ROZDZIAŁ I

TEORIA ZBIORÓW

§ 1. Algebra zbiorów.

1. Działania na zbiorach. Niech A i B będą dwoma zbiorami. Oznaczamy przez $A+B$ *sumę* tych zbiorów, czyli zbiór złożony z elementów, które należą bądź do A, bądź do B; przez $A \cdot B$ oznaczamy *iloczyn* A i B, t. j. zbiór złożony z elementów, które należą zarówno do A jak do B; wreszcie przez $A-B$ *różnicę* zbiorów A i B, t. j. zbiór elementów, należących do A, lecz nie należących do B.

Jeżeli np. A oznacza przedział $1<x<3$, zaś B przedział $2<x<4$, to $A+B$, $A \cdot B$ i $A-B$ oznaczają odpowiednio przedziały: $1<x<4$, $2<x<3$ i $1<x\leqslant 2$.

Piszemy „$x \varepsilon A$“ dla oznaczenia, że x *jest elementem* zbioru A. Wyrażenie „$A \subset B$“ oznacza, że każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, t. j., że warunek $x \varepsilon A$ pociąga za sobą warunek $x \varepsilon B$; mówimy wtedy, że A *jest podzbiorem* zbioru B, lub że zbiór A jest *zawarty* w zbiorze B, a także, że A jest *częścią* zbioru B.

Oczywiście, jeżeli $A \subset B$ i $B \subset A$, to $A=B$, co oznacza, że zbiór A jest *identyczny* ze zbiorem B [1]).

Symbolem 0 oznaczamy zbiór *pusty*, t. j. nie zawierający żadnego elementu.

Wprowadzenie zbioru pustego jest potrzebne, aby mnożenie i odejmowanie były zawsze wykonalne; mianowicie, jeżeli zbiory A i B są *rozłączne*, t. zn. nie mają żadnego wspólnego elementu, wówczas piszemy $A \cdot B=0$, podobnie, jeżeli $A \subset B$, to $A-B=0$.

---

[1]) W szczególności więc „część“ (w znaczeniu „podzbiór“) może być identyczna z „całością“.

Czytelnik łatwo sprawdzi wzory następujące:

(1.1) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,\quad A+A=A=A\cdot A,\quad A-B=A-A\cdot B,$

(1.2) $$A\cdot B\subset A+B.$$

W zastosowaniach Teorii mnogości wszystkie rozpatrywane zbiory stanowią zazwyczaj podzbiory pewnego stałego zbioru, zwanego *przestrzenią*. Tak np. w wielu działach Analizy rolę przestrzeni gra zbiór wszystkich liczb rzeczywistych lub (np. w Teorii funkcyj analitycznych) zbiór wszystkich liczb zespolonych, przestrzeń trójwymiarowa euklidesowa i t. d.

Oznaczmy przestrzeń symbolem 1, zaś różnicę $1-A$, t. zw. *uzupełnienie* zbioru A, symbolem $-A$.

Zbiór $-A$ składa się więc ze wszystkich elementów (rozważanej przestrzeni), które do A nie należą. Widać natychmiast, że:

$$-(-A)=A,\quad A\cdot(-A)=0,\quad A+(-A)=1,\quad A\cdot(-B)=A-B$$

i że $A\subset B$ jest równoznaczne z $-B\subset -A$.

Zachodzą wzory de Morgana:

(1.3) $$-(A+B)=(-A)\cdot(-B),\quad -(A\cdot B)=(-A)+(-B).$$

Udowodnimy pierwszy z nich (dowód drugiego jest analogiczny). Niech $x\epsilon[-(A+B)]$. Znaczy to, że x nie należy do $A+B$, t. j. że x nie należy ani do A, ani do B, czyli że x należy do uzupełnienia A i do uzupełnienia B. Ostatnie zdanie zapisuje się symbolicznie $x\epsilon[(-A)\cdot(-B)]$. Udowodniliśmy w ten sposób, że x należy do $-(A+B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy do $(-A)\cdot(-B)$. A zatem $-(A+B)=(-A)\cdot(-B)$.

Zbiory zbiorów, t. j. takie zbiory, których elementy same są zbiorami, nazywamy także *rodzinami* zbiorów; podobnie zbiory zbiorów zbiorów nazywamy *klasami* rodzin.

Elementy (o których nie zakłada się wyraźnie, że są zbiorami) oznaczamy zwykle literami małymi, zbiory dużymi, rodziny grubymi i t. d.

W dalszym ciągu tego paragrafu zakładać będziemy, że wszystkie rozważane zbiory są podzbiorami pewnej przestrzeni (nie pustej).

2. Działania nieskończone. Ze względu na prawa łączności dodawania i mnożenia, t. j. na wzory $A+(B+C)=(A+B)+C$ oraz $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$, działania te zdefiniowane są dla dowolnej skończonej ilości składników $A_1+\ldots+A_n$ lub czynników $A_1\cdot\ldots\cdot A_n$.

Można jednak definicję dodawania i mnożenia rozciągnąć na sumy i iloczyny nieskończone: mianowicie do zbioru $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ zaliczamy element x, gdy x należy do jakiegoś A_n, zaś x zaliczamy do zbioru $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$, gdy x należy do każdego A_n.

Jeszcze ogólniej określamy *sumę* $\sum_t A_t$, gdy wskaźnik t przebiega jakiś dany (zresztą dowolny) zbiór T; mianowicie, $\sum_t A_t$ jest to zbiór tych x-ów, które należą do jakiegoś A_t; zaś *iloczyn* $\prod_t A_t$ jest to zbiór tych x-ów, które należą do każdego A_t (czyli *część wspólna* wszystkich A_t).

W szczególności, gdy T jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych $(1,2,3,\ldots)$, otrzymujemy rozpatrywane przed chwilą sumy i iloczyny $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$.

Niech np. A_t oznacza okrąg koła $x^2+y^2=t^2$, zaś wskaźnik t („parametr") niech przebiega przedział $0<t<1$. Wówczas $\sum_t A_t$ oznacza tarczę koła o środku 0 i o promieniu 1, z której usunięto środek i obwód.

Podobnie, jak dla działań skończonych, można wyprowadzić szereg wzorów rachunkowych dla sum i iloczynów nieskończonych. Np.

$$(2.1) \qquad \prod_t A_t \subset A_{t_0} \subset \sum_t A_t \quad \textit{dla każdego wskaźnika } t_0;$$

spełnione są też uogólnione wzory de Morgana:

$$(2.2) \qquad -(\sum_t A_t) = \prod_t (-A_t), \qquad -(\prod_t A_t) = \sum_t (-A_t).$$

3. Znakowanie logiczne. Niech α i β będą dwoma zdaniami. Pisać będziemy $\alpha+\beta$ zamiast „α lub β", $\alpha\cdot\beta$ zamiast „α i β" wreszcie „$-\alpha$" dla oznaczenia zaprzeczenia zdania α.

Jeżeli np. α oznacza zdanie „2 jest liczbą naturalną", to $-\alpha$ oznacza zdanie (w danym wypadku fałszywe) „2 nie jest liczbą naturalną".

Każde zdanie posiada jedną z dwóch *wartości* 1 lub 0, w zależności od tego, czy jest prawdziwe, czy fałszywe.

Dwa zdania α i β, mające tę samą wartość, nazywamy *równoważnymi*; równoważność tę wyrażamy, pisząc $\alpha\equiv\beta$.

Z podanych definicyj wynikają natychmiast równoważności następujące, które spełnione są przez każdą parę zbiorów A i B i każdy element x:

$$(3.1) \qquad \begin{gathered} [(x \epsilon A)+(x \epsilon B)] \equiv [x \epsilon (A+B)], \\ [(x \epsilon A)\cdot(x \epsilon B)] \equiv [x \epsilon A\cdot B], \\ -(x \epsilon A) \equiv [x \epsilon (-A)]; \end{gathered}$$

t. j.: zdanie „x należy do A lub x należy do B“ równoważne jest zdaniu „x należy do $A+B$“; zdanie „x należy do A i x należy do B“ równoważne jest zdaniu „x należy do $A\cdot B$“; zdanie „x nie należy do A“ równoważne jest zdaniu „x należy do $-A$“.

Po lewej stronie tych równoważności działania $+$, $\cdot$ oraz $-$ mają sens logiczny, po prawej matematyczny; użycie tych samych symbolów w tak różnych na pozór znaczeniach uwydatnia dwoistość, zachodzącą między t. zw. Algebrą logiki a Algebrą zbiorów.

Twierdzeniom o zbiorach odpowiadają twierdzenia o zdaniach (t. zw. prawa logiczne); wymienimy ich kilka:

$-(-\alpha)\equiv\alpha$ (prawo podwójnego przeczenia),

$\alpha\cdot(-\alpha)\equiv 0$ (zasada sprzeczności: zdanie i jego zaprzeczenie nie mogą być równocześnie prawdziwe),

$\alpha+(-\alpha)\equiv 1$ (zasada wyłączonego środka: albo dane zdanie, albo jego zaprzeczenie jest prawdziwe),

$\alpha\cdot(\beta+\gamma)\equiv\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$,

$-(\alpha+\beta)\equiv(-\alpha)\cdot(-\beta)$,

$-(\alpha\cdot\beta)\equiv(-\alpha)+(-\beta)$ i t. d.

Odpowiednikiem stosunku zawierania się między zbiorami ($A\subset B$) jest w Logice stosunek *wynikania* między zdaniami: piszemy $\alpha\rightarrow\beta$, dla oznaczenia, że zdanie α pociąga za sobą zdanie β, czyli że ze zdania α wynika zdanie β.

Zachodzą równoważności:

$$[(x \epsilon A)\rightarrow(x \epsilon B)]\equiv[A\subset B], \qquad (\alpha\rightarrow\beta)\equiv(-\alpha+\beta)\equiv[(-\beta)\rightarrow(-\alpha)],$$

t. j. zdanie „$x \epsilon A$ pociąga $x \epsilon B$“ (czyli „jeżeli $x \epsilon A$, to $x \epsilon B$“) równoważne jest zdaniu „zbiór A zawiera się w B“; „α pociąga β“ równoważne jest każdemu ze zdań: „zaprzeczenie α jest prawdziwe lub β jest prawdziwe“, „zaprzeczenie β pociąga zaprzeczenie α“.

Niech $\varphi(x)$ będzie *funkcją zdaniową zmiennej* x (przebiegającej daną przestrzeń); jest to wyrażenie, które staje się zdaniem, gdy na miejsce zmiennej x podstawimy dowolną jej wartość.

Np. wyrażenie „$x>0$" jest funkcją zdaniową (nie jest ono zdaniem, lecz staje się zdaniem — prawdziwym lub fałszywym — gdy x zastąpimy np. przez 2, —1).

Funkcja zdaniowa wyraża więc pewien warunek, który jest spełniony przez niektóre (lub wszystkie lub żadne) elementy rozważanej przestrzeni, a przez inne nie. Np. warunkiem, wyrażonym przez funkcję zdaniową z poprzedniego przykładu, jest, aby x było liczbą dodatnią.

Zbiór elementów, które spełniają funkcję zdaniową φ (t. j. spełniają warunek przez nią wyrażony), oznaczamy symbolem $\underset{x}{E}\varphi(x)$.

Np. $\underset{x}{E}(x>0)$ jest zbiorem wszystkich liczb dodatnich, $\underset{x}{E}(x^2-3x+2=0)$ składa się z pierwiastków tego równania t. j. z dwu elementów: 1 oraz 2 (przestrzenią w przykładach powyższych jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych).

A zatem, na to, aby element x_0 należał do zbioru $\underset{x}{E}\varphi(x)$, potrzeba i wystarcza, aby zdanie $\varphi(x_0)$ było prawdziwe; krótko możemy to wyrazić w postaci równoważności

$$[x_0 \epsilon \underset{x}{E}\varphi(x)] \equiv \varphi(x_0). \tag{3.2}$$

Na podstawie tej równoważności z łatwością dowodzi się następujących wzorów (o rozdzielności operacji E względem działań $+, \cdot$ oraz $-$):

$$\underset{x}{E}[\varphi(x)+\psi(x)]=\underset{x}{E}\varphi(x)+\underset{x}{E}\psi(x), \quad \underset{x}{E}[\varphi(x)\cdot\psi(x)]=\underset{x}{E}\varphi(x)\cdot\underset{x}{E}\psi(x), \tag{3.3}$$

$$\underset{x}{E}[-\varphi(x)]=-[\underset{x}{E}\varphi(x)]. \tag{3.4}$$

Oto np. dowód pierwszego z tych wzorów:

$$x_0 \epsilon \underset{x}{E}[\varphi(x)+\psi(x)] \equiv [\varphi(x_0)+\psi(x_0)] \equiv [x_0 \epsilon \underset{x}{E}\varphi(x)]+[x_0 \epsilon \underset{x}{E}\psi(x)] \equiv$$
$$\equiv x_0 \epsilon [\underset{x}{E}\varphi(x)+\underset{x}{E}\psi(x)],$$

na podstawie (3.1).

Odpowiednikiem działań nieskończonych na zbiorach są dwa następujące działania na funkcjach zdaniowych:

„$\sum_x \varphi(x)$“ oznacza, że jakieś x_0 spełnia funkcję zdaniową φ;

„$\prod_x \varphi(x)$“ oznacza, że każde x spełnia funkcję zdaniową φ.

Użyte w tym znaczeniu $\sum$ i $\prod$ noszą nazwę *kwantorów* logicznych.

Np. $\prod_x (x+1>x)$, $\sum_x (x^2=x)$.

W myśl definicji dodawania i mnożenia (nieskończonego) zbiorów, mamy przy każdym a równoważności:

(3.5) $$\sum_t (a \in A_t) \equiv (a \in \sum_t A_t), \qquad \prod_t (a \in A_t) \equiv (a \in \prod_t A_t),$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, znaki $\sum$ i $\prod$ mają po lewej stronie równoważności sens logiczny, a po prawej matematyczny.

