ROZDZIAŁ V

CAŁKA RIEMANNA

§ 1. Całka pojedyncza

1. Podział przedziału. Weźmy pod uwagę w przedziale zamkniętym $\langle a,b\rangle$ skończoną liczbę punktów $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

Zbiór przedziałów zamkniętych $\langle x_0,x_1\rangle, \ldots, \langle x_{n-1},x_n\rangle$ nazywamy *podziałem* Δ przedziału $\langle a,b\rangle$.

Długość przedziału $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ oznaczamy przez δx_i:

$$\delta x_i=x_i-x_{i-1} \qquad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,n,$$

a przez $|\Delta|$ — największą z liczb $\delta x_1,\ldots,\delta x_n$.

Ciąg podziałów $\{\Delta_n\}$ nazywamy *normalnym*, jeżeli $|\Delta_n|\to 0$ dla $n\to\infty$, tzn. jeżeli długość najdłuższego przedziału podziału Δ_n dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie.

Jeżeli np. Δ_n jest podziałem przedziału $\langle a,b\rangle$ na n równych przedziałów, to ciąg $\{\Delta_n\}$ jest ciągiem normalnym, gdyż $|\Delta_n|=(b-a)/n\to 0$ dla $n\to\infty$.

2. Całka Riemanna. Niech $f(x)$ będzie funkcją ograniczoną, określoną w przedziale zamkniętym $\langle a,b\rangle$. Weźmy pod uwagę w każdym przedziale $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ podziału Δ dowolny punkt ξ_i i utwórzmy sumę

$$R=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta x_i. \tag{1}$$

Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\Delta_n\}$ odpowiadające im sumy R_n dążą do jednej i tej samej granicy (niezależnie od wyboru punktów ξ_i), to granicę tę nazywamy *całką Riemanna* funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ i oznaczamy przez

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy wówczas *całkowalną* $\mathfrak{R}$ czyli *całkowalną w sensie Riemanna* w przedziale $\langle a,b\rangle$.

Uwaga. Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów odpowiednie sumy (1) są zbieżne, to są zawsze zbieżne do tej samej granicy. Jeżeli bowiem $\{\varDelta_n\}$ i $\{\varDelta'_n\}$ są dowolnymi ciągami normalnymi podziałów przedziału $\langle a,b\rangle$, a $\{R_n\}$ i $\{R'_n\}$ — ciągami zbieżnymi odpowiednich sum, to ponieważ ciąg $\{\varDelta_1,\varDelta'_1,\varDelta_2,\varDelta'_2,...\}$ jest również ciągiem normalnym podziałów, ciąg $\{R_1,R'_1,R_2,R'_2,...\}$ jest zbieżny. Zatem ciągi $\{R_n\}$ i $\{R'_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy.

(2.1) *Dla każdej funkcji f całkowanej $\mathfrak{R}$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ zachodzi wzór:*

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a), \tag{2}$$

gdzie m i M oznaczają kresy dolny i górny funkcji $f(x)$ dla $a\leqslant x\leqslant b$.

Dowód. Dla każdego podziału $\varDelta$ i każdej sumy (1) mamy $m\leqslant f(\xi_i)\leqslant M$, gdzie $i=1,2,...,n$. Zatem

$$m(\delta x_1+...+\delta x_n)\leqslant R\leqslant M(\delta x_1+...+\delta x_n).$$

Ponieważ $\delta x_1+...+\delta x_n=b-a$, więc otrzymujemy nierówność (2), c. b. d. d.

(2.2) *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, to*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant L(b-a), \tag{3}$$

gdzie L oznacza kres górny wartości $|f(x)|$ w tym przedziale.

Nierówność (3) wynika łatwo z (2), gdyż $-L\leqslant m\leqslant M\leqslant L$.

(2.3) *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ i nieujemna w przedziale $\langle a,b\rangle$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0.$$

Wynika to z tw. (2.1), gdyż $m\geqslant 0$.

3. Całka sumy funkcyj. Okażemy teraz, że:

(3.1) *Suma oraz różnica dwu funkcji* $f(x)$ *i* $\varphi(x)$ *całkowalnych* $\mathfrak{R}$ *w przedziale* $\langle a,b\rangle$ *jest całkowalna* $\mathfrak{R}$ *i*

$$\int_a^b [f(x)\pm\varphi(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Dowód. Biorąc jakiekolwiek punkty ξ_i w przedziałach podziału Δ i oznaczając przez R, R' i R'' odpowiednie sumy dla $f\pm\varphi$, f i φ, mamy $R=R'\pm R''$. Dla ciągu normalnego podziałów $\{\Delta_n\}$ mamy zatem $R_n=R'_n\pm R''_n$. Ponieważ R'_n i R''_n dążą do całek z funkcyj $f(x)$ i $\varphi(x)$, więc R_n dąży również do granicy, którą jest suma (różnica) całek funkcyj f i φ.

