ROZDZIAŁ IV

FUNKCJE W $\mathcal{E}^m$

§ 1. Funkcje ciągłe.

1. Granica funkcji. Niech w pewnym zbiorze E przestrzeni $\mathcal{E}^m$ określona będzie funkcja $f(p)$ o wartościach rzeczywistych. Wartość funkcji $f(p)$ zależy więc od wszystkich współrzędnych $x_1,\dots,x_m$ punktu p, możemy ją zatem uważać za funkcję m zmiennych rzeczywistych $x_1,\dots,x_m$. Zaznaczamy to, pisząc

$$f(p) = f(x_1,\dots,x_m).$$

Niech p_0 będzie punktem skupienia zbioru E.

Mówimy, że liczba a jest *granicą* funkcji $f(p)$ dla p dążącego do p_0 w zbiorze E, i piszemy $a = \lim_{E}\limits_{p\to p_0} f(p)$, jeżeli dla każdego ciągu $\{p_n\}$, złożonego z różnych od p_0 punktów zbioru E i dążącego do p_0, jest

$$\lim_{E}\limits_{n\to\infty} f(p_n) = a.$$

(1.1) *Na to, by liczba a była granicą funkcji f(p) dla p dążącego do p_0 w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, żeby był spełniony następujący warunek:*

Do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że nierówność $0 < \varrho(p,p_0) < \delta$ pociąga za sobą nierówność $|f(p)-a| < \varepsilon$ dla każdego punktu $p \in E$.

Dowód. Okażemy, że warunek jest konieczny. Gdyby nie był on spełniony, to dla pewnej liczby $\varepsilon_0 > 0$ istniałby w każdej kuli $K(p_0,\delta)$ taki różny od p_0 punkt $p \in E$, że $|f(p)-a| \geqslant \varepsilon_0$. Biorąc kolejno $\delta = 1, 1/2, \dots$ dostaniemy ciąg $\{p_n\}$ punktów zbioru E, różnych od p_0 i takich, że $\varrho(p_n,p_0) < 1/n$, a $|f(p_n)-a| \geqslant \varepsilon_0$. Ciąg $\{p_n\}$ dążyłby więc do p_0 w zbiorze E, a mimo to ciąg $\{f_n(p)\}$ nie dążyłby do a, wbrew założeniu.

Dowód dostateczności warunku pozostawiamy czytelnikowi.

Warunek twierdzenia (1.1) możemy napisać symbolicznie w postaci:

$$\prod_{\varepsilon>0} \sum_{\delta>0} \prod_{p \in E} [(0 < \varrho(p,p_0) < \delta) \rightarrow (|f(p) - a| < \varepsilon)].$$

Podobnie można łatwo okazać, opierając się na kryterium Cauchy'ego (str. 78), że

(1.2) *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby istniała granica* $\lim_E f(p)$ ($p \to p_0$) *jest, by do każdej liczby* $\varepsilon>0$ *istniała taka liczba* $\delta>0$, *że dla każdej pary punktów* p_1, p_2 *zbioru* E *nierówności*

$$0 < \varrho(p_1,p_0) < \delta \quad \text{i} \quad 0 < \varrho(p_2,p_0) < \delta$$

pociągają za sobą nierówność

$$|f(p_1) - f(p_2)| < \varepsilon.$$

2. Ciągłość. Funkcja $f(p)$ określona w zbiorze E nazywa się *ograniczona* w tym zbiorze, jeżeli istnieje taka liczba M, że $|f(p)| < M$ dla każdego punktu $p \in E$.

Przez $\sup\limits_{p \in E} f(p)$ i $\inf\limits_{p \in E} f(p)$ [1]) oznaczamy kresy górny i dolny funkcji w zbiorze E, czyli kresy górny i dolny zbioru $f(E)$ (p. str. 14).

Funkcja $f(p)$ określona w zbiorze E nazywa się *ciągła w zbiorze* E w punkcie $p_0 \in E$, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że nierówność $\varrho(p,p^0) < \varepsilon$ pociąga za sobą dla każdego punktu $p \in E$ nierówność

$$(1) \qquad |f(p) - f(p_0)| < \varepsilon \ ^{2)}.$$

Piszemy to symbolicznie:

$$\prod_{\varepsilon>0} \sum_{\delta>0} \prod_{p \in E} [(\varrho(p,p_0) < \delta) \rightarrow (|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon)].$$

Z definicji tej wynika, że każda funkcja $f(p)$ określona w zbiorze E jest ciągła w tym zbiorze w każdym jego punkcie odosobnionym.

---

[1]) Znaki sup i inf (*supremum* i *infimum*) zostały wprowadzone przez F. Hausdorffa.

[2]) Definicja ta pochodzi od Cauchy'ego.

Gdy nie ma wątpliwości, w jakim zbiorze E funkcja jest ciągła w punkcie p_0, to taką funkcję nazywamy krótko *ciągłą w punkcie* p_0. Funkcję ciągłą w zbiorze E w każdym jego punkcie będziemy nazywali po prostu *ciągłą w zbiorze* E. Funkcję ciągłą w całej przestrzeni $\mathcal{E}^m$ nazywa się *ciągłą*.

Na mocy twierdzenia (1.1)

(2.1) *Na to, żeby funkcja* $f(p)$ *była ciągła w zbiorze* E *potrzeba i wystarcza, żeby dla każdego punktu skupienia* p_0 *zbioru* E *zachodziła równość*

$$f(p_0)=\lim_{p\to p_0} {}_E f(p).$$

Stąd i z definicji granicy w punkcie p_0 wynika twierdzenie:

(2.2) *Na to, by funkcja* $f(p)$ *była ciągła w zbiorze* E *w punkcie* p_0, *potrzeba i wystarcza, żeby dla każdego ciągu* $\{p_n\}$ *punktów zbioru* E, *dążącego do* p_0, *zachodziła równość*

$$f(p_0)=\lim_{n\to\infty} f(p_n).$$

Uwaga. Twierdzenie (2.2) różni się od twierdzenia (2.1) tylko tym, że w (2.1) musi być $p_n \neq p_0$, podczas gdy w (2.2) może być $p_n=p_0$. Warunek tw. (2.2) można uważać za inną definicję ciągłości [1]).

Niech K będzie taką kulą, że $EK\neq 0$.

Oscylacją funkcji $f(p)$ *w zbiorze* E *w kuli* K nazywamy kres górny $\Omega(f;K,E)$ liczb $|f(p_1)-f(p_2)|$, gdzie p_1 i p_2 są dowolnymi punktami zbioru EK.

Jasne jest, że jeżeli $K_1\subset K_2$, to $\Omega(f;K_1,E)\leqslant\Omega(f;K_2,E)$. Wynika stąd, że granica $\lim\limits_{n\to\infty}\Omega(f;K_n,E)$ istnieje dla każdego takiego ciągu kul $\{K_n\}$, że $K_{n+1}\subset K_n$ i $EK_n\neq 0$.

Oscylacją funkcji $f(p)$ *w zbiorze* E *w punkcie* p_0 nazywamy liczbę $\Omega(f;p_0,E)=\lim\limits_{n\to\infty}\Omega(f;K_n,E)$, gdzie $\{K_n\}$ jest dowolnym ciągiem kul o środkach w punkcie p_0 i promieniach ϱ_n dążących do 0 [2]). Oscylacja $\Omega(f;p_0,E)$ jest zatem określona w każdym punkcie zbioru E i w każdym punkcie skupienia zbioru E.

---

[1]) Jest to definicja Heinego.

[2]) Łatwo widzieć, że liczba ta nie zależy od wyboru ciągu kul $\{K_n\}$. $\Omega(f;p_0,E)$ może być ∞; zachodzi to wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{K_n\}$ jest $\Omega(f;K_n,E)=\infty$ dla $n=1,2,\ldots$ Piszemy wówczas $\Omega(f;p_0,E)=\infty$.

(2.3) *Na to, by funkcja $f(p)$ była ciągła w zbiorze E w punkcie $p_0 \in E$, potrzeba i wystarcza, żeby $\Omega(f;p_0,E)=0$.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(p)$ jest ciągła w zbiorze E w punkcie $p_0 \in E$ i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje więc takie $\delta>0$, że dla każdego $p \in E$ nierówność $\varrho(p,p_0)<\delta$ pociąga za sobą nierówność $|f(p)-f(p_0)|<\varepsilon/2$. Wynika stąd, że dla dowolnych dwu punktów $p_1,p_2 \in EK(p_0,\delta)$ zachodzi nierówność

$$|f(p_1)-f(p_2)|\leqslant|f(p_1)-f(p_0)|+|f(p_0)-f(p_2)|<2\varepsilon/2=\varepsilon,$$

skąd $\Omega(f;K,E)<\varepsilon$ dla każdej kuli $K \subset K(p_0,\delta)$. Wynika stąd od razu, że $\Omega(f;p_0,E)=0$.

Na odwrót, załóżmy, że $\Omega(f;p_0,E)=0$, gdzie $p_0 \in E$, i niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje więc taka kula $K=K(p_0,\delta)$, że $\Omega(f;K,E)<\varepsilon$. Wynika stąd, że dla każdego punktu $p \in E$ nierówność $\varrho(p,p_0)<\delta$ pociąga za sobą nierówność $|f(p)-f(p_0)|<\varepsilon$.

(2.4) *Na to, by funkcja $f(p)$ była ciągła w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, żeby dla każdej liczby a zbiory*

$$\underset{p}{E}\{f(p)>a\} \quad i \quad \underset{p}{E}\{f(p)<a\} \tag{2}$$

były iloczynami zbioru E i pewnych zbiorów otwartych.

Dowód. Warunek jest konieczny. Niech funkcja $f(p)$ będzie ciągła w zbiorze E. Okażemy np., że pierwszy ze zbiorów (2) jest iloczynem zbioru E i zbioru otwartego. Niech $p_0 \in E_a=\underset{p}{E}\{f(p)>a\}$; zatem $f(p_0)>a$. Z ciągłości funkcji $f(p)$ wynika istnienie takiej liczby $\delta>0$, że nierówność $\varrho(p,p_0)<\delta$ pociąga dla każdego punktu p zbioru E nierówność

$$|f(p)-f(p_0)|<\varepsilon=\tfrac{1}{2}[f(p_0)-a].$$

Z tej zaś nierówności wynika, że $f(p)>f(p_0)-\varepsilon=\frac{1}{2}[f(p_0)+a]>a$. Zatem dla każdego $p_0 \in E$ istnieje taka kula K_{p_0}, że $p_0 \in K_{p_0}$ i że $f(p)>a$ dla każdego $p \in EK_{p_0}$. Wynika stąd, że $p \in E_a$, a więc $EK_{p_0} \subset E_a$. Oznaczając przez G sumę wszystkich kul K_p, gdzie $p \in E_a$, dostajemy zbiór otwarty oraz mamy $EG=E_a$.

Warunek jest dostateczny. Niech p_0 będzie dowolnym punktem zbioru E, a ε — liczbą dodatnią. Dla

$$a=f(p_0)-\varepsilon \quad \text{i} \quad b=f(p_0)+\varepsilon$$

zbiory

$$E_a = \mathop{E}_{p}\{f(p) > a\} \quad \text{i} \quad E^b = \mathop{E}_{p}\{f(p) < b\}$$

są z założenia postaci EG_a i EG^b, gdzie G_a i G^b są otwarte. Oczywiście $E_aE^b = EG_aG^b$, więc na mocy tw. (4.9), str. 81, zbiór ten jest iloczynem zbioru E i pewnego zbioru otwartego G. Widzimy łatwo, że

$$(3) \qquad E_aE^b = \mathop{E}_{p}\{a < f(p) < b\} = \mathop{E}_{p}\{|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon\}.$$

Ponieważ $p_0 \in G$, więc istnieje kula $K = K(p_0, \delta) \subset G$. Ze wzoru $EK \subset EG \subset E_aE^b$ i z (3) wynika, że jeżeli $p \in E$ i $\varrho(p, p_0) < \delta$, to $|f(p) - f(p_0)| < \delta$. Funkcja $f(p)$ jest więc ciągła w punkcie p_0 zbioru E.

Z twierdzenia (4.10), str. 81, wynika łatwo twierdzenie:

(2.5) *Na to, by funkcja $f(p)$ była ciągła w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, żeby dla każdej liczby a zbiory*

$$\mathop{E}_{p}\{f(p) \geqslant a\} \quad \textit{i} \quad \mathop{E}_{p}\{f(p) \leqslant a\}$$

były iloczynami zbioru E i pewnych zbiorów zamkniętych.

(2.6) *Jeżeli $f(p)$ jest dowolną funkcją określoną w zbiorze E, to dla każdej liczby a zbiór*

$$\mathop{E}_{p}\{\Omega(f; p, E) \geqslant a\}$$

jest zamknięty.

Dowód. Niech $E_0 = \mathop{E}_{p}\{\Omega(f; p, E) \geqslant a\}$, $p_n \epsilon E_0$, $p_n \to p_0$ i niech K będzie dowolną kulą o środku p_0. Ponieważ $p_n \to p_0$, więc istnieje punkt $p_{n_0} \in K$. Niech K_1 będzie dowolną kulą o środku w p_{n_0}, zawartą w K. Ponieważ $\Omega(f; p_{n_0}, E) \geqslant a$, więc $\Omega(f; K_1, E) \geqslant a$, ponieważ zaś $K_1 \subset K$, więc $\Omega(f; K, E) \geqslant a$. Wobec dowolności kuli K o środku p_0, wnosimy stąd, że $\Omega(f; p_0, E) \geqslant a$. Zatem punkt p_0 należy do zbioru E_0, a przeto zbiór ten jest zamknięty.

Każdy taki punkt p, że $\Omega(f; p, E) > 0$, nazywamy *punktem nieciągłości funkcji $f(p)$ na zbiorze E.*

Z definicji tej wynika, że punkty nieciągłości funkcji $f(p)$ nie muszą należeć do zbioru E.

(2.7) *Zbiór D punktów nieciągłości dowolnej funkcji $f(p)$ jest F_σ.*

Innymi słowy: *zbiór punktów w których* $\Omega(f;p,E)=0$, *jest* G_δ.

Dowód wynika natychmiast z równości $D=\sum_{n=1}^{\infty}\underset{p}{E}\{\Omega(f;p,E)\geqslant 1/n\}$ i z twierdzenia (2.6).

Niech $f(p)$ będzie funkcją określoną w całej przestrzeni $\mathcal{E}^m$, a D — zbiorem punktów nieciągłości tej funkcji. Wówczas funkcja $f(p)$ jest ciągła w każdym punkcie zbioru $-D$. Z twierdzenia (11.6), str. 102, i (2.7) wynika, że

(2.8) *Nie istnieje funkcja określona w* $\mathcal{E}^m$, *dla której zbiór punktów ciągłości byłby identyczny ze zbiorem punktów wymiernych.*

3. Własności funkcyj ciągłych. Z definicji Heinego (p. str. 106) i z twierdzenia (3.1), str. 50, wynika, że suma, różnica, iloczyn i iloraz funkcji ciągłych (o ile dzielnik nigdzie nie zeruje się) jest funkcją ciągłą.

Z nierówności $||a|-|b||\leqslant|a-b|$ wynika, że bezwzględna wartość funkcji ciągłej jest funkcją ciągłą.

Z tożsamości

$$\max(a,b)=\tfrac{1}{2}(|a-b|+a+b) \quad \text{i} \quad \min(a,b)=\tfrac{1}{2}(a+b-|a+b|),$$

wynika, że jeżeli $f(p)$ i $g(p)$ są funkcjami ciągłymi, to funkcje

$$\max(f(p),g(p)) \quad \text{i} \quad \min(f(p),g(p)),$$

też są funkcjami ciągłymi.

Przez indukcję dowodzi się z łatwością, że jeżeli funkcje $f_1(p),\ldots,f_n(p)$ są ciągłe, to funkcje

$$\max(f_1(p),\ldots,f_n(p)) \quad \text{i} \quad \min(f_1(p),\ldots,f_n(p))$$

też są ciągłe.

(3.1) *Jeżeli* $f(p)$ *jest funkcją ciągłą w zbiorze zamkniętym i ograniczonym* E, *to zbiór* $f(E)$ *jest zamknięty i ograniczony.*

Innymi słowy: *obraz ciągły zbioru zamkniętego ograniczonego jest zbiorem zamkniętym ograniczonym.*

Dowód. Okażemy naprzód, że obraz $f(E)$ zbioru E jest zamknięty. Niech $a_n\,\epsilon\, f(E)$ i $a_n\to a_0$; trzeba dowieść, że $a_0\,\epsilon\, f(E)$. Z $a_n\,\epsilon\, f(E)$ wynika istnienie takiego punktu $p_n\,\epsilon\, E$, że $a_n=f(p_n)$. Ciąg $\{p_n\}$, jako ograniczony, zawiera ciąg częściowy $\{p_{n_i}\}$ zbieżny do jakiegoś punktu p_0 (p. tw. (1.7), str. 58). Ponieważ $p_n \in E$ i $E = \bar{E}$ więc $p_0 \in E$. Ponieważ funkcja $f(p)$ jest ciągła w zbiorze E, więc $\lim\limits_{i\to\infty} f(p_{n_i}) = f(p_0)$, a ponieważ $f(p_{n_i}) = a_{n_i}$, więc $a_0 = f(p_0)$. Zatem $a_0 \in f(E)$.

Okażemy teraz, że zbiór $f(E)$ jest ograniczony. Gdyby bowiem tak nie było, to istniałby ciąg nieskończony takich punktów $b_n \in f(E)$, że $|b_n| > n$. Byłoby więc $|f(q_n)| > n$ dla pewnego ciągu punktów $q_n \in E$. Ponieważ $q_n \in E$, a zbiór E jest z założenia ograniczony, więc istnieje ciąg częściowy $\{q_{n_i}\}$ zbieżny do pewnego punktu $q_0 \in E$. Z ciągłości funkcji $f(p)$ w punkcie q_0 wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_n) = f(q_0)$, co jednak niemożliwe, gdyż $\lim\limits_{i\to\infty} |f(q_{n_i})| = \infty$.

(3.2) *Jeżeli $f(p)$ jest funkcją ciągłą w zbiorze spójnym E, to zbiór $f(E)$ jest spójny.*

Innymi słowy: *obraz ciągły zbioru spójnego jest zbiorem spójnym.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją dwa takie zbiory R i S, że $f(E) = R + S$, $R \neq 0$, $S \neq 0$ i

$$RS + R'S + RS' = 0. \tag{4}$$

Oznaczmy przez C zbiór tych $p \in E$, dla których $f(p) \in R$, a przez D zbiór tych $p \in E$, dla których $f(p) \in S$. Ponieważ $RS = 0$, więc $CD = 0$. Mamy dalej oczywiście $C \neq 0$, $D \neq 0$ i $E = C + D$. Gdyby było $C'D \neq 0$, to dla pewnego punktu $p_0 \in D$ istniałby w C ciąg punktów $\{p_n\}$ dążący do p_0, skąd wynika wobec ciągłości funkcji f, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n) = f(p_0)$. Zarazem $f(p_n) \in R$ i $f(p_0) \in S$, skąd $f(p_0) \in R'S$ wbrew przypuszczeniu (4), z którego wynika, że $R'S = 0$. Zatem $C'D = 0$. Tak samo dowodzi się, że $CD' = 0$, skąd $CD + C'D + CD' = 0$ wbrew założeniu, że zbiór E jest spójny.

Ponieważ jedynym zbiorem spójnym na prostej $\mathcal{E}^1$ jest odcinek, więc z (3.2) wynika łatwo twierdzenie:

(3.3) *Jeżeli $f(p)$ jest funkcją ciągłą w zbiorze spójnym E i jeżeli $f(p) < a < f(q)$, to istnieje taki punkt $r \in E$, że $f(r) = a$.*

Udowodnimy teraz następujące

(3.4) ***Twierdzenie Weierstrassa dla funkcyj ciągłych.*** *Jeżeli $f(p)$ jest funkcją ciągłą w zbiorze zamkniętym i ograniczonym A, to istnieją w nim dwa takie punkty p_0 i p_0', że*

$$f(p_0) = \sup_{p\in A} f(p), \quad f(p_0') = \inf_{p\in A} f(p).$$

Dowód. Jeżeli $f(p)$ jest funkcją ciągłą w zbiorze zamkniętym i ograniczonym A, to $f(p)$ jest funkcją ograniczoną na mocy (3.1). Niech

$$m = \inf_{p \epsilon A} f(p) \quad \text{i} \quad M = \sup_{p \epsilon A} f(p).$$

Okażemy, że istnieją takie punkty p_0 i p_0', że

$$m = f(p_0) \quad \text{i} \quad M = f(p_0').$$

Dowiedziemy tego dla M; dla m dowód przebiega analogicznie.

Na mocy własności $\bar{2}$, str. 46, dla każdego n istnieje taki punkt $a_n \epsilon f(E)$, że $M - \frac{1}{n} < a_n \leqslant M$; dla każdego n istnieje też taki punkt $p_n \epsilon E$, że $a_n = f(p_n)$. Ponieważ zbiór E jest zamknięty i ograniczony, więc istnieje ciąg częściowy $\{p_{n_i}\}$ zbieżny i granica p_0 tego ciągu jest punktem zbioru E. Z ciągłości funkcji $f(p)$ w zbiorze E wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n) = f(p_0)$; z oczywistych równości $f(p_{n_i}) = a_{n_i}$ i $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_i} = M$ wynika, że $f(p_0) = M$, c. b. d. d.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła, to liczbę $f(p_0)$ oznaczamy przez $\max\limits_{p \epsilon A} f(p)$, a liczbę $f(p_0')$ — przez $\min\limits_{p \epsilon A} f(p)$.

