ROZDZIAŁ II

GRANICA CIĄGU

§ 1. Przedziały

1. Przedziały skończone. *Przedziałem* albo *przedziałem skończonym* nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x, określony przez jedną z nierówności:

$$(1)\qquad a \leqslant x \leqslant b, \qquad\qquad (2)\qquad a < x < b,$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a < b$.

Przedziały (1) i (2) oznaczamy ogólnie przez $[a, b]$.

Liczby a i b nazywamy *końcami* przedziału.

Przedział (1) nazywamy przedziałem *zamkniętym* lub *odcinkiem* i oznaczamy go przez $\langle a, b\rangle$, zaś przedział (2) nazywamy *otwartym* i oznaczamy go przez $\rangle a, b\langle$.

Wnętrzem przedziału $[a, b]$ nazywamy zbiór punktów spełniających nierówność (2).

W szczególności więc przedział otwarty jest swym własnym wnętrzem, jako też wnętrzem przedziału zamkniętego o tych samych końcach.

Przedziałem *wymiernym* nazywamy przedział $[a, b]$, w którym oba końce a i b są liczbami wymiernymi.

Rodzina wszystkich przedziałów wymiernych osi liczbowej jest przeliczalna (p. przykład 2, str. 26).

Dwa przedziały, których wnętrza nie mają punktów wspólnych, nazywamy *nie zachodzącymi na siebie*.

Przedziały nie zachodzące na siebie i mające koniec wspólny nazywamy *stykającymi się*.

(1.1) *Każdy zbiór przedziałów nie zachodzących na siebie jest co najwyżej przeliczalny.*

Możemy bowiem każdemu przedziałowi danego zbioru przyporządkować liczbę wymierną, która należy do jego wnętrza. Otrzymamy w ten sposób odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne na część zbioru liczb wymiernych, który jest przeliczalny (str. 23).

Dwa przedziały zamknięte bądź (a) nie mają punktu wspólnego, bądź (b) mają jeden tylko punkt wspólny, który jest ich końcem, bądź wreszcie (c) zachodzą na siebie i wtedy ich punkty wspólne tworzą przedział zamknięty. To samo można powiedzieć o zbiorze punktów wspólnych skończonej ilości przedziałów zamkniętych.

Otoczeniem liczby a nazywamy każdy przedział zawierający a w swoim wnętrzu.

Długością przedziału $[a,b]$ nazywamy różnicę $b-a$.

2. Przedziały nieskończone. *Przedziałem nieskończonym* nazywamy zbiór liczb x określony przez jedną z nierówności:

(3) $a\leqslant x$, (4) $a<x$, (5) $x\leqslant a$, (6) $x<a$,

gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Przedziały powyższe oznaczamy odpowiednio: (3) i (4) przez $[a,+\infty]$, zaś (5) i (6) przez $[-\infty,a]$.

Przedziały (3) i (5) nazywamy *zamkniętymi* i oznaczamy odpowiednio przez $\langle a,+\infty\rangle$ i $\langle-\infty,a\rangle$, przedziały zaś (4) i (6) *otwartymi* i oznaczamy przez $\rangle a,+\infty\rangle$ i $\langle-\infty,a\langle$.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nazywamy także przedziałem nieskończonym i oznaczamy przez $[-\infty,+\infty]$.

Pisząc jednak „przedział", mamy zawsze na myśli przedział $[a,b]$, gdzie a i b są liczbami skończonymi.

3. Część wspólna ciągu przedziałów. Udowodnimy twierdzenie:

(3.1) *Jeżeli ciąg przedziałów zamkniętych $\{\langle a_n,b_n\rangle\}$ ma tę własność, że każdy z nich zawiera następny, wówczas istnieje co najmniej jedna liczba należąca do wszystkich przedziałów.*

Dowód. Z założenia wynika, że

(7) $$a_n<b_k \quad \text{dla każdego } n \text{ i każdego } k.$$

Utwórzmy następujący podział zbioru liczb rzeczywistych na dwa podzbiory A i B. Do zbioru A zaliczmy wszystkie liczby x, które spełniają nierówności

(8) $$x<b_k \quad \text{dla } k=1,2,\ldots,$$

a do zbioru B wszystkie pozostałe liczby rzeczywiste. Udowodnimy, że powyższy podział jest przekrojem. Z określenia podziału wynika od razu warunek 1^0 definicji przekroju (str. 2). Załóżmy teraz, że $x \epsilon A$ i $y \epsilon B$. Zatem y nie spełnia nierówności (8), więc istnieje takie k, że $y \geqslant b_k$. Stąd na mocy (8) dostajemy $x < y$ czyli warunek 2^0 (str. 2). Warunek 3^0 definicji przekroju jest również spełniony, gdyż $a_1 \epsilon A$ i $b_1 \epsilon B$.