Równie prosto dowodzi się, że:

(3.2) *Iloczyn funkcji* $f(x)$ *całkowalnej* $\mathfrak{R}$ *w przedziale* $\langle a,b\rangle$ *przez liczbę stałą* c *jest funkcją całkowalną* $\mathfrak{R}$ *w tym przedziale i*

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx.$$

(3.3) *Jeżeli* $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ *są funkcjami całkowalnymi* $\mathfrak{R}$ *w przedziale* $\langle a,b\rangle$, *a* $c_1,\ldots,c_n$ *są dowolnymi stałymi, to*

$$\int_a^b [c_1f_1(x)+\ldots+c_nf_n(x)]dx=c_1\int_a^b f_1(x)dx+\ldots+c_n\int_a^b f_n(x)dx.$$

Dowód wynika od razu z (3.1) i (3.2).

4. Sumy dolna i górna. Oznaczmy przez m_i i M_i kresy dolny i górny funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ podziału Δ. Niech

$$s=\sum_{i=1}^n m_i\delta x_i,\qquad S=\sum_{i=1}^n M_i\delta x_i. \tag{4}$$

Sumę s nazywamy *sumą dolną*, S zaś — *sumą górną* odpowiadającą podziałowi Δ.

Niech m i M oznaczają dolny i górny kres funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$; wówczas mamy oczywiście na mocy (3) i (1):

$$m(b-a)\leqslant s\leqslant R\leqslant S\leqslant M(b-a). \tag{5}$$

Udowodnimy, że S *jest kresem górnym wartości sumy* R, *odpowiadającej podziałowi* Δ *dla wszelkich możliwych wyborów punktów* ξ_i (p. wzór (1), str. 162).

Niech bowiem $\varepsilon>0$. W i-tym przedziale podziału Δ możemy wyznaczyć taki punkt ξ_i, by $f(\xi_i)\geqslant M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}$, skąd:

$$R=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta x_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left(M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\delta x_i=S-\varepsilon.$$

Ponieważ $\varepsilon>0$ jest dowolne oraz $R\leqslant S$ na mocy (5), więc S jest kresem górnym wartości sumy R.

Podobnie dowodzi się, że s *jest kresem dolnym wartości sumy* R *dla podziału* Δ.

Zauważmy, że na mocy (3)

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\delta x_i.$$

Oznaczając więc przez ω_i oscylację funkcji $f(x)$ w przedziale δx_i, tzn. przyjmując $\omega_i=M_i-m_i$, dostajemy

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\delta x_i. \tag{6}$$

5. Całki górna i dolna. Kres dolny sum górnych S przy dowolnych podziałach Δ przedziału $\langle a,b\rangle$ nazywamy *całką górną* funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ i oznaczamy przez

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Analogicznie kres górny sum dolnych s nazywamy *całką dolną* funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ i oznaczamy przez

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Dla każdego podziału Δ mamy na mocy określenia całek górnej i dolnej:

$$s\leqslant\underline{\int_a^b} f(x)\,dx,\qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\leqslant S. \tag{7}$$

PRZYKŁAD. Niech $y=f(x)$ będzie *funkcją Dirichleta* określoną w przedziale $\langle 0,1\rangle$, tzn. $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ dla } x \text{ wymiernych}, \\ 1 \text{ dla } x \text{ niewymiernych}. \end{cases}$

Dla każdego podziału Δ mamy wówczas $s=0$ i $S=1$, zatem:

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx=0, \qquad \overline{\int_0^1} f(x)\,dx=1.$$

(5.1) *Do każdego* $\varepsilon>0$ *istnieje takie* $\eta>0$, *że jeżeli podział* Δ *spełnia nierówność*

(8) $$|\Delta|\leqslant\eta,$$

to sumy s *i* S *spełniają nierówności*

(9) $$s\geqslant\underline{\int_a^b} f(x)\,dx-\varepsilon, \qquad S\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\varepsilon.$$

Dowód. Udowodnimy drugą z nierówności (9). Ponieważ całka górna jest dolnym kresem sum górnych, więc do liczby $\varepsilon>0$ istnieje podział $\bar{\Delta}$, dla którego suma górna $\bar{S}$ spełnia nierówność

(10) $$\bar{S}\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\,dx+\varepsilon/2.$$

Niech η spełnia nierówność

(11) $$0<\eta\leqslant|\bar{\Delta}|$$

i weźmy pod uwagę podział Δ spełniający nierówność (8).

