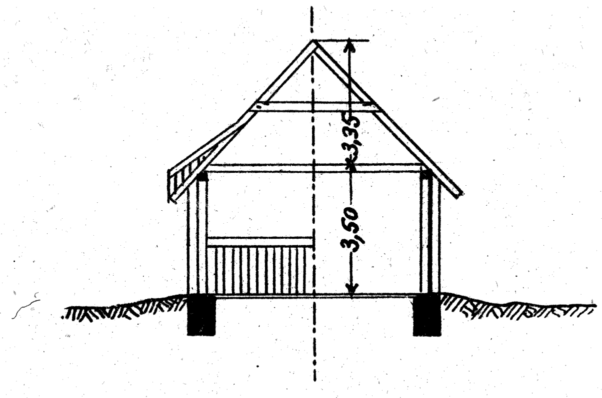
1 : 200

Przyziemie.

Rys. 35 *b*.

czterech narożnych słupów stodoły, betonowych, względnie zbudowanych z cegły.

Aby otrzymać przekrój poprzeczny, przecinamy w myśli stodołę płaszczyzną pionową prostopadłą do ściany przedniej. Przekrój ten rysujemy w tej samej skali, co poprzednio. Na przekroju zaznaczamy to, co widzimy, stojąc przed płaszczyzną tnącą i odrzucając w myśli tę część budynku (i ziemi), która nas od tej płaszczyzny oddziela. Często dla lepszego zobrazowania rysuje się kilka przekrojów poprzecznyoh, albo też tylko ich części. Tak więc na rys. 35 *c* prawa część jest prawą połową przekroju poprzecznego, poprowadzonego wzdłuż linji *B*. Widzimy na nim zaznaczony przekrój podmurowania (czarny prostokąt), przekroje lub zarysy belek wiązania dachu, przekrój ściany bocznej (grubszy odcinek) i zarysy słupa murowanego (dwa odcinki cieńsze, równoległe do poprzedniego).



1 : 200

Przekrój poprzeczny.

Rys. 35 *c*.

Lewa część rys. 35 *c* jest lewą połową przekroju poprzecznego, poprowadzonego wzdłuż linji *A*. Widzimy na nim zaznaczony zarys przegrody, oddzielającej klepisko od sąsieku, przekrój daszku podniesionego nad bramą.

Zadania

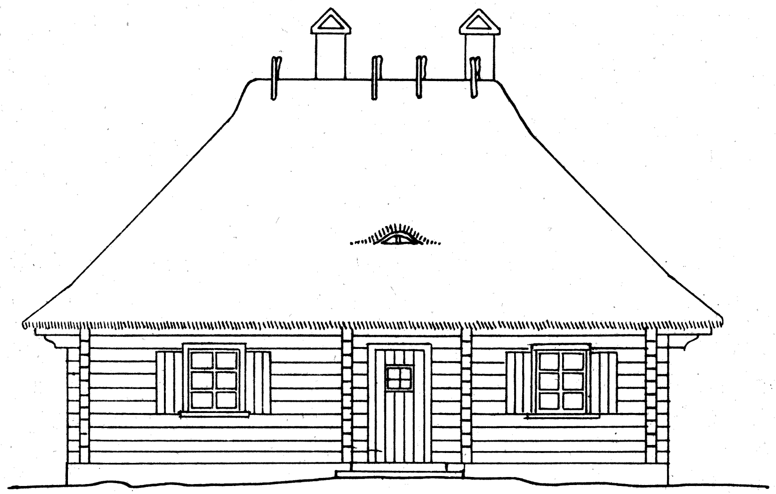
1. Odczytaj, lub zmierz na planie przyziemia: zewnętrzną długość i szerokość stodoły, długość i szerokość sąsieków i klepiska!
2. Odczytaj lub zmierz z planu przekroju poprzecznego wysokość grzbietu dachu, poziomych belek wiązania dachowego, głównych słupów, oraz szerokość i głębokość podmurowania w ziemi!
3. Oblicz:
   a) ile kosztują dyle na wypełnienie ścian stodoły rys. 35 *b*, jeżeli są grubości 6 *cm*, a 1 m^3 tych dyli kosztuje 100 *zł*.

b) koszta podmurowania, jeżeli 1 m^3 kosztuje 45 *zł*!

Uwaga: Aby otrzymać objętość wszystkich dyli, pomnóż sumę długości ścian przez ich wysokość i przez grubość dyli!

Chata

Rys. 36 *a* przedstawia widok przedni chaty.

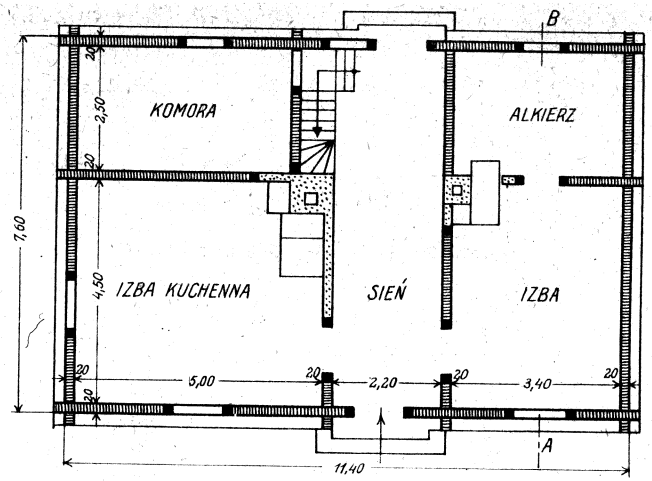


1 : 150

Widok przedni.

Rys. 36 *a*.

Rys. 36 *b* przedstawia przyziemie chaty. Czarne kwadraciki oznaczają przekroje słupów. Przekroje ścian zbudowanych z belek są zakreskowane, przekroje zaś kominów i ścian, przylegających do kuchni są zaznaczone kropkami, ponieważ zbudowane są z cegły. Przerwy w przekroju ścian oznaczają drzwi, przerwy zaś (połączone dwoma równoległemi odcinkami) okna. Alkierz i izba



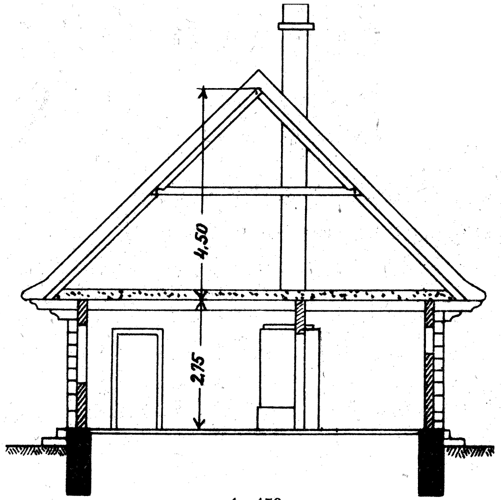
1 : 150

Przyziemie.

Rys. 36 *b*.

mieszkalna mają wspólny piec, (którego przekrój zaznaczony jest prostokątem) i przypiecek (mniejszy prostokąt). W izbie kuchennej widzimy kuchnię (kwadrat), piec kuchenny (przylegający prostokąt) i przypiecek. W sieni zaznaczone są dwa stopnie, po których wychodzi się na podwyższenie, skąd prowadzą schody na strych i drzwi do komory. Strzałka na schodach wskazuje kierunek, w którym idzie się do góry. Przed drzwiami wchodowemi zaznaczone są po dwa stopnie. Zewnętrzne odcinki, równoległe do przekroju ściany przedstawiają zewnętrzny zarys podmurowania.