W szczególności, gdy zakresem zmiennej x jest zbiór liczb naturalnych, piszemy zamiast $\sum_n \varphi(n)$ i $\prod_n \varphi(n)$ zazwyczaj $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$ i $\prod_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$, lub $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ i $\prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n$. Mamy więc wzory:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a \in A_n) \equiv (a \in \sum_{n=1}^{\infty} A_n) \quad \text{i} \quad \prod_{n=1}^{\infty} (a \in A_n) \equiv (a \in \prod_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Dodajmy, że twierdzeniom o działaniach nieskończonych z Teorii mnogości odpowiadają twierdzenia o kwantorach w Logice; wymienimy tu następujące:

$$\textit{Dla każdego } x_0 \textit{ jest } \prod_x \varphi(x) \to \varphi(x_0) \to \sum_x \varphi(x);$$

$$[-\sum_x \varphi(x)] \equiv \prod_x [-\varphi(x)]$$

(t.j. zdania: „nieprawdą jest, że istnieje x spełniające warunek φ“ i „żadne x nie spełnia warunku φ“ są równoważne);

$$[-\prod_x \varphi(x)] \equiv \sum_x [-\varphi(x)];$$

$$[\sum_x \varphi(x) + \sum_x \psi(x)] \equiv \sum_x [\varphi(x) + \psi(x)];$$

$$\sum_x [\varphi(x) \cdot \psi(x)] \to \sum_x \varphi(x) \cdot \sum_x \psi(x).$$

4. Produkt zbiorów. Funkcje zdaniowe wielu zmiennych. *Produktem* zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par (a,b), gdzie $a\epsilon A$ i $b\epsilon B$. Zbiór ten oznaczamy symbolem $A\times B$.

Występujące tu pary traktujemy jako *pary uporządkowane*, t. j. odróżniamy (a,b) od (b,a), chyba, że $a=b$.

Analogicznie przez $A\times B\times C$ oznaczamy zbiór *trójek uporządkowanych* elementów (a,b,c), gdzie $a\epsilon A$, $b\epsilon B$ i $c\epsilon C$; podobnie określamy produkt dowolnej skończonej ilości zbiorów.

PRZYKŁADY. 1. Niech $A=B=$zbiór wszystkich liczb rzeczywistych; wówczas produkt $A\times B$ jest zbiorem wszystkich liczb zespolonych („płaszczyzną" liczb zespolonych); w tym przypadku piszemy $a+bi$ zamiast (a,b).

2. Niech $A=B=C=$odcinek $0\leqslant x\leqslant 1$; produkt $A\times B\times C$, który możnaby też oznaczyć jako A^3, jest sześcianem; produkt A^2 jest kwadratem.

3. Niech $A=$tarcza koła, $B=$odcinek; $A\times B$ jest walcem.

Niech $Z=X\times Y$. Elementy z zbioru Z są to więc pary (x,y). Funkcja zdaniowa $\varphi(z)$ jest to funkcja zdaniowa d w ó c h zmiennych x i y; zamiast $\varphi(z)$ piszemy też $\varphi(x,y)$. Np. funkcja (zdaniowa lub o wartościach rzeczywistych) zmiennej zespolonej $z=x+iy$ jest tym samym, co funkcja dwóch zmiennych (rzeczywistych) x oraz y.

Zamiast pisać $\underset{z}{E}\varphi(z)$ piszemy też $\underset{xy}{E}\varphi(x,y)$.

Jeżeli $X=Y=$zbiór liczb rzeczywistych, to $\underset{xy}{E}\varphi(x,y)$ oznacza pewien podzbiór płaszczyzny, mianowicie, zbiór tych punktów (x,y), które spełniają funkcję (zdaniową) φ, t. j. dla których $\varphi(x,y)$ jest zdaniem prawdziwym (p. str. 8).

Np. $\underset{xy}{E}(x^2+y^2=1)$ jest to okrąg o promieniu 1 zakreślony z punktu 0, $\underset{xy}{E}(x<y)$ jest to półpłaszczyzna położona nad prostą $x=y$, $\underset{xy}{E}(0<x<1)$ jest to część płaszczyzny leżąca między osią Y a prostą $x=1$.

Niech dana będzie funkcja zdaniowa $\varphi(x,y)$ dwóch zmiennych; wyrażenie $\sum\limits_{y}\varphi(x,y)$ jest funkcją zdaniową jednej zmiennej x. Zrozumiałe jest więc wyrażenie $\sum\limits_{x}\sum\limits_{y}\varphi(x,y)$; podobnie:

$$\prod_{x}\prod_{y}\varphi(x,y),\qquad \prod_{x}\sum_{y}\varphi(x,y),\qquad \prod_{x}\sum_{y}\prod_{z}\varphi(x,y,z)\qquad \text{i t. p.}$$

Widać natychmiast, że

$$\sum_{x}\sum_{y}\varphi(x,y)=\sum_{y}\sum_{x}\varphi(x,y)\qquad \text{i}\qquad \prod_{x}\prod_{y}\varphi(x,y)=\prod_{y}\prod_{x}\varphi(x,y).$$

Zachodzi dalej wynikanie $\sum_x \prod_y \varphi(x,y) \to \prod_y \sum_x \varphi(x,y)$. Niech bowiem istnieje taka wartość x_0, że $\prod_y \varphi(x_0,y)$, t. j. że dla każdego y zachodzi $\varphi(x_0,y)$; wówczas dla każdego y istnieje takie x, że $\varphi(x,y)$; takim x jest mianowicie x_0.

Wynikanie odwrotne, t. j. $\prod_y \sum_x \varphi(x,y) \to \sum_x \prod_y \varphi(x,y)$, nie zachodzi. Niech np. $\varphi(x,y)$ oznacza stosunek $x>y$; zdanie $\prod_y \sum_x x>y$ jest oczywiście prawdziwe, orzeka ono bowiem, że do każdej liczby rzeczywistej y istnieje liczba od niej większa; natomiast zdanie $\sum_x \prod_y x>y$ jest fałszywe, bo nie istnieje liczba rzeczywista większa od wszystkich liczb rzeczywistych.

Jak widać z powyższego, porządek kwantorów gra rolę bardzo istotną. Zilustrujemy to jeszcze na paru przykładach:

1. Niech $f(x)$ będzie funkcją (o wartościach rzeczywistych) zmiennej x i niech $0<x<1$. Założenie, że funkcja f jest *ograniczona* (dla danego zakresu zmienności x), wyraża się w znakowaniu logicznym jak następuje:

$$\sum_y \prod_x [|f(x)|<y].$$

W tym przykładzie przestrzenią X jest przedział $0<x<1$, przestrzenią Y jest zbiór liczb rzeczywistych.

2. Niech dana będzie, jak poprzednio, funkcja $f(x)$. *Ciągłość* tej funkcji w punkcie x_0 (w sformułowaniu Cauchy'ego) oznacza, że do każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie $\delta>0$, że warunek $|h|<\delta$ pociąga za sobą nierówność $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$. A zatem w symbolice logicznej warunek na ciągłość funkcji f w punkcie x_0 daje się zapisać jak następuje:

$$\prod_\varepsilon \sum_\delta \prod_h \{[|h|<\delta] \to [|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon]\},$$

gdzie zakresem (przestrzenią) zmiennych ε i δ jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, zaś zakresem zmienności h zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

Warunek ciągłości funkcji f we wszystkich punktach rozważanego zakresu (w danym wypadku we wszystkich punktach przedziału $0<x<1$) wyraża się więc w taki sposób:

$$\prod_x \prod_\varepsilon \sum_\delta \prod_h \{[|h|<\delta] \to [|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon]\},$$

lub, zmieniając porządek kwantorów $\prod_x$ i $\prod_\varepsilon$ (co, jak wiadomo, zawsze jest dozwolone):

$$\prod_\varepsilon \prod_x \sum_\delta \prod_h \{[|h|<\delta] \to [|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon]\}.$$

Zmieniając zaś w ostatnim wzorze porządek kwantorów $\prod_x$ i $\sum_\delta$, otrzymujemy już warunek inny (mocniejszy), mianowicie, warunek na ciągłość *jednostajną:*

$$\prod_\varepsilon \sum_\delta \prod_x \prod_h \{[|h|<\delta] \to [|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon]\}.$$

Jak wiadomo, różnica między ciągłością zwykłą a jednostajną polega na tym, że w pierwszym wypadku liczba δ jest zależna od ε i od x, zaś w drugim tylko od ε. Znajduje to w znakowaniu logicznym swój wyraz w tym, że w pierwszym wypadku kwantor $\prod_x$ poprzedza $\sum_\delta$, zaś w drugim kwantor $\sum_\delta$ poprzedza $\prod_x$.

Widzimy więc, że przejście od ciągłości zwykłej do ciągłości jednostajnej polega jedynie na zmianie porządku kwantorów $\Pi\Sigma$ na $\Sigma\Pi$ (przypomnimy tu, że funkcja ciągła w każdym punkcie przedziału $0<x<1$ może w nim nie być jednostajnie ciągła, jak świadczy przykład funkcji $f(x)=1/x$). Analogicznie rzecz się przedstawia dla zbieżności jednostajnej ciągu funkcyj, zbieżności jednostajnej całek niewłaściwych itp.

3. Niech dany będzie ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots$ Warunek na to, aby $g=\lim_{n=\infty} a_n$, daje się w myśl definicji *granicy* zapisać jak następuje:

$$\prod_\varepsilon \sum_m \prod_n |a_{m+n}-g|<\varepsilon,$$

gdzie zakresem zmienności ε jest, jak poprzednio, zbiór liczb dodatnich, zaś zakresem zmienności m i n zbiór liczb naturalnych.

Wynika więc stąd, że warunkiem na to, aby dany ciąg funkcyj $f_1(x), f_2(x), \ldots$ był zbieżny do funkcji $g(x)$ dla każdego x (rozważanego zakresu) jest, aby

$$\prod_x \prod_\varepsilon \sum_m \prod_n |f_{m+n}(x)-g(x)|<\varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad \prod_\varepsilon \prod_x \sum_m \prod_n |f_{m+n}(x)-g(x)|<\varepsilon.$$

Zmieniając w ostatnim wyrażeniu kolejność kwantorów $\prod_x$ i $\sum_m$, otrzymujemy warunek na *zbieżność jednostajną* ciągu funkcyj $f_1, f_2, \ldots$

Uogólnimy obecnie wzory (3.3) na działania $\sum$ i $\prod$:

$$(4.1) \qquad \mathop{E}_x \sum_y \varphi(x,y) = \sum_y \mathop{E}_x \varphi(x,y), \qquad \mathop{E}_x \prod_y \varphi(x,y) = \prod_y \mathop{E}_x \varphi(x,y).$$

Udowodnimy pierwszy z tych wzorów. Niech $x_0 \in \mathop{E}_x \sum_y \varphi(x,y)$. Znaczy to, na podstawie (3.2), że $\sum_y \varphi(x_0,y)$. Na mocy tegoż wzoru, zachodzi równoważność $\varphi(x_0,y) \equiv x_0 \in \mathop{E}_x \varphi(x,y)$. A zatem:

$$\sum_y \varphi(x_0,y) \equiv \sum_y [x_0 \in \mathop{E}_x \varphi(x,y)] \equiv x_0 \in \sum_y \mathop{E}_x \varphi(x,y)$$

na mocy wzoru (3.5), w którym t zastępujemy przez y i bierzemy

$$A_y = \mathop{E}_x \varphi(x,y).$$

Zastosujemy wzory (4.1) do następującego przykładu:

Warunek Cauchy'ego na zbieżność ciągu $a_1, a_2, \ldots$ orzeka, że do każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki wskaźnik m, że dla każdego n jest $|a_{m+n} - a_m| \leqslant \varepsilon$. Jak wiadomo, zakres zmiennej ε można ograniczyć do odwrotności liczb naturalnych; warunek ten przybiera wtedy postać następującą: dla każdego k (naturalnego) istnieje takie m, że dla każdego n jest $|a_{m+n} - a_m| \leqslant 1/k$. W znakowaniu logicznym warunek ten zapisuje się jak następuje:

$$\prod_k \sum_m \prod_n |a_{m+n} - a_m| \leqslant 1/k,$$

gdzie k, m i n przebiegają zbiór liczb naturalnych.

A więc dla ciągu funkcyj $f_1(x), f_2(x), \ldots$ warunkiem na to, aby punkt x_0 był punktem zbieżności tego ciągu (t. j. żeby ciąg liczb $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots$ był zbieżny), jest żeby

$$\prod_k \sum_m \prod_n \{|f_{n+m}(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant 1/k\}.$$

Oznaczając przez Z zbiór punktów zbieżności ciągu funkcyj $f_1, f_2, \ldots$, mamy zatem:

$$Z = \underset{x}{E} \prod_k \sum_m \prod_n \{|f_{n+m}(x) - f_m(x)| \leqslant 1/k\}.$$

Stosując trzykrotnie wzory (4.1), otrzymujemy stąd:

$$Z = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E} \{|f_{n+m}(x) - f_m(x)| \leqslant 1/k\}. \tag{4.2}$$

Wzór ten pozwala sprowadzić badanie własności zbioru Z do badania własności zbioru $A_{k,m,n} = \underset{x}{E}\{|f_{n+m}(x) - f_m(x)| \leqslant 1/k$. Zastosowania stąd płynące znajdziemy w dalszych Rozdziałach.

5. Interpretacja geometryczna kwantora Σ. Niech X i Y oznaczają zbiór liczb rzeczywistych. Wówczas:

(5.1) *Zbiór* $\underset{x}{E} \sum_y \varphi(x,y)$ *jest rzutem zbioru* $\underset{xy}{E}\varphi(x,y)$ *na oś x-ów* [1]).