Niech $\bar{I}_k$ będzie dowolnym odcinkiem podziału $\bar{\Delta}$, a $I_i, I_{i+1},\ldots,I$ odcinkami podziału Δ, które całkowicie leżą w $\bar{I}_k$, a więc które zawierają każdy punkt przedziału $\bar{I}_k$ odległy od jego końców o więcej niż $|\Delta|$. Z (9) dostajemy zatem

(12) $$I_k-\sum_{r=i}^{j} I_r\leqslant 2\eta.$$

Niech M i m oznaczają kresy górny i dolny funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, a $\bar{M}_k$ i M_r — kresy górne tej funkcji w przedziałach $\bar{I}_k$ i I_r. Mamy

(13) $$\bar{\delta}_k(M-\bar{M}_k)=\sum_{r=i}^{j}\delta_r(M-\bar{M}_k)+(\bar{\delta}_k-\sum_{r=i}^{j}\delta_r)\,(M-\bar{M}_k).$$

Ponieważ $\overline{M}_k \geqslant M_r$, więc $M - \overline{M}_k \leqslant M - M_r$ dla $r = i, i+1, \dots, j$; zatem na mocy (12) i (13)

$$(14) \qquad \bar{\delta}_k(M - \overline{M}_k) \leqslant \sum_{r=i}^{j} \delta_r(M - M_r) + 2\eta(M - m).$$

Podobne nierówności zachodzą dla pozostałych przedziałów podziału $\bar{\Delta}$. Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy po lewej stronie $M(b-a) - \bar{S}$. W sumach po prawej stronie nierówności (14) nie występują składniki odpowiadające tym odcinkom podziału Δ, które nie mieszczą się całkowicie w żadnym przedziale podziału $\bar{\Delta}$. Sumy te po dodaniu nie przekroczą więc

$$\sum_{r=1}^{p} \delta_r(M - M_r) = M(b-a) - S.$$

Niech $\bar{n}$ będzie liczbą odcinków podziału $\bar{\Delta}$. Ostatnie wyrazy po prawej stronie nierówności (14) nie przekroczą więc łącznie $2\bar{n}\eta(M-m)$. Tym sposobem w wyniku dodawania stronami wszystkich nierówności (14) otrzymamy

$$M(b-a) - \bar{S} \leqslant M(b-a) - S + 2\bar{n}\eta(M-m),$$

skąd

$$(15) \qquad S \leqslant \bar{S} + 2\bar{n}\eta(M-m).$$

Przyjmując zatem, że η spełnia prócz nierówności (11) jeszcze nierówność

$$(16) \qquad 2\bar{n}\eta(M-m) \leqslant \varepsilon/2,$$

otrzymamy z (15) i (10) nierówność $S \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$, t.j. drugą z nierówności (9), zachodzącą — jak udowodniliśmy — dla każdego podziału Δ spełniającego nierówność (8), gdy tylko η spełnia nierówności (11) i (16).

Podobnie dowodzi się pierwszej z nierówności (9).

(5.2) *Dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\Delta_n\}$ ciąg sum $\{S_n\}$ dąży do całki górnej, a ciąg sum $\{s_n\}$ — do całki dolnej.*

Dowód. Niech dane będzie dowolne $\varepsilon > 0$ i dobrane do niego $\eta > 0$ według lematu (5.1). Ponieważ $\{\Delta_n\}$ jest z założenia ciągiem normalnym, więc istnieje takie N, że $n > N$ pociąga $|\Delta_n| \leqslant \eta$. Na mocy (5.1) otrzymujemy zatem

$$(17) \qquad S_n \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon \qquad \text{dla} \quad n > N.$$

Ponieważ całka górna jest kresem dolnym sum górnych S, więc

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant S_n. \tag{18}$$

Z (17) i (18) dostajemy

$$0 \leqslant S_n - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \varepsilon \quad \text{dla} \quad n > N.$$

Wynika stąd, że S_n dąży do całki górnej.

Podobnie dowodzi się twierdzenia dla sum dolnych s_n.

(5.3) *Całka dolna jest niewiększa od całki górnej*:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Wynika to z (5.2), ponieważ $s_n \leqslant S_n$ dla dostatecznie wielkich n.