Podobnie jak na str. 31, można łatwo okazać, że zbiór funkcyj ciągłych w $\mathcal{E}^m$ jest mocy continuum.

4. Ciągłość jednostajna. Funkcja $f(p)$ nazywa się *jednostajnie ciągła* w zbiorze E, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdych dwu punktów $p_1, p_2 \epsilon E$ nierówność $\varrho(p_1, p_2) < \delta$ pociąga za sobą nierówność $|f(p_1) - f(p_2)| < \varepsilon$.

W symbolach:

$$(5) \qquad \prod_{\varepsilon>0} \sum_{\delta>0} \prod_{p_1 \epsilon E} \prod_{p_2 \epsilon E} \{[\varrho(p_1, p_2) < \delta] \to [|f(p_1) - f(p_2)| < \varepsilon]\}.$$

Porównując tę definicję z definicją ciągłości w zwykłym sensie, widzimy, że różnią się one od siebie przestawieniem drugiego i trzeciego kwantora (por. str. 12).

Łatwo dowodzi się następującego twierdzenia:

(4.1) *Na to, by funkcja $f(p)$ była jednostajnie ciągła w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnych dwu ciągów $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$ punktów tego zbioru zbieżność $\varrho(p_n, q_n) \to 0$ pociągała za sobą zbieżność $|f(p_n) - f(q_n)| \to 0$.*

(4.2) *Każda funkcja $f(p)$ ciągła w zbiorze zamkniętym i ograniczonym E jest w tym zbiorze jednostajnie ciągła.*

Dowód. Gdyby funkcja $f(p)$ nie była jednostajnie ciągła w zbiorze E, to istniałyby na mocy (4.1) takie ciągi $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$ punktów zbioru E, że $\varrho(p_n, q_n) \to 0$, a ciąg $\{f(p_n)-f(q_n)\}$, nie dążyłby do 0. Istniałaby więc liczba $\varepsilon > 0$ i taki ciąg częściowy $\{p_{n_k}\}$, że

$$(6) \qquad |f(p_{n_k})-f(q_{n_k})| > \varepsilon.$$

Ponieważ zbiór E jest zamknięty i ograniczony, więc istnieje w ciągu $\{p_{n_k}\}$ ciąg częściowy $\{p_{s_k}\}$, zbieżny do pewnego punktu p_0 zbioru E. Oczywiście $q_{s_k} \to p_0$. Z ciągłości funkcji $f(p)$ w zbiorze E w punkcie p_0 wynika, że $f(p_{s_k}) \to f(p_0)$ i $f(q_{s_k}) \to f(p_0)$, skąd $|f(p_{s_k})-f(q_{s_k})| \to 0$, wbrew (6).

5. Funkcje o wartościach z $\mathcal{E}^n$. Pojęcie funkcji rzeczywistej, określonej w przestrzeni $\mathcal{E}^m$, można uogólnić na funkcje przybierające wartości z przestrzeni $\mathcal{E}^n$. Niech $q = \varphi(p)$ będzie funkcją określoną w zbiorze $E \subset \mathcal{E}^m$, której wartościami są punkty z przestrzeni $\mathcal{E}^n$. Jeżeli $y_1, \ldots, y_n$ są współrzędnymi punktu q, to współrzędna y_i jest funkcją rzeczywistą punktu p:

$$y_i = f_i(p) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Funkcję $\varphi(p)$ możemy więc przedstawić jako układ n funkcyj rzeczywistych $f_1(p), \ldots, f_n(p)$ zmiennej p. W ten sposób badanie funkcyj o wartościach z $\mathcal{E}^n$ sprowadza się do badania układów $\varphi(p) = (f_1(p), \ldots, f_n(p))$ funkcyj rzeczywistych.

Funkcja $\varphi(p)$ określona w zbiorze E nazywa się *ciągłą w zbiorze E w punkcie $p_0 \in E$*, jeżeli warunki $p_n \in E$ i $p_n \to p_0$ pociągają za sobą warunek $\varphi(p_n) \to \varphi(p_0)$.

Łatwo udowodnić następujące twierdzenie:

(5.1) *Na to, by funkcja $\varphi(p) = (f_1(p), \ldots, f_n(p))$ była ciągła w zbiorze E w punkcie $p_0 \in E$, potrzeba i wystarcza, żeby wszystkie funkcje $f_i(p)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ były ciągłe w zbiorze E w punkcie p_0.*

Twierdzenie to pozwala przenieść wiele twierdzeń dotyczących funkcyj ciągłych o wartościach rzeczywistych na funkcje ciągłe o wartościach z przestrzeni $\mathcal{E}^n$. W szczególności:

(5.2) *Na to, by funkcja* $\varphi(p)$ *była ciągła w zbiorze* E *w punkcie* $p_0 \in E$, *potrzeba i wystarcza, żeby dla każdego ciągu* $\{p_k\}$ *punktów zbioru* E, *zbieżnego do* p_0, *było* $f_i(p_k) \rightarrow f_i(p_0)$, dla $i=1,2,...,n$.

(5.3) *Funkcja ciągła w zbiorze ograniczonym i zamkniętym jest ograniczona. Zbiór jej wartości jest zamknięty.*

Wprowadzając dla $\varphi(p)$ definicję jednostajnej ciągłości takim samym wzorem jak dla $f(p)$ (p. wzór (5), str. 111), otrzymujemy twierdzenie analogiczne do (4.2):

(5.4) *Funkcja ciągła w zbiorze zamkniętym i ograniczonym jest w tym zbiorze jednostajnie ciągła.*

Jeżeli $\varphi(p)$ jest funkcją ciągłą o wartościach z przestrzeni $\mathcal{E}^n$, określoną w zbiorze E, to zbiór $H=\varphi(E)$ nazywamy *obrazem ciągłym* zbioru E. Mówimy również, że wówczas funkcja $\varphi(p)$ *odwzorowuje* zbiór E na zbiór H.

Tw. (5.3) możemy więc wyrazić, jak następuje:

(5.5) *Obraz ciągły zbioru zamkniętego i ograniczonego jest zbiorem zamkniętym i ograniczonym.*

Analogicznie do tw. (3.2), str. 110, otrzymujemy twierdzenie:

(5.6) *Obraz ciągły zbioru spójnego jest zbiorem spójnym.*

Dla funkcyj o wartościach z przestrzeni $\mathcal{E}^n$ można zdefiniować oscylację $\Omega(f; K, E)$ wzorem

$$\sup_{p_1, p_2 \in KE} \varrho(\varphi(p_1), \varphi(p_2)).$$

Podobnie możemy zdefiniować oscylację w punkcie. Twierdzenia (2.3), (2.6) i (2.7) o związku między oscylacją a ciągłością przenoszą się bez zmiany na funkcje o wartościach z $\mathcal{E}^n$.

PRZYKŁADY. 1. Niech $a_1,...,a_m$ będą liczbami dodatnimi, a $\varphi(p)$ — funkcją przyporządkowującą każdemu punktowi $p=(x_1,...,x_m)$ przestrzeni $\mathcal{E}^m$ punkt $\varphi(p)=(a_1x_1,...,a_mx_m)$ przestrzeni $\mathcal{E}^m$. Funkcja ta jest na mocy (5.2) ciągła.

Odwzorowanie przez funkcję $\varphi(p)$ nazywamy *homotetycznym*.

2. Niech H będzie zbiorem punktów przestrzeni $\mathcal{E}^m$, spełniających warunek

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + ... + \frac{x_m^2}{a_m^2} \leqslant 1.$$

Zbiór ten nazywamy *elipsoidą w* $\mathcal{E}^m$.

Elipsoida w $\mathcal{E}^m$ *jest zbiorem zamkniętym, spójnym i ograniczonym, a więc kontinuum.*

Istotnie, elipsoida powstaje z kuli $K(0,1)$ przez przekształcenie homotetyczne (p. przykład 1).

3. Zbiór punktów przestrzeni $\mathcal{E}^m$, spełniających nierówność

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{x_m^2}{a_m^2}<1$$

(zwany często w geometrii analitycznej *wnętrzem* elipsoidy), jest zbiorem zamkniętym, ograniczonym i spójnym.

Powstaje bowiem z wnętrza kuli $K(0,1)$ przez przekształcenie homotetyczne.

6. Moduł ciągłości. Warunek Höldera. Niech $f(p)$ będzie funkcją określoną w zbiorze E, δ — liczbą dodatnią, a $\omega(\delta)=\omega(\delta,f)$ — kresem górnym liczb $|f(p_1)-f(p_2)|$, gdzie p_1 i p_2 są dowolnymi punktami zbioru E o odległości $\varrho(p_1,p_2)<\delta$.

Funkcję $\omega(\delta,f)$ nazywamy *modułem oscylacji* funkcji $f(p)$.

Jest jasne, że $\delta_1<\delta_2$ pociąga za sobą $\omega(\delta_1,f)\leqslant\omega(\delta_2,f)$; istnieje zatem $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta,f)$.

(6.1) *Na to, by funkcja $f(p)$ była jednostajnie ciągła w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, aby* $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta,f)=0$.

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(p)$ jest jednostajnie ciągła w zbiorze E. Niech $\varepsilon>0$. Istnieje takie $\eta>0$, że dla wszelkich $p_1,p_2\in E$ nierówność $\varrho(p_1,p_2)<\eta$ pociąga za sobą nierówność $|f(p_1)-f(p_2)|<\varepsilon$. Zatem $\omega(\delta,f)<\varepsilon$ dla $\delta<\eta$, skąd $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta,f)=0$.

Na odwrót, załóżmy, że $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta,f)=0$ i niech $\varepsilon>0$. Istnieje takie $\eta>0$, że $\omega(\delta,f)<\varepsilon$ dla $0<\delta<\eta$, skąd na mocy definicji funkcji $\omega(\delta,f)$

$$\varrho(p_1,p_2)<\eta \quad \text{pociąga} \quad |f(p_1)-f(p_2)|<\varepsilon \quad \text{dla wszelkich} \quad p_1,p_2\in E.$$

Zatem funkcja $f(p)$ jest jednostajnie ciągła w zbiorze E.

Jeżeli $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta,f)=0$, to funkcję $\omega(\delta,f)$ nazywamy *modułem ciągłości* funkcji $f(p)$.

Jeżeli $\omega(\delta, f) < k\delta^\alpha$, gdzie $0 < \alpha \leqslant 1$ (i gdzie α oraz k nie zależą od δ), to mówimy, że funkcja $f(p)$ *spełnia w zbiorze E warunek Höldera* z potęgą α i ze stałą k.

Jeżeli $\alpha = 1$, to mówimy, że funkcja $f(p)$ spełnia w zbiorze E *warunek Lipschitza* ze stałą k.

Jeżeli zbiór E jest identyczny z przestrzenią $\mathcal{E}^m$, to mówimy krótko, że funkcja *spełnia warunek Höldera* lub *warunek Lipschitza.*

Jasne jest, że na to, by funkcja $f(p)$ spełniała warunek Höldera z potęgą α i stałą k w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, żeby

$$(7) \qquad |f(p_1) - f(p_2)| \leqslant k[\varrho(p_1, p_2)]^\alpha \quad \text{dla wszystkich} \quad p_1, p_2 \in E.$$

W szczególności na to, by funkcja $f(p)$ spełniała warunek Lipschitza ze stałą k w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, żeby

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leqslant k\varrho(p_1, p_2) \quad \text{dla wszystkich} \quad p_1, p_2 \in E.$$

Udowodnimy teraz, że

(6.2) *Na to, by funkcja $f(p) = f(x_1, \ldots, x_m)$ spełniała warunek Lipschitza w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, by dla każdych dwu punktów $p' = (x_1', \ldots, x_m')$ i $p'' = (x_1'', \ldots, x_m'')$ zbioru E i pewnej stałej k zachodziła nierówność*

$$(8) \qquad |f(x_1', \ldots, x_m') - f(x_1'', \ldots, x_m'')| \leqslant k(|x_1' - x_1''| + \ldots + |x_m' - x_m''|).$$

Dowód. Z nierówności Schwarza (str. 74) wynika, że dla dowolnych m liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_m$:

$$\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_m^2} \leqslant |a_1| + \ldots + |a_m| \leqslant \sqrt{m}\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_m^2}.$$

Jeżeli więc funkcja $f(p)$ spełnia warunek Lipschitza, to

$$|f(x_1', \ldots, x_m') - f(x_1'', \ldots, x_m'')| \leqslant k\sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + \ldots + (x_m' - x_m'')^2} \leqslant$$
$$\leqslant k(|x_1' - x_1''| + \ldots + |x_m' - x_m''|),$$

a więc spełnia ona też warunek (8).

Na odwrót, jeżeli funkcja $f(p)$ spełnia warunek (8), to istnieje taka stała k, że

$$|f(x_1', \ldots, x_m') - f(x_1'', \ldots, x_m'')| \leqslant k(|x_1' - x_1''| + \ldots + |x_m' - x_m''|) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{m}k\sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + \ldots + (x_m' - x_m'')^2}.$$

(6.3) *Na to, by funkcja $f(p)=f(x_1,\dots,x_m)$ spełniała w zbiorze E warunek Höldera z potęgą a i z pewną stałą k, potrzeba i wystarcza, żeby dla każdych dwu punktów $p'=(x_1',\dots,x_m')$ i $p''=(x_1'',\dots,x_m'')$ zbioru E zachodziła nierówność*

$$|f(x_1',\dots,x_m')-f(x_1'',\dots,x_m'')|\leqslant k(|x_1'-x_1''|^\alpha+\dots+|x_m'-x_m''|^\alpha).$$

Dowód. Weźmy pod uwagę funkcję $\varphi(\xi)=(1+\xi)^r-1-\xi^r$, gdzie $\xi\geqslant0$ i $0<r\leqslant1$. Badając pochodną tej funkcji, widzimy łatwo, że funkcja ta jest malejąca, a ponieważ $\varphi(0)=0$, więc

$$(1+\xi)^r\leqslant1+\xi^r \quad \text{dla} \quad \xi\geqslant0 \quad \text{i} \quad 0<r\leqslant1. \tag{9}$$

Podstawiając $\xi=\alpha/\beta$ do (9) i mnożąc obie strony przez β^r, dostajemy $(\alpha+\beta)^r\leqslant\alpha^r+\beta^r$ dla $\alpha,\beta\geqslant0$ i $0<r\leqslant1$. Stąd przez łatwą indukcję

$$(a_1+\dots+a_m)^r\leqslant a_1^r+\dots+a_m^r \quad \text{dla} \quad a_i\geqslant0 \quad \text{i} \quad 0<r\leqslant1. \tag{10}$$

Podstawiając w (10) $a_i=a_i^2$ i $r=\alpha/2$ dostajemy

$$(a_1^2+\dots+a_m^2)^{\alpha/2}\leqslant a_1^\alpha+\dots+a_m^\alpha \quad \text{dla} \quad a_i\geqslant0. \tag{11}$$

Z nierówności Höldera (1.2), str. 74, wynika z łatwością nierówność

$$a_1^\alpha+\dots+a_m^\alpha\leqslant n^{1-\alpha/2}(a_1^2+\dots+a_m^2)^{\alpha/2}. \tag{12}$$

Z nierówności (11) i (12) wynika teza twierdzenia tak jak w dowodzie twierdzenia (6.2).

(6.4) *Funkcja $f(p)=d(p,F)$* (p. str. 71) *spełnia warunek Lipschitza ze stałą* 1.

Dowód. Należy dowieść, że $|f(p_1)-f(p_2)|\leqslant\varrho(p_1,p_2)$. Niech $\varepsilon>0$. Istnieje taki punkt $q_2\in F$, że $f(p_2)\geqslant\varrho(p_2,q_2)-\varepsilon$; oczywiście $f(p_1)\leqslant\varrho(p_1,q_2)$. Stąd

$$f(p_1)-f(p_2)\leqslant\varrho(p_1,q_2)-\varrho(p_2,q_2)+\varepsilon\leqslant\varepsilon+\varrho(p_1,p_2).$$

Zmieniając role zmiennych p_1 i p_2, dostajemy podobnie:

$$f(p_2)-f(p_1)\leqslant\varepsilon+\varrho(p_2,p_1),$$

skąd

$$|f(p_1)-f(p_2)|\leqslant\varepsilon+\varrho(p_1,p_2),$$

co wobec dowolności liczby $\varepsilon>0$, daje nierówność, której należało dowieść.

(6.5) *Jeżeli funkcja $f(p)$ spełnia w zbiorze ograniczonym E warunek Höldera z potęgą α i jeżeli $\beta<\alpha$, to funkcja $f(p)$ spełnia warunek Höldera w zbiorze E z potęgą β.*

Dowód. Z założenia istnieje taka stała k, że jest

$$|f(p_1)-f(p_2)|\leqslant k[\varrho(p_1,p_2)]^\alpha.$$

Dla $0\leqslant\xi\leqslant1$ zachodzi nierówność $\xi^\alpha<\xi^\beta$, a zatem

$$|f(p_1)-f(p_2)|\leqslant k[\varrho(p_1,p_2)]^\beta \quad \text{dla} \quad \varrho(p_1,p_2)\leqslant1.$$

Rozbijając zbiór E na n zbiorów o średnicy mniejszej od 1, otrzymujemy łatwo $|f(p_1)-f(p_2)|\leqslant2kn[\varrho(p_1,p_2)]^\beta$.

Niech $\boldsymbol{F}$ będzie rodziną funkcyj określonych w zbiorze E. Mówimy, że funkcje tej rodziny są *jednakowo ciągłe w zbiorze E*, tj. że mają w nim wspólny moduł ciągłości, jeżeli istnieje taka funkcja $\omega(\delta)$ określona dla $\delta>0$, że $\lim\limits_{\delta\to0}\omega(\delta)=0$ i że dla każdej funkcji $f(p)$ rodziny $\boldsymbol{F}$ zachodzi nierówność

$$\omega(\delta,f)\leqslant\omega(\delta).$$

Z tej definicji wynika, że jeżeli funkcja $f(p)$ należy do rodziny funkcyj jednakowo ciągłych w zbiorze E, to funkcja ta jest jednostajnie ciągła w zbiorze E (por. (6.1), str. 114).

(6.6) *Na to, by funkcje rodziny $\boldsymbol{F}$ były jednakowo ciągłe w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, żeby dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istniała taka liczba $\eta>0$, że nierówność $\varrho(p_1,p_2)<\eta$ pociąga*

(13) $|f(p_1)-f(p_2)|<\varepsilon$ *dla wszelkich* $p_1,p_2\in E$ *i każdej funkcji* $f(p)\in\boldsymbol{F}$.

Dowód. Konieczność warunku jest oczywista. Dostateczność wynika zaś stąd, że wobec nierówności (13) istnieje dla każdego $\delta>0$ i dowolnych $f(p)\in\boldsymbol{F}$ kres górny $\omega(\delta)$ zbioru liczb $\omega(\delta,f)$ oraz że $\omega(\delta)\leqslant\varepsilon$ dla $\delta<\eta$.

Z (6.6) wynika łatwo, że

(6.7) *Na to, by funkcje rodziny $\boldsymbol{F}$ były jednakowo ciągłe w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, żeby dla każdych dwu ciągów $\{p_n\}$ i $\{q_n\}$ punktów zbioru E zbieżność $\varrho(p_n,q_n)\to0$ pociągała za sobą dla każdego ciągu $\{f_n(p)\}$ funkcyj rodziny $\boldsymbol{F}$ zbieżność*

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(p_n)-f_n(q_n)|=0.$$

7. Przedłużanie funkcyj ciągłych. *Przedłużeniem funkcji* $f(p)$ ze zbioru A na zbiór $A \subset B$ nazywamy każdą taką funkcję $f^*(p)$ określoną w zbiorze B, że $f^*(p)=f(p)$ dla wszystkich punktów $p \in A$.

Zagadnienia, którymi będziemy się zajmowali, polegają na tym, by funkcja $f^*(p)$ spełniała pewne warunki, które spełnia funkcja $f(p)$, jak np. ciągłość, warunek Höldera i warunek Lipschitza.

(7.1) *Każdą funkcję $f(p)$ ciągłą w zbiorze E można przedłużyć do funkcji ciągłej w zbiorze punktów, w których oscylacja funkcji $f(p)$ znika, t. j. do funkcji ciągłej w pewnym zbiorze G_δ.*

Dowód. Niech $E \subset \mathcal{E}^m$ i E^* będzie zbiorem wszystkich takich punktów $p \in \mathcal{E}^m$, w których $\Omega(f; p, E)=0$. Okażemy naprzód, że dla każdego punktu $q \in E^* - E$ istnieje granica $\lim_{E, p \to q} f(p)$. Istotnie, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka kula $K=K(q,r)$, że $\Omega(f; K, E) < \varepsilon$; zatem $|f(p')-f(p'')| < \varepsilon$ dla każdej pary punktów $p', p'' \in K$. Z tw. (1.2), str. 105, wynika więc, że istnieje $\lim_{E, p \to q} f(p)$. Niech teraz

$$f^*(p)=\begin{cases} f(p) & \text{dla } p \in E \\ \lim\limits_{E, q \to p} f(q) & \text{dla } p \in E^* - E. \end{cases}$$

Funkcja $f^*(p)$ jest określona w E^* i $f^*(p)=f(p)$ w zbiorze E. Zatem funkcja $f^*(p)$ jest przedłużeniem funkcji $f(p)$. Pozostaje do okazania, że funkcja $f^*(p)$ jest ciągła w zbiorze E^*. Niech $p_n \in E^*$, $p_0 \in E^*$ i $p_n \to p_0$. Z definicji funkcji $f^*(p)$ wynika, że jeżeli $p_n \in E$ i $p_n \to p_0$, to $f^*(p_n) \to f^*(p_0)$ zarówno dla punktów $p_0 \in E$, jak i dla punktów $p_0 \in E^* - E$. Wystarczy więc rozpatrzyć przypadek, gdy $p_n \to p_0$ i $p_n \in E^* - E$. Ponieważ $f^*(p_n)=\lim_{E, q \to p_n} f(q)$, więc istnieją takie punkty $p'_n \in E$, że

$$(14) \qquad \varrho(p_n, p'_n) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad |f(p'_n) - f^*(p_n)| < \frac{1}{n}.$$

Z nierówności (14) wynika, że $p'_n \to p_0$, a ponieważ $p'_n \in E$, więc $f^*(p_0)=\lim_{n \to \infty} f(p'_n)$, skąd $\lim_{n \to \infty} f^*(p_n)=f^*(p_0)$ na mocy drugiej z tych nierówności.