Istotnie, warunkiem na to, aby punkt x należał do rzutu zbioru płaskiego P, jest aby istniało takie y, że punkt o współrzędnych x i y należy do P. A zatem x należy do rzutu zbioru $\underset{xy}{E}\varphi(x,y)$ dokładnie wtedy, gdy $\sum_y \left[(x,y) \in \underset{xy}{E}\varphi(x,y)\right]$, t. j. (na podstawie (3.2)), gdy $\sum_y \varphi(x,y)$, a więc gdy $x \in \underset{x}{E}\sum_y \varphi(x,y)$.

---

[1]) Twierdzenie to pozostaje prawdziwe, gdy X i Y oznaczają dowolne zbiory. Należy wówczas rozumieć przez *rzut punktu* (x,y) *na oś* X punkt x.

Zastosowania powyższego twierdzenia opierają się w znacznym stopniu na tym, że *rzutowanie jest operacją ciągłą*.

Zilustrować to rozumowanie można na przykładzie następującym. Napiszmy w znakowaniu logicznym, że warunkiem na to, aby liczba x była nieujemna jest, aby była postaci $x=y^2$:

$$(x\geqslant 0)\equiv\sum_y(x=y^2),\quad \text{skąd}\quad \underset{x}{E}(x\geqslant 0)=\underset{x}{E}\sum_y(x=y^2),$$

a więc na mocy twierdzenia (5.1) zbiór $\underset{x}{E}(x\geqslant 0)$ jest rzutem na oś x-ów paraboli $\underset{xy}{E}(x=y^2)$.

Częstokroć stosowane w Analizie określanie krzywych (lub powierzchni) w postaci parametrycznej może być geometrycznie interpretowane jako określanie danej krzywej (płaskiej) w postaci rzutu pewnej innej krzywej (przestrzennej). Istotnie, krzywa, dana w postaci parametrycznej $x=\varphi(z)$, $y=\psi(z)$, gdzie z jest parametrem, jest to zbiór $\underset{xy}{E}\sum_z[x=\varphi(z)]\cdot[y=\psi(z)]$, a więc — na mocy twierdzenia (5.1) — jest to rzut krzywej $\underset{xyz}{E}[x=\varphi(z)]\cdot[y=\psi(z)]$, położonej w przestrzeni trójwymiarowej.

Np. określając okrąg koła w postaci parametrycznej: $x=a\sin z$, $y=a\cos z$ (z parametr), definiujemy okrąg jako rzut krzywej śrubowej.

§ 2. Odwzorowania zbiorów, pojęcie ciągu, produkt nieskończony zbiorów.

1. Odwzorowanie (funkcja). Niech będą dane dwa zbiory A i B. Jeżeli każdemu elementowi $a\epsilon A$ przyporządkowany jest dokładnie jeden element $b\epsilon B$, wówczas powiadamy, że mamy *odwzorowanie* (jednoznaczne) zbioru A na zbiór B. Odwzorowania takie oznaczamy przez f, φ, ψ i t. p. Jeżeli odwzorowanie f przyporządkowuje elementowi $a\epsilon A$ element $b\epsilon B$, wówczas b oznaczamy przez $f(a)$ i piszemy $b=f(a)$, nazywając b *obrazem* elementu a, zaś element $a=f^{-1}(b)$ *przeciwobrazem* elementu b. Piszemy:

$$f^{-1}(Y)=\underset{x}{E}[f(x)\epsilon Y].$$

Jeżeli $A'\subset A$, wówczas zbiór wszystkich obrazów elementów $a\epsilon A'$ nazywamy *obrazem zbioru* A' i oznaczamy przez $f(A')$. Jeżeli każdy element $b\epsilon B$ przyporządkowany jest jakiemuś elementowi zbioru A (czyli jeżeli $f(A)=B$), wówczas odwzorowanie nazywamy odwzorowaniem zbioru A *na cały* zbiór B. Jeżeli różnym elementom zbioru A są przyporządkowane różne elementy zbioru B, wówczas odwzorowanie nazywamy *wzajemnie jednoznacznym*.

Odwzorowanie zbioru A na zbiór B nazywamy także *funkcją*, określoną w zbiorze A, której wartości należą do B.

W szczególności, gdy A i B są zbiorami liczb rzeczywistych, jest to funkcja zmiennej rzeczywistej, przyjmująca wartości rzeczywiste.

2. Ciąg. Jeżeli liczbom naturalnym (od 1 do n lub wszystkim) przyporządkowane są elementy jakiegoś zbioru A, wówczas odwzorowanie to nazywamy *ciągiem* elementów zbioru A.

Ciąg jest więc funkcją zmiennej naturalnej, a jego elementy — wartościami tej funkcji.

Ciąg nazywamy *skończonym* o n wyrazach, lub *nieskończonym*, zależnie od tego, czy elementy zbioru A przyporządkowane są tylko liczbom naturalnym od 1 do n, czy też wszystkim liczbom naturalnym.

Jeżeli a_i jest elementem przyporządkowanym liczbie i, wówczas oznaczamy ciąg skończony przez $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ lub $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$, zaś ciąg nieskończony przez $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ lub $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots}$.

Ciągi skończone $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, t. j. ciągi o dwóch trzech, czterech i t. d. wyrazach, nazywamy parami, trójkami, czwórkami i t. d. *uporządkowanymi*.

Np. produkty $A \times A$, $A \times A \times A$ i t. d. (potęgi zbioru A) są zbiorami wszystkich ciągów o dwóch, trzech i t. d. wyrazach będących elementami zbioru A (por. str. 10).

3. Produkt nieskończony. *Produktem nieskończonym zbiorów* czyli produktem nieskończonego ciągu zbiorów $\{A_n\}$, nazywamy zbiór wszystkich ciągów nieskończonych $\{a_i\}$, gdzie $a_i \in A_i$ dla $i=1,2,\ldots$

W szczególności, jeżeli wszystkie zbiory A_i są identyczne ze zbiorem A, wówczas produkt zbiorów A_i jest zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych, których wyrazy należą do A. Jeżeli np. A jest zbiorem liczb rzeczywistych, to produkt zbiorów A_i jest zbiorem wszystkich ciągów liczbowych. Jeżeli A_i jest przedziałem $-1 \leqslant x \leqslant 1$, to produkt zbiorów A_i jest zbiorem wszystkich ciągów liczbowych $\{x_i\}$ spełniających warunek $|x_i| \leqslant 1$ dla $i=1,2,\ldots$

§ 3. Moce zbiorów.

1. Równość mocy. Dwa zbiory A i B nazywamy zbiorami *równej mocy*, co wyrażamy wzorem

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}},$$

jeżeli istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru A na cały zbiór B. Z powyższego określenia wynika łatwo, że:

(1.1) *Jeżeli* $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ *i* $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$, *to* $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$.

PRZYKŁADY. 1. Dwa zbiory (skończone), mające tę samą liczbę elementów, są równej mocy. Np. zbiór [2, 5, 8], t. j. złożony z trzech liczb 2, 5, 8, jest równej mocy ze zbiorem liter $[a,b,c]$. Możemy bowiem utworzyć następujące przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne f:

$$2=f(a), \qquad 5=f(b), \qquad 8=f(c),$$

t. zn. że literze a przyporządkowaliśmy liczbę 2 i t. d.

2. Zbiór liczb naturalnych nieparzystych jest równej mocy ze zbiorem liczb naturalnych parzystych, jak to widać z odwzorowania wzajemnie jednoznacznego:

$$1=f(2), \qquad 3=f(4), \qquad \ldots, \qquad n=f(n+1), \qquad \ldots$$

Przy tym odwzorowaniu liczbie nieparzystej n odpowiada więc liczba parzysta $n+1$.

3. *Zbiór wszystkich liczb naturalnych jest równej mocy ze zbiorem liczb naturalnych parzystych.*

Możemy bowiem utworzyć przyporządkowanie:

$$1=\varphi(2), \qquad 2=\varphi(4), \qquad 3=\varphi(6), \qquad \ldots, \qquad n=\varphi(2n), \qquad \ldots,$$

które jest wzajemnie jednoznaczne, bo przy tym przyporządkowaniu każdej liczbie naturalnej n odpowiada dokładnie jedna liczba parzysta, mianowicie $2n$, i na odwrót, każda liczba parzysta k przyporządkowana jest dokładnie jednej liczbie naturalnej, mianowicie liczbie $k/2$.

4. Zbiór liczb przedziału $0\leqslant x\leqslant 1$ jest równej mocy ze zbiorem liczb przedziału $0\leqslant y\leqslant 2$. Funkcja bowiem $y=\varphi(x)=2x$ przyporządkowuje każdej liczbie x przedziału $0\leqslant x\leqslant 1$ liczbę y przedziału $0\leqslant y\leqslant 2$, przy czym każda liczba y przedziału $0\leqslant y\leqslant 2$ przyporządkowana jest tylko jednej liczbie przedziału $0\leqslant x\leqslant 1$, mianowicie liczbie $x=y/2$.

5. Zbiór liczb przedziału $0<x<1$ jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych y. Odpowiednie przyporządkowanie $y=\psi(x)$ stanowi funkcja $y=\operatorname{tg}\pi(x-\frac{1}{2})$.

6. *Zbiór liczb naturalnych* n i e *jest równej mocy ze zbiorem liczb rzeczywistych x przedziału* $0<x<1$.

Dowód. Przypuśćmy, że twierdzenie jest fałszywe, czyli że każdej liczbie naturalnej n można przyporządkować liczbę rzeczywistą, którą oznaczamy przez x_n $(0<x_n<1)$, tak by każda liczba rzeczywista x $(0<x<1)$ była przyporządkowana jako x_n jakiejś liczbie naturalnej n. Napiszmy liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ w postaci ułamków dziesiętnych nieskończonych. Dostaniemy więc:

$$
\begin{array}{ll}
 & x_1 = 0,\ a_1^{(1)}\ a_2^{(1)}\ a_3^{(1)} \ldots \\
 & x_2 = 0,\ a_1^{(2)}\ a_2^{(2)}\ a_3^{(2)} \ldots \\
(1) & x_3 = 0,\ a_1^{(3)}\ a_2^{(3)}\ a_3^{(3)} \ldots \\
 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
 & x_n = 0,\ a_1^{(n)}\ a_2^{(n)}\ a_3^{(n)} \ldots
\end{array}
$$

gdzie $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}, \ldots$ są cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby x_n. Oznaczamy przez a_1 dowolną cyfrę różną od $a_1^{(1)}$, 9 i 0, przez a_2 cyfrę różną od $a_2^{(2)}$, 9 i 0, ogólnie przez a^n cyfrę różną od $a_n^{(n)}$, 9 i 0. Weźmy pod uwagę liczbę x, której rozwinięcie dziesiętne ma postać

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots \tag{2}$$

Ponieważ cyfry a_n są różne od 9 i 0, więc $0 < x < 1$. Zatem x jest według założenia jedną z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Jak wiadomo, liczba dodatnia ma tylko jedno rozwinięcie dziesiętne nieskończone. Ponieważ rozwinięcie dziesiętne (2) liczby x jest rozwinięciem nieskończonym, gdyż wszystkie cyfry a_n są różne od zera, zatem $x \neq x_1$, bo $a_1 \neq a_1^{(1)}$; podobnie $x \neq x_2$, bo $a_2 \neq a_2^{(2)}$, i ogólnie $x \neq x_n$, bo $a_n \neq a_n^{(n)}$. A więc liczby x nie ma wśród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Doszliśmy zatem do sprzeczności.

Uwaga. Metoda, przy pomocy której utworzyliśmy liczbę x, nazywa się *przekątniową*.

Nazwa pochodzi stąd, że liczbę x otrzymaliśmy, obierając po kolei cyfry różne od cyfr $a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(n)}, \ldots$, stojących na przekątni w (1).

2. Moc produktu. Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Oznaczmy dla każdego $\alpha \epsilon A$ przez K_α zbiór wszystkich par uporządkowanych (α, b), gdzie $b \epsilon B$, zaś dla każdego $\beta \epsilon B$ przez K_β zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, β), gdzie $a \epsilon A$. Mamy oczywiście:

$$A \times B = \sum_{\alpha \epsilon A} K_\alpha = \sum_{\beta \epsilon B} K_\beta, \tag{2.1}$$

$$\overline{\overline{K_\alpha}} = \overline{\overline{B}}, \qquad \overline{\overline{K_\beta}} = \overline{\overline{A}}. \tag{2.2}$$

Uwaga. Wzory (2.1) i (2.2) orzekają, że produkt można przedstawić jako sumę rodziny zbiorów rozłącznych równej mocy, przy czym rodzina ma moc jednego czynnika, zaś zbiory są równej mocy z drugim czynnikiem produktu.

Łatwo zauważyć, że

$$\overline{\overline{A\times B}}=\overline{\overline{B\times A}}. \tag{2.3}$$

Każdej bowiem parze uporządkowanej (a,b), gdzie $a\in A$ i $b\in B$, możemy przyporządkować parę (b,a); przyporządkowanie to jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym produktu $A\times B$ na produkt $B\times A$.

Podobnie można udowodnić, że jeżeli ciągi zbiorów $\{A_i\}$ i $\{B_i\}$ różnią się tylko porządkiem, to produkty zbiorów tych ciągów

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_i\times\ldots \quad \text{i} \quad B_1\times B_2\times\ldots\times B_i\times\ldots$$

są równej mocy.

Dla mocy produktu zbiorów zachodzi (podobnie jak dla mnożenia) prawo łączności:

$$\overline{\overline{A\times B\times C}}=\overline{\overline{(A\times B)\times C}}. \tag{2.4}$$

Produkt bowiem $A\times B\times C$ jest zbiorem trójek uporządkowanych (a,b,c), gdzie $a\in A$, $b\in B$ i $c\in C$. Produkt zaś $(A\times B)\times C$ jest zbiorem par uporządkowanych $((a,b),c)$. Przyporządkowując trójce (a,b,c) parę $((a,b),c)$, otrzymujemy odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne produktu $A\times B\times C$ na cały produkt $(A\times B)\times C$.