6. Warunki całkowalności funkcji według Riemanna.

(6.1) *Jeżeli całki dolna i górna funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ są równe, to funkcja $f(x)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w tym przedziale i*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Dowód. Dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\Delta_n\}$ mamy $s_n \leqslant R_n \leqslant S_n$. Ponieważ s_n i S_n dążą dla $n \to \infty$ do całek dolnej i górnej, które według założenia są równe, więc R_n dąży również do granicy. Wynika stąd, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a,b\rangle$ i że jej całka równa się całce górnej i dolnej, c. b. d. d.

(6.2) *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a,b\rangle$, to jej całki górna i dolna w tym przedziale są równe.*

Dowód. Niech $\{\Delta_n\}$ będzie dowolnym ciągiem normalnym podziałów. Ponieważ suma dolna s_n jest według określenia kresem dolnym, suma zaś górna S_n — kresem górnym sum R_n odpowiadających podziałowi Δ_n, więc istnieją dla podziału Δ_n sumy R_n' i R_n'' dostatecznie wielkie, by

$$R_n' \leqslant s_n + 1/n \quad \text{oraz} \quad S_n - 1/n \leqslant R_n''. \tag{19}$$

Ponieważ R'_n i R''_n dążą do całki funkcji $f(x)$, więc s_n i S_n dążą na mocy (19) również do całki tej funkcji. Na mocy tw. (5.3) całka górna i dolna funkcji $f(x)$ są więc równe całce funkcji $f(x)$.

Z twierdzeń (6.1) i (6.2) wynika od razu twierdzenie

(6.3) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcja ograniczona w przedziale $\langle a,b\rangle$ była w nim całkowalna $\mathfrak{R}$, jest, żeby jej całki górna i dolna w tym przedziale były równe.*

Twierdzeniu (6.3) można nadać postać następującą:

(6.4) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcja ograniczona $f(x)$ była w przedziale $\langle a,b\rangle$ całkowalna $\mathfrak{R}$, jest, żeby do każdej liczby $\varepsilon>0$ istniał podział Δ, dla którego zachodziłaby nierówność*

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\delta x_i<\varepsilon, \tag{20}$$

gdzie ω_i oznacza oscylację funkcji $f(x)$ w przedziale δx_i.

Dowód. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a,b\rangle$, to na mocy tw. (6.3) jej całki górna i dolna w tym przedziale są równe. Zatem dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\Delta_n\}$ ciągi $\{S_n\}$ i $\{s_n\}$ dążą do tej samej granicy, skąd $S_n-s_n\to 0$. Wynika stąd, że do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taki podział Δ_n, dla którego $S_n-s_n<\varepsilon$, tzn. dla którego zachodzi nierówność (20). Warunek jest więc konieczny.

Na odwrót, jeżeli do liczby $\varepsilon>0$ istnieje podział Δ o własności (20), to na mocy (7), str. 165

$$0\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx<\varepsilon.$$

Ponieważ $\varepsilon>0$ jest dowolne, więc wynika stąd, że całki górna i dolna są równe. Na mocy tw. (6.3) funkcja $f(x)$ jest zatem całkowalna $\mathfrak{R}$ w przedziale $\langle a,b\rangle$. Warunek jest więc także dostateczny, c. b. d. d.

PRZYKŁADY. 1. *Każda funkcja $f(x)$ ciągła w przedziale $\langle a,b\rangle$ jest w nim całkowalna $\mathfrak{R}$.*

Z jednostajnej ciągłości funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ (tw. (4.2), str. 112) wynika bowiem, że do każdego $\varepsilon>0$ istnieje taki podział Δ na odcinki $I_1,I_2,\dots,I_n$, że oscylacja ω_i funkcji f na odcinku I_i spełnia nierówność $\omega_i\leqslant\varepsilon/(b-a)$ dla $i=1,2,\dots,n$. Stąd dla podziału Δ

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\delta x_i=\varepsilon,$$

na mocy więc tw. (6.4) funkcja f jest całkowalna w przedziale $\langle a,b\rangle$.

2. *Każda funkcja $f(x)$ monotoniczna w przedziale $\langle a,b\rangle$ jest w nim całkowalna $\mathfrak{R}$.*

Niech bowiem $f(x)$ będzie funkcją niemalejącą w $\langle a,b\rangle$, a Δ dowolnym podziałem tego przedziału punktami $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$. Ponieważ oscylacja ω_i w przedziale $I_i=\langle x_{i-1},x_i\rangle$ jest niewiększa niż $f(x_i)-f(x_{i-1})$, więc

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i|\Delta|\leqslant[f(b)-f(a)]\cdot|\Delta|.$$

Jeżeli zatem do dowolnie danej liczby $\varepsilon>0$ dobierzemy Δ tak, by $[f(b)-f(a)]\cdot|\Delta|\leqslant\varepsilon$, to otrzymamy $S-s\leqslant\varepsilon$. Na mocy tw. (6.4) wynika stąd całkowalność $\mathfrak{R}$ funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$.