Z aksjomatu Dedekinda (str. 2) wynika więc, że albo w A istnieje liczba największa, albo w B najmniejsza. Załóżmy najpierw, że w A istnieje liczba największa x. Liczba ta, jako należąca do A, spełnia nierówność (8). Zarazem $x \geqslant a_n$ dla każdego n. Gdyby bowiem tak nie było, wówczas dla pewnego n mielibyśmy $x < a_n$ i dobierając x' tak, by $x < x' < a_n$, mielibyśmy na mocy (7) $x' < b_k$ dla każdego k, więc z (8) i z określenia zbioru A wynikałoby, że $x' \epsilon A$, i x nie byłoby w A liczbą największą.

Udowodniliśmy więc, że $a_n \leqslant x < b_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Liczba x należy więc do wszystkich przedziałów $\langle a_n, b_n \rangle$.

Podobnie dowodzi się, że jeżeli w B istnieje liczba najmniejsza, to jest ona wspólnym elementem wszystkich przedziałów $\langle a_n, b_n \rangle$.

§ 2. Kresy zbioru

1. Zbiory ograniczone. Zbiór liczb nazywamy *ograniczonym*, jeżeli zawarty jest w jakimś przedziale skończonym.

Zbiór nazywamy *ograniczonym z góry*, jeżeli istnieje liczba M, większa od wszystkich liczb tego zbioru, zaś *ograniczonym z dołu*, jeżeli istnieje liczba m, mniejsza od wszystkich liczb tego zbioru.

Zbiór ograniczony z góry i z dołu jest oczywiście ograniczonym i na odwrót.

2. Kres górny. *Kresem górnym* zbioru E nazywamy liczbę K (skończoną lub nie), spełniającą warunki:

$\bar{1}$. Jeżeli $a \epsilon E$, to $a \leqslant K$,

$\bar{2}$. Jeżeli $K' < K$, to istnieje taka liczba $a \epsilon E$, że $K' < a$.

Jeżeli zbiór E nie jest ograniczony z góry, wówczas oczywiście $K = +\infty$ jest jego kresem górnym.

(2.1) *Każdy zbiór ograniczony z góry posiada kres górny, który jest liczbą skończoną.*

Dowód. Utwórzmy podział zbioru wszystkich liczb rzeczywistych na dwa zbiory A i B, zaliczając do B wszystkie liczby większe od każdej liczby danego zbioru E, a do A liczby pozostałe. Łatwo stwierdzić, że podział ten jest przekrojem. Z aksjomatu Dedekinda (str. 2) wynika, że istnieje pewna liczba K, która jest największą w A albo najmniejszą w B.

Załóżmy, że K jest największą w A. Dla każdego $\varepsilon>0$ liczba $K+\varepsilon$ należy więc już do B; zatem według określenia jest $a<K+\varepsilon$ dla $a\epsilon E$. Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, więc wynika stąd warunek $\overline{1}$.

Niech teraz $K'<K$. Gdyby warunek $\overline{2}$ nie był spełniony, wówczas dla każdej liczby $a\epsilon E$ mielibyśmy $a\leqslant K'$, a więc $a<K$, i K należałoby do B wbrew przypuszczeniu. Zatem K spełnia warunki $\overline{1}$ i $\overline{2}$ czyli jest kresem górnym.

Podobnie dowodzi się tego przy założeniu, że K jest najmniejszą liczbą w zbiorze B.

3. Kres dolny. *Kres dolny* zbioru E określa się analogicznie, jako liczbę k (skończoną lub nie), spełniającą warunki:

$\underline{1}$. Jeżeli $a\epsilon E$, to $k\leqslant a$;

$\underline{2}$. Jeżeli $k<k'$, to istnieje takie $a\epsilon E$, że $a<k'$.