(7.2) *Każdą funkcję $f(p)$ jednostajnie ciągłą w zbiorze E można przedłużyć do funkcji $\bar{f}(p)$ jednostajnie ciągłej w zbiorze $\bar{E}$ tak, by*

$$(15) \qquad \omega(\delta, f) = \omega(\delta, \bar{f}).$$

Dowód. Okażemy naprzód, że oscylacja funkcji $f(p)$ jest zerem w każdym punkcie p_0 zbioru $\bar{E}$. Niech $\delta > 0$. Istnieje takie $\delta > 0$, że $|f(p_1) - f(p_0)| < \delta$ dla wszelkich dwu punktów $p_1, p_2 \in E$ o odległości $\varrho(p_1, p_2) < \delta$. Niech K będzie kulą $K(p_0, \delta/2)$. Jeżeli $p_1, p_2 \in K$, to $\varrho(p_1, p_2) < \delta$, a więc jeżeli nadto $p_1, p_2 \in E$, to $|f(p_1) - f(p_2)| < \delta$. W ten sposób okazaliśmy, że $\Omega(f; K, E) \leqslant \varepsilon$, stąd zaś wynika, że $\Omega(f; p_0, E) = 0$.

Określimy teraz funkcję $\bar{f}(p)$ tak jak funkcję f^* w dowodzie twierdzenia (7.1). Należy okazać, że funkcja $\bar{f}(p)$ jest jednostajnie ciągła w $\bar{E}$. Niech $\omega(\delta, f)$ będzie modułem ciągłości funkcji $f(p)$. Zatem $|f(p_1) - f(p_2)| \leqslant \omega(\delta, f)$ dla wszelkiej pary punktów $p_1, p_2 \in E$ o odległości $\varrho(p_1, p_2) < \delta$. Niech $\varepsilon > 0$, $p_1, p_2 \in \bar{E}$ i $\varrho(p_1, p_2) < \delta$. Istnieją wówczas takie punkty $p'_1, p'_2 \in E$, że odległości $\varrho(p'_j, p_j)$ dla $j = 1$ i 2 są dowolnie małe i $|f(p'_j) - f(p_j)| < \varepsilon$.

Możemy więc w szczególności dobrać p'_1, p'_2 tak, by

$$\varrho(p_j, p'_j) < \tfrac{1}{2}[\delta - \varrho(p_1, p_2)] \quad \text{dla} \quad j = 1 \text{ i } 2.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \varrho(p'_1, p'_2) &\leqslant \varrho(p'_1, p_1) + \varrho(p_1, p_2) + \varrho(p_2, p'_2) < \\ &< \varrho(p_1, p_2) + 2 \cdot \tfrac{1}{2}[\delta - \varrho(p_1, p_2)] = \delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bar{f}(p_1) - \bar{f}(p_2)| &\leqslant |\bar{f}(p_1) - f(p'_1)| + |f(p'_1) - f(p'_2)| + |f(p'_2) - \bar{f}(p_2)| \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon + |f(p'_1) - f(p'_2)|. \end{aligned}$$

Ponieważ $p'_1 \in E$, $p'_2 \in E$ i $\varrho(p'_1, p'_2) < \delta$, więc $|f(p'_1) - f(p'_2)| < \omega(\delta, f)$, a zatem $|\bar{f}(p_1) - \bar{f}(p_2)| < 2\varepsilon + \omega(\delta, f)$, co wobec dowolności liczby ε daje $\omega(\delta, \bar{f}) \leqslant \omega(\delta, f)$.

Z oczywistej nierówności $\omega(\delta, f) \leqslant \omega(\delta, \bar{f})$ wynika więc równość (15). Zatem funkcja $\bar{f}(p)$ jest jednostajnie ciągła w $\bar{E}$ i spełnia tę równość, c. b. d. d.

Zauważmy, że przedłużenia, o których mowa w twierdzeniach (7.1) i (7.2), są jedyne.

Udowodnimy teraz następujący lemat:

(7.3) *Do każdej funkcji* $\omega(\delta)$ *niemalejącej, określonej dla wszystkich liczb* $\delta > 0$ *i takiej, że* $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$, *istnieje funkcja ciągła i niemalejąca* $\omega_1(\delta)$, *dla której* $\omega(\delta) \leqslant \omega_1(\delta)$ *i* $\omega_1(0) = 0$.

Dowód. Niech

$$\omega_1(\delta)=\begin{cases} 0 & \text{dla } \delta=0, \\ \omega\left(\frac{1}{n}\right)+n(n+1)\left[\omega\left(\frac{1}{n-1}\right)-\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left(\delta-\frac{1}{n+1}\right) & \text{dla } \frac{1}{n+1}\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{n}, \\ & \text{gdzie } n=2,3,\ldots \\ \omega(1)+2[\omega(2)-\omega(1)]\left(\delta-\frac{1}{2}\right) & \text{dla } \frac{1}{2}\leqslant\delta\leqslant 1 \\ \omega(n+1)+[\omega(n+2)-\omega(n+1)]\,(\delta-n) & \text{dla } n\leqslant\delta\leqslant n+1, \\ & \text{gdzie } n=1,2,\ldots \end{cases}$$

Niech $\{I_n\}$ będzie ciągiem złożonym ze wszystkich przedziałów $\left\langle\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right\rangle$, $\left\langle\frac{1}{2},1\right\rangle$ i $\langle n,n+1\rangle$, gdzie $n=1,2,\ldots$ Funkcja $\omega_1(\delta)$ jest liniowa na każdym z przedziałów I_n, poza tym jest rosnąca i w punktach końcowych tych przedziałów jest $\omega_1(\delta)\geqslant\omega(\delta)$. Niech δ będzie dowolną liczbą dodatnią. Istnieje takie $I_k=\langle a_k,b_k\rangle$, że $\delta\in I_k$. Zatem $\omega_1(a_k)=\omega(b_k)$ i $\omega_1(b_k)\geqslant\omega(b_k)$, skąd $\omega_1(\delta)\geqslant\omega(b_k)\geqslant\omega(\delta)$ dla $\delta\in I_k$. Funkcja $\omega_1(\delta)$ jest niemalejąca i $\omega_1(\delta)\geqslant\omega(\delta)$. Oczywiste jest, że funkcja ta jest ciągła dla $\delta\neq 0$, a dla $\delta=0$ jest

$$\omega_1\left(\frac{1}{n+1}\right)=\omega\left(\frac{1}{n}\right)\to 0,$$

co wraz z monotonicznością funkcji daje $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_1(\delta)=0$.

(7.4) *Każdą funkcję ciągłą w zbiorze zamkniętym i ograniczonym E można przedłużyć do funkcji ciągłej w całej przestrzeni.*

Dowód. Niech $\omega(\delta)=\omega(\delta,f)$ będzie modułem ciągłości funkcji f. Funkcja $\omega(\delta)$ jest niemalejąca i $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0$. Na mocy lematu (7.3) istnieje więc taka funkcja ciągła $\omega_1(\delta)$, że $\omega_1(\delta)\geqslant\omega(\delta)$ i $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_1(\delta)=0$.

Niech

$$f^*(p)=\sup_{r\in E}\{f(r)-\omega_1(\varrho(r,p))\}. \tag{16}$$

Jeżeli $p\in E$, to, jak łatwo widzieć,

$$f^*(p)-f(p)=\sup_{r\in E}\{f(r)-f(p)-\omega_1(\varrho(r_1,p))\}.$$

Ale

$$f(r)-f(p)-\omega_1(\varrho(r,p))\leqslant\omega(\varrho(r,p))-\omega_1(\varrho(r,p))\leqslant 0,$$

gdyż $|f(r)-f(p)|\leqslant\omega(\varrho(r,p))$; zatem $f^*(p)-f(p)\leqslant 0$.

Z drugiej strony, $f^*(p)-f(p)\geqslant f(r)-f(p)-\omega_1(\varrho(r,p))$ dla każdego $r\in E$; podstawiając więc do tej nierówności $r=p$, dostajemy $f^*(p)-f(p)\geqslant 0$, co wraz z poprzednią nierównością daje $f(p)=f^*(p)$ dla $p\in E$.

By okazać, że funkcja $f^*(p)$ jest ciągła, obierzmy dowolnie liczbę dodatnią ε i punkt p. Niech $d=\sup\limits_{r\in E}\varrho(p,r)$. Ponieważ funkcja $\omega_1(\delta)$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $\langle 0,d+1\rangle$, więc istnieje taka liczba $\eta>0$, że nierówności $0\leqslant\delta'\leqslant d+1$, $0\leqslant\delta''\leqslant d+1$ i $|d'-\delta''|<\eta$ pociągają za sobą nierówność $|\omega_1(\delta')-\omega_1(\delta'')|<\varepsilon$.

Niech $\varrho(p,q)<\eta'=\min(\eta,1)$. Istnieje taki punkt r_0, że

$$f^*(p)\leqslant f(r_0)-\omega_1(\varrho(r_0,p))+\varepsilon.$$

Z definicji funkcji $f^*(q)$ wynika, że

$$f^*(q)\geqslant f(r_0)-\omega_1(\varrho(r_0,q)),$$

więc

$$f^*(p)-f^*(q)\leqslant\omega_1(\varrho(r_0,q))-\omega_1(\varrho(r_0,p))+\varepsilon.$$

Ale $\varrho(r_0,p)<d$, $\varrho(r_0,q)\leqslant\varrho(r_0,p)+\varrho(p,q)\leqslant d+1$ oraz

$$|\varrho(r_0,q)-\varrho(r_0,p)|\leqslant\varrho(p,q)<\eta,$$

zatem

$$\omega_1(\varrho(r_0,q))-\omega_1(\varrho(r_0,p))\leqslant\varepsilon,$$

skąd

$$f^*(p)-f^*(q)\leqslant 2\varepsilon.$$

W ten sam sposób dowodzi się, że

$$f^*(q)-f^*(p)\leqslant 2\varepsilon.$$

Przeto

$$|f^*(p)-f^*(q)|\leqslant 2\varepsilon. \tag{17}$$

Okazaliśmy więc, że dla każdego punktu $p\in E$ nierówność $\varrho(p,q)<\eta'$ pociąga nierówność (17). Funkcja $f^*(p)$ jest więc ciągłai c. b. d. d.

(7.5) *Każdą funkcję $f(p)$, spełniającą w zbiorze E warunek Höldera, można przedłużyć do funkcji $f^*(p)$, spełniającej w całej przestrzeni, warunek Höldera z tą samą potęgą α i tą samą stałą k.*

Dowód. Niech $f(p)$ spełnia w zbiorze E warunek Höldera z potęgą α $(0<\alpha\leqslant 1)$ i ze stałą k. Funkcję $f^*(p)$ określamy wzorem podobnym do (17) mianowicie

$$f^*(p)=\sup_{r\in E}\{f(r)-k[\varrho(p,r)]^\alpha\}.$$

Dalej dowód przebiega analogicznie do dowodu (7.4). Należy oprzeć się na nierówności $(1+|x|)^\alpha \leqslant 1+|x|^\alpha$ dla $0<\alpha\leqslant 1$, skąd

$$(|x|+|y|)^\alpha \leqslant |x|^\alpha+|y|^\alpha,$$

zatem $[\varrho(p,q)]^\alpha \leqslant [\varrho(p,r)+\varrho(q,r)]^\alpha \leqslant [\varrho(p,r)]^\alpha+[\varrho(q,r)]^\alpha$.

§ 2. Ciągi funkcyj. Zbiory zwarte funkcyj.

1. Granica ciągu funkcyj. Niech $\{f_n(p)\}$ będzie ciągiem funkcyj określonych w zbiorze E. Funkcję $f(p)$ określoną w E nazywamy *granicą ciągu funkcyj* $\{f_n(p)\}$ *w zbiorze* E, jeżeli dla każdego punktu $p \in E$ ciąg wartości funkcyj $f_n(p)$ dąży do wartości funkcji $f(p)$, czyli gdy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p) = f(p) \quad \text{dla} \quad p \in E.$$

Podobnie określamy granice górną i dolną ciągu funkcyj $\{f_n(p)\}$:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(p) = \bar{f}(p), \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(p) = \underline{f}(p).$$

Jeżeli $\{f_n(p)\}$ i $\{\varphi_n(p)\}$ są ciągami funkcyj, zbieżnymi w E do funkcyj $f(p)$ i $\varphi(p)$, to na mocy wzorów (7) i (8), str. 50, zachodzą równości:

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(p)\pm\varphi_n(p)] = f(p)\pm\varphi(p), \qquad \lim_{n\to\infty}[f_n(p)\,\varphi_n(p)] = f(p)\,\varphi(p),$$

a przy dodatkowym założeniu, że $\varphi_n(p)\neq 0$ dla $n=1,2,\ldots$ i $\varphi(p)\neq 0$ dla wszelkich $p \in E$, zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(p)}{\varphi_n(p)} = \frac{f(p)}{\varphi(p)}.$$

Opierając się na twierdzeniach (6.7) i (6.8), str. 56, otrzymujemy odpowiednie twierdzenia dla granicy górnej (dolnej) ciągów funkcji.

Ciąg $\{f_n(p)\}$ funkcyj określonych w zbiorze E nazywamy *wspólnie ograniczonym w* E, jeżeli istnieje liczba $M>0$, spełniająca nierówności

$$|f_n(p)| \leqslant M \quad \text{dla każdego} \quad p \in E \quad \text{i} \quad n=1,2,\ldots$$

(1.1) *Jeżeli* P *jest podzbiorem przeliczalnym zbioru* E, *to w każdym ciągu* $\{f_n(p)\}$ *funkcyj wspólnie ograniczonych w* E *istnieje ciąg częściowy, zbieżny w każdym punkcie zbioru* P.

Dowód. Niech $\{p_m\}$ będzie ciągiem wszystkich punktów zbioru P. Ponieważ ciąg liczb $\{f_n(p_1)\}$ jest z założenia ograniczony, więc na mocy twierdzenia (1.7), str. 58, istnieje w nim ciąg częściowy zbieżny; oznaczmy go przez $\{f_n^{(1)}(p_1)\}$. Podobnie w ciągu $\{f_n^{(1)}(p_2)\}$ istnieje ciąg częściowy zbieżny $\{f_n^{(2)}(p_2)\}$ itd., przy czym ciąg $\{f_n^{m+1}(p_{m+1})\}$ jest ciągiem częściowym ciągu $\{f_n^{(m)}(p_{m+1})\}$.

Weźmy pod uwagę ciąg funkcyj $\{f_i^{(i)}(p)\}$. Łatwo widzieć, że wyrazy ciągu $\{f_i^{(i)}(p_m)\}$ dla $i \geqslant m$ występują w ciągu $\{f_n^{(m)}(p_m)\}$; zatem ciąg $\{f_i^{(i)}(p_m)\}$ jest zbieżny dla każdego $m = 1, 2, \ldots$, a więc we wszystkich punktach zbioru P, c. b. d. d.

2. Zbieżność jednostajna. Ciąg funkcyj $\{f_n(p)\}$ nazywa się *jednostajnie zbieżny* do funkcji $f(p)$ w zbiorze E, jeżeli do każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że dla każdego punktu $p \in E$ i każdego $n > N$ zachodzi nierówność

$$|f_n(p) - f(p)| \leqslant \varepsilon,$$

co piszemy symbolicznie (por. str. 12):

$$\prod_{\varepsilon>0} \sum_{N} \prod_{p \in E} \prod_{n>N} (|f_n(p) - f(p)| \leqslant \varepsilon).$$

Każdy ciąg funkcyj $\{f_n(p)\}$, jednostajnie zbieżny w E do funkcji $f(p)$, jest w E zbieżny (i to do tej samej funkcji $f(p)$) w zwykłym znaczeniu, ale nie na odwrót. Np. ciąg funkcyj $\{x^n\}$ jest zbieżny w przedziale zamkniętym $\langle 0, 1 \rangle$, nie jest w nim jednak jednostajnie zbieżny.

(2.1) ***Warunek Cauchy'ego dla zbieżności jednostajnej.*** *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by ciąg funkcyj* $\{f_n(p)\}$ *określonych w zbiorze* E *był w nim jednostajnie zbieżny, jest, żeby do każdego* $\varepsilon > 0$ *istniało takie* N, *że*

(1) $|f_i(p) - f_j(p)| \leqslant \varepsilon$ *dla każdego* $p \in E$, $i \geqslant N$ *oraz* $j \geqslant N$.

Dowód. Niech ciąg $\{f_n(p)\}$ będzie jednostajnie zbieżny w E do funkcji $f(p)$. Na mocy określenia jednostajnej zbieżności istnieje więc do każdego $\varepsilon > 0$ takie N, że

(2) $|f_n(p) - f(p)| \leqslant \varepsilon/2$ dla każdego $p \in E$ i $n \geqslant N$.

Ponieważ

$$|f_i(p) - f_j(p)| \leqslant |f_i(p) - f(p)| + |f(p) - f_j(p)|,$$

więc z (2) otrzymujemy (1). Warunek Cauchy'ego jest więc konieczny.

Na odwrót, niech ciąg $\{f_n(p)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Wynika stąd, że dla każdego punktu $p \in E$ ciąg liczb $\{f_n(p)\}$ jest zbieżny. Niech

$$\lim_{n \to \infty} f_n(p) = f(p). \tag{3}$$

Do każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc takie N, że zachodzi (1), skąd na mocy (3)

$$|f(p) - f_j(p)| \leqslant |f(p) - f_i(p)| + |f_i(p) - f_j(p)| \leqslant |f(p) - f_l(p)| + \varepsilon$$

czyli, gdy $i \to \infty$,

$$|f(p) - f_j(p)| \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad p \in E \quad \text{i} \ l \geqslant N.$$

A więc ciąg $\{f_n(p)\}$ jest jednostajnie zbieżny w E do $f(p)$ warunek Cauchy'ego jest tym samym dostateczny.

Z tw. (2.1) otrzymujemy w szczególności następujący wniosek:

(2.2) *Jeżeli ciąg funkcyj $\{f_n(p)\}$ określonych w zbiorze E spełnia warunek*

$$|f_n(p) - f_{n-1}(p)| \leqslant \varepsilon_n \quad \textit{dla każdego} \quad p \in E \quad \textit{i} \quad n = 2, 3, \ldots,$$

gdzie $\{\varepsilon_n\}$ jest ciągiem liczb nieujemnych i szereg $\sum\limits_n \varepsilon_n$ jest zbieżny, to ciąg $\{f_n(p)\}$ jest jednostajnie zbieżny w E.

Mamy bowiem

$$|f_k(p) - f_l(p)| \leqslant |f_k(p) - f_{k+1}(p)| + \ldots + |f_{l-1}(p) + f_l(p)| \leqslant \sum_{n=k}^{l} \varepsilon_n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n$$

dla $p \in E$ i $N < k < l$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$, czyli że

$$|f_k(p) - f_l(p)| \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad p \in E \quad \text{i} \quad N < k < l.$$

Ciąg $\{f_n(p)\}$ spełnia więc w E warunek Cauchy'ego, a przeto jest w E jednostajnie zbieżny na mocy tw. (2.1).

(2.3) *Jeżeli ciąg $\{f_n(p)\}$ funkcyj określonych w zbiorze E i ograniczonych w E jest w tym zbiorze jednostajnie zbieżny, to funkcje $f_n(p)$ są wspólnie ograniczone w E.*

Dowód. Niech M_n będzie kresem górnym funkcji $|f_n(p)|$ w zbiorze E. Przyjmując $\varepsilon=1$, $i=N$ i $j=n$, otrzymujemy z warunku Cauchy'ego $|f_N(p)-f_n(p)|\leqslant 1$ dla $p\in E$ i $n\geqslant N$, skąd

(4) $$|f_n(p)|\leqslant|f_N(p)|+1 \quad \text{dla} \quad n\geqslant N.$$

Oznaczmy przez M największą z liczb $M_1, M_2, ..., M_{N-1}$, M_N+1. Łatwo widzieć, że

(5) $$|f_n(p)|\leqslant M \quad \text{dla} \quad p\in E \quad \text{i} \quad n=1,2,...$$

Gdy bowiem $n\leqslant N$, to (5) wynika z określenia liczby M, gdy zaś $n>N$, to (5) wynika z (4).

Jako wniosek z tw. (2.3) otrzymujemy następujące twierdzenie:

(2.4) *Jeżeli funkcje $\{f_n(p)\}$ określone w zbiorze E są w nim ograniczone i stanowią ciąg jednostajnie zbieżny do funkcji $f(p)$, to $f(p)$ jest również funkcją ograniczoną w E.*

Na mocy bowiem (2.3) istnieje $M>0$, spełniające warunek (5). Ponieważ we wszystkich punktach $p\in E$ jest $f_n(p)\to f(p)$, więc na mocy (1) jest $|f(p)|\leqslant M$ dla każdego $p\in E$.