7. Zbiory miary Lebesgue'a 0. Mówimy, że zbiór liniowy E ma *miarę Lebesgue'a zero*, albo że jego miara $\mathfrak{L}$ jest 0, i piszemy $m(E)=0$, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje skończony lub przeliczalny ciąg przedziałów $\{I_n\}$, spełniający warunki:

(i) $E\subset\sum_n I_n$

(ii) $\sum_n\delta_n\leqslant\varepsilon$, gdzie $\delta_n=\delta(I_n)$.

PRZYKŁADY. 1. *Punkt jest miary $\mathfrak{L}$ zero.* Punkt a mieści się bowiem w przedziale $\langle a-\varepsilon/2,\ a+\varepsilon/2\rangle$ o długości ε, gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią.

2. *Każdy zbiór skończony lub przeliczalny jest miary $\mathfrak{L}$ zero.* Jeżeli bowiem E jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym złożonym z punktów $\{a_n\}$, a ε — dowolną liczbą dodatnią, to oznaczając przez I_n przedział $\langle a_n-\varepsilon/2^n,\ a_n+\varepsilon/2^n\rangle$, stwierdzamy łatwo, że spełnione są warunki (i) i (ii).

3. *Zbiór Cantora $\boldsymbol{C}$ jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.* Przy konstrukcji bowiem zbioru Cantora (str. 65) po wyrzuceniu przedziałów otwartych środkowych w n pierwszych przybliżeniach pozostaje z przedziału $\langle 0,1\rangle$ 2^n równych przedziałów zamkniętych $I_1,\ldots,I_{2^n}$ o łącznej długości $2^n\cdot(\frac{1}{3})^n=(\frac{2}{3})^n$. Oczywiście $\boldsymbol{C}\subset I_1+\ldots+I_{2^n}$. Do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje takie n, że $(\frac{2}{3})^n\leqslant\varepsilon$, skąd $|I_1|+\ldots+|I_{2^n}|\leqslant\varepsilon$. Miara $\mathfrak{L}$ zbioru $\boldsymbol{C}$ jest więc zerem.

Na mocy określenia

(7.1) *Każda część zbioru miary $\mathfrak{L}$ zero jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.*

Np. każda część zbioru Cantora jest zbiorem miary zero.

(7.2) *Jeżeli zbiór E jest miary $\mathfrak{L}$ zero, to do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje skończony lub przeliczalny zbiór przedziałów $\{I'_n\}$ spełniających warunki* (i) *i* (ii) *oraz stanowiących pokrycie zbioru E.*

Dowód. Na mocy założenia istnieje skończony lub przeliczalny zbiór przedziałów $\{I'_n\}$ spełniający warunki:

(i') $E \subset I'_1 + I'_2 + \ldots$,

(ii') $|I'_1| + |I'_2| + \ldots \leqslant \varepsilon/2$.

Oznaczając przez I_n przedział zawierający w swoim wnętrzu I'_n i taki, by $|I'_n| \leqslant 2|I_n|$, stwierdzamy łatwo, że przedziały $\{I_n\}$ spełniają warunki (i) i (ii) oraz stanowią pokrycie (str. 69) zbioru E.

Z tw. (7.2) wynika w szczególności, że:

(7.3) *Jeżeli E jest zbiorem zamkniętym ograniczonym miary $\mathfrak{L}$ zero, wówczas do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje skończony zbiór przedziałów $I_1, I_2, \ldots, I_N$ spełniający warunki* (i), (ii) *i stanowiący pokrycie zbioru E.*

Jeżeli bowiem przedziały $\{I_n\}$ tworzą pokrycie zbioru E i $|I_1| + |I_2| + \ldots \leqslant \varepsilon$, to na mocy tw. (6.2), str. 70, istnieje wśród tych przedziałów skończona liczba przedziałów $I_1, \ldots, I_N$ stanowiących również pokrycie zbioru E i oczywiście mamy tym bardziej $|I_1| + \ldots + |I_N| \leqslant \varepsilon$.