Jeżeli zbiór nie jest ograniczony z dołu, wówczas jego kresem dolnym jest oczywiście $k=-\infty$.

W sposób podobny do dowodu tw. (2.1) dowodzi się twierdzenia:

(3.1) *Każdy zbiór ograniczony z dołu posiada kres dolny, który jest liczbą skończoną.*

§ 3. Granice

1. Granica ciągu. Ciąg liczb $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ nazywamy *rosnącym* lub *nie malejącym*, jeżeli $a_n\leqslant a_{n+1}$ dla $n=1,2,\dots$; ciąg ten nazywamy *ściśle rosnącym*, jeżeli $a_n<a_{n+1}$ dla $n=1,2,\dots$

Podobnie, ciąg nazywamy *malejącym* lub *nie rosnącym*, jeżeli $a_n\geqslant a_{n+1}$ dla $n=1,2,\dots$, zaś *ściśle malejącym*, jeżeli $a_n>a_{n+1}$ dla $n=1,2,\dots$

Ciągi rosnące, ściśle rosnące, malejące i ściśle malejące nazywamy *monotonicznymi*.

Ciąg nazywamy *ograniczonym*, jeżeli istnieje przedział, w którym leżą wszystkie wyrazy tego ciągu, czyli jeżeli istnieje taka liczba M (skończona), że $|a_n| \leqslant M$ dla $n=1,2,\ldots$

Jeżeli ciąg liczb naturalnych $\{n_k\}_{k=1,2,\ldots}$ jest ciągiem ściśle rosnącym, wówczas ciąg $\{a_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ nazywamy *ciągiem częściowym* ciągu $\{a_n\}$.

O ciągach $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ mówimy, że *różnią się tylko porządkiem wyrazów*, jeżeli każda liczba występująca w ciągu $\{a_n\}$ występuje taką samą ilość razy w ciągu $\{b_n\}$ i na odwrót.

Jeżeli w ciągu liczb naturalnych $\{n_k\}_{k=1,2,\ldots}$ występuje każda liczba naturalna i przy tym tylko raz jeden, wówczas ciągi $\{a_n\}$ i $\{a_{n_k}\}$ różnią się tylko porządkiem wyrazów.

Określenie granicy. Niech $\{a_n\}$ będzie dowolnym ciągiem liczb. Liczbę g nazywamy *granicą* ciągu $\{a_n\}$, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba naturalna N, że

(1) $$|a_n-g| \leqslant \varepsilon \quad \text{dla każdego} \quad n \geqslant N.$$

Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy wtedy *zbieżnym* do granicy g albo wprost *ciągiem zbieżnym*.

Mówimy, że *granicą ciągu* $\{a_n\}$ *jest* $+\infty$, jeżeli do każdej liczby skończonej M istnieje takie N, że

(2) $$a_n \geqslant M \quad \text{dla każdego} \quad n \geqslant N.$$

Podobnie określamy $-\infty$ jako granicę i mówimy w tych przypadkach, że ciąg jest *zbieżny do* $+\infty$ (*zbieżny do* $-\infty$).

Zbieżność ciągu $\{a_n\}$ do g zapisujemy w postaci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \text{lub} \quad a_n \to g \quad dla \quad n\to\infty,$$

a zbieżność tego ciągu do $\pm\infty$ w postaci:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \quad \text{lub} \quad a_n \to \pm\infty \quad dla \quad n\to\infty.$$

2. Warunki zbieżności. Zachodzi następujące:

(2.1) ***Twierdzenie Cauchy'ego.*** *Następujący warunek, zwany warunkiem Cauchy'ego, jest koniecznym i dostatecznym na to, by ciąg $\{a_n\}$ był zbieżny (do granicy skończonej):*

Do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba N, że

(3) $$|a_p-a_q| \leqslant \varepsilon \quad dla\ wszystkich \quad p \geqslant N \ i \ q \geqslant N.$$

Dowód. Załóżmy, że g (liczba skończona) jest granicą ciągu $\{a_n\}$. Zatem do dowolnej liczby $\varepsilon>0$ istnieje takie N, że $|a_n-g|\leqslant\varepsilon/2$ dla $n\geqslant N$. Jeżeli więc $p\geqslant N$ i $q\geqslant N$, wówczas $|a_p-g|\leqslant\varepsilon/2$ i $|a_q-g|\leqslant\varepsilon/2$ czyli $|a_p-a_q|\leqslant|a_p-g|+|a_q-g|\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. Warunek Cauchy'ego jest więc konieczny.