(2.5) *Jeżeli ciąg $\{f_n(p)\}$ funkcyj określonych w zbiorze E i ciągłych w pewnym punkcie $p_0\in E$ jest w E jednostajnie zbieżny do funkcji $f(p)$, to $f(p)$ jest również funkcją ciągłą w punkcie p_0.*

Dowód. Niech $\varepsilon>0$. Z warunku Cauchy'ego wynika istnienie takiego n_0, że

(6) $$|f_{n_0}(p)-f(p)|\leqslant\varepsilon/3 \quad \text{dla każdego} \quad p\in E.$$

Z ciągłości zaś funkcji $f_{n_0}(p)$ w punkcie p_0 wynika istnienie takiego $\eta>0$, że

(7) $$|f_{n_0}(p)-f_{n_0}(p_0)|\leqslant\varepsilon/3 \quad \text{dla każdego} \quad p\in E, \text{ dla którego } \varrho(p,p_0)\leqslant\eta.$$

Z nierówności

$$|f(p)-f(p_0)|\leqslant|f(p)-f_{n_0}(p)|+|f_{n_0}(p)-f_{n_0}(p_0)|+|f_{n_0}(p_0)-f(p_0)|$$

wynika na mocy (6) i (7), że $|f(p)-f(p_0)|\leqslant\varepsilon$ dla każdego $p\in E$, dla którego $\varrho(p,p_0)\leqslant\eta$, a więc funkcja $f(p)$ jest ciągła w punkcie p_0, c. b. d. d.

Z (2.5) wynika od razu wniosek następujący:

(2.6) *Jeżeli ciąg* $\{f_n(p)\}$ *funkcyj ciągłych w zbiorze* E *jest w nim jednostajnie zbieżny do funkcji* $f(p)$, *to* $f(p)$ *jest funkcją ciągłą w* E.

Udowodnimy twierdzenie następujące:

(2.7) *Jeżeli ciąg funkcyj* $\{f_n(p)\}$ *jednostajnie ciągłych w zbiorze* E *jest w nim jednostajnie zbieżny do funkcji* $f(p)$, *to* $f(p)$ *jest również funkcją jednostajnie ciągłą w zbiorze* E.

Dowód. Niech $\varepsilon>0$. Z jednostajnej zbieżności ciągu funkcyj $\{f_n(p)\}$ w E wynika istnienie takiego n_0, że

(8) $$|f_{n_0}(p)-f(p)|\leqslant\varepsilon/3 \quad \text{dla każdego} \quad p\in E;$$

z jednostajnej zaś ciągłości funkcji $f_{n_0}(p)$ w E wynika istnienie takiego $\eta>0$, że

(9) $$|f_{n_0}(p')-f_{n_0}(p'')|\leqslant\varepsilon/3 \text{ dla tych } p',p''\in E, \text{ dla których } \varrho(p',p'')\leqslant\eta.$$

Z nierówności

$$|f(p')-f(p'')|\leqslant|f(p')-f_{n_0}(p')|+|f_{n_0}(p')-f_{n_0}(p'')|+|f_{n_0}(p'')-f(p'')|$$

wynika na mocy (8) i (9), że $|f(p')-f(p'')|<\varepsilon$ dla wszelkich $p',p''\in E$, dla których $\varrho(p',p'')<\eta$. A więc funkcja $f(p)$ jest jednostajnie ciągła w E, c. b. d. d.

(2.8) *Jeżeli ciąg funkcyj* $\{f_n(p)\}$ *jednostajnie ciągłych w zbiorze* E *jest w nim jednostajnie zbieżny, to do każdej liczby* $\varepsilon>0$ *istnieje taka liczba* $\eta>0$, *że*

(10) $$|f_n(p')-f_n(p'')|\leqslant\varepsilon \text{ dla tych } p',p''\in E, \text{ dla których } \varrho(p',p'')\leqslant\eta.$$

Dowód. Na mocy warunku Cauchy'ego do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje takie N, że

(11) $$|f_k(p)-f_l(p)|\leqslant\varepsilon/3 \quad \text{dla} \quad p\in E, \quad k\geqslant N \quad \text{i} \quad l\geqslant N.$$

Z jednostajnej ciągłości funkcyj $f_1(p),\ldots,f_N(p)$ wynika istnienie takiego $\eta>0$, że

(12) $$\begin{gathered}|f_n(p')-f_n(p'')|\leqslant\varepsilon/3 \quad \text{dla} \quad 1\leqslant n\leqslant N\\ \text{i dla takich } \; p',p''\in E, \quad \text{że} \quad \varrho(p',p'')\leqslant\eta.\end{gathered}$$

Ponieważ dla dowolnego n i wszelkich $p', p'' \in E$ zachodzi nierówność

$$|f_n(p')-f_n(p'')| \leqslant |f_n(p')-f_N(p')|+|f_N(p')-f_N(p'')|+|f_N(p'')-f_n(p'')|,$$

więc na mocy (11) i (12)

$|f_n(p')-f_n(p'')| \leqslant \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$ dla $n \geqslant N$ i dla takich $p', p'' \in E$, dla których $\varrho(p', p'') \leqslant \eta$.

Stąd i z (2) otrzymujemy (1).

Uwaga. Z tw. (2.8) wynika na mocy tw. (6.5), str. 117, że funkcje $f_n(p)$ mają w E wspólny moduł ciągłości.

Z twierdzeniem (2.5) związane jest następujące twierdzenie[1]):

(2.9) *Jeżeli ciąg $\{f_n(p)\}$ dowolnych funkcyj określonych w zbiorze E jest jednostajnie zbieżny w tym zbiorze do funkcji $f(p)$, a ciąg $\{\Omega(f_n; p, E)\}$ jest w każdym punkcie zbioru E zbieżny do 0, to funkcja $f(p)$ jest ciągła w zbiorze E.*

Dowód. Niech p_0 będzie dowolnym punktem zbioru E, a ε — dowolną liczbą dodatnią. W myśl założenia przy dostatecznie wielkich n jest $|f_n(p)-f(p)| < \varepsilon/6$ dla wszelkich $p \in E$ i $\Omega(f_n; p_0, E) < \varepsilon/6$. Istnieje więc taka kula $K=K(p_0, \delta)$, że $|f_n(p_1)-f_n(p_2)| < 2\varepsilon/6$ dla $p_1, p_2 \in EK$. Jeżeli teraz $p \in EK$, to

$$|f(p)-f(p_0)| \leqslant |f(p)-f_n(p)|+|f_n(p)-f_n(p_0)|+|f_n(p_0)-f(p_0)| < \varepsilon,$$

a więc funkcja $f(p)$ jest ciągła w zbiorze E w punkcie p_0.

Zauważmy, że twierdzenia (2.1)-(2.9) są prawdziwe również dla funkcyj o wartościach z przestrzeni $\mathcal{E}^m$.

Zbieżność jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest tylko warunkiem dostatecznym lecz nie koniecznym na to, by granica tego ciągu była funkcją ciągłą.

Dowodzi tego następujący przykład.

Niech E będzie odcinkiem $\langle 0,1 \rangle$ i niech $f_n(x)=x^n(1-x^n)$. Ciąg $\{f_n(x)\}$ jest oczywiście zbieżny do funkcji ciągłej $f(x)=0$, ale nie jednostajnie zbieżny, bo $f_n(1/\sqrt[n]{2})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

---

[1]) Por. E. Marczewski i M. Nosarzewska, Colloquium Math. 1 (1948), str. 15-18.

Jednakże dla pewnych specjalnych ciągów funkcyj ciągłość jednostajna jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by funkcja graniczna była ciągła. Zachodzi np. twierdzenie:

(2.10) *Jeżeli ciąg $\{f_n(p)\}$ niemalejący funkcyj ciągłych w zbiorze E zamkniętym i ograniczonym jest zbieżny do funkcji $f(p)$ ciągłej w zbiorze E, to ciąg $\{f_n(p)\}$ jest jednostajnie zbieżny do $f(p)$ w zbiorze E.*

Dowód. Niech

$$E_{n\varepsilon}=\underset{p}{E}[|f_n(p)-f(p)|\geqslant\varepsilon]=\underset{p}{E}[-\varepsilon\leqslant f_n(p)-f(p)].$$

Gdyby ciąg $\{f_n(p)\}$ nie był jednostajnie zbieżny w zbiorze E, to z zaprzeczenia warunku

$$\prod_{\varepsilon>0}\sum_{N}\prod_{p\in E}\prod_{n>N}[|f_n(p)-f(p)|<\varepsilon]$$

otrzymalibyśmy

$$\sum_{\varepsilon>0}\prod_{N}\sum_{p\in E}\sum_{n>N}[|f_n(p)-f(p)|\geqslant\varepsilon]\equiv\sum_{\varepsilon}\prod_{N}\sum_{n>N}(E_{n\varepsilon}\neq 0). \tag{13}$$

Zbiory $E_{n\varepsilon}$ są zamknięte na mocy tw. (2.5), str. 108, a z monotoniczności ciągu $\{f_n(p)\}$ wynika, że $E_{n\varepsilon}\supset E_{(n+k)\varepsilon}$ dla $n,k=1,2,\ldots$ Z (13) dostajemy zatem $\sum_{n>N}(E_{n\varepsilon}\neq 0)\rightarrow E_{N\varepsilon}\neq 0$, skąd

$$\sum_{\varepsilon>0}\prod_{N}(E_{N\varepsilon}\neq 0).$$

Znaczy to, że istnieje taka liczba $\varepsilon>0$, że zbiory $E_{N\varepsilon}$ są dla $N=1,2,\ldots$ niepuste, a ponieważ są one zamknięte i ograniczone, więc na mocy tw. (9.1), str. 98, zbiór $E^*=\prod_{N=1}^{\infty}E_{N\varepsilon}$ jest niepusty. Jeżeli $p_0\in E^*$, to

$$|f_n(p_0)-f(p_0)|\geqslant\varepsilon \quad \text{dla każdego } n,$$

co jednak niemożliwe, bo $f_n(p_0)\rightarrow f(p_0)$.

Następujące twierdzenie daje warunek konieczny i dostateczny ciągłości granicy ciągu funkcyj ciągłych:

(2.11) *Na to, żeby granica $f(p)$ ciągu zbieżnego $\{f_n(p)\}$ funkcyj ciągłych w zbiorze E była funkcją ciągłą w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, by do każdego punktu $p_0\in E$ i każdej liczby $\varepsilon>0$ istniała taka kula K i taki wskaźnik n, że $p_0\in K$ i*

$$|f(p)-f_n(p)|<\varepsilon \quad \textit{dla} \quad p\in EK. \tag{14}$$

Dowód. Warunek jest konieczny. Istotnie, niech funkcje $f_n(p)$ i $f(p)$ będą ciągłe w zbiorze E i niech dana będzie dowolna liczba $\varepsilon > 0$ oraz punkt $p_0 \in E$. Istnieje takie n, że $|f_n(p_0) - f(p_0)| < \varepsilon/2$. Niech

$$\mathcal{E} = \underset{p}{E}[|f_n(p) - f(p)| < \varepsilon].$$

Ponieważ $p_0 \in E$, więc na mocy twierdzenia (2.4), str. 107, istnieje taka kula K, że $p_0 \in K$ i zachodzi (14).

Warunek jest dostateczny. Istotnie, gdy dana jest dowolna liczba $\bar{\varepsilon} > 0$ i punkt $p_0 \in E$, to na mocy warunku (14) istnieje taki wskaźnik n i taka kula K, że zachodzi (14), w szczególności więc

$$|f(p_0) - f_n(p_0)| < \bar{\varepsilon}/3.$$

Ponieważ funkcja $f_n(p)$ jest ciągła w punkcie p_0, więc istnieje taka kula $K_1 \subset K$, że

$$|f_n(p) - f_n(p_0)| < \bar{\varepsilon}/3 \quad \text{dla} \quad p \in EK_1.$$

Jeżeli teraz $p \in EK_1$, to z (14) dla $\varepsilon = \bar{\varepsilon}/3$

$$|f(p) - f(p_0)| < |f(p) - f_n(p)| + |f_n(p) - f_n(p_0)| + |f_n(p_0) - f(p_0)| < \\ < \bar{\varepsilon}/3 + \bar{\varepsilon}/3 + \bar{\varepsilon}/3 = \bar{\varepsilon}.$$

Funkcja $f(p)$ jest więc ciągła w p_0.

(2.12) *Na to, żeby granica $f(p)$ ciągu $\{f_n(p)\}$ funkcyj ciągłych w zbiorze zamkniętym i ograniczonym E była ciągła w zbiorze E, potrzeba i wystarcza, by do każdego $\varepsilon > 0$ i $r > 0$ istniał taki wskaźnik $s > r$, że*

$$\min_{r \leqslant n \leqslant s} |f_n(p) - f(p)| < \varepsilon \quad \textit{dla każdego} \quad p \in E. \tag{15}$$

Dowód. Warunek jest konieczny. Istotnie, niech

$$\varphi_s(p) = \min_{r \leqslant n \leqslant s} |f_n(p) - f(p)|.$$

Ciąg $\{\varphi_s(p)\}$ jest malejący, składa się z funkcyj ciągłych i

$$\lim_{s \to 0} \varphi_s(p) = 0 \quad \text{w zbiorze } E.$$

Na mocy tw. (2.10) ciąg $\{\varphi_s(p)\}$ dąży jednostajnie do 0. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje więc taki wskaźnik m, że $|\varphi_m(p)| < \varepsilon$ dla każdego $p \in E$. Biorąc $s = m$, dostajemy nierówność (15).

Warunek jest dostateczny. Istotnie, jeżeli p_0 jest dowolnym punktem zbioru E, ε — dowolną liczbą dodatnią i r — wskaźnikiem takim, że

$$|f_n(p_0)-f(p_0)|<\varepsilon \quad \text{dla} \quad n\geqslant r,$$

to na mocy warunku (15) istnieje liczba $s>r$, dla której

$$\min_{r\leqslant n\leqslant s}|f_n(p)-f(p)|<\varepsilon/3.$$

Ponieważ funkcje $f_r(p),\ldots,f_s(p)$ są ciągłe w punkcie p_0, więc istnieje taka kula K, że $p_0\in K$ oraz

$$|f_n(p)-f(p_0)|<\varepsilon/3 \quad \text{dla} \quad r\leqslant n\leqslant s \quad \text{i} \quad p\in EK.$$

Jeżeli $p\in EK$ i $r\leqslant n\leqslant s$, to

$$|f(p)-f(p_0)|\leqslant|f(p)-f_n(p)|+|f_n(p)-f_n(p_0)|+|f_n(p_0)-f(p_0)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}+|f_n(p)-f_n(p_0)|,$$

skąd

$$|f(p)-f(p_0)|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}+\min_{r\leqslant n\leqslant s}|f_n(p)-f_n(p_0)|<\varepsilon.$$

3. Zbiory zwarte funkcyj. Dowolny zbiór F funkcyj ograniczonych i jednostajnie ciągłych w pewnym zbiorze E nazywamy *zwartym*, jeżeli w każdym ciągu $\{f_n(p)\}$ funkcyj należących do F istnieje ciąg częściowy jednostajnie zbieżny w E.

PRZYKŁAD. Niech $\varphi(x,t)$ będzie funkcją ciągłą dla $a\leqslant x\leqslant b$ i $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. Zbiór F funkcyj zmiennej $x\in\langle a,b\rangle$ postaci $f_t(x)=\varphi(x,t)$, gdzie $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, jest zwarty.

Niech bowiem $\{f_{t_n}(x)\}$ będzie dowolnym ciągiem funkcyj należących do F. Ciąg punktów $\{t_n\}$ zawiera ciąg częściowy $\{t_{n_i}\}$ zbieżny do pewnego punktu t_0 przedziału $\langle\alpha,\beta\rangle$. Ponieważ

$$|f_{t_{n_i}}(x)-f_{t_0}(x)|=|\varphi(x,t_{n_i})-\varphi(x,t_0)|,$$

więc z jednostajnej ciągłości funkcji $\varphi(x,t)$ wynika dla każdego $\varepsilon>0$ istnienie takiego $\eta>0$, że nierówność $|t_{n_i}-t_0|\leqslant\eta$ pociąga za sobą nierówność $|\varphi(x,t_{n_i})-\varphi(x,t_0)|\leqslant\varepsilon$. Ze zbieżności ciągu $\{t_{n_i}\}$ wynika zaś istnienie takiego N, że dla $i>N$ jest $|t_{n_i}-t_0|\leqslant\varepsilon$. Mamy więc

$$|f_{t_{n_i}}(x)-f_{t_0}(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{dla} \quad i\geqslant N \quad \text{w} \quad \langle a,b\rangle;$$

zatem ciąg $f_{t_{n_i}}(x)$ jest jednostajnie zbieżny w $\langle a,b\rangle$ do funkcji $f_{t_0}(x)$. Zbiór F jest więc zwarty.

(3.1) *Jeżeli funkcje $f_n(p)$ są jednakowo ciągle w zbiorze ograniczonym E i są zbieżne we wszystkich punktach pewnego zbioru G gęstego w E, to wówczas ciąg tych funkcyj jest jednostajnie zbieżny w E.*

Dowód. Na mocy tw. (4.11), str. 81, istnieje w zbiorze G zbiór przeliczalny punktów $\{p_\nu\}$, gęsty w G, a tym samym w E. Według założenia ciąg liczb $\{f_n(p_\nu)\}$ jest zbieżny dla każdego $\nu=1,2,\ldots$ Ponieważ funkcje $f_n(p)$ są jednakowo ciągłe, więc dla dowolnej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\eta>0$, że

(16) $|f_n(p')-f_n(p'')|\leqslant\varepsilon/3$ dla tych $p',p''\in E$, dla których $\varrho(p',p'')\leqslant\eta$.

Ciąg punktów $\{p_\nu\}$ zawiera skończoną liczbę punktów $p_1,\ldots,p_n$ o własności

$$\min_{\nu=1,2,\ldots,n}\varrho(p_\nu,p)\leqslant\eta \quad \text{dla każdego} \quad p\in E.$$

W przeciwnym bowiem razie dla każdego k istniałby punkt $q_k\in E$ spełniający nierówności $\varrho(p_i,q_k)>\eta$ dla $i=1,2,\ldots,k$. Ciąg $\{q_k\}$ jest ograniczony, gdyż E jest zbiorem ograniczonym, posiada więc co najmniej jeden punkt skupienia. Otóż każdy punkt skupienia q ciągu $\{q_k\}$ spełnia oczywiście nierówności $\varrho(p_i,q)\geqslant\eta$ dla $i=1,2,\ldots$, a zarazem nierówność $\varrho(q,q_{k_0})<\eta/2$ dla pewnych (nieskończenie wielu) wartości k_0 wskaźnika k. Z obu tych nierówności wynika na mocy prawa trójkąta, że $\varrho(q_{k_0},p_i)\geqslant\eta/2$ dla $i=1,2,\ldots$, co jest jednak niemożliwe, gdyż ciąg $\{p_\nu\}$ jest z założenia gęsty w E.

Ze zbieżności ciągu funkcyj $\{f_n(p)\}$ w punktach $p_1,\ldots,p_n$ wynika istnienie takiego N, że

(17) $|f_k(p_\nu)-f_l(p_\nu)|\leqslant\varepsilon/3$ dla $k\geqslant N$, $l\geqslant N$ i $\nu=1,2,\ldots,n$.

Dla każdego punktu $p\in E$ oraz wszelkich k i ν zachodzi nierówność

(18) $|f_k(p)-f_l(p)|\leqslant|f_k(p)-f_k(p_\nu)|+|f_k(p_\nu)-f_l(p_\nu)|+|f_l(p_\nu)-f_l(p)|$,

a na mocy (2) dla pewnego $\nu\leqslant n$ zachodzi nierówność $\varrho(p_\nu,p)\leqslant\eta$. Na mocy (16) pierwszy i trzeci wyraz po prawej stronie nierówności (18) jest dla takiego $\nu\leqslant n$ nie większy od $\varepsilon/3$; drugi zaś na mocy (18) jest dla $k\geqslant N$ i $l\geqslant N$ również nie większy od $\varepsilon/3$. Zatem

$$|f_k(p)-f_l(p)|\leqslant\varepsilon \quad \text{dla każdego} \quad p\in E \quad \text{oraz} \quad k\geqslant N \quad \text{i} \quad l\geqslant N.$$

A więc ciąg $\{f_n(p)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego w E i przeto jest jednostajnie zbieżny w E, c. b. d. d.

(3.2) ***Twierdzenie Arzeli.*** *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by zbiór F funkcyj jednostajnie ciągłych w zbiorze ograniczonym E był zwarty, jest, aby funkcje należące do zbioru F były wspólnie ograniczone i jednakowo ciągłe.*

Dowód. Przypuśćmy, że funkcje należące do zbioru zwartego F nie są wspólnie ograniczone. Dla każdego n istnieje więc funkcja $f_n \in F$ i punkt $p_n \in E$, dla których spełniona jest nierówność $|f_n(p_n)| \geqslant n$. Wynika stąd, że żaden ciąg częściowy ciągu funkcyj $\{f_n(p)\}$ nie jest wspólnie ograniczony. Zatem na mocy tw. (2.3) ciąg $\{f_n(p)\}$ nie zawiera ciągu częściowego jednostajnie zbieżnego w E, co się sprzeciwia zwartości zbioru F.