(7.4) *Suma skończonej lub przeliczalnej ilości zbiorów miary $\mathfrak{L}$ zero jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.*

Dowód. Niech $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ będą zbiorami miary $\mathfrak{L}$ zero. Na mocy tw. (7.2) do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje więc ciąg przedziałów $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, \ldots$ pokrywający E_1, ciąg przedziałów $I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \ldots$ pokrywający E_2 itd. tak, by

$$(21) \qquad |I_1^{(1)}| + |I_2^{(1)}| + \ldots \leqslant \varepsilon/2, \qquad |I_1^{(2)}| + |I_2^{(2)}| + \ldots \leqslant \varepsilon/2^2 \quad \text{itd.}$$

Przedziały $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, \ldots, I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \ldots$ itd. pokrywają oczywiście sumę $E_1 + E_2 + \ldots$ i ponadto na mocy (21)

$$(|I_1^{(1)}| + |I_2^{(1)}| + \ldots) + (|I_1^{(2)}| + |I_2^{(2)}| + \ldots) + \ldots \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2^2 + \ldots \leqslant \varepsilon.$$

Ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolne, więc miara $\mathfrak{L}$ sumy $E_1 + E_2 + \ldots$ jest zerem.

(7.5) *Przedział nie jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.*

Dowód. Przypuśćmy, że miara $\mathfrak{L}$ przedziału $\langle a,b\rangle$ jest zerem. Zatem dla $\varepsilon=\frac{1}{2}(b-a)$ istnieje takie pokrycie przedziału $\langle a,b\rangle$ przedziałami $I_1,I_2,...,I_n,...$, że

(22) $$|I_1|+|I_2|+...+|I_n|+...\leqslant\tfrac{1}{2}(b-a).$$

Przedział zamknięty $\langle a',b'\rangle$, gdzie $a'=a+\varepsilon/4$ i $b'=b-\varepsilon/4$, jest zawarty w $\langle a,b\rangle$; zatem przedziały $I_1,I_2,...$ tworzą również pokrycie przedziału $\langle a',b'\rangle$. Na mocy (7.3) istnieje więc takie N, że przedziały $I_1,I_2,...,I_n$ pokrywają przedział $\langle a',b'\rangle$. Wynika stąd, że

$$|I_1|+|I_2|+...+|I_n|\geqslant b'-a'=b-a-\varepsilon/2=\tfrac{3}{4}(b-a),$$

wbrew (22). Doszliśmy więc do sprzeczności.

(7.6) *Zbiór miary $\mathfrak{L}$ zero nie posiada punktów wewnętrznych.*

Dowód. Gdyby bowiem punkt a zbioru E miary $\mathfrak{L}$ zero był jego punktem wewnętrznym, wówczas istniałby przedział otwarty $\rangle a',b'\langle\subset E$. Ponieważ na mocy (7.5) przedział nie jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero, więc na mocy (7.1) miara $\mathfrak{L}$ zbioru E też nie mogłaby być zerem.

W szczególności

(7.7) *Żaden zbiór otwarty nie jest miary $\mathfrak{L}$ zero.*

8. Warunki Lebesgue'a całkowalności $\mathfrak{R}$ funkcji.

(8.1) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcja $f(x)$ ograniczona w przedziale $\langle a,b\rangle$, była w nim całkowalna $\mathfrak{R}$, jest żeby zbiór punktów nieciągłości funkcji $f(x)$ w tym przedziale był zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w $\langle a,b\rangle$. Oznaczmy przez $\omega(x)$ oscylację tej funkcji w punkcie x i przez E_k zbiór tych punktów x przedziału $\langle a,b\rangle$ w których $\omega(x)\geqslant 1/k$. Na mocy tw. (6.4) do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taki podział Δ przedziału $\langle a,b\rangle$, że

(23) $$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\delta x_i\leqslant\varepsilon/k.$$

Weźmy pod uwagę te spośród odcinków I_i podziału Δ, na których oscylacja funkcji f przybiera wartości $\omega_i\geqslant 1/k$. Oznaczmy te odcinki przez $I'_1,I'_2,...,I'_r$, a oscylację funkcji f na nich przez $\omega'_1,\omega'_2,...,\omega'_r$. Zatem

(24) $$\omega'_i\geqslant 1/k \qquad \text{dla} \quad i=1,2,...,r.$$

Pozostałe odcinki podziału Δ oznaczmy przez $I_1'', I_2'', \ldots, I_s''$, a oscylacje funkcji f na nich przez $\omega_1'', \omega_2'', \ldots, \omega_s''$. Zatem

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\delta x_i=\sum_{i=1}^{r}\omega_i'|I_i'|+\sum_{i=1}^{s}\omega_i''|I_i''|\geqslant\sum_{i=1}^{r}\omega_i'|I_i'|,$$

skąd na mocy (23) i (24)

$$(25)\qquad \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{r}|I_i'|\leqslant\frac{\varepsilon}{k}\qquad\text{czyli}\qquad\sum_{i=1}^{r}|I_i'|\leqslant\varepsilon.$$