Rys. 36 *c* (str. 154) jest planem przekroju poprzecznego chaty, poprowadzonego wzdłuż linji *A—B*. Czarne prostokąciki oznaczają przekrój podmurowania chaty. Przekroje ścian są zakreskowane. Części niezakreskowane



1 : 150

Przekrój *A—B*.

Rys. 36 *c*.

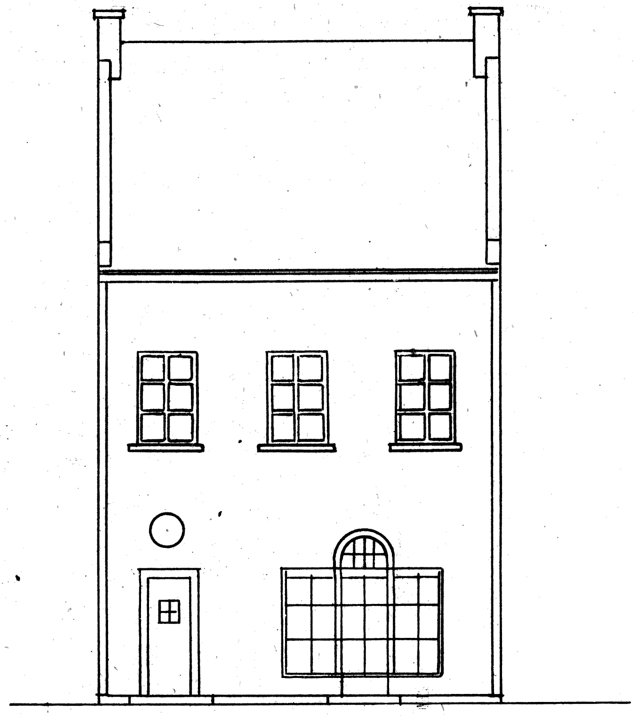
w przekrojach ścian zewnętrznych oznaczają okna, w przekroju zaś ściany wewnętrznej drzwi (prowadzące z izby mieszkalnej do alkierza).

Zadania

1. Odczytaj, albo zmierz na planie przyziemia: długość i szerokość chaty, alkierza, izby, kuchni, komory i sieni, grubość ścian, szerokość okien i drzwi, szerokość i długość pieców i kuchni!
2. Odczytaj albo zmierz na planie przekroju poprzecznego wysokość ścian, wysokość okien i drzwi, wysokość grzbietu chaty, grubość belek ściany, głębokość i szerokość fundamentów, grubość polepy!
3. Oblicz objętość ścian zewnętrznych i wewnętrznych, odejmując od objętości prostopadłościanu, utworzonego przez ściany zewnętrzne sumę objętości wszystkich ubikacyj!
4. Zrób kosztorys budowy takiej chaty, opierając się na danych w poprzednich zadaniach, albo też na cenach miejscowych!

Budynek czynszowy

Rys. 37 *a* przedstawia widok przedni kamienicy jednopiętrowej. Widzimy na nim drzwi wchodowe do sieni,



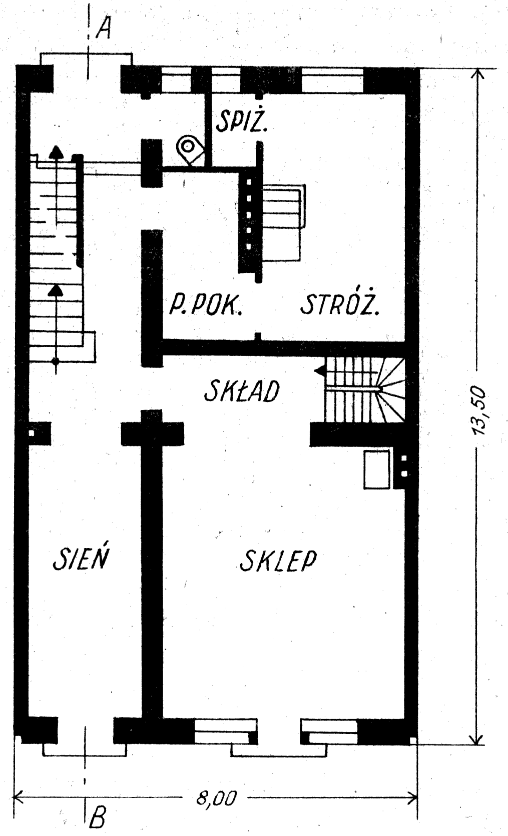
1 : 150

Widok od ulicy.

Rys. 37 *a*.

a nad niemi okrągłe okienko, dalej drzwi wchodowe do sklepu, a obok okna wystawowe, ponadto trzy okna pierwszego piętra, wyżej dach i na brzegach dwa kominy.

Rys. 37 *b* przedstawia plan przyziemia. Przekrój murów płaszczyzną poziomą mniej więcej w połowie wysokości okien wystawowych zaznaczony jest czarno. Przerwy w murach oznaczają drzwi; przerwy połączone trzema



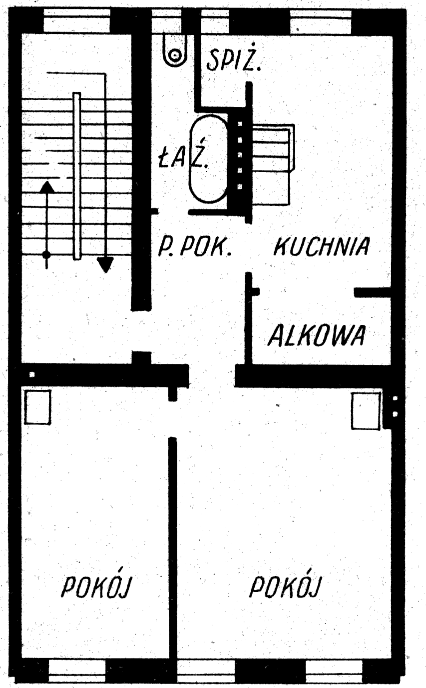
1 : 150

Przyziemie.

Rys. 37 *b*.

równoległemi odcinkami oznaczają okna. Malutkie białe kwadraciki w murze oznaczają otwory kominowe, względnio otwory wentylacyjne. W sklepie i kuchni są piece. Strzałka na schodach podaje zawsze kierunek wejścia na górę. Na planie widzimy część głównych schodów, prowadzących ze sieni na pierwsze piętro, a dalej po przerwie część schodów prowadzących z piwnicy na poziom przyziemia. Zaznaczone są również schody, prowadzące ze składu do piwnicy.

Rys. 37 *c* przedstawia plan pierwszego piętra. Otrzymujemy go przecinając badynek płaszczyzną poziomą



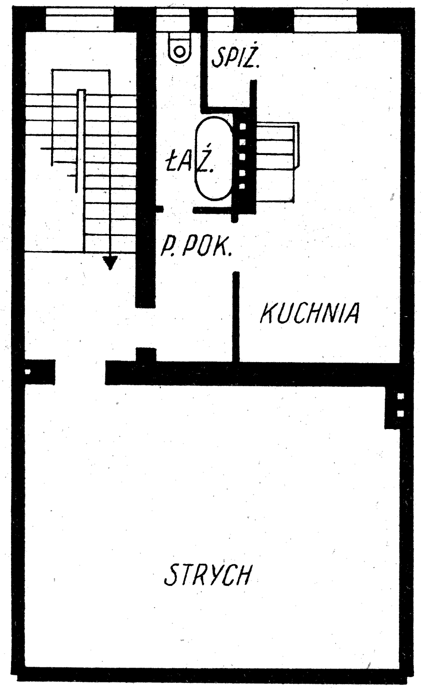
1 : 150

Pierwsze piętro.