Załóżmy teraz, że ciąg spełnia warunek Cauchy'ego. Dla $\varepsilon=1/2^k$ (gdzie k jest dowolną liczbą naturalną) istnieje zatem takie N_k, że

$$|a_p-a_q|\leqslant 1/2^k \quad \text{dla} \quad p\geqslant N_k \quad \text{i} \quad q\geqslant N_k.$$

W szczególności więc dla $p=N_k$ i $q=n$ dostaniemy

$$(4) \qquad |a_{N_k}-a_n|\leqslant 1/2^k \quad \text{dla wszelkich} \quad n\geqslant N_k.$$

Oznaczmy przez I_k odcinek $\langle a_{N_k}-1/2^k,\ a_{N_k}+1/2^k\rangle$. Z (4) wynika, że I_k zawiera wszystkie wyrazy a_n o wskaźnikach $n\geqslant N_k$. Jeżeli zatem przez N oznaczymy największą z liczb $N_1,N_2,\dots,N_k$, to część wspólna $\Pi_k=\prod_{n=1}^{k} I_n$ odcinków $I_1,I_2,\dots,I_k$ zawiera wszystkie wyrazy a_n o wskaźniku $n\geqslant N$. Ale Π_k jest przedziałem zamkniętym albo punktem (ob. (b) i (c) str. 45). Jeżeli Π_k redukuje się do punktu g, to oczywiście g jest granicą ciągu, gdyż mamy $a_n=g$ dla wszelkich $n\geqslant N$. Jeżeli zaś Π_k jest dla każdego k przedziałem zamkniętym, to ponieważ Π_k zawiera Π_{k+1}, więc na mocy tw. (3.1), str. 45, istnieje liczba g należąca do wszystkich przedziałów Π_k dla $k=1,2,\dots$ Udowodnimy, że g jest granicą ciągu. Weźmy pod uwagę dowolne $\varepsilon>0$ i wyznaczmy taką liczbę naturalną k, by $\varepsilon\geqslant 1/2^{k-1}$. Ponieważ $\Pi_k\subset I_k$, więc długość przedziału Π_k jest nie większa od długości przedziału I_k, t. j. od $1/2^{k-1}$. Z uwagi na to, że Π_k zawiera g i wszystkie wyrazy a_n o wskaźniku $n\geqslant N$ (gdzie N jest największą z liczb $N_1,N_2,\dots,N_k$), dostajemy więc $|a_n-g|\leqslant 1/2^{k-1}\leqslant\varepsilon$ dla wszelkich $n\geqslant N$. A zatem g (liczba skończona) jest granicą ciągu $\{a_n\}$. Tem samem udowodniliśmy, że warunek Cauchy'ego jest zarazem dostateczny.

(2.2) *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny. Jeżeli ciąg ten jest rosnący, to granicą jest kres górny ciągu; jeżeli zaś jest malejący, to granicą jest kres dolny ciągu.*

Dowód. Niech $\{a_k\}$ będzie ciągiem ograniczonym i rosnącym. Zbiór liczb występujących w tym ciągu, jako zbiór ograniczony, ma na mocy tw. (2.1), str. 46, skończony kres górny K. Udowodnimy, że $a_n\to K$ dla $n\to\infty$.

Z warunku $\bar{1}$, str. 46, wynika, że

(5) $$a_n \leqslant K \quad \text{dla każdego } n=1,2,\ldots$$

Weźmy pod uwagę dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i niech $K' = K - \varepsilon$. Z warunku $\bar{2}$, str. 46, wynika, że istnieje w ciągu $\{a_n\}$ wyraz a_N, dla którego

(6) $$K - \varepsilon = K' < a_N.$$

Z (5) i (6) wynika łatwo, że $0 \leqslant K - a_n \leqslant \varepsilon$ dla $n > N$. A zatem K jest granicą ciągu $\{a_n\}$.