Ponieważ oscylacje funkcji f na odcinkach $I_1'', I_2'', \ldots, I_s''$ są mniejsze od $1/k$, więc w punktach położonych wewnątrz tych odcinków są one również mniejsze od $1/k$. Wynika stąd, że każdy punkt zbioru E_k należy do jednego z odcinków $I_1', I_2', \ldots, I_r'$. Zatem na mocy (25) miara $\mathfrak{L}$ zbioru E_k jest zerem, gdyż $\varepsilon>0$ jest dowolne.

Niech H będzie zbiorem punktów nieciągłości funkcji f w przedziale $\langle a,b\rangle$. Oczywiście

$$(26)\qquad H=\sum_{k=1}^{\infty}E_k,$$

w każdym bowiem punkcie nieciągłości x oscylacja $\omega(x)$ jest dodatnia, a zatem punkt ten należy do jakiegoś zbioru E_k, mianowicie do takiego, że $\omega(x)>1/k$.

Ponieważ każdy ze zbiorów E_k jest miary $\mathfrak{L}$ zero, więc na mocy (26) i tw. (7.4) zbiór H jest też zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero. Warunek jest zatem konieczny.

Na odwrót, załóżmy, że zbiór punktów nieciągłości funkcji $f(x)$ na odcinku $\langle a,b\rangle$ jest miary $\mathfrak{L}$ zero. Dla każdej liczby naturalnej k zbiór tych punktów x, w których $\omega(x)\geqslant 1/k$, tj. zbiór E_k, jest na mocy (7.1) miary $\mathfrak{L}$ zero.

Ponieważ nadto E_k jest na mocy tw. (2.6), str. 108, zbiorem zamkniętym i ograniczonym, więc na mocy (6.2), str. 69, istnieje do każdego $\varepsilon>0$ skończony zbiór przedziałów otwartych $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tworzący pokrycie zbioru E_k, przy czym $|I_1|+|I_2|+\ldots+|I_n|\leqslant\varepsilon$.

Utwórzmy taki podział $\bar{\Delta}$ przedziału $\langle a,b\rangle$, by każdy z odcinków $I_1, \ldots, I_n$ był sumą skończonej liczby odcinków podziału $\bar{\Delta}$. Oznaczmy przez $I_1', I_2', \ldots, I_r'$ odcinki podziału $\bar{\Delta}$ pokryte przez odcinki $I_1, I_2, \ldots, I_n$, a przez $\omega_1', \ldots, \omega_r'$ oscylacje funkcji f na tych odcinkach. Mamy

$$(27)\qquad |I_1'|+|I_2'|+\ldots+|I_r'|\leqslant\varepsilon.$$

Pozostałe odcinki podziału $\bar{\Delta}$ oznaczymy przez $\bar{I}_1,...,\bar{I}_m$. W każdym punkcie x przedziału zamkniętego $\bar{I}_j$, gdzie $j=1,2,...,m$ oscylacja funkcji f spełnia nierówność $\omega(x)<1/k$, gdyż $x\in E_k$. Możemy więc podzielić odcinek $\bar{I}_i$ na tak małe odcinki, by oscylacja na żadnym z nich nie przekraczała $1/k$. Dzieląc w ten sposób każdy z przedziałów $\bar{I}_1,\bar{I}_2,...,\bar{I}_m$, otrzymamy nowe odcinki $I_1'',I_1'',...,I_s''$, na których oscylacje $\omega_1'',\omega_2'',...,\omega_s''$ funkcji f spełniają nierówności

$$(28)\qquad \omega_i''\leqslant 1/k \qquad \text{dla} \quad i=1,2,...,s.$$

Przedziały $I_1',I_2',...,I_r',\ I_1'',I_2'',...,I_s''$ tworzą pewien podział Δ, dla którego

$$S-s=\sum_{i=1}^{r}\omega_i'|I_i'|+\sum_{i=1}^{s}\omega_i''|I_i''|,$$

skąd na mocy (27) i (28) otrzymujemy

$$S-s\leqslant\omega\varepsilon+\frac{1}{k}(b-a),$$

gdzie ω jest oscylacją funkcji f w przedziale $\langle a,b\rangle$.

Ponieważ ε i $1/k$ mogą być dowolnie małymi liczbami dodatnimi, więc na mocy tw. (6.4) funkcja $f(x)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w $\langle a,b\rangle$. Warunek jest zatem dostateczny, c. b. d. d.