Rys. 37 *c*.

w połowie wysokości okien pierwszego piętra i rysując plan tego przekroju. Na pierwszem piętrze znajduje się mieszkanie, złożone z dwóch pokoi i kuchni, przedpokoju, alkowy, łazienki i spiżarki. Nadto są zaznaczone schody, a mianowicie dalsza część schodów prowadzących na pierwsze piętro (dłuższa strzałka) i część schodów z pierwszego piętra na poddasze (krótka strzałka).

Rys. 37 *d* przedstawia plan poddasza. Poddasze składa się ze strychu i z mieszkania, złożonego z kuchni, przedpokoju, łazienki i spiżarki. Nadto widoczne są schody z pierwszego piętra na poddasze.

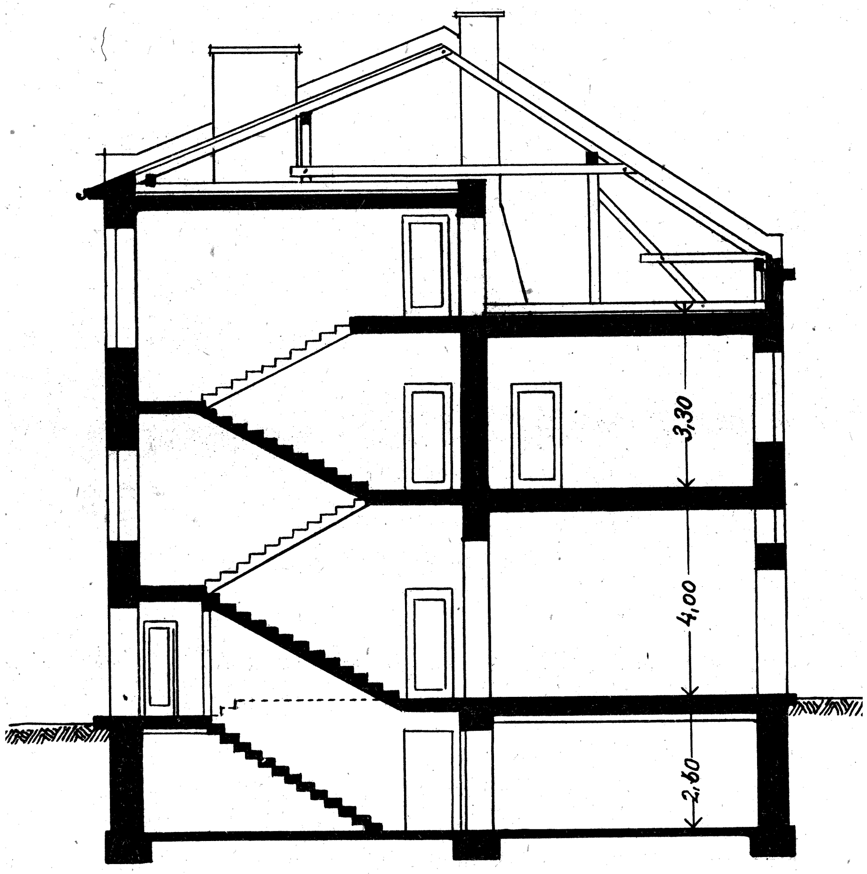


1 : 150

Poddasze.

Rys. 37 *d*.

Rys. 37 *e* przedstawia plan poprzecznego przekroju budynku, poprowadzonego (pionowo) wzdłuż linji *A—B*. Widzimy na nim przekroje ścian pionowych (zaznaczone czarno). Przerwy, połączone trzema odcinkami równoległemi, oznaczają okna; przerwy, połączone dwoma równoległemi odcinkami, oznaczają drzwi.



1 : 150

Przekrój *A—B*.

Rys. 37 *e*.

Części schodów zaznaczone czarno są bliżej nas położone, pozostałe części dalej. Widzimy również przekrój fundamentów, wiązania dachowego i kominów. Poziom terenu jest podcieniowany.

Zadania

1. Odczytaj albo zmierz na planie przyziemia długość i szerokość budynku, grubość wszystkich murów, długość i szerokość wszystkich drzwi i okien, pieca i kuchni!
2. Odczytaj albo zmierz na planie pierwszego piętra długość i szerokość obu pokoi, alkowy, kuchni, przedpokoju i klatki schodowej! Oblicz następnie pole powierzchni podłogi obu pokoi, przedpokoju i kuchni wraz z alkową!
3. Posługując się planem poddasza, oblicz pole powierzchni podłogi kuchni, spiżarki, łazienki i strychu!
4. Odczytaj, albo zmierz na planie przekroju poprzecznego wysokość murów zewnętrznych, wysokość piwnicy, przyziemia, pierwszego piętra i poddasza, wysokość i szerokość drzwi wewnętrznych, wysokość okien i drzwi zewnętrznych, grubość stropów!
5. Posługując się planem przyziemia i przekroju, oblicz objętość: *a)* sklepu i składu, *b)* mieszkania stróża!
6. Posługując się planem pierwszego piętra i przekroju, oblicz objętość mieszkania pierwszego piętra!
7. Oblicz objętość murów zewnętrznych (nie uwzględniając drzwi i okien)!
8. Dla przybliżonego oszacowania domu ważną jest rzeczą obliczenie kubatury domu, to jest objętości pomiędzy posadzką piwnicy, posadzką strychu i zewnętrznemi ścianami wraz z fundamentem. Objętość tę obliczamy jak objętość graniastosłupa, którego podstawa równa

się podstawie domu, wysokość zaś równa się odległości posadzki piwnicy od posadzki strychu. Wartość domu szacuje się w przybliżeniu, przyjmując jako cenę 1 m^3, tak obliczonej kubatury domu, dla drewnianych budynków od 14 *zł* do 18 *zł*, dla murowanych od 20 *zł* do 26 *zł*. Wahania ceny za 1 m^3 w podanych granicach zależą od jakości materjału, urządzeń i t. p.

Przykłady.

a) Dom jednopiętrowy murowany długości 12 *m*, szerokości 8 *m* ma wysokość 9,15 *m* (od posadzki piwnicy do posadzki strychu). Jego kubatura wynosi:

$$(12 \cdot 8 \cdot 9{,}15)\ m^3 = 878{,}4\ m^3.$$

Licząc przeciętnie 1 m^3 po 22 *zł*, otrzymujemy przybliżoną wartość tego domu:
$(878{,}4 \cdot 22)\ zł = 19\,324{,}8\ zł$, t. j. okrągło 19 325 *zł*. Jeśli dom stoi kilka lat, to szacuje się wartość domu w ten sposób, że z powyższej kwoty potrąca się tyle razy po 0,6%, ile lat dom stoi. Np. powyższy dom po 5 latach przedstawia wartość w *zł*:

$$19\,325 - \frac{19\,325 \cdot 0{,}6 \cdot 5}{100} = 18\,745{,}25.$$

b) Dom drewniany z piwnicami długości 10 *m*, szerokości 8 *m*, wysokości 5,75 *m* (od posadzki piwnicy do posadzki strychu) ma kubaturę 460 m^3, a licząc 1 m^3 po 15 *zł* ma wartość szacunkową 6900 *zł*. Wartość domu drewnianego po kilku latach oblicza się w ten sposób, że z powyższej kwoty potrąca się tyle razy po 1%, ile lat dom stoi. A więc np. po 8 latach dom przedstawia wartość:

$$6900\ zł - \frac{6900 \cdot 8}{100}\ zł = 6348\ zł.$$

c) Dom drewniany długości 8 *m*, szerokości 6 *m* nie posiada piwnic. W tym wypadku jako wysokość przyjmuje się odległość dolnego brzegu dachu (okapu) od terenu. Niech ta wysokość wynosi 4,5 *m*. Kubatura domu wynosi zatem: $(8 \cdot 6 \cdot 4{,}5)\ m^3 = 216\ m^3$, wartość zaś szacunkowa, licząc po 14 *zł* za 1 m^3, wynosi 3024 *zł*. Po 6 latach wartość domu będzie:

$$3024\ zł - \frac{3024 \cdot 6}{100}\ zł = 2842{,}56\ zł.$$

9. Oszacuj budynek czynszowy, dany planami 37*a*—37 *e*, odczytując z nich potrzebne wielkości i licząc 1 m^3 po 24 *zł*! Jaka będzie wartość tego budynku po 12 latach, licząc 0,8% ubytku wartości po upływie 1 roku?
10. Oszacuj chatę, daną planami 36*a, b, c*, odczytując z nich względnie mierząc potrzebne wielkości i licząc 1 m^3 po 14 *zł*! Jaka będzie wartość tej chaty po 15 latach, licząc 1% ubytku wartości po upływie 1 roku?
11. Oszacuj budynek szkolny, wykonując potrzebne pomiary, przyczem należy przyjąć za 1 m^3 cenę miejscową i uwzględnić liczbę lat, którą budynek stoi!