(2.3) *Jeżeli ciąg monotoniczny* $\{a_n\}$ *nie jest ograniczony, to mamy oczywiście* $a_n \to +\infty$, *gdy ciąg jest rosnący, zaś* $a_n \to -\infty$, *gdy ciąg jest malejący.*

Równie łatwo dowodzi się następujących twierdzeń:

(2.4) *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

(2.5) *Każdy ciąg częściowy ciągu zbieżnego* (do granicy skończonej lub nieskończonej) *jest ciągiem zbieżnym do tej samej granicy.*

(2.6) *Jeżeli w ciągu zbieżnym* (do granicy skończonej lub nieskończonej) *zmienimy porządek wyrazów, otrzymamy ciąg zbieżny do tej samej granicy.*

3. Działania na ciągach. Dla działań na ciągach zachodzi twierdzenie:

(3.1) *Jeżeli* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *są ciągami zbieżnymi, wówczas ciągi* $\{a_n \pm b_n\}$ *i* $\{a_n b_n\}$ *są ciągami zbieżnymi, przy czym:*

(7) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

(8) $$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ *dla* $n=1,2,\ldots$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *wówczas również ciąg* $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ *jest zbieżny i*

(9) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Odpowiednie twierdzenia można udowodnić także dla ciągów zbieżnych do $\pm\infty$.

4. Szeregi. *Szeregiem* nazywamy ciąg *sum częściowych* dowolnego ciągu danego $\{a_n\}$, t. j. ciąg sum $\{s_n\}_{n=1,2,\ldots}$, gdzie $s_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$. Szereg oznaczamy przez

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{10}$$

Jeżeli $\{s_n\}$ jest ciągiem zbieżnym, wówczas granicę jego nazywamy *sumą szeregu* (10).

Przyjmujemy, że czytelnikowi są znane główne twierdzenia z Teorii szeregów [1]).

5. Punkt graniczny ciągu. Liczbę g (skończoną lub nie) nazywamy *punktem granicznym* ciągu $\{a_n\}$, jeżeli jakiś jego ciąg częściowy $\{a_{n_k}\}$ jest zbieżny do g.

Np. punktami granicznymi ciągu

$$\left\{\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ldots\right\}$$

są liczby 1 i 0.

W szczególności, liczba powtarzająca się w ciągu nieskończenie wiele razy jest jego punktem granicznym.

Np. liczby 1 i 0 są punktami granicznymi ciągu $\{1,0,1,0,\ldots\}$. Oczywiście, jeżeli $a_n \to g$ dla $n \to \infty$, to g jest punktem granicznym ciągu $\{a_n\}$.

(5.1) *Jeżeli dla każdego otoczenia liczby g istnieje nieskończenie wiele takich n, że a_n należy do tego otoczenia, to g jest punktem granicznym ciągu $\{a_n\}$.*

Niech bowiem a_{n_1} będzie dowolnym elementem z otoczenia $[g-1,\ g+1]$, a_{n_2} takim elementem z otoczenia $[g-\frac{1}{2},\ g+\frac{1}{2}]$, że $n_2>n_1$, a_{n_3} takim elementem z otoczenia $[g-\frac{1}{3},\ g+\frac{1}{3}]$, że $n_3>n_2$ i t. d. Mamy oczywiście $|g-a_{n_k}|\leqslant 1/k$, zatem $a_{n_k}\to g$ dla $k\to\infty$.

(5.2) *Każdy ciąg nieskończony ma co najmniej jeden punkt graniczny.*

Dowód. Jeżeli ciąg jest nieograniczony, to oczywiście punktem granicznym jest $+\infty$ lub $-\infty$. Załóżmy więc, że $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, którego wyrazy leżą w przedziale $[m, M]$. Oznaczmy przez E zbiór takich a, że w przedziale $[m-1, a]$ istnieją wyrazy a_n o nieskończenie wielu wskaźnikach n. Zbiór E jest niepusty, gdyż $M \epsilon E$; jest również ograniczony z dołu, gdyż $m-1<a$ dla każdego $a \epsilon E$.

[1]) Ob. np. W. Sierpiński, *Działania nieskończone,* Monografie Matematyczne, Tom XIII, Warszawa-Wrocław 1946.