3. O porównywaniu mocy zbiorów. Jeżeli zbiór A jest równej mocy z częścią zbioru B, zaś B nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru A, wówczas powiadamy, że zbiór A jest *mocy niższej* niż B, lub że B jest *mocy wyższej* niż A, co zapisujemy:

$$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}} \quad \text{lub} \quad \overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}.$$

Z określenia wynika łatwo, że:

(3.1) *Jeżeli* $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ *i* $\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{C}}$, *wówczas* $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{C}}$;

(3.2) *Jeżeli* $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ *i* $\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{C}}$, *wówczas* $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{C}}$.

PRZYKŁADY. 1. Zbiór liczb $(1,2,3)$ jest mocy niższej niż zbiór liter (a,b,c,d).

2. Zbiór liczb naturalnych mniejszych od jakiejś liczby a (np. od $a=10$) jest mocy niższej niż zbiór wszystkich liczb naturalnych.

3. *Zbiór liczb naturalnych jest mocy niższej niż zbiór wszystkich liczb rzeczywistych* (por. str. 16).

Wystarczy dowieść, że zbiór liczb naturalnych jest mocy niższej niż zbiór liczb rzeczywistych przedziału $0<x<1$, to zaś wynika z twierdzenia udowodnionego na str. 16 (ob. przykład 6) i z uwagi, że zbiór liczb naturalnych jest równej mocy ze zbiorem liczb $1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^n, \dots$ (przy czym oczywiście $0<1/2^n<1$).

Twierdzenia (3.1) i (3.2) nie obejmują przypadku, w którym A jest równej mocy z częścią zbioru B, zaś B jest równej mocy z częścią zbioru A. Sprawę tę rozstrzyga następujące

(3.3) ***Twierdzenie Bernsteina.*** *Jeżeli zbiór A jest równej mocy z częścią zbioru B, zaś zbiór B równej mocy z częścią zbioru A, wówczas zbiory A i B są równej mocy.*

Dowód. Niech $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B'}}$, gdzie $B'\subset B$, oraz $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A'}}$, gdzie $A'\subset A$. Oznaczmy przez $\varphi(a)$ dla $a\in A$ oraz przez $\psi(b)$ dla $b\in B$ odwzorowania wzajemnie jednoznaczne zbioru A na cały zbiór B' oraz zbioru B na cały zbiór A'. Niech:

(1) $$A_1=A-\psi(B), \qquad B_1=\varphi(A_1),$$
$$A_2=\psi(B_1), \qquad B_2=\varphi(A_2) \qquad \text{i t. d.}$$

Zatem:

(2) $$B_n=\varphi(A_n) \quad \text{i} \quad A_{n+1}=\psi(B_n) \quad \text{dla} \quad n=1,2,3,\dots$$

Niech dalej:

(3) $$G=\sum_{n=1}^{\infty}A_n, \qquad H=\sum_{n=1}^{\infty}B_n.$$

Przyporządkujmy każdemu elementowi $a\in A$ element $f(a)\in B$ w następujący sposób:

(4) $$f(a)=\begin{cases}\varphi(a), & \text{jeżeli } a\in G\\ \psi^{-1}(a), & \text{jeżeli } a\in A-G\end{cases}$$ [1]).

Dla każdego $a\in A-G$ istnieje $\psi^{-1}(a)$, gdyż na mocy (1) i (3) jest $A-G\subset\psi(B)$.

Okażemy teraz, że $f(A)=B$. Na mocy (3) i (2) mamy $\varphi(G)=H$, więc z (4) dostajemy

(5) $$f(G)=H.$$

---

1) $\psi^{-1}(a)$ oznacza *przeciwobraz* elementu a (ob. str. 14).

Z (2) i (3) mamy $\psi(H)=A_2+A_3+\ldots+A_n+\ldots$, więc

(6) $$G=A_1+\psi(H).$$

Ponieważ $\psi(B)=A-A_1$ na mocy (1), zatem:

$$\psi(B-H)=\psi(B)-\psi(H)=A-A_1-\psi(H)=A-\big(A_1+\psi(H)\big),$$

skąd $\psi(B-H)=A-G$ na mocy (6). Zatem $B-H=\psi^{-1}(A-G)$, więc na mocy (4)

(7) $$f(A-G)=B-H.$$

Z (5) i (7) wynika, że

(8) $$f(A)=B.$$

A więc odwzorowanie f odwzorowuje zbiór A na cały zbiór B.

Okażemy teraz, że odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne. Jeżeli bowiem $a, a' \in G$ lub $a, a' \in A-G$, to $f(a) \neq f(a')$ na mocy (4), gdyż odwzorowania φ i ψ są wzajemnie jednoznaczne. Jeżeli zaś $a \in G$, lecz $a' \in A-G$, to $f(a) \in H$ na mocy (5), zaś $f(a') \in B-H$ na mocy (7), więc $f(a) \neq f(a')$.

A więc f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym zbioru A na cały zbiór B, c. b. d. d.

(3.4) ***Wniosek.*** *Jeżeli $C \subset A$ i $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{A}}$, wówczas dla każdego zbioru B takiego, że $C \subset B \subset A$, mamy $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}}$.*

Dowód. Wynika to odrazu z twierdzenia Bernsteina, gdyż A jest równej mocy z częścią B (mianowicie z C), zaś B jest równej mocy z częścią A (mianowicie z B).

PRZYKŁAD. Przyjmijmy za A zbiór liczb rzeczywistych, a za C przedział $0<x<1$; z przykładu 5, str. 16, wiemy, że $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{C}}$. Jeżeli B jest przedziałem $0 \leqslant x \leqslant 1$, wówczas $C \subset B \subset A$, skąd na mocy (3.4) $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}}$. A więc:

(3.5) *Przedziały $0 \leqslant x \leqslant 1$ i $0<x<1$ są równej mocy.*

Jeżeli zbiór A jest mocy *niższej lub równej* niż zbiór B, to piszemy

$$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \quad \text{albo} \quad \overline{\overline{B}} \geqslant \overline{\overline{A}}.$$

Łatwo widzieć, że:

(3.6) *Jeżeli $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ i $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{C}}$, wówczas $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{C}}$.*

Z twierdzenia Bernsteina wynika, że:

(3.7) *Jeżeli A jest równej mocy z częścią zbioru B, to $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$.*

Bo albo B jest równej mocy z jakąś częścią A, a wtedy $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, albo B nie jest równej mocy z żadną częścią zbioru A, a wtedy $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

(3.8) *Jeżeli istnieje odwzorowanie (niekoniecznie wzajemnie jednoznaczne) części zbioru B na cały zbiór A, wówczas $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$.*

Jeżeli bowiem każdemu elementowi $a \in A$ przyporządkujemy jeden z jego przeciwobrazów, wówczas otrzymamy odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru A na część zbioru B, więc $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$.

(3.9) *Jeżeli rodziny zbiorów $\{A_t\}$ i $\{B_t\}$, gdzie wskaźnik t przebiega jakiś zbiór T* (por. str. 6), *spełniają warunek $\overline{\overline{A_t}} \leqslant \overline{\overline{B_t}}$ dla każdego $t \in T$, przy czym zbiory B_t są rozłączne, wówczas suma zbiorów A_t jest mocy nie wyższej niż suma zbiorów B_t.*

Jeżeli bowiem dla każdego $t \in T$ odwzorujemy wzajemnie jednoznacznie zbiór A_t na część zbioru B_t, wówczas otrzymamy odwzorowanie części sumy zbiorów B_t na całą sumę zbiorów A_t.

W szczególności wzór $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ zachodzi zawsze, gdy A jest częścią B, ponieważ wtedy A jest równej mocy z częścią zbioru B (t.j. z A).

Z twierdzenia Bernsteina wynika ponad to, że:

(3.10) *Jeżeli $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ i $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, to $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.*

(3.11) ***Twierdzenie Cantora.*** *Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru jest zawsze mocy wyższej niż sam zbiór.*

Dowód. Niech P oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów pewnego zbioru A. Każdemu elementowi $a \in A$ przyporządkujmy zbiór, zawierający tylko ten jeden element, mianowicie zbiór (a). Zatem A jest równej mocy z częścią rodziny P, co dowodzi, że $\overline{\overline{P}} \geqslant \overline{\overline{A}}$. Pozostaje do udowodnienia, że równość mocy nie zachodzi.

Przypuśćmy, że A i P są równej mocy. Istnieje zatem odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru A na całą rodzinę P. Oznaczmy przez $F(a)$ podzbiór zbioru A odpowiadający przy tym odwzorowaniu elementowi $a \in A$. Niech W oznacza zbiór tych elementów zbioru A, które spełniają warunek $a \in F(A)$, t. j. same należą do przyporządkowanych im podzbiorów. Zatem:

(1) $\quad a \in F(a)$ dla $a \in W, \qquad a \operatorname{non} \in F(a)$ dla $a \in A - W$.

Niech b będzie tym elementem zbioru A, któremu jest przyporządkowany zbiór $A-W$. Więc

(2) $$F(b)=A-W.$$

Gdyby $b \in W$, wówczas na mocy (1) mielibyśmy $b \in F(b)$, czyli zgodnie z (2) $b \in A-W$, co jest niemożliwe wobec $b \in W$. Gdyby, $b \in A-W$, to na mocy (1) byłoby b *non* $\in F(b)$ czyli b non $\in A-W$, wbrew założeniu. Doszliśmy zatem do sprzeczności, więc P i A nie są równej mocy, c. b. d. d.

Wnioski. Z tw. (3.11) wynika, że *nie ma zbioru o mocy najwyższej*.

Dla każdego bowiem zbioru A możemy utworzyć zbiór mocy wyższej od A; zbiorem tym jest zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A.

Niech E_1 będzie dowolnym zbiorem. Oznaczmy przez E_2 zbiór wszystkich podzbiorów zbioru E_1, przez E_3 zbiór wszystkich podzbiorów zbioru E_2 i t. d. Otrzymamy w ten sposób ciąg $\{E_n\}$ zbiorów o mocach coraz to wyższych. Suma wszystkich tych zbiorów, t. j. zbiór $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, jest oczywiście mocy wyższej od każdego ze zbiorów E_n.

Niech w szczególności E_1 oznacza zbiór liczb naturalnych. Zbiory nieskończone, z którymi zazwyczaj spotykamy się w Analizie, są to zbiory równej mocy z E_1 lub z E_2 lub z E_3.

4. Zbiory przeliczalne. Zbiorem *skończonym* nazywamy zbiór mający dokładnie n elementów, gdzie n jest liczbą naturalną lub zerem. Zbiór pusty zaliczamy więc również do zbiorów skończonych. Zbiory zaś, które nie są skończonymi, nazywamy *nieskończonymi*.

Zbiorami nieskończonymi są więc np. zbiór liczb naturalnych, zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i t. p.

Każdy zbiór A, który jest równej mocy ze zbiorem liczb naturalnych, nazywamy *przeliczalnym*, lub *mocy* $\aleph_0$, co zapisujemy:

$$\overline{\overline{A}}=\aleph_0.$$

Jeżeli więc A jest zbiorem przeliczalnym, to istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru liczb naturalnych na cały zbiór A (por. str. 15). Oznaczmy przez

(1) $$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

elementy zbioru A, przyporządkowane w tym odwzorowaniu liczbom $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Widzimy stąd, że elementy zbioru przeliczalnego dadzą się ustawić w ciąg (1). Na odwrót, jeżeli elementy jakiegoś zbioru nieskończonego A dadzą się ustawić w ciąg (1) tak, by każdy element zbioru A występował w tym ciągu dokładnie raz jeden, wówczas A jest zbiorem przeliczalnym.

Jeżeli niektóre elementy zbioru A powtarzają się w ciągu (1) skończenie lub nieskończenie wiele razy, to wykreślając w ciągu (1) każdy wyraz równy jakiemuś wcześniejszemu, otrzymamy (przy zachowaniu dawnego następstwa wyrazów) nowy ciąg (skończony lub nieskończony), w którym każdy element zbioru występuje już tylko raz, a więc który stanowi odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru liczb naturalnych lub jego części na cały zbiór A. Dowodzi to, że zbiór A jest bądź przeliczalny, bądź skończony.

Zbiór taki nazywamy *co najwyżej przeliczalnym* i piszemy $\overline{\overline{A}} \leqslant \aleph_0$.

PRZYKŁADY. 1. Jeżeli $\{x_n\}$ jest ciągiem liczb rzeczywistych, wówczas zbiór liczb występujących w tym ciągu jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym.

2. Zbiór wszystkich liczb całkowitych jest zbiorem przeliczalnym; liczby całkowite możemy bowiem ustawić w ciąg następujący:

$$0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$$

3. *Zbiór wszystkich liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.*

Istotnie, zbiór ułamków (nieujemnych), w których suma licznika i mianownika równa się danej liczbie naturalnej n, jest oczywiście skończonym. Są to ułamki:

$$\frac{0}{n}, \quad \frac{1}{n-1}, \quad \frac{2}{n-2}, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{1}.$$

Możemy więc ułamki nieujemne ustawić w ciąg, wypisując kolejno ułamki, w których suma licznika i mianownika wynosi 1, 2, 3 i t. d. Otrzymamy ciąg:

(2) $$\frac{0}{1}, \underbrace{\frac{0}{2}, \frac{1}{1}}, \underbrace{\frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}}, \underbrace{\frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}}, \ldots$$

Aby ustawić wszystkie liczby wymierne w ciąg, wstawmy do ciągu (2) po każdym ułamku taki sam ułamek opatrzony znakiem minus. Dostaniemy ciąg:

(3) $$\frac{0}{1}, -\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, -\frac{0}{2}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{3}, -\frac{0}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$$

Łatwo widzieć, że w powyższym ciągu każda liczba wymierna powtarza się nieskończenie wiele razy.