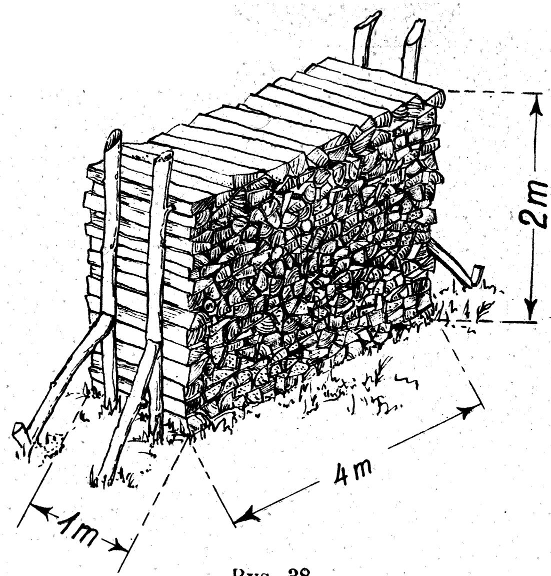
Objętości i ciężary

Prostopadłościan i walec

(Powtórzenie)

1. Ile waży cegła o wymiarach 29 *cm*, 14 *cm*, 6,5 *cm*, jeżeli ciężar właściwy cegły wynosi 1,5 g/cm^3?
2. Ile waży belka dębowa w kształcie prostopadłościanu o wysokości 5 *m*, którego podstawa jest kwadratem o boku 15 *cm*; ciężar właściwy dębu wynosi 0,9 g/cm^3?

3. Ile waży prostopadłościan o wymiarach 0,5 *m*, 0,6 *m*, 1,5 *m*, zrobiony z marmuru, którego ciężar właściwy wynosi 2,85 g/cm^3?
4. Wykopano dół w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 3 *m*, 5 *m*, 1,5 *m*. Ile waży wykopana ziemia, jeżeli jej ciężar właściwy wynosi 1,8 g/cm^3? Jaką zajmuje objętość wykopana ziemia, jeżeli wskutek spulchnienia przybyło 25% pierwotnej objętości?
5. Ile waży arkusz blachy cynkowej o wymiarach 0,8 *m*, 2 *m*, 0,143 *mm*, jeżeli ciężar właściwy blachy wynosi 7,1 g/cm^3?
6. Ile waży belka jodłowa w kształcie walca o wysokości 6 *m* i średnicy 1,5 *dcm*, jeżeli ciężar właściwy jodły wynosi 0,4 g/cm^3?
7. Ile waży drut o długości 1 *m* i średnicy 1 *mm*, jeżeli ciężar właściwy żelaza wynosi 7,5 g/cm^3? Ile *m* tego drutu potrzeba na 1 *kg*?
8. Ile waży wykopana ziemia na studnię w kształcie walca 14,6 *m* głębokości i 1,2 *m* średnicy, jeżeli ciężar właściwy ziemi wynosi 1,8 g/cm^3?
9. Ile waży rurka drenowa o średnicy 6,5 *cm*, grubości 1 *cm*, długości 34 *cm*, jeżeli jej ciężar właściwy wynosi 1,6 g/cm^3?
10. Do pokrycia dachu używa się blachy w arkuszach o wymiarach 1 *m* i 60 *cm*, przyczem 40 arkuszy waży 100 *kg*. Ile waży blacha potrzebna do pokrycia dachu o polu 160 m^2, jeśli 10% dolicza się na zaginanie blachy? Jakie będą koszta tego pokrycia, jeśli 1 *kg* blachy kosztuje 80 *gr*?
11. Stos drzewa ułożony w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 1 *m*, 2 *m*, 4 *m* (rys. 38) nazywa się sągiem. Ile waży sąg drzewa bukowego, jeżeli jego ciężar



Rys. 38.

właściwy wynosi $0{,}66\, g/cm^3$, a wskutek pustych miejsc w stosie trzeba odliczyć 20% całkowitej objętości?

12. Ile waży belka świerkowa w kształcie prostopadłościanu kwadratowego, którego bok podstawy ma 50 *cm*, a wysokość wynosi 7 *m*; ciężar właściwy drzewa świerkowego równa się $0{,}6\, g/cm^3$. Ile kosztuje taka belka, jeżeli $1\, m^3$ kosztuje 30 *zł*?

13. Ilość cegieł potrzebna na $1\, m^3$ pełnego muru wynosi:

$$\frac{1}{(d+c)(s+c)(g+c)}$$

gdzie *d, s, g* są to wymiary cegły w *m*, zaś *c* szerokość spoiny (wapno z piaskiem, które łączy sąsiednie cegły) wyrażona w *m*.

Oblicz w przybliżeniu:

a) ilość cegieł, potrzebnych na $1\, m^3$ pełnego muru, jeśli wymiary cegły są: 29 *cm*, 14 *cm*, 6,5 *cm*, a szerokość spoiny wynosi 0,01 *m*;

b) ilość cegieł, potrzebna na wystawienie ściany 10 *m* szerokiej, 0,55 *m* grubej a 3,5 *m* wysokiej;

c) ciężar powyższej ściany, jeśli ciężar muru wynosi $1{,}6\, g/cm^3$.

14. Objętość w m^3 drzewa ściętego (bez gałęzi i oczyszczonego z kory, czyli tak zwanego kręglaka) można obliczyć wzorem:

$$V = \left(\frac{b}{5}\right)^2 \cdot 2\, l,$$

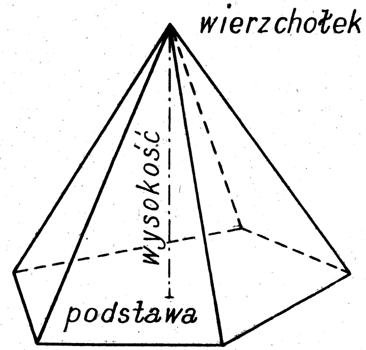
gdzie *b* jest obwodem w *m* poprzecznego przekroju w połowie długości kręglaka, *l* zaś długością kręglaka w *m*. Oblicz ciężar kręglaka, jeżeli:

a) $b = 0{,}63$, $l = 5{,}4$, ciężar właściwy $= 0{,}8\, g/cm^3$;

b) średnica przekroju w połowie $= 0{,}27\, m$, $l = 11{,}2$, ciężar właściwy $= 0{,}65\, g/cm^3$.