Na mocy tw. (3.1), str. 47, zbiór E ma kres dolny k, który jest liczbą skończoną. Dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje więc $a \epsilon E$ takie, że $a<k+\varepsilon$ (por. 2, str. 47). Z określenia zbioru E wynika, że $k+\varepsilon \epsilon E$, zatem w przedziale $[m-1, k+\varepsilon]$ istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Ponieważ $k-\varepsilon<k$, więc $k-\varepsilon$ non ϵE; zatem w przedziale $[m-1, k-\varepsilon]$ istnieje co najwyżej skończona liczba wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Wynika stąd, że w przedziale $[k-\varepsilon, k+\varepsilon]$ istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$. Z uwagi na to, że ε jest dowolną liczbą dodatnią, k jest punktem granicznym.

(5.3) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by ciąg był zbieżny do granicy (skończonej lub nieskończonej), jest żeby miał tylko jeden punkt graniczny.*

Dowód. Udowodnimy to najpierw dla ciągów ograniczonych.

Jeżeli g jest granicą ciągu ograniczonego $\{a_n\}$, to poza przedziałem $[g-\varepsilon, g+\varepsilon]$, gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią, istnieje tylko skończona liczba wyrazów ciągu; wszystkie zatem punkty graniczne leżą w przedziale $[g-\varepsilon, g+\varepsilon]$. Z dowolności zaś liczby ε wynika, że g jest jedynym punktem granicznym ciągu $\{a_n\}$. Warunek jest więc konieczny.

Niech teraz g będzie jedynym punktem granicznym ciągu ograniczonego $\{a_n\}$. Weźmy dowolne $\varepsilon>0$. Poza przedziałem $[g-\varepsilon, g+\varepsilon]$ znajduje się co najwyżej skończona liczba wyrazów ciągu. W przeciwnym bowiem razie istniałby według tw. (5.2) punkt graniczny g' taki, że bądź $g'\leqslant g-\varepsilon$, bądź $g'\geqslant g+\varepsilon$. W obu przypadkach mielibyśmy dwa różne punkty graniczne g' i g wbrew założeniu. Oznaczając przez N największy wskaźnik wyrazów, znajdujących się poza przedziałem $[g-\varepsilon, g+\varepsilon]$, mamy $g-\varepsilon\leqslant a_n\leqslant g+\varepsilon$ dla $n>N$. Zatem g jest granicą ciągu $\{a_n\}$. Warunek jest więc wystarczający.

Załóżmy z kolei, że $\{a_n\}$ jest ciągiem nieograniczonym.

Jeżeli $a_n\to+\infty$, wówczas z określenia granicy wynika, że do dowolnej liczby A istnieje takie N, iż $A\leqslant a_n$ dla $n\geqslant N$. Zatem w przedziale $[-\infty, A]$ istnieje tylko skończona liczba wyrazów ciągu, a więc wszystkie punkty graniczne leżą w przedziale $[A, +\infty]$. Ponieważ A jest liczbą dowolną, więc jedynym punktem granicznym jest $+\infty$. Podobnie dowodzi się konieczności warunku, gdy $a_n\to-\infty$.

Niech teraz $+\infty$ będzie jedynym punktem granicznym ciągu $\{a_n\}$. Dla dowolnej liczby A w przedziale $[-\infty, A]$ leży więc tylko skończona liczba wyrazów tego ciągu. W przeciwnym bowiem razie istniałby punkt graniczny $g \leqslant A$. Zatem istnieje liczba N taka, że dla $n > N$ jest $A \leqslant a_n$. To dowodzi, że $a_n \to +\infty$. Podobnie dowodzi się, że warunek jest wystarczający, gdy jedynym punktem granicznym ciągu jest $-\infty$.

Z twierdzeń (5.2) i (5.3) wynika, że

(5.4) *Każdy ciąg zawiera ciąg częściowy, zbieżny do granicy skończonej lub nieskończonej.*

(5.5) *Każdy ciąg posiada największy i najmniejszy punkt graniczny.*

Dowód. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny (do liczby skończonej lub nieskończonej), to granica g jest na mocy tw. (5.2) zarazem największym i najmniejszym jego punktem granicznym. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ nie jest ograniczony z góry, to największym jego punktem granicznym jest $+\infty$; jeżeli zaś nie jest ograniczony z dołu, to najmniejszym jego punktem granicznym jest $-\infty$.