Przypuśćmy teraz, że funkcje f_n nie są jednakowo ciągłe. Na mocy tw. (6.5), str. 117, istnieje więc takie $\varepsilon_0 > 0$, że dla każdej liczby $\eta = 1/n$ zbiór F zawiera funkcję f_n, a zbiór E parę punktów p'_n, p''_n o własnościach:

$$|f_n(p'_n) - f_n(p''_n)| \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{i} \quad \varrho(p'_n, p''_n) \leqslant 1/n.$$

Na mocy tw. (2.8) ciąg $\{f_n(p)\}$ nie zawiera ciągu częściowego jednostajnie zbieżnego w E, co jest sprzeczne ze zwartością zbioru F. A więc wszystkie funkcje $f \in F$ są jednakowo ciągłe. Warunek twierdzenia Arzeli jest przeto konieczny.

Na odwrót, niech funkcje $f \in F$ będą wspólnie ograniczone, tzn. niech istnieje takie $M > 0$, że

$$(19) \qquad |f(p)| \leqslant M \quad \text{dla wszystkich} \quad p \in E \quad \text{i} \quad f \in F,$$

i niech będą jednakowo ciągłe. Weźmy pod uwagę dowolny ciąg $\{f_n(p)\}$ funkcyj należących do F.

Na mocy tw. (4.11), str. 81 istnieje zbiór przeliczalny G punktów $\{p_\nu\}$, gęsty w zbiorze E. Ciąg $\{f_n(p)\}$ zawiera na mocy tw. (1.1) ciąg częściowy $\{f_{n_i}(p)\}$ zbieżny dla każdego p_ν, gdzie $\nu = 1, 2, \ldots$ Na mocy więc tw. (3.1) ciąg $\{f_{n_i}(p)\}$ jest jednostajnie zbieżny w E. Zatem F jest zbiorem zwartym i tym samym dostateczność warunku twierdzenia Arzeli została dowiedziona.

PRZYKŁADY. 1. *Każdy zbiór funkcyj wspólnie ograniczonych w zbiorze ograniczonym E i spełniających w E warunek Lipschitza ze wspólną stałą k, jest zwarty.*

Wynika to z tw. (3.2), bowiem funkcje spełniające warunek Lipschitza z tą samą stałą k mają wspólny moduł ciągłości, mianowicie $\omega(\eta)=k\eta$.

2. *Zbiór F wszystkich funkcyj $y=f(x)$, mających w przedziale $\langle a,b\rangle$ pochodną i spełniających dla pewnej liczby $k>0$ i pewnej liczby $L>0$ warunki:*

$$1^0 \quad |f'(x)|\leqslant k \quad \textit{dla} \quad a\leqslant x\leqslant b, \qquad 2^0 \quad |f(a)|\leqslant L,$$

jest zwarty.

Wynika to z tw. (3.2), funkcje $f\in E$ spełniają bowiem warunek Lipschitza ze stałą k i są wspólnie ograniczone. Istotnie, dla każdych dwóch punktów x', x'' odcinka $\langle a,b\rangle$ mamy na mocy twierdzenia o wartości średniej

$$|f(x')-f(x'')|=|(x'-x'')f'(\xi)|\leqslant k|x'-x''|.$$

Ponadto

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(a)|+|f(a)|\leqslant k|x-a|+L\leqslant k|b-a|+L.$$

3. *Jeżeli $\varphi(x,y)$ jest ustaloną funkcją ciągłą w kwadracie*

$$0\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

a G jest zbiorem wszystkich funkcyj $g(y)$ ciągłych na odcinku $0\leqslant y\leqslant 1$ i spełniających warunek

$$(20) \qquad |g(y)|\leqslant 1 \quad \textit{dla} \quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

to zbiór F wszystkich funkcyj $y=f(x)$ postaci

$$(21) \qquad f(x)=\int_0^1 \varphi(x,y)g(y)\,dy,$$

gdzie $g\in G$, jest zwarty.

Wynika to z tw. (3.2); oznaczając bowiem przez M kres górny funkcji $|\varphi(x,y)|$ w kwadracie $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, mamy na mocy warunku (20)

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1|\varphi(x,y)|\,dy\leqslant M \quad \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

A więc funkcje $f\in F$ są wspólnie ograniczone. Z ciągłości zaś funkcji $\varphi(x,y)$ wynika dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnienie takiej liczby $\eta>0$, że nierówność $|x_1-x_2|\leqslant\eta$ pociąga nierówność

$$|\varphi(x_1,y)-\varphi(x_2,y)|\leqslant\varepsilon \quad \text{dla} \quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

a więc — ze względu na (21) i (20) — nierówność

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\int_0^1[\varphi(x_1,y)-\varphi(x_2,y)]g(y)dy\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^1|\varphi(x_1,y)-\varphi(x_2,y)||g(y)|dy\leqslant\varepsilon.$$

A zatem funkcje $f\in F$ mają wspólny moduł ciągłości.

4. *Każdy zbiór funkcyj, wspólnie ograniczonych w zbiorze ograniczonym E i spełniających w E warunek Höldera ze wspolną potęgą a i wspólną stałą k, jest zwarty.*

Wynika to z tw. (3.2), ponieważ funkcje te mają wtedy wspólny moduł ciągłości $\omega(\eta)=k\eta^a$.

5. *Zbiór F wszystkich funkcyj $y=f(x)$, mających w przedziale $\langle a,b\rangle$ pochodną ciągłą i spełniających dla pewnego $k>0$ i pewnego $L>0$ warunki:*

$$1^0\quad\int_b^a[f'(x)]^2dx\leqslant k,\qquad\qquad 2^0\quad|f(a)|\leqslant L,$$

jest zwarty.

Wynika to z tw. (3.2); jeżeli bowiem $a\leqslant x'<x''\leqslant b$, to na mocy nierówności Schwarza mamy

$$|f(x'')-f(x')|=\left|\int_{x'}^{x''}f'(x)\,dx\right|\leqslant(x''-x')^{1/2}\Big[\int_{x'}^{x''}[f'(x)]^2dx\Big]^{1/2}\leqslant k^{1/2}(x''-x')^{1/2}.$$

A zatem funkcje $f\in F$ spełniają warunek Höldera z tą samą potęgą $a=1/2$ i tą samą stałą $k^{1/2}$. Zarazem funkcje $f\in F$ są wspólnie ograniczone, bo

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(a)|+|f(a)|\leqslant k^{1/2}|x-a|^{1/2}+L\leqslant k^{1/2}(b-a)^{1/2}+L \text{ dla } a\leqslant x\leqslant b.$$

6. Niech funkcje $f_0(p),f_1(p),\ldots,f_n(p)$ będą w zbiorze E ograniczone, jednostajnie ciągłe i *liniowo niezależne*, tzn. takie, że dla wszelkich liczb $a_0,\ldots,a_n$ warunek

$$a_0f_0(p)+\ldots+a_nf_n(p)=0 \quad\text{dla każdego}\quad p\in E$$

pociąga za sobą równość

$$a_0=a_1=\ldots=a_n=0.$$

Niech $M > 0$. Oznaczmy przez Φ zbiór wszystkich funkcji $\varphi(p)$ postaci

$$\varphi(p) = \alpha_0 f_0(p) + \dots + \alpha_n f_n(p) \tag{22}$$

(gdzie $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ są dowolnymi liczbami), spełniających nierówność

$$|\varphi(p)| \leqslant M \quad \text{dla każdego} \quad p \in E.$$

Przy powyższych założeniach Φ jest zbiorem zwartym.

Udowodnimy najpierw istnienie takiej liczby k, że spółczynniki $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ każdej funkcji $\varphi \in E$ spełniają nierówność

$$|\alpha_0| + \dots + |\alpha_n| \leqslant k. \tag{23}$$

Gdyby bowiem taka liczba k nie istniała, to dla każdej liczby naturalnej r istniałaby funkcja $\varphi_r(p) \in \Phi$ postaci

$$\varphi_r(p) = \alpha_0^{(r)} f_0(p) + \dots + \alpha_n^{(r)} f_n(p), \tag{24}$$

spełniająca warunek

$$a_r = |\alpha_0^{(r)}| + \dots + |\alpha_n^{(r)}| \geqslant r. \tag{25}$$

Ponieważ $|\varphi_r(p)| \leqslant M$ dla $p \in E$, więc

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{a_r} \varphi_r(p) = 0. \tag{26}$$

Na mocy (25) mamy $|\alpha_i^{(r)}|/a_r \leqslant 1$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ i $r = 1, 2, \dots$ Ciąg $\{\varphi_r(p)\}$ zawiera więc taki ciąg częściowy $\{\varphi_{r_j}(p)\}$, że ciągi $\{\alpha_0^{(r_j)}/a_{r_j}\}, \dots, \{\alpha_n^{(r_j)}/a_{r_j}\}$ są zbieżne. Oznaczając ich granice przez $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, otrzymujemy z (26)

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{a_{r_j}} \varphi_{r_j}(p) = \alpha_0 f_0(p) + \dots + \alpha_n f_n(p) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad p \in E.$$

Ponieważ założyliśmy, że funkcje $f_0(p), \dots, f_n(p)$ są w zbiorze E liniowo niezależne, więc $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Lecz to jest niemożliwe, gdyż na mocy (25)

$$\left|\frac{\alpha_0^{(r_i)}}{a_{r_j}}\right| + \dots + \left|\frac{\alpha_n^{(r_i)}}{a_{r_j}}\right| = 1,$$

skąd $|\alpha_0| + \dots + |\alpha_n| = 1$ dla $j \to \infty$. Istnienie liczby k jest więc dowiedzione.

Niech teraz $\{\varphi_r(p)\}$ będzie dowolnym ciągiem funkcyj postaci (24), należących do Φ. Ponieważ na mocy (23) jest $|a_i^{(r)}|\leqslant k$ dla $i=0,1,\dots,n$ i $r=1,2,\dots$, więc ciąg $\{\varphi_r(p)\}$ zawiera taki ciąg częściowy $\{\varphi_{r_j}(p)\}$, że ciągi $\{a_0^{(r_j)}\},\dots,\{a_n^{(r_j)}\}$ są zbieżne. Oznaczając ich granice przez $a_0,\dots,a_n$ i przyjmując (22) otrzymujemy

$$|\varphi_{r_j}(p)-\varphi(p)|\leqslant|a_0^{(r_j)}-a_1||f_1(p)|+\dots+|a_n^{(r_j)}-a_n||f_n(p)|.$$

Ponieważ funkcje $f_0(p),\dots,f_n(p)$ są z założenia wspólnie ograniczone, więc przyjmując $|f_i(p)|\leqslant L$ dla $p\in L$ i dla $i=1,2,\dots,n$ oraz oznaczając przez η_j największą z liczb $|a_0^{(r_j)}-a_0|,\dots,|a_n^{(r_j)}-a_n|$, dostajemy

$$|\varphi_{r_j}(p)-\varphi(p)|\leqslant n\eta_j L.$$

Dla $j\to\infty$ mamy oczywiście $\eta_j\to 0$, zatem ciąg funkcyj $\{\varphi_{r_j}(p)\}$ jest w E jednostajnie zbieżny do funkcji $\varphi(p)$. A więc zbiór Φ jest zwarty.

7. *Dla każdej liczby naturalnej n zbiór wielomianów stopnia niewiększego od n wspólnie ograniczonych w przedziale zamkniętym $\langle a,b\rangle$ jest zwarty.*

Istotnie, przyjmijmy w przykładzie 6:

$$f_0(x)=1,\quad f_1(x)=x,\quad \dots,\quad f_n(x)=x^n.$$

Oczywiście funkcje te są ograniczone i jednostajnie ciągłe na odcinku $\langle a,b\rangle$. Są również na nim liniowo niezależne; jeżeli bowiem przy pewnych $a_0,a_1,\dots,a_n$ dla każdego $x\in\langle a,b\rangle$ zachodzi równanie

$$a_0+a_1x+\dots+a_nx^n=0,$$

to — jak wiadomo ze znanego twierdzenia Algebry — współczynniki $a_0,a_1,\dots,a_n$ są równe zeru.

Dla dowolnie danego $M>0$ zbiór Φ, określony jak w przykładzie 6, jest w rozważanym przypadku zbiorem wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej n, nie większych co do modułu od M dla $a\leqslant x\leqslant b$, a więc wspólnie ograniczonych w $\langle a,b\rangle$. Zbiór ten jest zatem zwarty.

Podobnie:

Dla każdego naturalnego n zbiór wielomianów trygonometrycznych stopnia co najwyżej n, wspólnie ograniczonych, postaci

$$\varphi(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

jest zwarty w przedziale nieskończonym $-\infty < x < \infty$.

Dowód przebiega jak poprzednio.

§ 3. Przybliżanie funkcyj ciągłych wielomianami. Wielomiany Bernsteina.

1. Lemat o linii łamanej. *Niech* $p_i = (x_i, y_i)$, *gdzie* $i = 0, 1, \ldots, n$, *będą dowolnymi punktami płaszczyzny, spełniającymi warunek*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Funkcja $y = \varphi(x)$, *ciągła dla* $a \leqslant x \leqslant b$, *której wykresem geometrycznym* (tzn. zbiorem punktów o współrzędnych x i $f(x)$) *jest linia łamana* $\overline{p_0 p_1 \ldots p_n}$, *da się przedstawić w postaci*

$$y = a + \sum_{i=0}^{n-1} a_i |x - x_i| \quad dla \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

gdzie a *i* a_i *są odpowiednio dobranymi liczbami.*

Dowód. Oznaczmy przez $g(x)$ prawą stronę równości (1). Dla $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ i $i = 0, 1, \ldots, n-1$ mamy

$$g'(\xi_i) = (a_0 + \ldots + a_i) - (a_{i+1} + \ldots + a_{n-1}),$$

skąd $g'(\xi_i) + g'(\xi_{n-1}) = 2(a_0 + \ldots + a_i)$, więc

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2}[g'(\xi_0) + g'(\xi_{n-1})], \\ a_i &= \tfrac{1}{2}[g'(\xi_i) - g'(\xi_{i-1})] \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Przyjmijmy

$$g'(\xi_i) = \varphi'(\xi_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = m_i \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Zatem na mocy (3)

$$a_0 = \tfrac{1}{2}(m_0 + m_{n-1}) \quad \text{i} \quad a_i = \tfrac{1}{2}(m_i - m_{i-1}) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Z (3) wynika, że $\varphi'(x)=g'(x)$ na odcinku $\langle a,b\rangle$ poza punktami $x_0,x_1,\ldots,x_n$. Zatem $\varphi(x)-g(x)=\mathrm{const}$. Jeżeli więc podstawimy w (1) takie α, by było $\varphi(x_0)=g(x_0)$ czyli $\varphi(a)=g(a)$, wówczas otrzymamy $f(x)=\varphi(x)$ dla $a\leqslant x\leqslant b$. Odpowiednie α otrzymujemy z (1) i (4), biorąc $x=x_0=a$; zatem

$$\alpha=y_0-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(m_i-m_{i-1})|a-x_i|, \tag{5}$$

skąd

$$\varphi(x)=\alpha+\tfrac{1}{2}(m_0+m_{n-1})|x-a|+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(m_i-m_{i-1})|x-x_i|,$$

gdzie α określone jest wzorem (5), a m_i wzorem (3).

2. Przybliżanie funkcji $|x|$. Powiadamy, że funkcje φ (należące do pewnego zbioru Φ) *przybliżają* funkcję $f(x)$ w zbiorze E, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka funkcja $\varphi\in\Phi$, że

$$|\varphi(p)-f(p)|\leqslant\varepsilon \quad \text{dla każdego} \quad p\in E.$$

Rozpatrzmy przede wszystkim przypadek, gdy Φ jest zbiorem wszystkich wielomianów, $f=|x|$ i $E=\langle -1,1\rangle$.

(2.1) *Dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taki wielomian $w(x)$, że*

$$|w(x)-|x||\leqslant\varepsilon \quad \textit{dla} \quad -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{6}$$

Dowód. Rozwińmy $\sqrt{1-\xi}$ na szereg potęgowy:

$$\sqrt{1-\xi}=1-\binom{1/2}{1}\xi+\binom{1/2}{2}\xi^2-\ldots+(-1)^n\binom{1/2}{n}\xi^n+\ldots\,. \tag{7}$$

Szereg (7) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $0\leqslant\xi\leqslant 1$.

Istotnie, szereg (7) jest zbieżny dla $-1<\xi<1$ i $\sqrt{1-\xi}$ jest jego sumą[1]. Mamy dalej $\alpha_n=(-1)^n\binom{1/2}{n}=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n n!}$. Wyrazy szeregu (7), począwszy od drugiego, są zatem ujemne dla $0<\xi<1$. Więc

$$0\leqslant\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2+\ldots+\alpha_n\xi^n\leqslant 1-\sqrt{1-\xi} \quad \text{dla} \quad 0\leqslant\xi<1 \quad \text{i dla każdego } n.$$

Wobec ciągłości wszystkich członów nierówności otrzymujemy stąd dla $\xi=1$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\leqslant 1 \quad \text{dla każdego } n.$$

---

[1] S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, wyd. 2-e (niezmienione), Książnica Atlas, Wrocław 1949, tom I, str. 235.

Zatem szereg $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots$ jest również zbieżny, skąd wynika na mocy twierdzenia Abela, że szereg (7) jest jednostajnie zbieżny dla $0\leqslant\xi\leqslant 1$. Ponieważ suma tego szeregu jest dla $0\leqslant\xi\leqslant 1$ funkcją ciągłą i równość (7) zachodzi dla $0\leqslant\xi<1$, więc zachodzi ona również dla $\xi=1$.

Dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje zatem takie n, że

$$\left[\sqrt{1-\xi}-\left(1-\binom{1/2}{1}\xi+\ldots+(-1)^n\binom{1/2}{n}\xi^n\right)\right]\leqslant\varepsilon \quad \text{dla} \quad 0\leqslant\xi\leqslant 1. \tag{8}$$

Biorąc $\xi=1-x^2$ i stosując tożsamość

$$|x|=\sqrt{1-(1-x^2)},$$

dostaniemy stąd

$$\left|\,|x|-\left[1-\binom{1/2}{1}(1-x^2)+\ldots+(-1)^n\binom{1/2}{n}(1-x^2)^n\right]\right|\leqslant\varepsilon \quad \text{dla} \quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Wyrażenie w [ ] jest oczywiście wielomianem.

(2.2) ***Wniosek.*** Dla każdego χ i każdego $M>0$, pisząc $(x-\chi/M)$ zamiast x i ε/M zamiast ε oraz mnożąc przez M, otrzymujemy z (6)

$$\left|Mw\left(\frac{x-\chi}{M}\right)-|x-\chi|\right|\leqslant\varepsilon \quad \text{dla} \quad -M+\chi\leqslant x\leqslant M+\chi. \tag{9}$$

Funkcja $Mw\left(\frac{x-\chi}{M}\right)=v(x)$ jest oczywiście wielomianem. Dla każdego przedziału $\langle a,b\rangle$ istnieje takie $M>0$, że $-M+\chi\leqslant a<b\leqslant M+\chi$. Zatem z (8) dostaniemy

$$|v(x)-|x-\chi||\leqslant\varepsilon \quad \text{dla} \quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{10}$$

3. Przybliżanie dowolnej funkcji ciągłej. Udowodnimy obecnie następujące twierdzenie ogólne:

(3.1) ***Twierdzenie Weierstrassa.*** *Jeżeli $y=f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $a\leqslant x\leqslant b$, to do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taki wielomian $w(x)$, że*

$$|f(x)-w(x)|\leqslant\varepsilon \quad \textit{dla} \quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{11}$$

Dowód. Ponieważ funkcja $f(x)$ jest jednostajnie ciągła w przedziale zamkniętym $\langle a,b\rangle$, więc do każdego $\bar\varepsilon>0$ istnieje takie $\eta>0$, że

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\bar\varepsilon \quad \text{dla wszelkich } x',x''\in\langle a,b\rangle, \text{ dla których } |x'-x''|\leqslant\eta. \tag{12}$$

Weźmy pod uwagę dowolne punkty x_i, gdzie $i=0,1,...,n$ tak, by $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ i $|x_i-x_{i-1}|\leqslant\eta$ dla $i=1,2,...,n$. Zatem na mocy (12)

(13) $|f(x')-f(x'')|\leqslant\bar{\varepsilon}$ dla wszelkich $x',x''\,\epsilon\,\langle x_{i-1},x_i\rangle$ i $i=1,2,...,n$.

Oznaczmy przez p_i punkt o współrzędnych x_i oraz $y_i=f(x_i)$. Niech $y=\varphi(x)$ będzie funkcją określoną dla $a\leqslant x\leqslant b$, której wykresem jest linia łamana $\overline{p_0p_1...p_n}$. Na mocy lematu o linii łamanej (p. § 3,1, str. 137) funkcja $\varphi(x)$ jest postaci

(14) $\varphi(x)=\alpha+\sum\limits_{i=0}^{n-1}\alpha_i|x-x_i|$ i ponadto $|\varphi(x)-f(x)|\leqslant\bar{\varepsilon}$ dla $a\leqslant x\leqslant b$.

Niech $k=|\alpha_0|+...+|\alpha_{n-1}|$. Z tegoż lematu (i z wniosku (2.2), str. 139) wynika, że istnieją wielomiany $w_i(x)$, gdzie $i=0,1,...,n-1$, spełniające nierówność

(15) $|w_i(x)-|x-x_i||\leqslant\bar{\varepsilon}/(k+1)$ dla $a\leqslant x\leqslant b$ i $i=0,1,...,n-1$.