Ostrosłup

Rys. 39 przedstawia bryłę zwaną ostrosłupem. Bryła ta ograniczona jest wielokątem i trójkątami o wspólnym wierzchołku. Wielokąt nazywamy **podstawą** ostrosłupa, a wspólny wierzchołek trójkątów **wierzchołkiem** ostrosłupa. Trójkąty, których wierzchołki schodzą się w wierzchołku ostrosłupa, tworzą powierzchnię, zwaną **pobocznicą** ostrosłupa. Boki tych trójkątów, zbiegające się u wierzchołka ostrosłupa, nazywamy **krawędziami bocznemi**, boki zaś podstawy krawędziami **podstawowemi**.



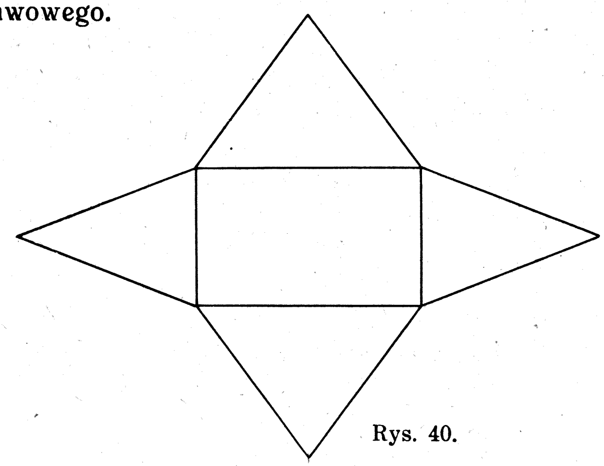
Rys. 39.

Odcinek, poprowadzony

z wierzchołka prostopadle do podstawy (a więc pionowo, jeśli podstawa jest ustawiona poziomo), nazywa się **wysokością** ostrosłupa.

Ostrosłup nazywa się **prosty**, jeżeli wszystkie jego boczne krawędzie są sobie równe.

Można otrzymać model ostrosłupa, wbijając drut pionowo wewnątrz wielokąta ustawionego poziomo i łącząc nitkami wolny koniec drutu z wierzchołkami wielokąta podstawowego.



Rys. 40.

Model ostrosłupa prostego, którego podstawa jest prostokątem, można zbudować w następujący sposób: Rysujemy prostokąt podstawowy, a na jego bokach, jak na podstawach trójkąty równoramienne, których wszystkie ramiona są sobie równe i większe od połowy przekątnej prostokąta (rys. 40). Otrzymujemy w ten sposób tak zwaną **siatkę** ostrosłupa. Zginając wszystkie trójkąty wzdłuż ich podstaw i zlepiając odpowiednie ramiona, otrzymujemy model ostrosłupa prostego.

Jeżeli podstawa ostrosłupa ma p cm^2, wysokość zaś w cm, to na objętość ostrosłupa V, wyrażoną w cm^3, mamy wzór:

$$V = \frac{pw}{3}.$$

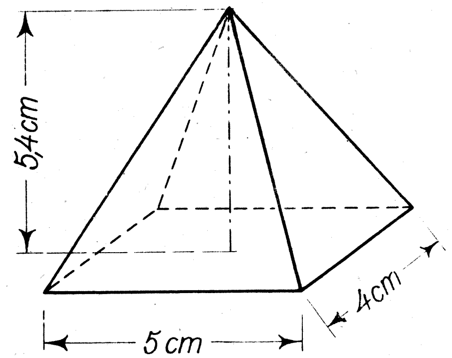
Przykład. Podstawa ostrosłupa jest prostokątem o bokach 2,3 cm i 3 cm, wysokość zaś wynosi 7,5 cm; obliczyć objętość!

Mamy: $p\ cm^2 = 2{,}3 \cdot 3\ cm^2 = 6{,}9\ cm^2$.

Zatem: $V\ cm^3 = \frac{6{,}9 \cdot 7{,}5}{3}\ cm^3 = 17{,}25\ cm^3$.

Zadania

1. Oblicz objętość ostrosłupa o wysokości *a)* 12 cm, *b)* 5,4 dcm, którego podstawa jest trójkątem o polu *a)* 52 cm^2, *b)* 4,6 dcm^2!
2. Oblicz objętość ostrosłupa, którego podstawa jest kwadratem o boku: *a)* 5 cm, *b)* 2,4 dcm, *c)* $2\frac{1}{2}$ m, a którego wysokość wynosi: *a)* 9 cm, *b)* 3,8 dcm, *c)* $1\frac{4}{5}$ m!
3. Oblicz objętość ostrosłupa, którego podstawa jest prostokątem o bokach: *a)* 4 cm i 6 cm, *b)* 5,2 dcm i 3,8 dcm, a którego wysokość wynosi: *a)* 8 cm, *b)* 6,4 dcm!
4. Ile waży ostrosłup o wysokości 0,8 m, którego podstawa jest kwadratem o boku 0,5 m, zrobiony z marmuru? (Ciężar właściwy marmuru wynosi 2,8 g/cm^3).

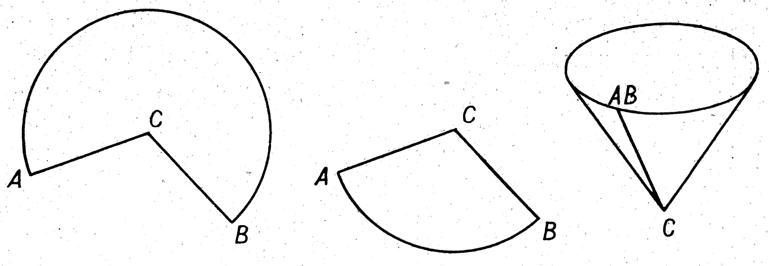


Rys. 41.

5. Oblicz objętość ostrosłupa, odczytując ze szkicu (rys. 41) potrzebne wielkości!

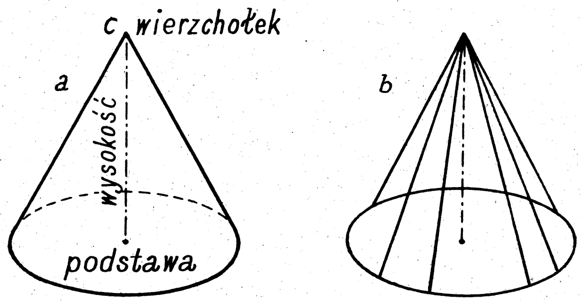
Stożek obrotowy

Wytnijmy koło z papieru, a następnie rozetnijmy je wzdłuż dwóch promieni. Koło rozpadnie się na dwie części (rys. 42). Biorąc którąkolwiek z tych części i zlepiając ze sobą brzegi, oznaczone na rysunku kreskami, otrzymamy powierzchnię kształtu lejka.



Rys. 42.

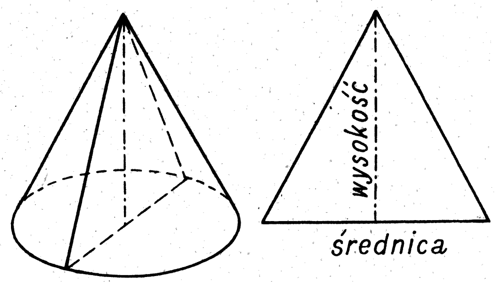
Postawmy otrzymaną powierzchnię na kartce papieru i obrysujmy jej brzeg; otrzymamy koło. Jeżeli koło to wytniemy i dolepimy do powierzchni krzywej, otrzymamy bryłę zwaną *stożkiem obrotowym*. Stożek obrotowy jest więc ograniczony kołem, zwanem *podstawą* i powierzchnią krzywą, zwaną *pobocznicą*. Punkt C nazywa się *wierzchołkiem* stożka (rys. 43 a).



Rys. 43.