Udowodnimy następujące twierdzenia ogólne:

(4.1) *Każda część zbioru przeliczalnego jest zbiorem skończonym albo przeliczalnym.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym i niech $B \subset A$. Załóżmy, że B jest zbiorem nieskończonym. Ustawmy elementy zbioru A w ciąg (1). Oznaczmy przez b_1 pierwszy element ciągu (1) należący do B, przez b_2 drugi z kolei element ciągu (1) należący do B i ogólnie przez b_k k-ty element ciągu (1) należący do B. W ten sposób elementy zbioru B ustawimy w ciąg $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ Zbiór B jest więc zbiorem przeliczalnym, c. b. d. d.

W szczególności zbiorami przeliczalnymi są zbiory: (a) liczb parzystych, (b) nieparzystych, (c) liczb podzielnych przez dowolną liczbę naturalną k, (d) liczb pierwszych, (e) kwadratów liczb naturalnych.

Zbiory te bowiem są nieskończone i zawarte w zbiorze wszystkich liczb naturalnych.

(4.2) *Suma co najwyżej przeliczalnej rodziny zbiorów skończonych lub przeliczalnych jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.*

Dowód. Niech $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots}$ będzie ciągiem wszystkich zbiorów danej rodziny, a więc zbiorów skończonych lub przeliczalnych. Możemy oczywiście bez uszczerbku dla ogólności założyć, że zbiory A_n są niepuste. Ustawmy elementy każdego zbioru A_n w ciąg nieskończony. Otrzymamy ciągi:

$$\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ a_{13}, \ldots,\ a_{1k}, \ldots \\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23}, \ldots,\ a_{2k}, \ldots \\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}, \ldots,\ a_{3k}, \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1},\ a_{n2},\ a_{n3}, \ldots,\ a_{nk}, \ldots \end{array} \tag{4}$$

gdzie a_{nk} oznacza element zbioru A_n występujący na k-tym miejscu. Wypiszmy teraz po kolei elementy a_{nk} znajdujące się w ciągach (4), pisząc najpierw a_{11}, potem te, dla których $n+k=3$, następnie te, dla których $n+k=4$, i t. d. Otrzymamy ciąg:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots \tag{5}$$

Ponieważ w ciągu (5) występują wszystkie elementy należące do sumy $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, więc suma wszystkich zbiorów A_n jest skończona lub przeliczalna, c. b. d. d.

W szczególności, jeżeli zbiory $\{A_n\}_{n=1,2,...}$ są przeliczalne lub rozłączne i niepuste, wówczas suma ich jest przeliczalna.

(4.3) *Jeżeli $A_1, A_2, ..., A_n$ są zbiorami przeliczalnymi, wówczas produkt $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Na mocy (2.1), str. 17, mamy $A_1 \times A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} K_n$, gdzie K_n są zbiorami przeliczalnymi. Zatem z (4.2), str. 24, wynika, że $A_1 \times A_2$ jest zbiorem przeliczalnym. Na mocy (2.4), str. 18, mamy $A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3$, więc $A_1 \times A_2 \times A_3$ jest zbiorem przeliczalnym. Postępując tak jeszcze $n-3$ razy, otrzymamy przeliczalność produktu $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, c. b. d. d.

Z (4.3) i z określenia produktu (str. 10) wynika od razu twierdzenie:

(4.4) *Jeżeli P jest zbiorem przeliczalnym, zaś n dowolną liczbą naturalną, wówczas zbiór wszystkich ciągów, złożonych z n elementów zbioru P, jest zbiorem przeliczalnym.*

(4.5) *Jeżeli P jest zbiorem przeliczalnym, wówczas zbiór C wszystkich ciągów skończonych, których wyrazami są elementy zbioru P, jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Oznaczając przez C_n zbiór ciągów złożonych z n elementów zbioru P, mamy $C = \sum_{n=1}^{\infty} C_n$. Na mocy (4.2) i (4.4) zbiór C jest więc przeliczalny.

PRZYKŁADY. 1. Na płaszczyźnie zbiór punktów o obu współrzędnych wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

Każdemu bowiem punktowi p, którego współrzędne x i y są liczbami wymiernymi, możemy przyporządkować wzajemnie jednoznacznie parę uporządkowaną (x,y). Ponieważ zbiór liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym (ob. przykład 3, str. 23), więc na mocy tw. (4.4) zbiór par (x,y), a zatem i zbiór odpowiadających im punktów, jest również zbiorem przeliczalnym.

Podobnie *w przestrzeni zbiór punktów, których współrzędne są liczbami wymiernymi, jest przeliczalny.*

2. *Na osi liczbowej* (p. str. 3) *zbiór odcinków o końcach wymiernych jest przeliczalny.*

Każdemu bowiem odcinkowi o końcach a,b możemy przyporządkować parę uporządkowaną (a,b). Stąd jak poprzednio wynika, że zbiór tych odcinków jest zbiorem przeliczalnym.

3. *Zbiór wszystkich wielomianów*

$$w(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n, \qquad \text{gdzie} \quad a_n\neq 0, \tag{6}$$

których współczynniki są liczbami wymiernymi, jest przeliczalny.

Każdemu bowiem wielomianowi (6) możemy przyporządkować ciąg skończony liczb wymiernych $a_0,a_1,\ldots,a_n$. Przyporządkowanie to jest oczywiście wzajemnie jednoznaczne. Zatem zbiór tych wielomianów jest przeliczalny na mocy tw. (4.5) i przeliczalności zbioru liczb wymiernych (przykład 3, str. 23).

4. *Zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny.*

Liczbą *algebraiczną* nazywamy każdą liczbę, będącą pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach wymiernych, z których nie wszystkie są równe zeru.

Otóż ustawmy wszystkie wielomiany (6) o współczynnikach wymiernych w ciąg $\{w_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$. Niech A_n oznacza zbiór pierwiastków rzeczywistych równania $w_n(x)=0$. Zbiór A_n jest zbiorem skończonym, gdyż równanie $w_n(x)=0$ ma — jak wiadomo z Algebry — co najwyżej r pierwiastków rzeczywistych, gdzie r oznacza stopień wielomianu $w_n(x)$. Oczywiście, zbiór liczb algebraicznych jest sumą zbiorów A_n. Z tw. (4.2), str. 24, i z uwagi że zbiór liczb algebraicznych jest nieskończony (liczba wymierna p/q jest bowiem pierwiastkiem równania $qx-p=0$, zatem jest liczbą algebraiczną) wynika, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny.

Zbiór liczb rzeczywistych nie jest zbiorem przeliczalnym (ob. przykład 3, str. 19). Zatem zbiór liczb algebraicznych nie może zawierać wszystkich liczb rzeczywistych. Wynika stąd, że istnieją liczby nie algebraiczne czyli *przestępne* (jak e i π).

(4.6) *Zbiór H wszystkich podzbiorów skończonych zbioru przeliczalnego A jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Każdemu podzbiorowi skończonemu i niepustemu S zbioru A przyporządkujmy ciąg skończony, jaki otrzymamy, ustawiając elementy zbioru S w dowolnym porządku. Zbiorowi zaś pustemu przyporządkujemy parę (a, a), gdzie a jest dowolnie wybranym elementem. Przyporządkowanie tak określone jest oczywiście odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym zbioru H na część (nieskończoną) zbioru wszystkich ciągów skończonych, których wyrazami są elementy zbioru A. A więc na mocy (4.5) zbiór H jest przeliczalny, c.b.d.d.

5. Zbiory mocy $\mathfrak{c}$ (continuum). Każdy zbiór A, który jest równej mocy ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, nazywamy zbiorem *mocy continuum* albo *mocy* $\mathfrak{c}$, co piszemy $\overline{\overline{A}}=\mathfrak{c}$.

PRZYKŁADY. 1. Jeżeli zbiór A, którego elementami są liczby rzeczywiste, zawiera jakiś przedział, wówczas zbiór A jest mocy $\mathfrak{c}$.

Niech bowiem zbiór A zawiera przedział $a<x<b$. Funkcja

$$y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(b-a)}[2x-b-a]$$

odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie ten przedział na cały zbiór liczb rzeczywistych. Zbiór liczb rzeczywistych jest więc równej mocy z częścią zbioru A, a ponieważ A jest z założenia sam częścią zbioru liczb rzeczywistych, więc $\overline{\overline{A}}=\mathfrak{c}$ na mocy twierdzenia Bernsteina (str. 19).

W szczególności: przedział, suma przedziałów, zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, zbiór liczb rzeczywistych ujemnych, są zbiorami mocy $\mathfrak{c}$.

2. Zbiór punktów płaszczyzny (lub przestrzeni) jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$.

Niech bowiem K będzie kwadratem $0<x<1$, $0<y<1$. Udowodnimy, że K jest równej mocy z przedziałem $0<x<1$. Niech (x,y) będzie punktem kwadratu K. Napiszmy współrzędne x,y w postaci ułamków nieskończonych:

(1) $$x=0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots,\qquad y=0,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n,\ldots,$$

gdzie $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\beta_1,\beta_2,\ldots,$ są cyframi dziesiętnymi. Punktowi (x,y) przyporządkujmy liczbę z, której rozwinięcie dziesiętne ma postać

(2) $$z=0,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\ldots,\alpha_n,\beta_n,\ldots$$

Oczywiście rozwinięcie liczby z jest również nieskończone i $0<z<1$.

Obierzmy dowolny punkt o współrzędnych:

$$x'=0,\alpha_1',\alpha_2',\dots,\alpha_n',\dots,\qquad y'=0,\beta_1',\beta_2',\dots,\beta_n',\dots;$$

zatem $z'=0,\alpha_1',\beta_1',\alpha\,,\beta_2',\dots,\beta_n',\beta_n,\dots$ Jeżeli $z=z'$, to ponieważ rozwinięcia liczb z i z' są nieskończone, więc $\alpha_1=\alpha_1'$, $\beta_1=\beta_1'$, ..., $\alpha_n=\alpha_n'$, $\beta_n=\beta_n'$ i t. d. A zatem $x=x'$ i $y=y'$.

Wynika stąd, że odwzorowanie określone wzorami (1) i (2) jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym zbioru K na część przedziału $0<z<1$. Ponieważ zarazem przedział ten jest równej mocy z częścią kwadratu K, mianowicie z przedziałem $0<x<1$ prostej $y=\frac{1}{2}$, więc na mocy twierdzenia Bernsteina K jest równej mocy z przedziałem $0<z<1$. Zatem K jest mocy $\mathfrak{c}$.

Zauważmy, że funkcje $x'=\operatorname{tg}\pi(x-\frac{1}{2})$, $y'=\operatorname{tg}\pi(y-\frac{1}{2})$ określają wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie kwadratu K na całą płaszczyznę. Zatem *zbiór punktów płaszczyzny jest mocy* $\mathfrak{c}$.

Podobnie dowodzi się, że *zbiór punktów przestrzeni* (3-wymiarowej, ..., n-wymiarowej) *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

(5.1) *Suma skończonej lub przeliczalnej rodziny zbiorów mocy* $\mathfrak{c}$ *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Niech $\{A_n\}$ będzie ciągiem zbiorów tej rodziny. Odwzorujmy elementy zbioru A_n wzajemnie jednoznacznie na przedział $n<x<n+1$. Otrzymamy w ten sposób odwzorowanie części zbioru liczb rzeczywistych na sumę zbiorów A_n. Zatem suma ta jest co najwyżej mocy $\mathfrak{c}$. Nie może być jednak mocy niższej, gdyż zawiera zbiory A_n mocy $\mathfrak{c}$.

(5.2) *Suma rodziny mocy* $\mathfrak{c}$ *zbiorów mocy* $\mathfrak{c}$ *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Niech rodzina R zawiera $\mathfrak{c}$ zbiorów K mocy $\mathfrak{c}$. Przyporządkujmy każdemu zbiorowi $K\in R$ liczbę rzeczywistą a w sposób wzajemnie jednoznaczny. Elementy zbioru K odpowiadającego liczbie a odwzorujmy wzajemnie jednoznacznie na punkty płaszczyzny leżące na prostej $x=a$. W ten sposób określiliśmy odwzorowanie punktów płaszczyzny na sumę zbiorów K rodziny R. Zatem suma ta jest co najwyżej mocy $\mathfrak{c}$. Nie może jednak być mocy niższej niż $\mathfrak{c}$, gdyż zawiera zbiory K mocy $\mathfrak{c}$.

PRZYKŁAD. Zbiór wszystkich przedziałów o końcach a, b (z końcami lub bez), gdzie $a<b$, jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$.

Oznaczmy bowiem przez K_a zbiór wszystkich przedziałów, których lewym końcem jest a. Zbiór ten jest mocy $\mathfrak{c}$, gdyż zbiór liczb $b>a$ jest mocy $\mathfrak{c}$. Ponieważ rodzina zbiorów K_a jest mocy $\mathfrak{c}$, zaś zbiór wszystkich przedziałów jest sumą zbiorów K_a, więc z tw. (5.2) wynika, że zbiór wszystkich przedziałów jest mocy $\mathfrak{c}$.

(5.3) *Jeżeli* $\overline{\overline{T}}\leqslant\mathfrak{c}$ *i każdy zbiór* K_t, *gdzie* $t\in T$, *jest również mocy nie wyższej niż* $\mathfrak{c}$, *wówczas*

$$\overline{\overline{\sum_{t\in T} K_t}}\leqslant\mathfrak{c}.$$

Dowód wynika od razu z twierdzeń (4.2), (5.1) i (5.2).