Biorąc

$$w(x)=\alpha+\alpha_0w_0(x)+...+\alpha_{n-1}w_{n-1}(x)$$

dostajemy z (14) i (15)

$$|\varphi(x)-w(x)|\leqslant\frac{k}{k+1}\bar{\varepsilon}\leqslant\bar{\varepsilon} \quad \text{dla} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Stąd i z (14) otrzymujemy zatem

$$|f(x)-w(x)|\leqslant|f(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)-w(x)|\leqslant2\bar{\varepsilon} \quad \text{dla} \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

stąd dla $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\varepsilon$ dostajemy (11).

(3.2) *Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale zamkniętym $\langle a,b\rangle$, to istnieje ciąg wielomianów $\{w_n(x)\}$ jednostajnie zbieżnych do $f(x)$ w tym przedziale.*

Dowód. Na mocy (3.1) istnieje dla $\varepsilon=1/n$ wielomian $w_n(x)$, spełniający nierówność

$$|f(x)-w_n(x)|\leqslant1/n \quad \text{dla} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Oczywiście ciąg wielomianów $\{w_n(x)\}$ jest w $\langle a,b\rangle$ jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x)$.

Uwaga. Twierdzenie (3.2) możemy zaostrzyć, zastępując w jego tezie wielomiany $w_n(x)$ przez *wielomiany $W_n(x)$, mające współczynniki wymierne.*

Niech bowiem $w(x)=a_0+a_1x+\dots+a_kx^k$ będzie dowolnym wielomianem. Dobierzmy liczby wymierne $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_k$ tak, by było $|\alpha_i-a_l|\leqslant\varepsilon$ dla $i=0,1,\dots,k$.

Weźmy pod uwagę wielomian $W(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\dots+\alpha_kx^k$. Wówczas

$$|W(x)-w(x)|\leqslant\varepsilon(1+|x|+\dots+|x|^k)\leqslant\varepsilon M \quad \text{dla} \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

gdzie $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}(1+|x|+\dots+|x|^k)$.

Jeżeli więc $\{w_n(x)\}$ jest ciągiem wielomianów jednostajnie zbieżnym do $f(x)$ w $\langle a,b\rangle$, to do każdej liczby naturalnej n istnieje na mocy (14) wielomian $W_n(x)$ o współczynnikach wymiernych, spełniający nierówność $|W_n(x)-w_n(x)|\leqslant 1/n$ dla $a\leqslant x\leqslant b$ i $n=1,2,\dots$, a więc takich, że ciąg $\{W_n(x)\}$ jest również jednostajnie zbieżny do $f(x)$ w $\langle a,b\rangle$.

4. Wielomiany Bernsteina. Niech funkcja $y=f(x)$ określona będzie w przedziale zamkniętym $\langle 0,1\rangle$ i niech dla dowolnego n naturalnego

$$w_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}. \tag{16}$$

(4.1) *Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale zamkniętym $\langle 0,1\rangle$, to ciąg $\{w_n(x)\}$ wielomianów (16) jest w tym przedziale jednostajnie zbieżny do $f(x)$*[1].

Dowód. Ze wzoru Newtona dla potęgi dwumianu mamy

$$1=[x+(1-x)]^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \tag{17}$$

Pisząc w powyższym wzorze $n-1$ zamiast n, a l zamiast k i mnożąc obustronnie przez x, otrzymujemy

$$x=\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}x^{l+1}(1-x)^{n-1-l}=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{l+1}{n}\binom{n}{l+1}x^{l+1}(1-x)^{n-1-l}.$$

---

[1] Twierdzenie to pierwszy udowodnił matematyk rosyjski S. Bernstein. Dlatego wielomiany (16) nazywamy *wielomianami Bernsteina*.

Dla $l+1=k$ otrzymujemy

$$x=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \tag{18}$$

Mnożąc (17) obustronnie przez x^2 oraz pisząc $n-2$ zamiast n i l zamiast k, otrzymujemy

$$x^2=\sum_{l=0}^{n-2}\binom{n-2}{l}x^{l+2}(1-x)^{n-2-l}=\sum_{l=0}^{n-2}\frac{(l+2)(l+1)}{n(n-1)}\binom{n}{l+2}x^{l+2}(1-x)^{n-2-l},$$

skąd dla $k=l+2$

$$x^2=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}. \tag{19}$$

Mamy $(k-nx)^2=n^2x^2-(2nx-1)k+k(k-1)$, zatem

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}=n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}-$$
$$-(2nx-1)\sum_{p=0}^{n}k\binom{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{p=0}^{n}k(k-1)\binom{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Stąd na mocy (17), (18) i (19)

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{k}{n}x^k(1-x)^k=n^2x^2-(2nx-1)nx+n(n-1)x^2=nx(1-x). \tag{20}$$

Z założenia istnieje dla każdego $\varepsilon>0$ takie $\eta>0$, że

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon/2 \text{ dla } x',x''\in\langle 0,1\rangle, \text{ dla których } |x'-x''|\leqslant\eta. \tag{21}$$

Niech $M>0$ spełnia nierówność

$$|f(x)|\leqslant M \quad \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{22}$$

Na mocy (16) i (17) mamy

$$\begin{aligned}f(x)-w_n(x)&=f(x)-\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\\&=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.\end{aligned} \tag{23}$$

Jeżeli $|x-k/n|<\eta$, to na mocy (21) jest $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\varepsilon/2$.

Jeżeli natomiast $|x-k/n|>\eta$, to na mocy (22)

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant 2M\leqslant 2M\frac{(x-k/n)^2}{\eta^2}=\frac{2M}{n^2\eta^2}(k-nx)^2.$$

Zatem przy wszelkim n i $k=0,1,\ldots,n$

$$\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n^2\eta^2}(k-nx)^2 \quad \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

skąd wobec (23)

$$|f(x)-w_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{2M}{n^2\eta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}.$$

Na mocy więc (17) i (20)

$$|f(x)-w_n(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n^2\eta^2}nx(1-x)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\eta^2} \quad \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Dla $n>4M/\varepsilon\eta^2$ otrzymujemy $2M/n\eta^2<\varepsilon/2$, skąd $|f(x)-w_n(x)|\leqslant\varepsilon$ dla $0\leqslant x\leqslant 1$. A więc ciąg wielomianów $\{w_n(x)\}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle 0,1\rangle$, c. b. d. d.

Uwaga. Funkcję $y=f(x)$, ciągłą w przedziale zamkniętym $\langle a,b\rangle$, możemy przybliżać za pomocą wielomianów Bernsteina w sposób następujący.

Niech $\varphi(\xi)=f(a+\xi(b-a))$ dla $0\leqslant\xi\leqslant 1$. Tworząc dla funkcji $\varphi(\xi)$ wielomian (16), otrzymamy

$$w_n(\xi)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\xi^k(1-\xi)^{n-k}. \tag{24}$$

Dla $\xi=(x-a)/(b-a)$ i $v_n(x)=w_n[(x-a)/(b-a)]$ dostaniemy więc

$$v_n(x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left[a+\frac{k}{n}(b-a)\right](x-a)^k(b-x)^{n-k}. \tag{25}$$

Ponieważ wielomiany (24) dążą jednostajnie do $\varphi(\xi)$ w przedziale $\langle 0,1\rangle$, więc wielomiany (25) dążą jednostajnie do $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$.

5. Funkcje 1-ej klasy Baire'a. Jeżeli ciąg $\{f_n(p)\}$ funkcyj ciągłych w zbiorze zamkniętym F jest zbieżny w tym zbiorze do funkcji $f(p)$, to funkcja $f(p)$ nie musi być ciągła w zbiorze F.

Dowodzi tego następujący przykład.

Niech F będzie przedziałem zamkniętym $\langle 0,1\rangle$ przestrzeni $\mathcal{E}^1$ (t. j. linii prostej) i niech $f_n(x)=x^n$ dla $x\in F$. Łatwo widzieć, że ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny w F do funkcji

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ dla } 0\leqslant x<1, \\ 1 \text{ dla } x=1. \end{cases}$$

Oczywiście funkcja $f(x)$ nie jest ciągła w punkcie $x=1$.

Klasa funkcyj $f(p)$, które są granicami ciągów zbieżnych funkcyj ciągłych w pewnym przedziale, jest więc obszerniejsza niż klasa funkcyj ciągłych w tym przedziale).

Funkcje określone w przedziale I, które są w nim granicami ciągów zbieżnych funkcyj ciągłych, nazywamy *funkcjami 1-ej klasy Baire'a* 1) (w tym przedziale).

Zatem funkcja $f(p)$ jest 1-ej klasy Baire'a w przedziale I wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg $\{f_n(p)\}$ funkcyj ciągłych, że $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(p)=f(p)$ dla każdego $p\in I$.

(5.1) *Jeżeli $f(p)$ jest funkcją 1-ej klasy Baire'a w przedziale I, to zbiór punktów, w których funkcja $f(p)$ jest nieciągła, jest I-ej kategorii; zbiór punktów ciągłości funkcji $f(p)$ jest więc gęsty w przedziale I.*

Dowód. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Oznaczmy przez $E(\varepsilon)$ zbiór tych punktów $p_0\in E$, dla których istnieje taka kula K i taki wskaźnik n, że $p_0\in K$ i

$$|f_n(p)-f(p)|<\varepsilon \quad \text{dla} \quad p\in EK.$$

Niech J będzie dowolną kulą zawartą w I i niech

$$E_{mn}(J;\varepsilon)=\underset{p}{E}\{p\in J;\, |f_n(p)-f_{n+m}(p)|\leqslant \varepsilon/2\}.$$

Na mocy tw. (2.5), str. 108, zbiory E_{nm} są zamknięte, a na mocy tw. (4.8), str. 81, zamknięty jest też zbiór $E_n(J;E)=\prod\limits_{m=1}^{\infty} E_{nm}(J;\varepsilon)$.

---

1) Matematyk francuski René Baire pierwszy zbadał te funkcje.

Z równości

$$J=\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}E_{nm}(J;\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n(J;\varepsilon)$$

wynika, że nie wszystkie zbiory $E_m(J;\varepsilon)$ są nigdzie nie gęste, jeden więc z nich — oznaczmy go przez $E_N(J;\varepsilon)$ — musi zawierać kulę $K(J;\varepsilon)$, gdyż jest zamknięty. Kula ta jest oczywiście zawarta w J. Zauważmy, że kule $K(J;\varepsilon)$ mają następującą własność:

$$[p\in K(J;\varepsilon)]\to\sum_{N}\prod_{m}(f_N(p)-f_{N+m}(p)<\varepsilon/2).$$

Ponieważ

$$\sum_{m}\underset{p}{E}\,[p\in J;|f_N(p)-f_{N+m}(p)|\leqslant\varepsilon/2]\subset\underset{p}{E}\,[|f_N(p)-f(p)|<\varepsilon],$$

więc na mocy tej własności

$$K(J;\varepsilon)\subset E(\varepsilon).$$

Niech $G(\varepsilon)$ będzie sumą wszystkich kul $K(J;\varepsilon)$, gdzie J przebiega wszystkie kule zawarte w I. Na mocy tw. (4.9), str. 81, zbiór $G(\varepsilon)$ jest otwarty; jest on nadto gęsty w I. Zbiór $I-G(\varepsilon)$ jest więc nigdzie nie gęsty, a zatem zbiór $H=\sum_{n=1}^{\infty}I-G(1/n)$ jest I-ej kategorii. Jeżeli teraz $p_0\in I-H=\prod_{n=1}^{\infty}G(1/n)\subset\prod_{m=1}^{\infty}E(1/n)$, to w punkcie p_0 spełniony jest dla każdego $\varepsilon>0$ warunek (1), str. 105. Zatem funkcja $f(p)$ jest ciągła w każdym punkcie zbioru $I-H$.

PRZYKŁADY. 1. Każda funkcja $f(x)$, która jest pochodną jakiejś funkcji $g(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, jest w tym przedziale funkcją 1-ej klasy Baire'a. Ze znanych twierdzeń rachunku różniczkowego wynika bowiem, że funkcja $g(x)$ jest ciągła. Funkcje

$$f_n(x)=\begin{cases}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right] & \text{dla } a\leqslant x\leqslant b-\frac{1}{n},\\ n\left[f(b)-f\left(b-\frac{1}{n}\right)\right] & \text{dla } b-\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant b,\end{cases}$$

są ciągłe i ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny do $f(x)$.

Widzimy więc, że *jeżeli funkcja $f(x)$ jest pochodną pewnej funkcji w przedziale I, to jest ona ciągła w zbiorze gęstym w tym przedziale.*

2. *Każda funkcja $f(x)$ określona w przedziale $\langle a,b\rangle$, której zbiór punktów nieciągłości jest skończony, jest 1-ej klasy Baire'a.*

Istotnie, niech $x_1<x_2<\ldots<x_p$ będą wszystkimi punktami nieciągłości funkcji; załóżmy dla prostoty, że $a<x_1$ i $x_p<b$. Niech

$$2\delta=\min\left[(x_2-x_1),\ldots,(x_p-x_{p-1}),\,(x_1-a),\,(b-x_p)\right],$$

$$I_k^{(n)}=\left\langle x_k-\frac{\delta}{n},\,x_k+\frac{\delta}{n}\right\rangle;$$

niech $f_n(x)$, gdzie $n=1,2,\ldots,p$, będzie funkcją równą $f(x)$ na zbiorze $\langle a,b\rangle-(I_1^{(n)}+\ldots+I_p^{(n)})$ oraz w punktach $x=x_k$ dla $k=1,\ldots,p$, a liniową w przedziałach otwartych $\rangle x_k-\delta/n,x_k\langle$ i $\rangle x_k,x_k+\delta/n\langle$. Funkcje $f_n(x)$ są ciągłe i ciąg $\{f_n(x)\}$ dąży do $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$.

3. *Każda funkcja $f(x)$ określona w przedziale $\langle a,b\rangle$, której zbiór punktów nieciągłości jest co najwyżej przeliczalny, jest funkcją 1-ej klasy Baire'a.*

Istotnie, niech E będzie gęstym w $\langle a,b\rangle$ nadzbiorem przeliczalnym zbioru wszystkich punktów nieciągłości funkcji $f(x)$. Ustawmy E w ciąg $x_1,x_2,\ldots$ i oznaczmy przez E_n zbiór $(a,b,x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Dla każdego $n=1,2,\ldots$ funkcja $f_n(x)$ równa $f(x)$ na zbiorze E_n i liniowa w przedziałach otwartych, z których składa się zbiór $\langle a,b\rangle-E_n$, jest oczywiście ciągła.

Udowodnimy, że ciąg $\{f_n(x)\}$ dąży do $f(x)$ w $\langle a,b\rangle$. Jest to oczywiste dla $x\in E+(a)+(b)$. Niech więc $x_0\in\langle a,b\rangle-E-(a)-(b)$. Na mocy określenia zbioru E jest to punkt ciągłości; do każdego $\varepsilon>0$ istnieje zatem takie $\delta>0$, że $|x-x_0|<\delta$ pociąga $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Na mocy zaś gęstości E w $\langle a,b\rangle$ istnieją punkty $x_i\in E\cdot\rangle x_0-\delta,x_0\langle$ i $x_j\in E\cdot\rangle x_0,x_0+\delta\langle$. Niech

$$(*)\qquad n>N=\max(i,j)$$

i niech $x_k<x_0$ oraz $x_l>x_0$ będą najbliższymi do x_0 punktami zbioru E_n. Wobec $(*)$ jest

$$x_0-\delta<x_i\leqslant x_k<x_0<x_l\leqslant x_j<x_0+\delta,$$

skąd

$$|f(x_k)-f(x_0)|<\varepsilon \quad\text{i}\quad |f(x_l)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

a że na mocy określenia funkcji $f_n(x)$ jest

$$f_n(x_k)=f(x_k) \quad\text{i}\quad f_n(x_l)=f(x_l),$$

więc

$$\left(\overset{*}{*}\right)\qquad |f_n(x_k)-f(x_0)|<\varepsilon \quad\text{i}\quad |f_n(x_l)-f(x_0)|<\varepsilon;$$

zarazem $f_n(x_k)\leqslant f_n(x_0)\leqslant f_n(x_l)$ lub $f_n(x_l)\leqslant f_n(x_0)\leqslant f_n(x_k)$, na skutek liniowości funkcji $f_n(x)$ w przedziale (x_k, x_l). Wobec $\binom{*}{*}$ jest zatem $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$ dla $n>N$, c. b. d. d.

(5.2) *Granica ciągu jednostajnie zbieżnego funkcyj 1-ej klasy jest funkcją 1-ej klasy.*

Dowód. Niech $\{f_n(p)\}$ będzie ciągiem funkcyj 1-ej klasy, jednostajnie zbieżnym do funkcji $f(p)$. Istnieje więc taki wskaźnik n_k, że $|f_{n_k}(p)-f(p)|<\frac{1}{2\cdot 2^k}$; zatem

$$|f_{n_{k+1}}(p)-f_{n_k}(p)|<\frac{1}{2^k} \quad \text{dla } k=1,2,\dots$$

Niech

$$g_1(p)=f_{n_1}(p), \quad g_k(p)=f_{n_k}(p)-f_{n_{k-1}}(p) \quad \text{dla } k=2,3,\dots;$$

zatem

$$|g_k(p)|<\frac{1}{2^k} \quad \text{dla } k=2,3,\dots, \quad g_1(p)+\dots+g_k(p)=f_{n_k}(p).$$

Funkcje $g_k(p)$ są 1-ej klasy; istnieją więc takie ciągi $\{g_{kn}(p)\}$ funkcyj ciągłych, że $\lim\limits_{n\to\infty} g_{kn}(p)=g_k(p)$. Niech

$$h_{1n}(p)=g_{1n}(p),$$

$$h_{kn}(p)=\begin{cases} g_{kn}(p) & \text{jeżeli } |g_{kn}(p)|<\frac{1}{2^k}, \\ \frac{1}{2^k}\operatorname{sign} g_{kn}(p) & \text{jeżeli } |g_{kn}(p)|\geqslant\frac{1}{2^k}\ ^{1)}. \end{cases} \qquad (k=2,3,\dots).$$

Łatwo widzieć, że funkcje $h_{kn}(p)$ są ciągłe i że:

$$|h_{kn}(p)|\leqslant\frac{1}{2^k} \quad \text{dla } k=2,3,\dots \tag{26}$$

$$\lim_{n\to\infty} h_{kn}(p)=g_k(p) \quad \text{dla } k=1,2,\dots \tag{27}$$

Niech $h_n(p)=h_{1n}(p)+\dots+h_{nn}(p)$. Funkcje $h_n(p)$ są oczywiście ciągłe. Pozostaje więc do udowodnienia, że

$$\lim_{n\to\infty} h_n(p)=f(p). \tag{28}$$

---

1) sign a (*znak liczby* a) jest funkcją liczby a określoną wzorem

$$\operatorname{sign} a=\begin{cases} +1, & \text{gdy } a>0, \\ 0, & \text{gdy } a=0, \\ -1, & \text{gdy } a<0. \end{cases}$$

Niech w tym celu ε będzie dowolną liczbą dodatnią, a s — liczbą naturalną tak dużą, by $1/2^s<\varepsilon/3$. Wówczas dla każdego punktu p

$$(29)\qquad |g_1(p)+\dots+g_s(p)-f(p)|=|f_{n_s}(p)-f(p)|<1/2\cdot 2^s=\varepsilon/3.$$

Z (27) wynika istnienie takiej liczby N, że dla $n>N$ zachodzi nierówność

$$(30)\qquad |g_1(p)+\dots+g_s(p)-[h_{1n}(p)+\dots+h_{sn}(p)]|<\varepsilon/3.$$

Możemy oczywiście przyjąć, że $N>s$. Wówczas

$$|h_n(p)-f(p)|=|\sum_{k=1}^{s}h_{kn}(p)+\sum_{k=s+1}^{n}h_{kn}(p)-\sum_{k=1}^{s}g_k(p)+\sum_{k=1}^{s}g_k(p)-f(p)|\leqslant$$

$$\leqslant|\sum_{k=1}^{s}h_{kn}(p)-\sum_{k=1}^{s}g_k(p)|+|\sum_{k=1}^{s}g_k(p)-f(p)|+\sum_{k=s+1}^{n}|h_{kn}(p)|.$$

Na mocy (25), (29) i (30) jest zatem

$$|h_n(p)-f(p)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{2\varepsilon}{3}+\frac{1}{2^s}=\varepsilon.$$

Okazaliśmy więc, że zachodzi równość (28). Funkcja $f(p)$ jest zatem funkcją 1-ej klasy Baire'a, c. b. d. d.

Oznaczmy dla ciągu $\{f_n(p)\}$ funkcyj przez $\sup\limits_{n=1,2,\dots}f_n(p)$ kres górny, a przez $\inf\limits_{n=1,2,\dots}f_n(p)$ kres dolny zbioru złożonego z liczb $f_1(p),f_2(p),\dots$ Łatwo dowieść, że

$$\sup_{n=1,2,\dots}f_n(p)=\lim_{n\to\infty}\max[f_1(p),\dots,f_n(p)],$$

$$\inf_{n=1,2,\dots}f_n(p)=\lim_{n\to\infty}\min[f_1(p),\dots,f_n(p)].$$

Występujące tu ekstrema są funkcjami ciągłymi (p. (3.0), str. 109), a więc:

(5.3) *Jeżeli funkcje $f_n(p)$ są ciągłe i $\sup\limits_{n=1,2,\dots}f_n(p)$ jest dla każdego p liczbą skończoną, to funkcja*

$$f(p)=\sup_{n=1,2,\dots}f_n(p)$$

jest 1-ej klasy Baire'a.

(5.4) *Jeżeli funkcje $f_n(p)$ są ciągłe i $\inf\limits_{n=1,2,\dots} f_n(p)$ jest dla każdego p liczbą skończoną, to funkcja*

$$f(p) = \inf_{n=1,2,\dots} f_n(p)$$

jest 1-ej klasy Baire'a.