Model stożka obrotowego możemy zbudować w następujący sposób: Wycinamy z kartonu koło i ustawiając je poziomo, wbijamy w jego środku drut pionowo. Następnie łączymy dość gęsto nitkami wolny koniec drutu z punktami okręgu koła (rys. 43 b). Odcinek poprowadzony z wierzchołka prostopadle do podstawy (a więc pionowo, jeśli podstawa jest ustawiona poziomo), nazywa się *wysokością* stożka.

Jeżeli stożek obrotowy przetniemy płaszczyzną wzdłuż jego wysokości, otrzymamy jako przekrój (tak zwany *przekrój osiowy*) trójkąt równoramienny (rys. 44).



Rys. 44.

Podstawą tego trójkąta jest średnica koła podstawowego, wysokość zaś jest wysokością stożka. Wszystkie przekroje osiowe stożka obrotowego są sobie równe.

Jeśli promień koła podstawowego wynosi r cm, wysokość stożka w cm, to na objętość V stożka, wyrażoną w cm^3, mamy wzór:

$$V = \pi r^2 \frac{w}{3}.$$

Zauważmy, że πr^2 jest miarą pola podstawy stożka.

Przykład. Obliczyć objętość stożka obrotowego, którego podstawa jest kołem o promieniu 5,16 cm, a którego wysokość wynosi 8,22 *cm*, przyjmując na π wartość przybliżoną 3,14. Mamy:

$r^2 = 5{,}16 \cdot 5{,}16 = 26{,}6256$, albo zaokrąglając 26,6;

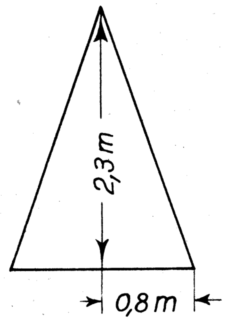
$r^2\pi = 26{,}6 \cdot 3{,}14 = 83{,}524$, albo zaokrąglając 83,5;

$\frac{w}{3} = 2{,}74$, zatem $\pi r^2 \frac{w}{3} = 83{,}5 \cdot 2{,}74 = 228{,}790$.

Objętość danego stożka obrotowego wynosi więc w przybliżeniu 229 cm^3.

Zadania

1. Oblicz objętość stożka obrotowego, którego podstawa wynosi 4,5 cm^2, a wysokość 1,8 *cm*!
2. Oblicz objętość stożka obrotowego, którego promień podstawy wynosi: *a)* 2 *cm*, *b)* 4,5 *dcm*, a wysokość: *a)* $3\frac{1}{2}$ *cm*, *b)* 6,9 *dcm*!
3. Jaki jest ciężar stożka obrotowego z żelaza o wysokości 8,5 *cm*, którego promień podstawy wynosi 3,6 *cm*. (Ciężar właściwy żelaza jest 7,8 g/cm^3).
4. Jaka jest pojemność lejka, którego średnica wynosi 14,5 *cm*, a wysokość 9,3 *cm*?

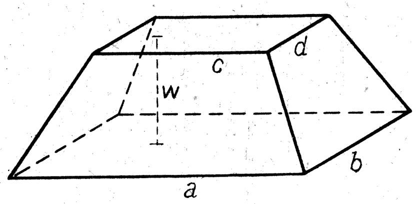


Rys. 45.

5. Oblicz objętość stożka obrotowego, odczytując na jego przekroju osiowym (rys. 45) potrzebne wielkości!

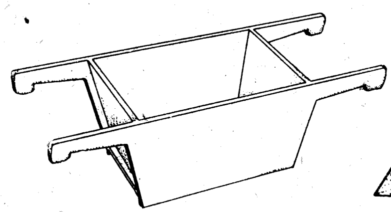
Pryzma

Rys. 46 przedstawia bryłę, zwaną pryzmą. Bryła ta ograniczona jest dwoma prostokątami (zwanemi podstawami), położonemi w płaszczyznach równoległych i ścianami bocznemi, które są trapezami. Wysokością pryzmy

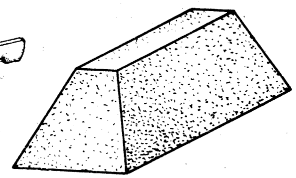


Rys. 46.

nazywamy odległość płaszczyzn równoległych, w których leżą oba prostokąty. Aby otrzymać tę odległość prowadzimy z dowolnego punktu płaszczyzny podstawy górnej prostopadłą do płaszczyzny podstawy dolnej. Długość odcinka między obiema płaszczyznami jest wysokością pryzmy. Kształt pryzmy mają: skrzynie wozów do przewożenia piasku lub wapna, nosiłki (rys. 47), t. j. naczynia, któremi nosi się wapno, lub piasek na budowę, taczki, skrzynie góralskie, niektóre dachy domów. W pryzmy układa się na gościńcach kamień tłuczony do wysypywania dróg lub piasek do budowy. (Rys. 48).



Rys. 47.



Rys. 48.

Jeżeli długości boków równoległych jednego trapezu wynoszą a cm i c cm, sąsiedniego zaś b cm i d cm, a wysokość wynosi w cm (rys. 46) to na objętość V, wyrażoną w cm^3 mamy wzór:

$$V = \frac{w}{6}[ab + cd + (a+c)(b+d)].$$

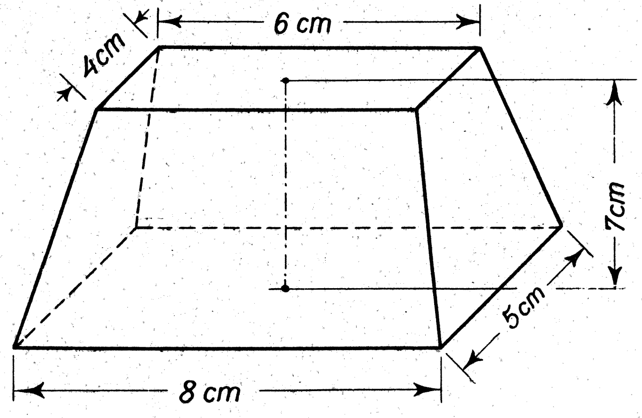
Zwróćmy uwagę, że ab jest miarą pola dolnego prostokąta, cd zaś górnego.

Przykład. Boki równoległe przedniej ściany taczki wynoszą 50 cm i 35 cm, ściany bocznej 70 cm i 45 cm, wysokość zaś taczki wynosi 30 cm; jaka jest jej pojemność? Mamy:

$$ab = 50 \cdot 70 = 3500$$
$$cd = 35 \cdot 45 = 1575$$
$$(a+c)(b+d) = 85 \cdot 115 = 9775, \text{ więc}$$
$$V\,cm^3 = 5 \cdot 14\,850\ cm^3 = 74\,250\ cm^3, \text{ czyli okrągło } 0{,}074\ m^3.$$

Zadania

1. Wóz w kształcie pryzmy ma następujące wymiary: boki równoległe przedniej ściany wynoszą 0,4 m i 0,6 m, bocznej 2 m i 2,4 m, wysokość zaś 0,5 m. Wóz ten napełniono zaprawą wapienną, której ciężar właściwy wynosi 1,8 g/cm^3. Ile kg waży ta zaprawa?
2. Ile waży zaprawa wapienna w nosiłkach o wymiarach: boki równoległe przedniej ściany wynoszą 50 cm i 40 cm, bocznej 70 cm i 55 cm, wysokość zaś 35 cm?
3. Kamień tłuczony ułożono w kształcie pryzmy, którego wymiary są: boki równoległe jednej ściany wynoszą 0,4 m i 1,8 m, sąsiedniej 1,4 m i 2,8 m, wysokość zaś 0,6 m; oblicz ciężar tego kamienia, wiedząc, że jego ciężar właściwy wynosi 2,5 g/cm^3!
4. Taczki w kształcie pryzmy mają wymiary: boki równoległe przedniej ściany wynoszą 42 cm i 30 cm, bocznej 60 cm i 45 cm, wysokość zaś 28 cm. Temi taczkami wywożono piasek, ułożony w kształcie pryzmy, której dolna podstawa jest kwadratem o boku 2 m, górna jest kwadratem o boku 0,6 m, wysokość pryzmy wynosi 0,4 m. Ile było taczek tego piasku?
5. Wykopano dół w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 2 m, 3 m, $1^1/_2$ m. Wskutek spulchnienia objętość ziemi wykopanej wzrosła o 25%. Ziemię tę wywożono furami w kształcie pryzmy o wymiarach: boki równoległe przedniej ściany wynoszą 0,5 m i 0,7 m, bocznej 1,9 m i 2,1 m, wysokość zaś 0,45 m. Ile takich fur ziemi wywieziono?