W szczególności, jeżeli T jest mocy $\mathfrak{c}$, zaś zbiory K_t są zbiorami niepustymi i rozłącznymi, wówczas suma zbiorów K_t jest mocy $\mathfrak{c}$. Suma zawiera bowiem zbiór mocy $\mathfrak{c}$, który otrzymamy, wyjmując z każdego zbioru K_t po jednym elemencie (ob. odnośnik do str. 40) i łącząc te elementy w zbiór. Wynika stąd twierdzenie:

(5.4) *Suma* $\mathfrak{c}$ *zbiorów rozłącznych i niepustych, z których każdy jest mocy nie wyższej niż* $\mathfrak{c}$, *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

(5.5) *Suma skończonej liczby zbiorów mocy niższej niż* $\mathfrak{c}$ *jest zbiorem mocy niższej niż* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Udowodnimy to najpierw dla dwóch zbiorów A i B mocy niższej niż $\mathfrak{c}$. W myśl tw. (5.3), $A+B$ jest zbiorem co najwyżej mocy $\mathfrak{c}$.

Przypuśćmy, że $A+B$ jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$. Istnieje zatem odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne φ zbioru $A+B$ na zbiór wszystkich punktów płaszczyzny P. Oznaczmy przez $\varphi(A)$ i $\varphi(B)$ podzbiory płaszczyzny, które przy tym odwzorowaniu odpowiadają zbiorom A i B. Zatem $\varphi(A)+\varphi(B)=P$.

Zauważmy, że na płaszczyźnie tej istnieje prosta $x=x_0$, rozłączna ze zbiorem $\varphi(A)$. W przeciwnym bowiem razie istniałby na każdej prostej $x=a$ (gdzie $-\infty<a<\infty$) jakiś punkt zbioru $\varphi(A)$, co dowodziłoby, że $\varphi(A)$ zawiera zbiór mocy $\mathfrak{c}$, wbrew założeniu. Podobnie istnieje prosta $y=y_0$ rozłączna ze zbiorem $\varphi(B)$. Wynika stąd, że punkt (x_0, y_0) nie należy do zbioru $\varphi(A)+\varphi(B)$, co jest niemożliwe, gdyż jest to punkt płaszczyzny P. Zatem $\overline{\overline{A+B}}<\mathfrak{c}$.

Niech teraz $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą zbiorami, z których każdy jest mocy niższej niż $\mathfrak{c}$. Zatem A_1+A_2 jest mocy niższej niż $\mathfrak{c}$, więc $A_1+A_2+A_3=(A_1+A_2)+A_3$ jest mocy niższej niż $\mathfrak{c}$, i t. d.

(5.6) *Jeżeli* $\overline{\overline{A}}=\mathfrak{c}$, $B \subset A$ *i* $\overline{\overline{B}}<\mathfrak{c}$, *to* $\overline{\overline{A-B}}=\mathfrak{c}$.

Dowód. Ponieważ $A=B+(A-B)$, więc na mocy (5.5) $A-B$ nie może być mocy niższej niż $\mathfrak{c}$, zatem jest mocy $\mathfrak{c}$.

PRZYKŁAD. *Zbiór liczb niewymiernych jest mocy* $\mathfrak{c}$, gdyż otrzymujemy go przez usunięcie ze zbioru wszystkich liczb rzeczywistych zbioru liczb wymiernych, który jest przeliczalny (przykład 3, str. 23).

Z uwagi do wzorów (2.1) i (2.2), str. 17, oraz z tw. (5.4) wynika twierdzenie:

(5.7) *Jeżeli* $\overline{\overline{A}}=\mathfrak{c}$ *i* $\overline{\overline{B}}\leqslant\mathfrak{c}$, *to* $\overline{\overline{A\times B}}=\mathfrak{c}$.

Z tw. (5.7) i wzoru (2.4), str. 18, wnosimy, że:

(5.8) *Produkt skończonej liczby zbiorów mocy* $\mathfrak{c}$ *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

PRZYKŁADY. 1. Przestrzeń n-wymiarowa jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$ (p. str. 28).

Wynika to również wprost z tw. (5.8), gdyż zbiór wszystkich układów $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ liczb rzeczywistych jest produktem

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

gdzie $A_1=A_2=\ldots=A_n$ jest zbiorem liczb rzeczywistych.

2. Zbiór wszystkich ciągów liczbowych skończonych jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$.

Oznaczmy bowiem dla każdego naturalnego n przez C_n zbiór ciągów $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$. Podobnie jak w przykładzie 1 widzimy, że $\overline{\overline{C_n}}=\mathfrak{c}$. Ponieważ suma $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ jest zbiorem wszystkich ciągów liczbowych skończonych, więc zbiór ten jest mocy $\mathfrak{c}$ na podstawie tw. (5.1).

3. Zbiór wszystkich wielomianów jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$.

Przyporządkujmy bowiem każdemu wielomianowi

$$w(x)=a_0+a_1x+a_1x^2\ldots+a_nx^n, \quad \text{gdzie} \quad a_n \neq 0,$$

o współczynnikach rzeczywistych ciąg skończony $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Ponieważ przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem zbioru wszystkich wielomianów na część zbioru ciągów skończonych liczbowych, więc zbiór wielomianów jest co najwyżej mocy $\mathfrak{c}$. Zbiór ten nie może być jednak mocy niższej niż $\mathfrak{c}$, gdyż już jego podzbiór, mianowicie zbiór wielomianów $w(x) \equiv a_0$, jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$.

(5.9) *Produkt ciągu nieskończonego zbiorów mocy* $\mathfrak{c}$ *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Niech $\{A_n\}$ będzie ciągiem zbiorów mocy $\mathfrak{c}$. Odwzorujmy każdy zbiór A_n z osobna wzajemnie jednoznacznie na przedział $0<x<1$. Łatwo widzieć, że produkt zbiorów A_n jest równej mocy ze zbiorem C wszystkich ciągów liczbowych nieskończonych $\{x_n\}$, gdzie $0<x_n<1$ dla $n=1,2,\ldots$ Wystarczy więc udowodnić, że $\overline{\overline{C}}=\mathfrak{c}$.

Niech $\{x_n\} \in C$. Zatem $0<x_1<1$, $0<x_2<1$ i t. d. Rozwińmy liczby x_n na ułamki dziesiętne nieskończone:

$$
(1) \qquad \begin{array}{l}
x_1 = 0,\ a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3} \ldots a_{1,k} \ldots \\
x_2 = 0,\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3} \ldots a_{2,k} \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
x_n = 0,\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3} \ldots a_{n,k} \ldots
\end{array}
$$

gdzie $a_{n,k}$ oznacza k-tą cyfrę dziesiętną liczby x_n.

Określmy liczby z przez rozwinięcie (por. (5), str. 24):

$$
(2) \qquad z = 0, a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{13}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{1,k}\ a_{2,k-1}\ a_{3,k-2} \ldots a_{k,1} \ldots
$$

Łatwo widzieć, że przyporządkowując ciągowi $\{x_n\}$ liczbę z, otrzymamy odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru C na część przedziału $0<z<1$, a więc $\overline{\overline{C}} \leqslant \mathfrak{c}$. Zbiór C nie może być jednak mocy niższej niż $\mathfrak{c}$, gdyż zawiera ciągi $\{x, x, \ldots\}$ o wyrazach równych dowolnej liczbie x przedziału $0<x<1$; zbiór zaś takich ciągów jest mocy $\mathfrak{c}$.

PRZYKŁADY. 1. *Zbiór wszystkich ciągów liczbowych nieskończonych jest mocy* $\mathfrak{c}$.

Zbiór wszystkich ciągów liczbowych $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$, jest bowiem produktem ciągu nieskończonego $\{A_n\}$ zbiorów, z których każdy jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

2. *Zbiór funkcyj ciągłych $f(x)$, określonych dla $a \leqslant x \leqslant b$, jest mocy* $\mathfrak{c}$.

Ustawmy wszystkie liczby wymierne przedziału $a \leqslant x \leqslant b$ w ciąg $\{w_n\}$ (por. str. 23). Każdej funkcji $f(x)$ przyporządkujmy ciąg $\{f(w_n)\}$. To przyporządkowanie jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym zbioru F wszystkich rozważanych funkcyj na część zbioru ciągów nieskończonych liczbowych, gdyż jeżeli dla dwóch funkcyj $f(x)$ i $\varphi(x)$ należących do zbioru F mamy $f(w_n) = \varphi(w_n)$ przy każdym n, to z ciągłości wynika, że $f(x) = \varphi(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Zatem $\overline{\overline{F}} \leqslant \mathfrak{c}$. Zbiór F nie może być jednak mocy niższej niż $\mathfrak{c}$, gdyż już zbiór funkcyj $f(x) = \text{const.}$ jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$.

(5.10) *Zbiór wszystkich ciągów nieskończonych $\{a_n\}$, których wyrazy przyjmują tylko dwie wartości* (np. 0 i 1), *jest mocy* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Każdemu ciągowi $\{a_n\}$ przyporządkujmy liczbę z, której rozwinięcie dziesiętne ma postać $z = 0, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ Jest to oczywiście odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru ciągów $\{a_n\}$ na część zbioru liczb rzeczywistych. Więc zbiór wszystkich ciągów $\{a_n\}$ jest mocy nie wyższej niż $\mathfrak{c}$.

Z drugiej strony, każdej liczbie z przedziału $0 < z < 1$, której rozwinięcie dziesiętne nieskończone ma postać $0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, przyporządkujmy ciąg $\{a_n\}$, w którym występuje kolejno najpierw (a_1+1) razy liczba 0, następnie (a_2+1) razy liczba 1, potem znowu a_3+1 razy 0 i t. d. Odwzorowanie to jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem przedziału $0 < z < 1$ na część zbioru ciągów $\{a_n\}$. Z twierdzenia Bernsteina (str. 19) wynika zatem, że zbiór ciągów $\{a_n\}$ jest mocy $\mathfrak{c}$, c. b. d. d.

(5.11) *Jeżeli zbiór A zawiera co najmniej dwa elementy i jest mocy nie wyższej niż* $\mathfrak{c}$, *wówczas zbiór C wszystkich ciągów nieskończonych $\{a_n\}$, których wyrazy należą do A, jest mocy* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Niech x i y będą dwoma dowolnymi elementami zbioru A. W myśl (5.10) zbiór wszystkich ciągów nieskończonych $\{a_n\}$, których wyrazy przyjmują tylko wartości x i y, jest mocy $\mathfrak{c}$ i jest zawarty w C. Zatem $\overline{\overline{C}} \geqslant \mathfrak{c}$.

Z drugiej strony, jeżeli zbiór A odwzorujemy wzajemnie jednoznacznie na część zbioru liczb rzeczywistych, wówczas każdemu ciągowi $\{a_n\} \in C$ będziemy mogli przyporządkować wzajemnie jednoznacznie ciąg liczbowy $\{x_n\}$ (gdzie x_n jest liczbą przyporządkowaną elementowi a_n). Zatem (p. przykład 1, str. 31) $\overline{\overline{C}} \leqslant \mathfrak{c}$. A więc $\overline{\overline{C}} = \mathfrak{c}$, c. b. d. d.

PRZYKŁADY. Przyjmując za A zbiór liczb (a) wymiernych, (b) naturalnych, (c) całkowitych, możemy powiedzieć: zbiory wszystkich ciągów, których wyrazy są liczbami (a) wymiernymi, (b) naturalnymi, (c) całkowitymi, są mocy $\mathfrak{c}$.

Z (5.11) wynika łatwo wniosek:

(5.12) *Jeżeli każdy ze zbiorów* $\{A_n\}$ *zawiera co najmniej dwa elementy i jest mocy nie wyższej niż* $\mathfrak{c}$, *wówczas produkt zbiorów* $\{A_n\}$ *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

(5.13) *Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru przeliczalnego jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Każdemu podzbiorowi skończonemu lub przeliczalnemu $(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ zbioru liczb naturalnych przyporządkujmy ciąg liczb $\{a_n\}$, w którym $a_{n_1} = a_{n_2} = \dots = a_{n_k} = \dots = 1$, a poza tym występują same zera. Jest to, jak łatwo widzieć, odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne rodziny wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych na zbiór wszystkich ciągów $\{a_n\}$, których wyrazy przyjmują tylko dwie wartości 0 i 1; ten zaś jest mocy $\mathfrak{c}$ w myśl tw. (5.10).

(5.14) ***Wniosek.*** *Rodzina wszystkich podzbiorów przeliczalnych zbioru przeliczalnego jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Na mocy tw. (4.1) rodzina ta jest różnicą $A - B$ między rodziną A wszystkich podzbiorów zbioru przeliczalnego, a rodziną B jego podzbiorów skończonych, która na mocy (4.5) jest zbiorem przeliczalnym. Zatem $B \subset A$ i $\overline{\overline{B}} < \mathfrak{c}$. Ponieważ $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c}$ na mocy tw. (5.13), więc na mocy (5.6) jest $\overline{\overline{A - B}} = \mathfrak{c}$, c. b. d. d.

(5.15) *Jeżeli* $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c}$, *to dla każdej liczby naturalnej* n *rodzina* L_n *wszystkich podzbiorów zbioru* A, *mających po* n *elementów, jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Możemy oczywiście przyjąć, że A jest zbiorem liczb rzeczywistych. Ustawmy liczby każdego zbioru $B \epsilon L_n$ z osobna w ciąg rosnący. Otrzymamy w ten sposób odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru L_n na część zbioru ciągów liczbowych o n wyrazach. Zatem $\overline{\overline{L_n}} \leqslant \mathfrak{c}$. Nie może być jednak $\overline{\overline{L_n}} < \mathfrak{c}$, gdyż już zbiór ciągów n-wyrazowych $\{x, 2, 3, \dots, n\}$, gdzie $0 < x < 1$, jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$.