Załóżmy więc, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry i nie jest zbieżny. Oznaczmy przez G zbiór jego punktów granicznych różnych od $-\infty$. Oczywiście G jest zbiorem niepustym (gdyż ciąg $\{a_n\}$ ma na zasadzie tw. (5.3) co najmniej dwa punkty graniczne) i ograniczonym z góry. Oznaczmy przez K kres górny zbioru G. Jeżeli więc $g \epsilon G$, t. zn. jeżeli g jest punktem granicznym ciągu $\{a_n\}$, to $g \leqslant K$. Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Z określenia kresu górnego (str. 46) wynika, że w zbiorze G istnieje liczba $g > K - \varepsilon$. Ponieważ g jest punktem granicznym ciągu $\{a_n\}$ i leży w przedziale $\rangle K-\varepsilon, K+\varepsilon\langle$, więc w przedziale tym istnieje nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Z dowolności liczby ε wynika, że K jest punktem granicznym ciągu $\{a_n\}$, a więc oczywiście i największym punktem granicznym tego ciągu.

Podobnie dowodzi się istnienia najmniejszego punktu granicznego.

6. Granica górna i dolna ciągu. Największy punkt graniczny ciągu nazywamy *granicą górną* (limes superior), najmniejszy zaś *granicą dolną* (limes inferior) ciągu. Jeżeli L jest granicą górną, a l granicą dolną ciągu $\{a_n\}$, to piszemy:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = L \quad \text{lub} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{lub} \quad a_n \uparrow L \quad \text{dla} \quad n \to \infty.$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = l \quad \text{lub} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = l \quad \text{lub} \quad a_n \downarrow l \quad \text{dla} \quad n \to \infty.$$

Oczywiście

$$(6.1)\qquad \varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

Z twierdzenia (5.3), str. 52, wynika łatwo następujące twierdzenie:

(6.2) *Jeżeli granice górna i dolna są równe, to ciąg jest zbieżny i*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

(6.3) *Granica górna L i dolna l ciągu $\{a_n\}$ spełniają warunki następujące:*

(i) *Jeżeli $L < L'$, wówczas tylko co najwyżej skończona liczba wyrazów $\{a_n\}$ spełnia nierówność $L' < a_n$;*

(ii) *Jeżeli $L'' < L$, wówczas nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{a_n\}$ spełnia nierówność $L'' < a_n$;*

(i′) *Jeżeli $l'' < l$, wówczas tylko co najwyżej skończona liczba wyrazów ciągu spełnia nierówność $a_n < l''$;*

(ii′) *Jeżeli $l < l'$, wówczas nieskończenie wiele wyrazów ciągu spełnia nierówność $a_n < l''$.*

Dowód. Gdyby nieskończenie wiele wyrazów spełniało nierówność $a_n > L'$, wówczas istniałby punkt graniczny $g \geqslant L' > L$, wbrew założeniu, że L jest punktem granicznym największym. Warunek (i) jest więc spełniony. Warunek (ii) wynika stąd, że L jest punktem granicznym.

Podobnie dowodzi się warunków (i′) i (ii′).

Łatwo można udowodnić, że jeżeli jakaś liczba L spełnia warunki (i) i (ii), to liczba ta jest granicą górną ciągu $\{a_n\}$. Podobnie, jeżeli jakaś liczba l spełnia warunki (i′) i (ii′), to l jest granicą dolną ciągu $\{a_n\}$.