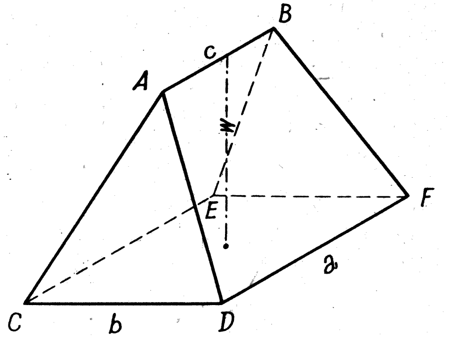


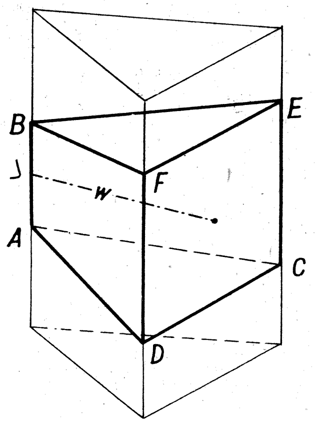
Rys. 49.

6. Oblicz objętość pryzmy, odczytując ze szkicu (rys. 49) potrzebne wielkości!

Klin

Rys. 50 przedstawia bryłę, którą nazywamy klinem. Klin ograniczony jest pięcioma ścianami. Jedna z nich, zwana podstawą, jest prostokątem. Dwie są trójkątami, dwie zaś trapezami. Ściany, które są trapezami, schodzą się wzdłuż krawędzi AB równoległej do dwóch boków podstawy (CE i DF).





Rys. 50.

Klin możemy wyciąć z graniastosłupa prostego trójkątnego. Zaznaczamy w tym celu na jednej krawędzi bocznej (rys. 50) dowolny odcinek AB, a na przeciwległej ścianie graniastosłupa prostokąt $CDEF$ również dowolny, tak jednak, aby jedna para boków leżała na krawędziach graniastosłupa. Odcinając kawałki graniastosłupa wzdłuż ścian FEB i CDA otrzymamy klin. Wysokością klina nazywamy odległość odcinka AB od podstawy $CDEF$. Aby otrzymać wysokość prowadzimy z dowolnego punktu odcinka AB prostopadłą do podstawy. Długość tej prostopadłej jest wysokością klina. Kształt klina mają: przyrząd do wbijania zwany klinem, topór, niektóre dachy domów.

Jeżeli w klinie (patrz rys. 50) długość odcinka AB wynosi c *cm*, wymiary zaś boków prostokąta są a *cm* i b *cm* (przyczem bok o długości a *cm* jest równoległy do odcinka AB) i jeśli wysokość wynosi w *cm*, to na objętość V w cm^3 mamy wzór:

$$V = \tfrac{1}{6} b\, w\, (2a + c).$$

P r z y k ł a d. Obliczyć objętość klina (patrz rys. 50), w którym

$AB = 2$ *cm*, $DF = 5$ *cm*, $CD = 4$ *cm*, $w = 3$ *cm*.

Mamy: $V = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3\, (2 \cdot 5 + 2) = 24$.

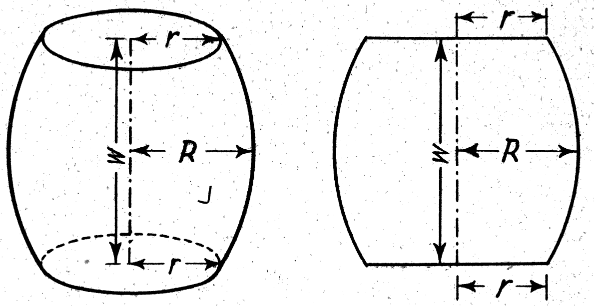
Zatem objętość danego klina wynosi 24 cm^3.

Zadania

1. Oblicz objętość klina (patrz rys. 50), w którym $AB = 8$ *cm*, $DF = 6$ *cm*, $CD = 4$ *cm* i $w = 5$ *cm*!
2. Oblicz ciężar toporu stalowego w kształcie klina, w którym ostrze ma długość 12 *cm*, grzbiet jest kwadratem o boku 3,5 *cm*, a wysokość klina wynosi 18 *cm*; ciężar właściwy stali równa się 7,6 g/cm^3!
3. Kamień tłuczony ułożono w kształcie klina, którego wymiary są (patrz rys. 50): $AB = 1$ *m*, $DF = 12{,}4$ *m*, $CD = 1{,}4$ *m*, a wysokość równa się 0,6 *m*. Oblicz ciężar tego kamienia, jeżeli jego ciężar właściwy wynosi 2,6 g/cm^3!
4. Jaka jest objętość strychu, mającego kształt klina o wymiarach (patrz rys. 50): $AB = 7$ *m*, $DF = 12$ *m*, $CD = 8$ *m*, $w = 3{,}8$ *m*?

Beczka

Rys. 51 przedstawia beczkę. Beczka ograniczona jest dwoma równemi kołami (dna beczki) położonemi w płaszczyznach równoległych i powierzchnią krzywą. Odcinek, łączący środki obu kół (den) nazywa się wysokością beczki. Poprowadźmy płaszczyznę przez prostą, łącząc środki obu den. Otrzymamy tak zwany przekrój osiowy (rys. 51).



Rys. 51.

Na tym przekroju zaznaczone są: *w* wysokość beczki, *r* promień wspólny obu den, *R* promień przekroju (równoległego do den), poprowadzonego przez środek wysokości beczki.

Jeżeli wymiary powyższych wielkości są *w cm*, *r cm*, *R cm*, to na objętość beczki, wyrażoną w cm^3 mamy wzór:

$$V = \tfrac{4}{15}\pi w\,[2R^2 + Rr + \tfrac{3}{4}r^2].$$

P r z y k ł a d. Obliczyć objętość beczki, której promień dna wynosi 26 *cm*, promień przekroju poprowadzonego przez środek 32 *cm*, a wysokość 90 *cm*! Mamy:

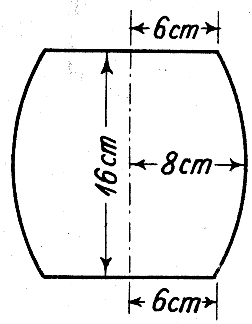
$$V = \tfrac{4}{15}\pi\cdot 90\,[2\cdot 32^2 + 32\cdot 26 + \tfrac{3}{4}\cdot 26^2] = 255\,000.$$

Zatem objętość beczki wynosi 255 000 cm^3, albo 255 *l*.

Zadania

1. Oblicz objętość beczki, której promień dna wynosi 45 *cm*, promień przekroju poprowadzonego przez środek wysokości 70 *cm*, a wysokość 1,4 *m*!