Z (5.15) wynika łatwo twierdzenie:

(5.16) *Rodzina wszystkich podzbiorów skończonych zbioru mocy* $\mathfrak{c}$ *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

Rodzina ta jest bowiem sumą $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$, więc na mocy (5.1) i (5.15) jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$.

(5.17) *Jeżeli* $\overline{\overline{A}}=\mathfrak{c}$, *to rodzina wszystkich podzbiorów przeliczalnych zbioru* A *jest zbiorem mocy* $\mathfrak{c}$.

Dowód. Załóżmy, że A jest zbiorem liczb rzeczywistych. Każdemu zbiorowi przeliczalnemu P liczb rzeczywistych możemy przyporządkować ciąg liczbowy, który otrzymamy, ustawiając P w dowolny sposób w ciąg. Ponieważ tak określone odwzorowanie będzie wzajemnie jednoznaczne, więc (p. przykład 1, str. 31) rodzina wszystkich zbiorów P jest mocy równej lub niższej niż $\mathfrak{c}$. Oczywiste jest jednak, że nie może być mocy niższej niż $\mathfrak{c}$, bo zawiera wśród swych elementów wszystkie podzbiory przeliczalne zbioru liczb naturalnych, które w myśl tw. (5.14) tworzą zbiór mocy $\mathfrak{c}$.

6. Zbiory mocy $\mathfrak{f}$. Każdy zbiór równej mocy z rodziną wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych nazywamy zbiorem *mocy* $\mathfrak{f}$.

Z twierdzenia Cantora (3.11), str. 21, wynika, że zbiór mocy $\mathfrak{f}$ jest mocy wyższej niż $\mathfrak{c}$ (np. niż zbiór liczb rzeczywistych).

(6.1) *Zbiór* Φ *wszystkich funkcyj* $\varphi(x)$, *określonych dla* $-\infty<x<+\infty$ *i przyjmujących wartości* 0 *i* 1, *jest mocy* $\mathfrak{f}$.

Dowód. Każdej funkcji $\varphi(x)\in\Phi$ przyporządkujmy zbiór tych x, dla których $\varphi(x)=1$. Przyporządkowanie to jest oczywiście odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym zbioru Φ na rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych. (Zbiorowi pustemu przyporządkowana jest funkcja $\varphi(x)=\text{const.}=0$, zbiorowi wszystkich liczb funkcja $\varphi(x)=\text{const.}=1$.) Zatem $\overline{\overline{\Phi}}=\mathfrak{f}$.

(6.2) *Zbiór wszystkich funkcyj* $f(x)$, *gdzie* $-\infty<x<+\infty$, *przyjmujących wartości rzeczywiste, jest zbiorem mocy* $\mathfrak{f}$.

Dowód. Z tw. (6.1) wynika, że jest to zbiór co najmniej mocy $\mathfrak{f}$. Przyporządkujmy każdej z funkcyj $f(x)$ zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych $x, f(x)$. Jest to odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru tych funkcyj na część rodziny wszystkich podzbiorów płaszczyzny. Ponieważ zbiór punktów płaszczyzny jest mocy $\mathfrak{c}$ (por. przykład 2, str. 27), więc rodzina wszystkich podzbiorów płaszczyzny jest mocy $\mathfrak{f}$, zatem rozważany zbiór funkcyj jest zarazem mocy co najwyżej $\mathfrak{f}$, c. b. d. d.

§ 4. Zbiory uporządkowane.

1. Porządek. Zbiór E nazywamy *uporządkowanym*, jeżeli pomiędzy jego elementami określony jest stosunek $\prec$, zwany stosunkiem *następstwa*, stosunkiem *porządkującym* lub *porządkiem*, spełniający następujące warunki:

(i) Jeżeli $a \in E$, $b \in E$ i $a \neq b$, to albo a poprzedza b, albo b poprzedza a, czyli albo $a \prec b$, albo $b \prec a$.

(ii) Jeżeli $a \prec b$, to nie zachodzi związek $b \prec a$.

(iii) Jeżeli $a \prec b$ i $b \prec c$, to $a \prec c$.

Uwaga. Zamiast „a poprzedza b" mówimy też „a jest wcześniejsze od b", „b jest późniejsze od a", „b następuje po a".

Zamiast $a \prec b$ piszemy również $b \succ a$.

PRZYKŁADY. 1. Zbiorem uporządkowanym jest zbiór liczb naturalnych, ustawionych według wielkości, t. zn. gdy z dwóch liczb naturalnych uważamy za wcześniejszą liczbę mniejszą. Stosunkiem następstwa jest tu stosunek mniejszości $<$.

2. Zbiorem uporządkowanym jest każdy zbiór liczb rzeczywistych, uporządkowany według wielkości.

3. Zbiór punktów płaszczyzny możemy uporządkować w następujący sposób. Dla dowolnych punktów płaszczyzny $p=(x,y)$ i $q=(x',y')$ przyjmujemy $p \prec q$, gdy $x<x'$, albo gdy $x=x'$ i $y<y'$. Łatwo stwierdzić, że warunki (i)-(iii) są wtedy spełnione.

2. Zbiory podobne. Dwa zbiory uporządkowane A i B nazywamy *podobnymi*, jeżeli istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbioru A na cały zbiór B, zachowujące następstwo, t. zn. że jeżeli elementom a i a' zbioru A przyporządkowane są elementy b i b' zbioru B, to warunek $a \prec a'$ pociąga $b \prec b'$.

Odwzorowanie takie nazywamy też *odwzorowaniem podobnym* lub *podobieństwem*.

PRZYKŁADY. 1. Zbiory: (a) wszystkich liczb naturalnych, (b) liczb naturalnych parzystych, uporządkowane według wielkości, są zbiorami podobnymi. Liczbie naturalnej n możemy przyporządkować liczbę naturalną parzystą $2n$. Warunek $n<n'$ pociąga oczywiście $2n<2n'$.

2. Zbiory: (a) wszystkich liczb rzeczywistych, (b) liczb określonych nierównością $-1<x<1$, uporządkowane według wielkości, są zbiorami podobnymi. Przyporządkowując liczbie x liczbę $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$, widzimy, że dla $-1<x<x'<1$ mamy $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x<\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x'$.

3. Zbiory: (a) liczb naturalnych, (b) liczb całkowitych ujemnych, uporządkowane według wielkości, nie są podobne. Pierwszy zbiór ma bowiem element najwcześniejszy, mianowicie 1, drugi zaś zbiór nie ma elementu najwcześniejszego.

Z określenia wynika, że dwa zbiory uporządkowane podobne są równej mocy, nie jest jednak na odwrót (jak wskazuje poprzedni przykład). W szczególności zbiory: (a) liczb rzeczywistych, (b) liczb wymiernych, uporządkowane według wielkości, nie są podobne, bo nie są równej mocy.

3. Zbiory typu η i λ. Zbiór uporządkowany, podobny do zbioru liczb wymiernych (uporządkowanych według wielkości), nazywamy zbiorem *typu* η.

Zbiór uporządkowany, podobny do zbioru wszystkich liczb rzeczywistych (uporządkowanych według wielkości), nazywamy zbiorem *typu* λ.

PRZYKŁADY. Zbiór liczb wymiernych $-1<x<1$ jest zbiorem typu η. Wynika to z podobieństwa odwzorowania $y=\frac{x}{1-|x|}$, gdzie $-1<x<1$. Stosując to samo odwzorowanie, widzimy również, że przedział $-1<x<1$ jest typu λ.

Każdy zbiór typu η jest zbiorem przeliczalnym, zaś typu λ jest mocy $\mathfrak{c}$.

4. Przekrój. Niech E będzie zbiorem uporządkowanym.

Przekrojem zbioru E nazywamy podział zbioru E na dwa zbiory A i B o własnościach następujących (por. Wstęp, str. 2):

1⁰ Każdy element zbioru E należy albo do A, albo do B, t. j.:

$$E=A+B, \qquad A\cdot B=0.$$

2⁰ Każdy element zbioru A jest wcześniejszy od każdego elementu zbioru B.

3⁰ Zbiory A i B nie są puste, t. zn. że każdy z nich zawiera jakiś element zbioru E.

Przekrój otrzymamy, biorąc np. dowolny element $a_0 \in E$ (nie ostatni) i zaliczając do zbioru A element a_0 oraz elementy $a \prec a_0$, zaś do zbioru B elementy $a \succ a_0$.

Jeżeli w zbiorze A nie ma elementu najpóźniejszego i równocześnie w B nie ma najwcześniejszego, przekrój nazywamy *luką*.

Jeżeli w zbiorze A istnieje element najpóźniejszy a', zaś w zbiorze B najwcześniejszy a'', przekrój nazywamy *skokiem*.

Oczywiście nie istnieje wtedy żaden element $a \in E$ *między* a' i a'', t. zn. taki, że $a' \prec a \prec a''$.

W zbiorze typu η nie ma skoków, są natomiast luki. Lukę otrzymamy, zaliczając do zbioru A np. liczby wymierne $x < \sqrt{2}$, zaś do zbioru B liczby wymierne $x > \sqrt{2}$. Oczywiście, nie ma największej liczby w zbiorze A, ani najmniejszej w zbiorze B.

W zbiorze typu λ nie ma ani skoków ani luk, jak to wynika z aksjomatu Dedekinda (p. Wstęp, XII, str. 2).

W zbiorze liczb całkowitych nie ma luk, natomiast każdy przekrój jest w nim skokiem.

§ 5. Zbiory dobrze uporządkowane.

1. Pojęcie dobrego uporządkowania. Zbiór uporządkowany, w którym każda część niepusta ma element najwcześniejszy, nazywamy zbiorem *dobrze uporządkowanym*.

Z określenia wynika od razu, że zbiór dobrze uporządkowany (niepusty) ma element pierwszy.

PRZYKŁADY. 1. Zbiorami dobrze uporządkowanymi są:

(a) Zbiór liczb naturalnych uporządkowany według wielkości. W każdym bowiem podzbiorze zbioru liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza. Np. w zbiorze liczb naturalnych podzielnych jednocześnie przez 2 i 3 najmniejszą liczbą jest 6.

(b) Zbiór wyrazów ciągu $\{a_n\}$, gdzie $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$, uporządkowany wedle następstwa w ciągu, t. zn. tak, że $a_i \prec a_j$ dla $i < j$.

(c) Zbiór liczb a_i, b_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots$, uporządkowany w sposób następujący: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, t. zn. tak, że $a_i \prec a_j$ i $b_i \prec b_j$, jeżeli $i < j$, oraz że $a_i \prec b_j$ dla każdego i i j (zakłada się, że wszystkie a_i i b_j są różne).

(d) Zbiór liczb $a_{i,j}$, gdzie $i = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$ i gdzie wszystkie $a_{i,j}$ są różne, uporządkowany *leksykograficznie*, t. zn. w sposób następujący:

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{i1}, a_{i2}, \ldots$$

Zatem $a_{ij} \prec a_{rs}$, gdy $i<r$, lub gdy $i=r$ i $j<s$. Jeżeli mamy dowolny podzbiór E zbioru liczb a_{ij}, uporządkowanego leksykograficznie, to najwcześniejszy element otrzymamy, wybierając najpierw ze zbioru E podzbiór utworzony z tych elementów, które mają pierwszy wskaźnik najmniejszy, a z pośród nich ten, którego drugi wskaźnik jest najmniejszy.

2. *Podobnie* do zbioru (d) z przykładu 1 uporządkowany jest zbiór liczb postaci $i-\frac{1}{j}$ (gdzie i i j są dowolnymi liczbami naturalnymi), uporządkowany według wielkości.

3. Natomiast *nie* są dobrze uporządkowane zbiory:

(e) Zbiór liczb całkowitych, nie ma w nim bowiem elementu pierwszego (t. zn. nie istnieje liczba całkowita najmniejsza).

(f) Zbiór liczb odcinka $0 \leqslant x \leqslant 1$, bo jego część $0<x<1$ nie ma elementu pierwszego.

Jeżeli zbiór E jest dobrze uporządkowany, wówczas po każdym elemencie $a \epsilon E$ (z wyjątkiem ewentualnie ostatniego) istnieje element b *bezpośrednio następujący*, t. zn. taki, że $a \prec b$ i że nie ma takiego elementu c, że $a \prec c \prec b$.

Jeżeli bowiem P jest zbiorem elementów późniejszych od a, to najwcześniejszy element zbioru P jest elementem bezpośrednio następującym po a.

W zbiorze liczb naturalnych elementem bezpośrednio następującym po n jest $n+1$.

W zbiorze uporządkowanym, który nie jest dobrze uporządkowany, mogą istnieć elementy, nie mające bezpośrednio następujących, a nawet — jak w zbiorze liczb rzeczywistych — może żaden element nie mieć bezpośrednio następującego.

2. Odcinki zbioru dobrze uporządkowanego. *Odcinkiem* zbioru dobrze uporządkowanego E nazywamy każdy zbiór $I \subset E$ o tej własności, że jeżeli $a \epsilon I$, wówczas $a' \prec a$ pociąga $a' \epsilon I$, t. zn. że wówczas wszystkie elementy wcześniejsze od a należą również do I.

Odcinkami zbioru E są więc:

(1) sam zbiór E,

(2) zbiór pusty,

(3) zbiór złożony z pierwszego elementu $a_1 \epsilon E$,

(4) zbiór złożony z elementów $\prec a$,

(5) zbiór złożony z elementów $\prec a$ oraz a, gdzie a jest dowolnym elementem zbioru E.

Na odwrót, każdy odcinek I jest zbiorem jednego z typów (1)-(5). Jeżeli bowiem $I \neq E$, to oznaczając przez a najwcześniejszy element zbioru $E-I$, widzimy, że I jest typu (4), t. zn. zbiorem elementów $\prec a$.