6. Klasyfikacja Baire'a. Funkcjami *2-ej klasy Baire'a* nazywamy granice ciągów zbieżnych funkcji 1-ej klasy.

Przykładem funkcji 2-ej klasy jest tzw. *funkcja Dirichleta*, określona w przedziale $\langle 0,1\rangle$ przez wzór

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \text{ niewymiernych,} \\ 1 \text{ dla } x \text{ wymiernych.} \end{cases}$$

Niech $\{w_n\}$ będzie ciągiem wszystkich liczb wymiernych przedziału $\langle 0,1\rangle$ i niech

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x = w_1, \dots, w_n, \\ 0 \text{ dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Funkcja $f_n(x)$ jest nieciągła tylko w punktach $w_1, \dots, w_n$, jest więc 1-ej klasy Baire'a (ob. str. 145, przykład 1). Łatwo widzieć, że $f_n(x) \to f(x)$. Jeżeli bowiem liczba x jest niewymierna, to $f(x) = f_n(x)$, a jeżeli wymierna, to istnieje takie n, że $x = w_n$, skąd $f(x) = f_k(x)$ dla $k \geqslant n$.

Funkcję $f(x)$ możemy też przedstawić za pomocą wzoru

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \{\lim_{k\to\infty} (\cos n!\, \pi x)^{2k}\}.$$

Zatem funkcja Dirichleta $f(x)$ jest granicą ciągu funkcyj 1-ej klasy, ale sama nie jest 1-ej klasy, ponieważ na mocy tw. (5.1), str. 144, każda funkcja 1-ej klasy ma punkty ciągłości, a funkcja $f(x)$ jest nieciągła w każdym punkcie.

Przykład ten wskazuje, że funkcje 2-ej klasy Baire'a mogą być nieciągłe w każdym punkcie.

(6.1) *Jeżeli funkcje $f_n(p)$ są ciągłe i w każdym punkcie $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(p)$ jest liczbą skończoną, to funkcja*

$$f(p) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(p)$$

jest 2-ej klasy Baire'a.

(6.2) *Jeżeli funkcje $f_n(p)$ są ciągłe i w każdym punkcie $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(p)$ jest liczbą skończoną, to funkcja*

$$f(p) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(p)$$

jest 2-ej klasy Baire'a.

Dowód. Twierdzenia te wynikają natychmiast z twierdzeń (3.0), str. 109, i (6.4), str. 54.

Można udowodnić twierdzenie analogiczne do (5.2), orzekające, że *granica ciągu jednostajnie zbieżnego funkcyj 2-ej klasy jest funkcją 2-ej klasy.*

Funkcje 3-ej klasy Baire'a określa się jako granice ciągów zbieżnych $\{f_n(x)\}$ funkcyj 2-ej klasy; ogólnie, funkcje n-tej klasy, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną — jako granice ciągów zbieżnych funkcji $(n-1)$-ej klasy. Z kolei definiuje się funkcje ω-ej klasy jako granice ciągów zbieżnych $\{f_n(x)\}$ funkcyj klas skończonych n_i-tych (przy czym może być $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} n_i = \infty$), następnie funkcje $(\omega+1)$-ej klasy — jako granice ciągów funkcyj ω-ej klasy itd., uzyskując funkcje coraz wyższych klas pozaskończonych.

Dowodzi się [1]), że żadna z klas w ten sposób zdefiniowanych nie jest pusta, t. j. że istnieją funkcje, które do tej klasy należą, lecz nie należą do żadnej z klas wcześniejszych.

Klasą wszystkich funkcyj Baire'a nazywamy najmniejszą z klas K (t. j. część wspólną wszystkich takich klas), spełniających następujące warunki:

1^0 *funkcje ciągłe należą do klasy* K;

2^0 *jeżeli* $f(p)$ *jest granicą ciągu zbieżnego funkcyj należących do klasy* K, *to funkcja* $f(p)$ *należy również do klasy* K.

Klasy funkcyj, spełniające warunki 1^0 i 2^0, istnieją: np. rodzina wszystkich funkcyj zmiennej rzeczywistej jest taką klasą. Widzimy, że w szczególności funkcje klas 1-ej, 2-ej, 3-ej,... ω-ej, $(\omega+1)$-ej,... są funkcjami Baire'a.

Podobnie jak w twierdzeniach (5.2) i (5.4), dowodzi się z łatwością, że jeżeli funkcje $f_n(p)$ są funkcjami Baire'a, to funkcje

$$\sup_{n=1,2,\dots} f_n(p), \qquad \inf_{n=1,2,\dots} f_n(p), \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(p), \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(p),$$

o ile tylko są ograniczone, są też funkcjami Baire'a.

§ 4. Krzywe w przestrzeniach $\mathcal{E}^n$.

1. Definicje. *Krzywą ciągłą* w $\mathcal{E}^n$ nazywamy zbiór złożony co najmniej z dwóch punktów, który jest obrazem ciągłym przedziału zamkniętego w $\mathcal{E}^1$.

---

[1]) P. np. W. Sierpiński, *Funkcje przedstawialne analitycznie*, Lwów 1925, gdzie wyłożona jest szczegółowo teoria funkcyj Baire'a.

Krzywa ciągła jest to więc (str. 112) zbiór punktów $q=(y_1,...,y_n)$, określony układem równań

(1) $$y_i=f_i(t) \quad \text{dla} \quad i=1,...,n,$$

gdzie $f_i(t)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale $\langle a,b \rangle$. Układ równań (1) możemy krócej napisać w postaci $p=\varphi(t)$, gdzie $\varphi(t)$ jest funkcją ciągłą o wartościach z $\mathcal{E}^n$, określoną w przedziale $\langle a,b \rangle$. O punktach należących do krzywej mówimy, że *leżą na krzywej*.

Układ równań (1), określający krzywą, nazywa się *opisem parametrycznym* krzywej.

Jest jasne, że jedna krzywa może mieć wiele opisów parametrycznych. W szczególności, jeżeli równania (1) są opisem parametrycznym krzywej, a funkcja $h(t)$ jest ciągła w przedziale $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, gdzie $h(\alpha)=a$, $h(\beta)=b$ i $a \leqslant h(t) \leqslant b$, to równania

(2) $$y_i=f_i(h(t)) \quad \text{dla} \quad i=1,...,n$$

też są opisem parametrycznym tej krzywej.

Krzywa nazywa się *łukiem prostym*, jeżeli ma opis parametryczny $p=\varphi(t)$ o tej własności, że $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ dla $t_1 \neq t_2$.

(1.1) *Przedział przestrzeni $\mathcal{E}^n$ nie jest łukiem prostym, gdy $n>1$.*

Dowód. Przypuśćmy, że pewien przedział I przestrzeni $\mathcal{E}^n$ jest łukiem prostym. Wówczas istniałby w $\mathcal{E}^1$ przedział $\langle a,b \rangle$ i taka funkcja ciągła

$$\varphi(t)=(f_1(t),...,f_n(t))$$

odwzorowująca przedział $\langle a,b \rangle$ na I, że $\varphi(\langle a,b \rangle)=I$ oraz $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ dla $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$. Każdemu punktowi $p=(x_1,...,x_n) \epsilon I$ odpowiadałaby wówczas jedna i tylko jedna taka liczba $t=g(p)=g(x_1,...,x_n)$, że $\varphi(t)=p$. Oczywiście

$$\varphi(g(p))=p, \quad g(f_1(t),...,f_n(t))=t.$$

Niech

$$\varphi(a)=p_1=(x_1,...,x_n), \quad \varphi(b)=p_2=(y_1,...,y_n)$$

i niech $p(\vartheta)$ będzie punktem o i-tej współrzędnej $(1-\vartheta)x_i+\vartheta y_i$. Funkcja

$$h(\vartheta)=g(p(\vartheta)) \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$$

odwzorowuje przedział $\langle 0,1 \rangle$ na część przedziału $\langle a,b \rangle$. Jest ona ciągła w przedziale $\langle 0,1 \rangle$, bo w przeciwnym razie istniałyby takie $\varepsilon>0$ i $\vartheta_0 \epsilon \langle 0,1 \rangle$ oraz ciąg $\vartheta_n \to \vartheta_0$, że dla $n=1,2,...$ byłoby

(3) $$|h(\vartheta_n)-h(\vartheta_0)|>\varepsilon;$$

oczywiście $\vartheta_n \neq \vartheta_0$. Ponieważ $0 \leqslant h(\vartheta) \leqslant 1$, więc ciąg $\{h(\vartheta_n)\}$ byłby ograniczony i zawierałby na mocy twierdzenia (1.7), str. 58, ciąg częściowy zbieżny $h(\vartheta_{n_k}) \rightarrow t_0$. Ponieważ zaś $\varphi(g(p(\vartheta))) = p(\vartheta)$, $p(\vartheta_n) \rightarrow p(\vartheta_0)$ i $g(\varphi(t)) = t$, więc $\varphi(p(\vartheta_{n_k})) = p(\vartheta_{n_k}) \rightarrow p(\vartheta_0)$; zarazem z ciągłości funkcji $\varphi(t)$ wynika, że $\varphi(h(\vartheta_{n_k})) \rightarrow \varphi(t_0)$, skąd $p(\vartheta_0) = \varphi(t_0)$, a więc $g(p(\vartheta_0)) = g(\varphi(t_0))$, t. j. $t_0 = h(\vartheta_0)$ i przeto $h(\vartheta_{n_k}) \rightarrow h(\vartheta_0)$ wbrew (3).

Z dowiedzionej ciągłości funkcji $h(\vartheta)$ wynika na mocy tw. (3.2), str. 110, że zbiór $A = h(\langle 0,1 \rangle)$ jest spójny. Ale $a \in A$ i $b \in A$, więc na mocy tw. (4.1), str. 67, zbiór A jest odcinkiem. Zatem $A = \langle a, b \rangle$. Stąd wynika, że $\varphi(\langle a, b \rangle) = \varphi(h(\langle 0, 1 \rangle))$. Jest to jednak niemożliwe, gdy $n > 1$, ponieważ $\varphi(h(\langle 0,1 \rangle))$ jest odcinkiem $\overline{p_1 p_2}$, a $\varphi(\langle a, b \rangle)$ jest przedziałem I przestrzeni $\mathcal{E}^n$.

2. Krzywa Peany. Okazaliśmy, że przedział przestrzeni $\mathcal{E}^n$, gdzie $n > 1$, nie jest łukiem prostym. Okażemy teraz, że każdy przedział jest krzywą ciągłą.

(2.1) *Kwadrat jest krzywą ciągłą.*

Dowód. Niech K będzie kwadratem o wierzchołkach

$$A = (0,0), \qquad B = (0,1), \qquad C = (1,1), \qquad D = (1,0).$$

Oznaczmy przez $x = \varphi_0(t)$ i $\varphi = \psi_0(t)$ dowolne funkcje ciągłe w przedziale zamkniętym $I = \langle 0, 1 \rangle$, których wykresem jest przekątna AC (możemy np. przyjąć $\varphi_0(t) = t$ i $\psi_0(t) = t$).

Podzielmy kwadrat K na 9 równych kwadratów $K_1, K_2, \ldots, K_9$ o bokach 1/3 przedziału, a I — na 9 równych przedziałów $I_1, \ldots, I_9$.

Oznaczmy przez $x = \varphi_1(t)$ i $y = \psi_1(t)$ funkcje ciągłe w przedziale I, których obrazami w przedziałach $I_1, I_2, \ldots, I_9$ są kolejno odcinki AE, EF, FG, GH, HE, EJ, JK, KH, HC (t. j. przekątne kwadratów $K_1, \ldots, K_9$). Wykresem funkcyj $x = f_1(t)$, $y = \varphi_1(t)$ w przedziale I jest więc linia łamana $AEFGHEJKHC$ złożona z przekątnych kwadratów $K_1, \ldots, K_9$ (p. rys. 1). Mamy oczywiście

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leqslant 1 \qquad \text{i} \qquad |\psi_1(t) - \psi_0(t)| \leqslant 1 \qquad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Postąpmy teraz z przedziałami $I_1, \ldots, I_9$ i kwadratami $K_1, \ldots, K_9$ podobnie jak poprzednio z przedziałem I i kwadratem K, a więc podzielmy każdy z kwadratów K_i (gdzie $i = 1, 2, \ldots, 9$) na 9 równych kwadratów $K_{i1}, K_{i2}, \ldots, K_{i9}$, a każdy z przedziałów I_i (gdzie $i = 1, 2, \ldots, 9$) — na 9 równych przedziałów $I_{i1}, I_{i2}, \ldots, I_{i9}$.

Oznaczmy przez $x = \varphi_2(t)$, $y = \psi_2(t)$ funkcje ciągłe w przedziale I, których wykresami w przedziałach $I_{i1}, \ldots, I_{i9}$ są przekątne kwadratów $K_{i1}, \ldots, K_{i9}$; tworzą one znowu linię łamaną (p. rys. 2).

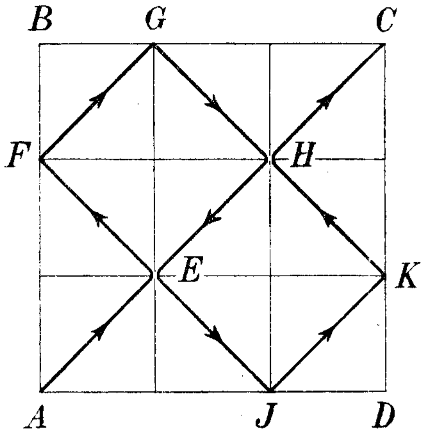
Ponieważ obrazem funkcyj $x=\varphi_1(t)$ i $y=\psi_1(t)$ w przedziale I_i jest przekątna kwadratu K_i, obrazem zaś funkcyj $x=\varphi_2(t)$ i $y=\psi_2(t)$ w przedziale I_i jest linia łamana leżąca w K_i, więc

$$|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\leqslant 1/3 \quad \text{i} \quad |\psi_2(t)-\psi_1(t)|\leqslant 1/3 \quad \text{dla} \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

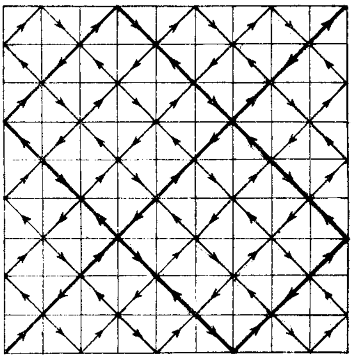
Postępując tak dalej, otrzymamy ciągi funkcyj $\{\varphi_m(t)\}$ i $\{\psi_m(t)\}$ ciągłych dla $0\leqslant t\leqslant 1$ i spełniających warunki:

(4) Wykresem funkcyj $x=\varphi_m(t)$, $y=\psi_m(t)$ jest linia łamana przebiegająca przez wszystkie kwadraty, jakie otrzymamy, dzieląc kwadrat K na 9^m równych kwadratów o bokach długości $1/3^m$;

(5) $|\varphi_m(t)-\varphi_{m-1}(t)|\leqslant 1/3^{m-1}$ i $|\psi_m(t)-\psi_{m-1}(t)|\leqslant 1/3^{m-1}$ dla $0\leqslant t\leqslant 1$ i $m=1,2,\ldots$



Rys. 1.


Rys. 2.

Z (4) wynika, że ciągi funkcji $\{\varphi_m(t)\}$ i $\{\psi_m(t)\}$ są jednostajnie zbieżne w przedziale zamkniętym $\langle 0,1\rangle$, gdyż szereg $\sum_{m=1}^{\infty} 1/3^{m-1}$ jest zbieżny. Oznaczmy przez $x=\varphi(t)$ i $y=\psi(t)$ funkcje, które są granicami ciągów funkcyj $\{\varphi_m(t)\}$ i $\{\psi_m(t)\}$. Udowodnimy, że wykresem funkcyj $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ dla $0\leqslant t\leqslant 1$ jest cały kwadrat K. Istotnie

$$|\varphi(t)-\varphi_m(t)|=\left|\sum_{i=m+1}^{\infty}\left(\varphi_i(t)-\varphi_{i-1}(t)\right)\right|\leqslant\sum_{i=m+1}^{\infty}|\varphi_i(t)-\varphi_{i-1}(t)| \quad \text{dla} \quad m=1,2,\ldots,$$

stąd na mocy (5)

$$(6) \qquad |\varphi(t)-\varphi_m(t)|\leqslant\frac{1}{2\cdot 3^{m-1}},$$

i podobnie

$$(7) \qquad |\psi(t)-\psi_m(t)| \leqslant \frac{1}{2\cdot 3^{m-1}}.$$

Niech $p=(x_0,y_0)$ będzie dowolnym punktem kwadratu K. Z (4) wynika, że dla każdego m istnieje taka wartość t_m, dla której

$$|x_0-\varphi_m(t_m)| \leqslant 1/3^m, \qquad |y_0-\psi_m(t_m) \leqslant 1/3^m,$$

skąd na mocy (6) i (7)

$$|x_0-\varphi(t_m)| \leqslant \frac{1}{3^m}+\frac{1}{2\cdot 3^{m-1}}=\frac{5}{2\cdot 3^m}, \qquad |y_0-\psi(t_m)| \leqslant \frac{5}{2\cdot 3^m}.$$

Zatem $\varphi(t_m)\to x_0$ i $\psi(t_m)\to y_0$ dla $m\to\infty$. Ciąg $\{t_m\}$, jako ograniczony, zawiera ciąg częściowy zbieżny $\{t_{m_k}\}$. Niech $t_{m_k}\to t_0$ dla $k\to\infty$. Mamy oczywiście $\varphi(t_{m_k})\to x_0$ i $\psi(t_{m_k})\to y_0$ dla $k\to\infty$. Z ciągłości funkcyj $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ wynika, że $x_0=\varphi(t_0)$ i $y_0=\psi(t_0)$. A więc punkt $p=(x_0,y_0)$ należy do wykresu funkcyj $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Zauważmy jeszcze, że na mocy (1) jest $0\leqslant\varphi_m(t)\leqslant 1$ i $0\leqslant\psi_m(t)\leqslant 1$, zatem $0\leqslant\varphi(t)\leqslant 1$ i $0\leqslant\psi(t)\leqslant 1$ dla $0\leqslant t\leqslant 1$. A więc krzywa ciągła $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, gdzie $0\leqslant t\leqslant 1$, jest kwadratem K.

Pierwszy przykład krzywej ciągłej wypełniającej kwadrat podał G. Peano w 1890 roku. Inny przykład podał Sierpiński[1]) w 1912 roku. Krzywa ciągła Sierpińskiego jest określona jako granica łuków prostych. Oczywiście krzywa Peany, jak to wynika z określenia (str. 151), sama nie jest łukiem prostym: istnieją wartości $t'\neq t''$, którym odpowiada jeden i ten sam punkt kwadratu.

3. Krzywa ciągła wypełniająca przedział w $\mathcal{E}^n$. Udowodnimy teraz ogólnie, że

(3.1) *Przedział przestrzeni $\mathcal{E}^n$ dla $n\geqslant 1$ jest krzywą ciągłą.*

Dowód. Niech $I_i^{(n)}$ będzie przedziałem $0\leqslant x_i\leqslant 1$ dla $i=1,2,\ldots,n$. Na mocy twierdzenia (2.1) twierdzenie (3.1) zachodzi dla $n=1$ i $n=2$. Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla $n-1\geqslant 2$. Istnieją zatem funkcje ciągłe $x_i=\varphi_i(t)$ dla $0\leqslant t\leqslant 1$ i $i=1,2,\ldots,n-1$, których wykres jest przedziałem $I_0^{(n-1)}$. Niech $x=\varphi(t)$ i $y=\psi(t)$ dla $0\leqslant t\leqslant 1$ będą funkcjami ciągłymi, których wykres wypełnia kwadrat $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Niech dla $0\leqslant t\leqslant 1$

$$(8) \qquad x_i=\varphi_i(\varphi(t))=F_i(t) \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,n-1 \quad \text{i} \quad x_n=\psi(t)=F_n(t).$$

---

[1]) W. Sierpiński: *O krzywych wypełniających kwadrat*, Prace Matematyczno-Fizyczne, tom 23, 1912, str. 193-219.

Udowodnimy, że przedział $I_0^{(n)}$ jest wykresem funkcyj $x_i=F_i(t)$, dla $0\leqslant t\leqslant 1$ i $i=1,2,...,n$. Weźmy pod uwagę dowolny punkt $p=(\xi_1,...,\xi_n)$ przedziału $I_0^{(n)}$. Ponieważ punkt $q=(\xi_1,...,\xi_{n-1})$ należy do $I_0^{(n-1)}$, więc istnieje takie t_0, że $0\leqslant t_0\leqslant 1$ i

$$\xi_i=\varphi_i(t_0) \quad \text{dla} \quad i=1,2,...,n-1. \tag{9}$$

Z określenia funkcyj $\varphi(\vartheta)$ i $\psi(\vartheta)$ wynika istnienie takiego ϑ_0, że

$$t_0=\varphi(\vartheta_0), \qquad \xi_n=\psi(\vartheta_0),$$

skąd na mocy (8) i (9)

$$\xi_i=F_i(\vartheta_0) \quad \text{dla} \quad i=1,2,...,n.$$

A więc krzywa ciągła $x_i=F_i(\vartheta)$ dla $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$ i $i=1,...,n$ wypełnia przedział $I_0^{(n)}$. Tym samym udowodniliśmy przez indukcję, że przedział $I_0^{(n)}$ jest krzywą ciągłą.