2. Beczka, której średnica dna wynosi 25 *cm*, średnica przekroju poprowadzonego przez środek wysokości 35 *cm*, a wysokość 60 *cm* jest napełniona oliwą; ile waży ta oliwa; ciężar właściwy wynosi 0,92 g/cm^3.
3. Kupiono beczkę nafty. Średnica dna tej beczki wynosi 60 *cm*, średnica przekroju, poprowadzonego w połowie wysokości 72 *cm*, wysokość zaś 1 *m*. Ile zapłacono za naftę, jeśli 1 *l* nafty kosztuje 85 gr?

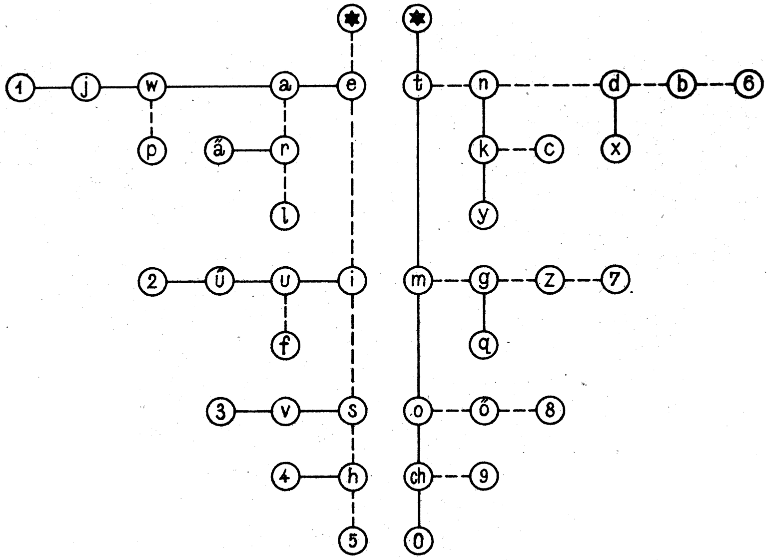


Rys. 52.

4. Oblicz objętość beczki, odczytując na przekroju osiowym (rys. 52) odpowiednie wielkości!

Dodatek

1. Na rys. 53 podany jest alfabet Morsego. Punktem wyjścia jest zawsze jeden z dwu punktów, oznaczonych gwiazdką. Odcinek pełny między dwoma kolejnemi kółkami liczymy za kreskę, przerywany zaś za kropkę. Np. chcąc odczytać · · — — — idziemy lewą gałęzią i dochodzimy do kółka, w którem jest 2. Zatem · · — — — oznacza 2.



Rys. 53.

a) Odczytaj:

— — · — — · — — — · — — — · — — — · — · —
· — · — — — — · —
· — — — — — — — — · · · · — — · · — — —

b) Napisz znakami Morsego:

1) swój rok urodzenia, 2) zdanie: Matematyka jes[t] królową nauk.

2. Ponumeruj litery alfabetu polskiego (a ą b c [ć] d e ę f g h i j k l m n o ó p r s [ś] t u w y z ź ż), poczynając od litery a, tak że „a“ otrzymuje numer 10, „ą“ numer 11, „b“ nu[-]mer 12 i t. d. W ten sposób każda litera może by[ć] zastąpiona liczbą. Jest to tak zwany „szyfr“. Kluc[z] do tego szyfru podany jest w tabelce:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	a	ą	b	c	ć	d	e	ę	f	g
2	h	i	j	k	l	m	n	o	ó	p
3	r	s	ś	t	u	w	y	z	ź	ż

a) Wytłumacz, jak ten klucz jest urządzony!

b) Odczytaj:

24 34 12 21 17 26 10 34 23 17
25 10 33 16 25 10 33 36 23 21.

c) Napisz w powyższy sposób:

„Jestem uczniem siódmej klasy szkoły powszechnej“.

3. Na globusie narysowany jest równik i wszystki[e] równoleżniki (co 1^0); ile jest wszystkich kół?

4. Zegar potrzebuje 6 sekund na wybicie 6 uderzeń; il[e] potrzebuje czasu na wybicie 12 uderzeń?

5. Przy pomocy dwójek napisz: 7, 23, 28!

6. Napisz 100 zapomocą: *a)* 4 dziewiątek, *b)* 6 dziewiątek, *c)* 5 jedynek, *d)* 5 trójek, *e)* 5 piątek!
7. Jaka liczba podzielona przez swoją piątą część daje na wynik 5?
8.

1	1+b+c+d	1+a+b	1+a+c+d
1+a+b+c	1+a+d	1+c	1+b+d
1+c+d	1+b	1+a+b+c+d	1+a
1+a+b+d	1+a+c	1+d	1+b+c

Podstaw w miejsce liter a, b, c, d, dowolne liczby całkowite, a otrzymasz t. zw. kwadrat magiczny, w którym suma liczb każdej kolumny, wiersza lub przekątnej będzie ta sama. Przyjmij np. $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 8$.

9. Ziemia opasana jest sznurem wzdłuż równika i podobnie pomarańcza. Przedłużamy każdy z tych sznurów o 1 *m* i odpowiednio formujemy z nich koła współśrodkowe do kół równikowych. Które z tych kół bardziej odstaje, czy koło opasujące pomarańczę, czy też opasujące ziemię?
10. Są 3 naczynia o pojemności 8 *l*, 5 *l* i 3 *l*; naczynie największe jest pełne wody. W jaki sposób można, posługując się tylko temi trzema naczyniami, przelać wodę tak, aby w dwóch naczyniach było po 4 *l* wody?
11. Na papierze kratkowanym zaznacz 4 wierzchołki kwadratu. Naprzemian z kolegą łącz odcinkami sąsiednie punkty kratki. Jest to tak zwana gra „w szewca". Niech grę zaczyna twój kolega. Ty za każdym razem rysuj odcinek symetrycznie położony ze względu na środek kwadratu. Jeśli kwadrat ma nieparzystą liczbę kratek, to tym sposobem grę wygrasz, jeśli zaś liczba kratek jest parzysta, to uzyskasz remis.

Odpowiedzi

3. 179.
4. Więcej niż 12 sekund, bo przy 6 uderzeniach jest 5 przerw, a przy 12 uderzeniach 11 przerw.
5. $7 = 2^2 + 2 + \frac{2}{2}$, $23 = 22 + \frac{2}{2}$, $28 = 2 + 2 + 2 + 22$.
6. $100 = 99 + \frac{9}{9} = 99 + \frac{99}{99} = 111 - 11 = 3 \cdot 33 + \frac{3}{3} = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$, albo $(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$.
7. Każda z wyjątkiem zera.
9. Oba koła jednakowo odstają, gdyż w obu wypadkach promień wzrósł o $\frac{1}{2\pi}$ *m*.
10. Z początku największe naczynie było pełne wody, średnie i najmniejsze puste, co zapisujemy: 8, 0, 0. Następnie przelano z największego naczynia do średniego 5 *l* wody, co zapisujemy: 3, 5, 0. W jaki sposób dalej należy wodę przelewać, podają następujące trójki liczb: 3, 2, 3; 6, 2, 0; 6, 0, 2; 1, 5, 2; 1, 4, 3; 4, 4, 0 albo 8, 0, 0; 5, 0, 3; 5, 3, 0; 2, 3, 3; 2, 5, 1; 7, 0, 1; 7, 1, 0; 4, 1, 3; 4, 4, 0.

SPIS RZECZY.

Działania liczbami całkowitemi i ułamkowemi.

Stosunek. Przedstawienia graficzne.

Znakowania literowe.

Wielkości proporcjonalne.

Procenty.

Kalkulacja i kosztorysy.

Wiadomości o oszczędnościach i kredycie.

Podatki i ubezpieczenia.

Plany parcel i budynków.

Objętości i ciężary.

Dodatek.