(6.4) *Niech:*

$$(11)\qquad \alpha_{n,r} = \max\{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+r}\}, \qquad \beta_{n,r} = \min\{a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+r}\}.$$

Jeżeli ciąg $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ jest ograniczony z góry, to

$$(12)\qquad \lim_{n\to\infty}(\lim_{r\to\infty} \alpha_{n,r}) = \varlimsup_{n\to\infty} a_n;$$

jeżeli zaś ciąg ten jest ograniczony z dołu, to

$$(13)\qquad \lim_{n\to\infty}(\lim_{r\to\infty} \beta_{n,r}) = \varliminf_{n\to\infty} a_n.$$

Dowód. Załóżmy, że $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym z góry. Z (11) łatwo wynika, że

(14) $$a_{n,r} \leqslant a_{n,r+1}.$$

Zatem ciąg $\{a_{n,r}\}_{r=1,2,\dots}$ przy stałym n jest ciągiem zbieżnym. Niech

(15) $$g_n = \lim_{r\to\infty} a_{n,r}.$$

Z (14) wynika na mocy tw. (2.2), str. 49, że g_n jest kresem górnym liczb $\{a_{n,r}\}_{r=1,2,\dots}$, więc na mocy (11) g_n jest kresem górnym liczb $a_n, a_{n+1}, \dots$ Zatem dla każdego naturalnego n mamy:

(16) $$g_n \geqslant g_{n+1}.$$

Ciąg $\{g_n\}$, jako ciąg malejący, jest zbieżny do liczby skończonej lub do $-\infty$. Niech

(17) $$L = \lim_{n\to\infty} g_n.$$

Ponieważ g_n jest kresem górnym liczb $a_n, a_{n+1}, \dots$, więc $g_n \geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Zatem na mocy (17):

(18) $$L \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Z drugiej strony, jeżeli

(19) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n < L',$$

wówczas na mocy warunku (i) tw. (6.3) istnieje takie N, że dla $k>N$ jest $a_k \leqslant L'$. Wynika stąd na mocy (11), że dla każdego $n>N$ jest $a_{n,r} \leqslant L'$ przy wszelkim r, zatem z (15) mamy $g_n \leqslant L'$ dla $n>N$, więc z (17) dostajemy $L \leqslant L'$. Ponieważ L' jest dowolną liczbą spełniającą nierówność (19), więc

$$L \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Stąd i z (18) otrzymujemy równość (12) na podstawie (15) i (17). Podobnie dowodzi się równości (13).

Z określenia granic górnej i dolnej wynikają łatwo następujące wzory:

(6.5) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-a_n), \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-a_n).$$

(6.6) *Jeżeli* $a_n \leqslant b_n$ *dla* $n=1,2,\dots$, *wówczas*:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

(6.7) *Jeżeli* $m \geqslant 0$, *wówczas*:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(ma_n) = m \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(ma_n) = m \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Udowodnimy obecnie, że:

(6.8) *Jeżeli granice górne ciągów* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *są skończone, wówczas*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

Jeżeli ponadto $b_n \geqslant 0$ *i* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \geqslant 0$, *to*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

Dowód. Oznaczmy przez L, L_1 i L_2 odpowiednio granice górne ciągów $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$. Niech $\varepsilon > 0$. Z określenia granicy górnej wynika, że w ciągach $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ istnieje tylko skończona liczba wyrazów spełniających nierówności $a_n > L_1+\varepsilon$ i $b_n > L_2+\varepsilon$. Istnieje zatem takie N, że dla $n > N$ jest $a_n \leqslant L_1+\varepsilon$ i $b_n \leqslant L_2+\varepsilon$, więc $a_n+b_n \leqslant L_1+L_2+2\varepsilon$. Stąd $L \leqslant L_1+L_2+2\varepsilon$. Z dowolności liczby ε wynika, że $L \leqslant L_1+L_2$; pierwsza część tw. (6.8) jest więc udowodniona.

Podobnie dowodzi się jego drugiej części oraz twierdzenia:

(6.9) *Jeżeli granice dolne ciągów* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *są skończone, to*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n+b_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

Jeżeli ponadto $b_n \geqslant 0$ *i* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n > 0$, *to*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n b_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n,$$

Uwaga. Wzory (6.8) i (6.9) zachodzą również w przypadku, gdy granice są liczbami nieskończonymi, pod warunkiem, że działania po prawych stronach nierówności są określone umownie przez podane we Wstępie wzory (2) - (6), str. 3. Wyjątkowymi przypadkami, do których wzory (6.8) i (6.9) nie stosują się, są więc te, w których prawe strony nierówności przyjmują postać: w (6.8) $+\infty-\infty$ lub $-\infty+\infty$, a w (6.9) $(\pm\infty)0$ lub $0(\pm\infty)$.