Weźmy teraz pod uwagę dowolny przedział $I=\langle a_1,...,a_n;b_1,...,b_n\rangle$ i przyjmijmy, zachowując poprzednie znaczenie funkcyj $x_i=F_i(\vartheta)$,

$$\Phi_i(\vartheta)=a_i+(b_i-a_i)F_i(\vartheta) \quad \text{dla} \quad 0\leqslant\vartheta\leqslant 1 \quad \text{i} \quad i=1,2,...,n.$$

Łatwo stwierdzić, że krzywa ciągła $x_i=\Phi_i(\vartheta)$ dla $0\leqslant t\leqslant 1$ i $i=1,2,...,k$ jest przedziałem I, c. b. d. d.

Uwaga. Na mocy (8) krzywa określona funkcjami

$$x=\varphi[\varphi(\vartheta)], \qquad y=\psi[\varphi(\vartheta)], \qquad z=\psi(\vartheta) \quad \text{dla} \quad 0\leqslant\vartheta\leqslant 1,$$

gdzie funkcje $x=\varphi(\vartheta)$, $y=\psi(\vartheta)$ określają krzywą ciągłą wypełniającą kwadrat $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, jest krzywą ciągłą wypełniającą sześcian $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

4. Charakterystyka krzywych ciągłych. Nasuwa się pytanie, jakie są warunki konieczne i dostateczne, by zbiór punktów przestrzeni $\mathcal{E}^n$ był krzywą ciągłą.

Każda krzywa ciągła jest według definicji obrazem ciągłym odcinka zamkniętego i ograniczonego, jest więc na mocy tw. (3.1) i (3.2), str. 109 i 110, kontinuum ograniczonym. Ten warunek nie charakteryzuje jeszcze — jak to dalej zobaczymy — krzywych ciągłych.

Mówimy, że zbiór E ma *własność* (S), jeżeli jest kontinuum ograniczonym i dla każdego $\varepsilon>0$ da się przedstawić jako suma skończonej liczby kontinuów o średnicy mniejszej od ε.

(4.1) *Dla każdego kontinuum E mającego własność (S), każdego kontinuum $F\subset E$ i każdej liczby $\eta>0$ istnieje taki zbiór $H\subset E$ mający własność (S), że $F\subset H$ i $\delta(H)<\delta(F)+\eta$.*

Dowód. Niech $0<\varepsilon<\eta$. Istnieją takie kontinua $E_1, E_2, \ldots, E_m$, że $E=\sum_{k=1}^{m} E_k$ i $\delta(E_k)<\varepsilon/4$. Niech $H_1, \ldots, H_{m_1}$ będą tymi spośród zbiorów $E_1, \ldots, E_m$, dla których $E_i F \neq 0$. Zbiór $\sum_{i=1}^{m_1} H_i$ jest kontinuum na mocy tw. (6.1) i (6.3), str. 87 i 88. Z kolei istnieją takie kontinua $E_1^*, \ldots, E_l^*$, że $E=\sum_{i=1}^{l} E_i^*$ i $\delta(E_i^*)<\varepsilon/8$. Niech $H_{i1}, H_{i2}, \ldots, H_{ip_i}$, gdzie $i=1, \ldots, m_1$, będą tymi spośród zbiorów E_i^*, dla których $H_i E_i^* \neq 0$. Możemy przyjąć, że $p_1=p_2=\ldots=p_{n_1}=\mathrm{const}=m_2$, wypisując w razie potrzeby w każdym z i ciągów $\{H_{i1}, \ldots, H_{ip_i}\}$ jeden zbiór kilka razy. Z tw. (6.3), str. 88, wynika, że zbiory $F_i=\sum_{k=1}^{m_2} H_{ik}$ i $\sum_{i=1}^{m_1} F_i$ są spójne oraz

$$F \subset \sum_{i=1}^{m_1} H_i \quad \text{i} \quad H_i \subset \sum_{k=1}^{m_2} H_{ik}. \tag{10}$$

Postępując tak dalej, otrzymujemy taki ciąg liczb $\{m_k\}$ i takie zbiory $H_{n_1 \ldots n_k}$, gdzie $n_1 \leqslant m_1, \ldots, n_k \leqslant m_k$, że

(11) zbiory $H_{n_1 \ldots n_k}$ są kontinuami,

$$H_{n_1 \ldots n_k} H_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}} \neq 0, \tag{12}$$

$$\delta(H_{n_1 \ldots n_k}) < \varepsilon/2^{k+2}, \tag{13}$$

$$H_{n_1 \ldots n_k} \subset \sum_{l=1}^{m_{k+1}} H_{n_1 \ldots n_k l}. \tag{14}$$

Niech

$$H_{n_1 \ldots n_k}^s = \sum_{\alpha_1=1}^{m_{k+1}} \cdots \sum_{\alpha_s=1}^{m_{k+s}} H_{n_1 \ldots n_k \alpha_1 \ldots \alpha_s} \quad \text{dla} \quad s=0,1,\ldots$$

Każdy z tych zbiorów jest kontinuum; wynika to łatwo przez indukcję na mocy tw. (6.3), str. 88. Okażemy, że

$$\delta(H_{n_1 \ldots n_k}^s) \leqslant \delta(H_{n_1 \ldots n_k}) + 2\varepsilon\left(\frac{1}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+2+s}}\right).$$

Dla $s=0$ jest to oczywiste. Jeżeli wzór ten zachodzi dla jakiejś liczby s i jeżeli $p, q \in H_{n_1 \ldots n_k}^{s+1}$, to istnieją takie liczby α_i' i α_i'', że $p \in H_{n_1 \ldots n_k \alpha_1' \ldots \alpha_s' \alpha_{s+1}'}$ i $q \in H_{n_1 \ldots n_k \alpha_1'' \ldots \alpha_s'' \alpha_{s+1}''}$. Ponieważ

$$H_{n_1 \ldots n_k \alpha_1' \ldots \alpha_{s+1}'} H_{n_1 \ldots n_k}^s \neq 0 \quad \text{i} \quad H_{n_1 \ldots n_k \alpha_1'' \ldots \alpha_{s+1}''} H_{n_1 \ldots n_k}^s \neq 0,$$

więc (p. (7.7), str. 73)

$$\delta(H^{s+1}_{n_1\dots n_k}) \leqslant \delta(H_{n_1\dots n_k\alpha'_1\dots\alpha'_{s+1}}) + \delta(H_{n_1\dots n_k}) + \delta(H^{s}_{n_1\dots n_k\alpha''_1\dots\alpha''_{s+1}}) \leqslant$$
$$\leqslant \delta(H^{s}_{n_1\dots n_k}) + 2\varepsilon\left(\frac{1}{2^{k+2}} + \dots + \frac{1}{2^{k+2+s}}\right) + 2\varepsilon\frac{1}{2^{k+3+s}}.$$

Z ostatniego wzoru wynika w szczególności, że

$$\delta(\sum_{n_1=1}^{m_1} H^{s}_{n_1}) \leqslant \delta(F) + \varepsilon \quad \text{dla} \quad s = 1, 2, \dots$$

Niech

$$H^{*}_{n_1\dots n_k} = \sum_{s=1}^{\infty} H^{s}_{n_1\dots n_k} \quad \text{i} \quad H^{*} = \sum_{n_1=1}^{m_1} H^{*}_{n_1}.$$

Łatwo widzieć, że zbiory te są spójne; zatem na mocy tw. (6.2), str. 87, zbiory $\overline{H^{*}_{n_1\dots n_k}}$ i $\overline{H^{*}} = H$ są kontinuami. Nadto

$$\delta(H) \leqslant \delta(F) + \varepsilon \quad \text{i} \quad \delta(\overline{H^{*}_{n_1\dots n_k}}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{2^{k}}.$$

Ze wzorów (10) i (14) oraz z tw. (4.5), str. 80, wynika, że $F \subset H$ i że

$$H = \sum_{n_1=1}^{m_1} \dots \sum_{n_k=1}^{m_k} \overline{H^{*}_{n_1\dots n_k}}.$$

Zbiór H ma więc własność (S).

(4.2) *Jeżeli kontinuum ograniczone E jest sumą skończonej liczby kontinuów $E_1, \dots, E_s$, to dla każdych dwu jego punktów p i q istnieje taki ciąg skończony liczb naturalnych (niekoniecznie różnych) $n_1, \dots, n_k$, że*

$$E = E_{n_1} + \dots + E_{n_k}, \quad p \in E_{n_1}, \quad q \in E_{n_k},$$
$$E_{n_i} E_{n_{i+1}} \neq 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, k-1. \tag{15}$$

Dowód. Oznaczmy dla danego punktu $p \in E$ przez P zbiór tych punktów $q \in E$, dla których istnieje ciąg zbiorów $E_{n_1}, \dots, E_{n_k}$ spełniający warunki (15). Zbiór P jest — jak łatwo widzieć — sumą pewnych spośród zbiorów E_i, jest więc zamknięty. Gdyby zbiór $E - P$ był niepusty, to byłby sumą pozostałych zbiorów ciągu $E_1, \dots, E_s$, byłby więc też zamknięty. Rozkład $E = P + (E - P)$ byłby więc rozkładem kontinuum E na dwa zbiory zamknięte rozłączne, co niemożliwe na mocy tw. (7.5) str. 72.

(4.3) *Jeżeli zbiór E ma własność (S), p i q są dowolnymi jego punktami i $\varepsilon > 0$ jest dowolną liczbą, to istnieje ciąg skończony zbiorów $E_1, \dots, E_s$, mających własność (S) i takich, że:*

$$E = E_1 + \dots + E_s, \quad p \in E_1, \quad q \in E_s, \quad \delta(E_i) < \varepsilon \quad \text{i} \quad E_i E_{i+1} \neq 0$$
$$\text{dla} \quad i = 1, \dots, s-1.$$

Dowód. Na mocy własności (S) zbiór E jest sumą skończonej liczby kontinuów $H_1, \dots, H_r$ o średnicach mniejszych niż $\varepsilon/2$. Na mocy tw. (4.1) istnieją takie zbiory H_i^*, mające własność (S), że $H_i \subset H_i^* \subset E$ i $\delta(H_i^*) < \varepsilon$. Wystarczy teraz zastosować tw. (4.2) do ciągu $H_1^*, \dots, H_r^*$.

(4.4) ***Twierdzenie Sierpińskiego***[1]. *Na to by zbiór E był krzywą ciągłą, potrzeba i wystarcza, żeby miał własność (S).*

Dowód[2]. Warunek jest konieczny. Jeżeli bowiem istnieje funkcja ciągła $\varphi(t)$ odwzorowująca odcinek $\langle a,b \rangle$ na zbiór E, to na mocy tw. (5.3), str. 113, jest ona jednostajnie ciągła. Przedział $\langle a,b \rangle$ można więc podzielić na skończoną liczbę takich przedziałów (zamkniętych) $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, że $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$ dla $t_1, t_2 \in \Delta_i$ i $i = 1, \dots, k$. Zbiory $\varphi(\Delta_i) = E_i$ są kontinuami i $\delta(E_i) < \varepsilon$.

Warunek jest dostateczny. Jeżeli bowiem zbiór E ma własność (S), to na mocy tw. (4.3) istnieją takie zbiory $E_1, \dots, E_{n_1}$, mające własność (S), że $E = \sum_{i=1}^{n_1} E_i$ oraz $E_i E_{i+1} \neq 0$ i $\delta(E_i) < 1$ dla $i = 1, \dots, n_1 - 1$. Niech q_i będzie dowolnym punktem zbioru $E_i \cdot E_{i+1}$, q_0 — dowolnym punktem zbioru E_1 i q_{n_1} — dowolnym punktem zbioru E_{n_1}. Na mocy tw. (4.3) istnieją takie zbiory $E_{i1}, \dots, E_{im_i}$, mające własność (S), że

$$\delta(E_{ik}) < \tfrac{1}{2} \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, m_i, \quad E_i = \sum_{k=1}^{m_i} E_{ik}, \quad q_0 \in E_{11}, \quad q_{n_1} \in E_{n_1 m_{n_1}},$$
$$q_i \in E_{im_i} \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n_1 - 1 \quad \text{i} \quad E_{ik} E_{i\,k+1} \neq 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, \dots, m_i - 1$$

oraz $q_i \in F_{si}$, jeżeli $s = i+1$; w szczególności więc $E_{im_i} E_{s1} \neq 0$, gdy $s = i+1$.

---

[1] W. Sierpiński, Fundamenta Mathematicae 1 (1920), str. 44-60.

[2] Dowód ten jest w gruncie rzeczy prostym uogólnieniem konstrukcji krzywej Peany. Czytelnik zechce porównać geometryczną stronę konstrukcji z drugiej części tego dowodu z konstrukcją krzywej Peany.

Możemy założyć, że $m_1 = \ldots = m_{n_1} = m_2$, wypisując w ciągu $E_{i1}, \ldots, E_{im_i}$ w razie potrzeby jeden zbiór kilka razy. Postępując tak dalej, otrzymamy ciąg $\{m_k\}$ liczb naturalnych i takie zbiory $E_{n_1 \ldots n_k}$, gdzie $n_1 \leqslant m_1, \ldots, n_k \leqslant m_k$, mające własność (S), że:

$$\delta(E_{n_1 \ldots n_k}) \leqslant 1/k,$$

$$E_{n_1 \ldots n_k} = \sum_{s=1}^{m_{k+1}} E_{n_1 \ldots n_k s},$$

$$E_{n1 \ldots n_k} \cdot E_{n_1 \ldots n_k+1} \neq 0 \quad \text{dla} \quad n_k < m_k,$$

$$E_{n_1 \ldots n_i m_{i+1} \ldots m_k} = E_{n_1 \ldots (n_i+1) 1 \ldots 1} \quad \text{dla} \quad n_i < m_i.$$

Dzielimy przedział $\langle 0, 1 \rangle$ na n_1 równych części, następnie każdy z nich na m_2 równych przedziałów itd. Za n-tym krokiem dzielimy więc przedział $\langle 0, 1 \rangle$ na $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ równych części. Możemy je oznaczyć przez $\Delta_{n_1 \ldots n_k}$ i tak ponumerować wskaźnikami $n_1, \ldots, n_k$ (gdzie $n_1 \leqslant m_1, \ldots, n_k \leqslant m_k$), żeby:

$$\Delta_{n_1 \ldots n_k s} \subset \Delta_{n_1 \ldots n_k}, \quad 0 \in \Delta_{1 \ldots 1}, \; 1 \in \Delta_{m_1 \ldots m_k},$$

$$\Delta_{n_1 \ldots n_k} = \sum_{s=1}^{m_{k+1}} \Delta_{n_1 \ldots n_k s},$$

$$\Delta_{n_1 \ldots n_k} \Delta_{n_1 \ldots n_k+1} \neq 0 \quad \text{dla} \quad n_k < m_k,$$

$$\Delta_{n_1 \ldots n_i m_{i+1} \ldots m_k} = \Delta_{n_1 \ldots (n_i+1) 1 \ldots 1} \quad \text{dla} \quad n_i < m_i.$$

Niech $\Delta_{n_1 \ldots n_k} = \langle \alpha_{n_1 \ldots n_k}, \beta_{n_1 \ldots n_k} \rangle$, niech $p_{n_1 \ldots n_k}$ będzie dowolnym punktem zbioru $E_{n_1 \ldots n_k}$ i niech

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} p_{n_1 \ldots n_k} & \text{dla} \;\; t \in \langle \alpha_{n_1 \ldots n_k}, \beta_{n_1 \ldots n_k} \rangle, \text{jeżeli} |n_1 - m_1| + \ldots + |n_k - m_k| \neq 0 \\ p_{m_1 \ldots m_k} & \text{dla} \;\; t \in \langle \alpha_{m_1 \ldots m_k}, \beta_{m_1 \ldots m_k} \rangle. \end{cases}$$

Ponieważ $E_{n_1 \ldots n_k \beta_1 \ldots \beta_s} \subset E_{n_1 \ldots n_k}$, więc $|\varphi_k(t) - \varphi_s(t)| < 1/k$. Zatem ciąg $\{\varphi_k(t)\}$ jest jednostajnie zbieżny. Funkcje $\varphi_k(t)$ są ciągłe w każdym punkcie wewnętrznym przedziałów $\Delta_{n_1 \ldots n_k}$, a w punktach końcowych tych przedziałów oscylacja funkcji $\varphi_k(t)$ wynosi co najwyżej $2\delta(\Delta_{n_1 \ldots n_k}) < 2/k$. Zatem na mocy tw. (2.9), str. 127, ich granica $\varphi(t)$ jest funkcją ciągłą. Zarazem $E = \varphi(\langle 0, 1 \rangle)$, ponieważ zbiór P wszystkich punktów $p_{n_1 \ldots n_k}$ jest gęsty zarówno w zbiorze E jak w zbiorze $\varphi(\langle 0, 1 \rangle)$, a oba te zbiory są zamknięte, więc $\overline{P} = E$ i $\overline{P} = \varphi(\langle 0, 1 \rangle)$, c. b. d. d.

Następujący przykład jest jednym z najprostszych przykładów kontinuum ograniczonego, które nie jest krzywą ciągłą. Niech $A \subset \mathcal{E}^2$ będzie wykresem funkcji $\sin 1/x$ dla $0 < x \leqslant 1$, a B — odcinkiem $\overline{(0,-1)\,(0,1)}$. Zbiór $C = A + B$ jest na mocy tw. (6.2), str. 87, kontinuum ograniczonym, ponieważ zbiór A jest na mocy tw. (5.5), str. 113, spójny, jako obraz ciągły przedziału $\langle 0,1 \rangle$ i, jak łatwo widzieć, $\bar{A} = C$. Gdyby zbiór C był krzywą ciągłą, miałby na mocy tw. (4.4) własność (S); w szczególności dałby się przedstawić jako suma skończonego ciągu kontinuów o średnicach mniejszych niż 1/4; oznaczmy je przez $E_1, \ldots, E_n$. Ponieważ nie wszystkie zbiory E_n są zawarte w B, bo $C - B = A \neq 0$, więc z tw. (4.2) wynika, że jeden z tych zbiorów, np. E_1, musiałby mieć punkty wspólne z A i B. Niech $p = (0, y_0) \in BE_1$, $q = (x, y) \in AE_1$; wówczas zbiór E_1 byłby zawarty w przedziale $I = \langle 0, y_0 - \varrho;\, x, y_0 + \varrho \rangle$, gdzie $\varrho = 1/4$.

Oczywiście albo $y_0 - \varrho > -1$, albo $y_0 + \varrho < 1$. Załóżmy np., że $y_0 + \varrho < 1$ i niech n będzie taką liczbą naturalną, że $2n\pi > x$. Wówczas $x_1 = 1/2n\pi < 1/x$ oraz $\sin 1/x_1 = 1$. Odcinek $\overline{(x_1, -1)\,(x_1, y_0 + \varrho)}$ nie zawierałby punktów zbioru CI, a więc tym bardziej zbioru E_1. Niech

$$I_1 = \langle 0, y_0 - \varrho;\, x_1, y_0 + \varrho \rangle \quad \text{i} \quad I_2 = \langle x_1, y_0 - \varrho;\, x, y_0 + \varrho \rangle.$$

Widzimy od razu, że

$$C_1 = I_1 E_1 \neq 0, \quad C_2 = I_1 E_2 \neq 0, \quad E_1 = C_1 + C_2, \quad \bar{C}_1 = C_1, \quad \bar{C}_2 = C_2 \quad \text{i} \quad C_1 C_2 = 0,$$

wbrew spójności kontinuum E_1.

(4.5) *Każdy zbiór wypukły, zamknięty i ograniczony E jest krzywą ciągłą.*

Dowód. Jako wypukły, zbiór E jest spójny na mocy tw. (7.2), str. 92. Jako zamknięty, zbiór E jest więc kontinuum. Ponieważ ponadto jest ograniczony, więc na to, by był krzywą ciągłą, wystarczy — w myśl twierdzenia Sierpińskiego — okazać, że ma własność (S).

Weźmy pod uwagę dowolne $\varepsilon > 0$ i kratę, której liczba charakterystyczna jest mniejsza niż $\varepsilon/\sqrt{n}$ (p. str. 77). Wówczas każdy przedział wchodzący w skład tej kraty ma średnicę mniejszą niż ε. Na mocy tw. (8.2), str. 98, istnieje skończona liczba przedziałów zamkniętych $I_1, I_2, \ldots, I_s$ tej kraty, które mają punkty wspólne ze zbiorem E. Niech $E_i = EI_i$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, s$. Zbiory E_i są zamknięte na mocy tw. (4.8), str. 81, oraz wypukłe na mocy tw. (7.1), str. 92, a więc spójne; zarazem w myśl założenia jest $\delta(E_i) < \varepsilon$. Zbiór E ma więc własność (S), c. b. d. d.

Z twierdzenia (4.5) wynika w szczególności, że kula, elipsoida, simpleks są krzywymi ciągłymi.

Z twierdzenia Sierpińskiego (str. 158) wynika natychmiast twierdzenie następujące:

(4.6) *Suma* $\sum_{i=1}^{s} C_i$, *gdzie* $C_1, C_2, \ldots, C_s$ *są krzywymi ciągłymi i* $C_i C_{i+1} \neq 0$, *dla* $i = 1, \ldots, s-1$, *jest krzywą ciągłą.*

Wynika stąd, że np. wielościany są krzywymi ciągłymi.

Z łatwością dowodzi się również twierdzenia:

(4.7) *Jeżeli* $\{C_n\}$ *jest takim ciągiem krzywych ciągłych, że* $C_n C_{n+1} \neq 0$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} \delta(C_n) < \infty$, *to zbiór* $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ *jest krzywą ciągłą.*