Zauważmy jeszcze, że odcinki typu (2), (3) i (5) (ten ostatni, gdy nie jest równy E) są zarazem typu (4). Jeżeli bowiem w (4) przyjmiemy za a kolejno a_1, a_2 i a^* (gdzie a_2 i a^* oznaczają odpowiednio elementy bezpośrednio następujące po a_1 i po a), to otrzymamy zbiory typu (2), (3) i (5).

Jeżeli I_1 i I_2 są odcinkami zbioru dobrze uporządkowanego, to albo $I_1 \subset I_2$, albo $I_2 \subset I_1$.

Jeżeli dwa zbiory dobrze uporządkowane A i B są podobne, wówczas przy odwzorowaniu zbioru A na B wzajemnie jednoznacznym i zachowującym stosunek następstwa, odcinki zbioru A przechodzą na odcinki zbioru B (i na odwrót), przy czym typy (1)–(5) przy odwzorowaniu przechodzą na siebie, t. j. są *niezmiennikami* tego odwzorowania.

3. Twierdzenia o podobieństwie. Zachodzą twierdzenia następujące:

(3.1) *Dwa różne odcinki zbioru dobrze uporządkowanego nie są nigdy podobne.*

Dowód. Przypuśćmy bowiem, że dwa odcinki I' i I'' zbioru dobrze uporządkowanego E są podobne. Istnieje zatem odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne φ odcinka I' na odcinek I'', zachowujące porządek. Gdyby dla każdego $a' \epsilon I'$ było $\varphi(a') = a'$, to oczywiście mielibyśmy $I' = I''$. Zakładając więc, że $I' \neq I''$, oznaczmy przez a najwcześniejszy element w I' taki, że $\varphi(a) \neq a$. Z podobieństwa odwzorowania φ wynika jednak, że wtedy odcinek złożony z elementów $\prec a$ przejdzie na siebie przy tym odwzorowaniu. Zatem odcinek złożony z elementów $\prec a$ i z a przejdzie również na siebie, skąd $\varphi(a) = a$. Doszliśmy więc do sprzeczności, co obala przypuszczenie podobieństwa między I' a I'' przy założeniu, że $I' \neq I''$.

(3.2) *Jeżeli zbiory dobrze uporządkowane A i B są podobne, wówczas istnieje jedno tylko odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne A na B, zachowujące porządek.*

Dowód. Przypuśćmy bowiem, że istnieją dwa różne odwzorowania A na B, zachowujące porządek: φ i ψ. Istniałby wtedy element $a \epsilon A$, który przy odwzorowaniu φ przeszedłby na element $b' \epsilon B$, zaś przy ψ na element $b'' \epsilon B$, przy czym $b' \neq b''$. Wynika stąd, że odcinek złożony z elementów $b \prec b'$ byłby podobny od odcinka złożonego z elementów $b \prec b''$. Lecz to jest niemożliwe na mocy (3.1), gdyż $b' \neq b''$.

(3.3) *Jeżeli zbiory A i B są dobrze uporządkowane, wówczas jeden z nich jest podobny do pewnego odcinka drugiego.*

Dowód. Niech I będzie zbiorem takich elementów $a \in A$, że do każdego z nich istnieje w B taki element $b = \varphi(a)$, iż odcinki $\alpha \lessdot a$ i $\beta \lessdot b$ są podobne. Zbiór I jest oczywiście odcinkiem zbioru A, zaś $\varphi(a)$ odwzorowaniem, wzajemnie jednoznacznym i zachowującym porządek, odcinka I zbioru A na pewien odcinek J zbioru B. Odcinki I i J są zatem podobne. Przypuśćmy, że $I \neq A$ i $J \neq B$. Niech $a' \in A - I$ i $b' \in B - J$ będą najwcześniejszymi elementami, nie należącymi odpowiednio do I i J. Zachowując poprzednie znaczenie $\varphi(a)$ dla $a \lessdot a'$ i przyjmując $\varphi(a') = b'$, otrzymamy wzajemnie jednoznaczne i zachowujące porządek odwzorowanie odcinków $a \lessdot a'$ i $a \lessdot b'$ na siebie. Wynika stąd, że $a' \in I$, wbrew założeniu, że $a' \in A - I$. Zatem nie może być równocześnie $I \neq A$ i $J \neq B$. Albo więc $I = A$, a wtedy zbiór A jest podobny do odcinka J zbioru B, albo $J = B$, a wtedy zbiór B jest podobny do odcinka I zbioru A, c. b. d. d.

4. Twierdzenie o dobrym uporządkowaniu. Następujące twierdzenie znane jest ze względu na swą podstawową rolę w t. zw. Ogólnej teorii mnogości:

(4.1) ***Twierdzenie Zermeli.*** *Każdy zbiór można dobrze uporządkować.*

Dowód. Niech E będzie dowolnym zbiorem. Przyporządkujmy każdemu niepustemu podzbiorowi $A \subset E$ dowolny element $a \in A$ [1]) i oznaczmy go przez $F(A)$. Zatem:

$$F(A) \in A. \tag{1}$$

Niech R będzie rodziną wszystkich tych podzbiorów U zbioru E, które dają się dobrze uporządkować w taki sposób, żeby były spełnione warunki:

1^0 pierwszym elementem w U jest $F(E)$;

2^0 jeżeli $a \in U$ i I jest zbiorem elementów wcześniejszych od a w U, to $a = F(E - I)$.

Rodzina R jest niepusta, zawiera bowiem zbiór dobrze uporządkowany, złożony z elementów a_1 i a_2, gdzie $a_1 = F(E) \lessdot a_2 = F\big(E - (a_1)\big)$.

---

[1]) Istnienie przyporządkowania o tej własności opiera się na t. zw. *aksjomacie Zermeli* (znanym też pod nazwą *aksjomatu wyboru*).

Rodzina R ma następującą własność:

(2) *Jeżeli* $U_1 \epsilon R$ *i* $U_2 \epsilon R$, *wówczas albo* U_1 *jest odcinkiem zbioru* U_2, *albo* U_2 *jest odcinkiem zbioru* U_1.

Opierając się bowiem na twierdzeniu (3.3), możemy przyjąć, że np. U_1 jest podobny do pewnego odcinka J zbioru U_2. Gdyby było $U_1 \neq J$, to istniałby w U_1 najwcześniejszy element a taki, że odpowiadający mu element $b \epsilon U_2$ byłby różny od a, przy czym wobec 1^0 oczywiście a nie byłby najwcześniejszym elementem zbioru U_1. Zbiór I elementów wcześniejszych od a w zbiorze U_1 byłby więc identyczny ze zbiorem elementów wcześniejszych od b w zbiorze U_2. Na mocy 2^0 mielibyśmy zatem $a = F(E-I)$ i $b = F(E-I)$, skąd $a = b$ wbrew założeniu. A więc U_1 jest identyczne z odcinkiem J zbioru U_2, czyli własność (2) jest dowiedziona.

Niech teraz S będzie sumą wszystkich zbiorów rodziny R. O zbiorze S udowodnimy następującą własność:

(3) *Jeżeli* $a \epsilon S$, $b \epsilon S$ *i* $c \epsilon S$, *to:*

(i) *istnieje zbiór* $U \epsilon R$ *zawierający elementy* a, b, c.

(ii) *w każdym zbiorze* $U \epsilon R$, *zawierającym* a *i* b, *elementy te występują w tym samym porządku.*

Dowód warunku (i). Istnieją bowiem zbiory U_1, U_2, U_3 należące do R i zawierające odpowiednio elementy a, b, c. Z własności (2) rodziny R wynika, że jeden z tych zbiorów, np. U_3, posiada odcinki identyczne z U_1 i U_2. Zatem U_3 zawiera a, b i c.

Dowód warunku (ii). Jeżeli zbiory $U_1 \epsilon R$ i $U_2 \epsilon R$ zawierają a i b, to ponieważ jeden z nich, np. U_1, jest na mocy (2) identyczny z odcinkiem drugiego, więc a i b muszą w obu zbiorach U_1 i U_2 występować w tym samym porządku.

Własność (3) jest zatem dowiedziona.

Uporządkujmy teraz zbiór S w następujący sposób: jeżeli a i b należą do S, to niech $a \prec b$, gdy istnieje zbiór $U \epsilon R$, który zawiera a i b i w którym a jest wcześniejsze od b.

Z (i) i (ii) wynika, że jeżeli a i b należą do S, to albo $a \prec b$ albo $b \prec a$, oraz że jeżeli $a \prec b$, to nie może być $b \prec a$. Spełnione są więc pierwsze dwa warunki na to, by zbiór S był uporządkowany (str. 35).

Spełniony jest też warunek trzeci, t. zn. że $a \prec b$ i $b \prec c$ pociągają $a \prec c$. Istnieje bowiem $U \epsilon R$, zawierający a, b i c. W zbiorze U a jest wcześniejsze od b, zaś b wcześniejsze od c, zatem w U jest a wcześniejsze od c. Tem samem $a \prec c$ w S na mocy określenia.

Udowodniliśmy więc, że zbiór S jest uporządkowany.

Aby dowieść, że zbiór S jest dobrze uporządkowany, weźmy pod uwagę dowolny zbiór niepusty $G \subset S$ i dowolny element $a \epsilon G$. Istnieje więc zbiór $U \epsilon R$ zawierający a. Oznaczmy przez b najwcześniejszy element zbioru U, należący do G. Jeżeli $x \epsilon G$, to istnieje zbiór $U_1 \epsilon R$ zawierający b i x. Jeżeli $x \epsilon U$, to oczywiście $b \prec x$ lub $b = x$. Jeżeli zaś x non ϵU, to łatwo widzieć, że U jest identyczny z pewnym odcinkiem I zbioru U_1. Ponieważ $b \epsilon I$, zaś $x \epsilon U_1 - I$, więc znowu $b \prec x$ lub $b = x$. Udowodniliśmy zatem, że b jest najwcześniejszym elementem zbioru G. Ponieważ G było dowolne, więc *S jest zbiorem dobrze uporządkowanym.*

Udowodnimy teraz, że $S = E$. Przypuśćmy, że tak nie jest i niech $g = F(E - S)$. Na mocy (1) g nie należy do S. Oznaczmy przez V zbiór dobrze uporządkowany, który otrzymamy, dołączając do zbioru dobrze uporządkowanego S element g jako następujący po wszystkich elementach zbioru S.

Udowodnimy, że V ma obie własności 1^0 i 2^0 rodziny R.

Własność 1^0 jest spełniona, gdyż $F(E)$ jest najwcześniejszym elementem zbioru S, bo jest najwcześniejszym elementem każdego zbioru $U \epsilon R$. Z drugiej strony na mocy określenia elementu g:

(4) *Jeżeli $a \epsilon V$ i $a = g$, to własność 2^0 jest spełniona dla V.*

Załóżmy więc, że $a \epsilon V$ i $a \neq g$ oraz że $a \neq F(E)$. Weźmy pod uwagę dowolny zbiór $U \epsilon R$ zawierający a. Zbiór I elementów wcześniejszych od a w S jest oczywiście zbiorem elementów wcześniejszych od a w zbiorze U, który jest odcinkiem zbioru dobrze uporządkowanego S. Na mocy więc (4) mamy $a = F(E - I)$.

A więc zbiór dobrze uporządkowany V ma obie własności 1^0 i 2^0; zatem $V \epsilon R$, skąd $g \epsilon S$ wbrew założeniu.

Dowiedliśmy więc, że $S = E$, czyli że E da się dobrze uporządkować, c. b. d. d.

Z twierdzenia Zermeli wynika, że:

(4.2) *Dwa dowolne zbiory A i B są porównywalne, t. zn. że albo są równej mocy, albo jeden z nich jest mocy wyższej niż drugi.*

D o w ó d. Na mocy bowiem tw. Zermeli możemy zbiory A i B dobrze uporządkować. Z tw. zaś (3.3) wynika, że jeden z tych zbiorów jest równej mocy z odcinkiem, a więc podzbiorem drugiego. To zaś na mocy tw: Bernsteina (str. 19) dowodzi ich porównywalności.

5. Indukcja pozaskończona. *Zasadą indukcji pozaskończonej* nazywamy następujące twierdzenie:

Niech E będzie zbiorem dobrze uporządkowanym, zaś $\mathfrak{W}$ pewną własnością, którą elementy zbioru E mogą mieć lub nie. Wówczas:

Jeżeli są spełnione następujące warunki:

(1) *pierwszy element zbioru E ma własność $\mathfrak{W}$,*

(2) *jeżeli z tego, że wszystkie elementy wcześniejsze od pewnego elementu a zbioru E mają własność $\mathfrak{W}$, wynika, że a posiada również własność $\mathfrak{W}$,*

to wszystkie elementy zbioru E mają własność $\mathfrak{W}$.

D o w ó d. Załóżmy, że dla własności $\mathfrak{W}$ zachodzą warunki (1) i (2), przypuśćmy jednak, że nie wszystkie elementy zbioru dobrze uporządkowanego E mają własność $\mathfrak{W}$.

Oznaczmy przez a najwcześniejszy element zbioru E, który tej własności nie posiada. Na mocy (1) a nie jest w zbiorze E elementem pierwszym. Każdy zaś element $\xi \prec a$ ma własność $\mathfrak{W}$, zatem z (2) wynika, że a ma również własność $\mathfrak{W}$. Doszliśmy więc do sprzeczności i tym samym udowodniliśmy prawdziwość zasady indukcji pozaskończonej.

Zasada indukcji pozaskończonej jest uogólnieniem *zasady indukcji zupełnej* dla ciągu liczb naturalnych, czyli t. zw. rozumowania z n na $n+1$.

Zasada indukcji pozaskończonej, wraz z twierdzeniem Zermeli o możliwości dobrego uporządkowania każdego zbioru, jest ważną i często używaną metodą dowodu twierdzeń.