PRZYKŁADY. 1. *Każda funkcja ciągła w przedziale zamkniętym jest w nim całkowalna* $\mathfrak{R}$.

Jest bowiem na nim ograniczona i jej zbiór punktów nieciągłości jest pusty, zatem miary $\mathfrak{L}$ zero.

2. *Każda funkcja ograniczona w przedziale zamkniętym i mająca w nim skończony lub przeliczalny zbiór punktów nieciągłości jest całkowalna* $\mathfrak{R}$ *w tym przedziale.*

Zbiór skończony lub przeliczalny jest bowiem miary $\mathfrak{L}$ zero (p. str. 170, przykład 2).

9. Własności funkcyj całkowalnych $\mathfrak{R}$. Użyjemy teraz twierdzenia (8.1) do dowodu następujących twierdzeń:

(9.1) *Wartość bezwzględna funkcji całkowalnej* $\mathfrak{R}$ *w przedziale* $\langle a,b\rangle$ *jest funkcją całkowalną* $\mathfrak{R}$ *w tym przedziale.*

Dowód. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$, to punkty nieciągłości funkcji $|f(x)|$ są zarazem punktami nieciągłości funkcji $f(x)$. Ponieważ zbiór ostatnich jest miary $\mathfrak{L}$ zero na mocy tw. (8.1), więc zbiór punktów nieciągłości funkcji $|f(x)|$ (jako część poprzedniego) jest na mocy tw. (7.1) również miary $\mathfrak{L}$ zero. Na mocy tw. (8.1) funkcja $|f(x)|$ jest więc całkowalna $\mathfrak{R}$, gdyż jest ograniczona.

(9.2) *Iloczyn dwu funkcyj $f_1(x)$ i $f_2(x)$ całkowalnych $\mathfrak{R}$ jest funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$.*

Dowód. Niech H_1, H_2 i H będą zbiorami punktów nieciągłości funkcyj $f_1(x)$, $f_2(x)$ i $f_1(x) f_2(x)$. Oczywiście $H \subset H_1 + H_2$. Ponieważ H_1 i H_2 są na mocy tw. (8.1) zbiorami miary $\mathfrak{L}$ zero, więc na mocy tw. (7.4) H jest miary $\mathfrak{L}$ zero. Ponieważ nadto $f_1(x) f_2(x)$ jest funkcją ograniczoną, więc na mocy tw. (8.1) jest całkowalną $\mathfrak{R}$.

(9.3) *Funkcja całkowalna $\mathfrak{R}$ w przedziale $\langle a, b\rangle$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w każdym przedziale zawartym w $\langle a, b\rangle$.*

Dowód. Wówczas jej zbiór punktów nieciągłości w całym przedziale jest miary $\mathfrak{L}$ zero na mocy tw. (8.1). Tym bardziej więc miary $\mathfrak{L}$ zero jest, na mocy tw. (7.1), zbiór jej punktów nieciągłości w każdym przedziale częściowym.

(9.4) *Jeżeli funkcja $f(x)$ ograniczona w przedziale $\langle a, b\rangle$ przybiera w nim wszędzie wartość 0 z wyjątkiem punktów pewnego zbioru zamkniętego A miary $\mathfrak{L}$ zero, to jest ona całkowalna $\mathfrak{R}$ w tym przedziale i $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.*

Dowód. Jeżeli jakiś punkt x nie należy do A, to z uwagi, że A jest zbiorem zamkniętym, x nie jest punktem skupienia tego zbioru i wobec tego istnieje pewne otoczenie punktu x rozłączne z A (p. tw. (7.5), str. 72). W tym otoczeniu funkcja $f(x)$, jako tożsamościowo równa 0, jest ciągła, w szczególności więc jest ciągła w punkcie x.

Punkty nieciągłości funkcji $f(x)$ mieszczą się zatem w A i przeto stanowią z założenia zbiór miary $\mathfrak{L}$ zero. Na mocy tw. (8.1) funkcja $f(x)$ jest więc całkowalna $\mathfrak{R}$.

Niech Δ będzie dowolnym podziałem przedziału $\langle a, b\rangle$. Ponieważ A, jako zbiór miary $\mathfrak{L}$ zero, nie zawiera na mocy tw. (7.6) żadnego odcinka, więc w każdym odcinku δx_i podziału Δ istnieje punkt x_i nie należący do A. Oczywiście $f(x_i) = 0$, skąd $R = \sum\limits_i f(x_i)\delta x_i = 0$, a zatem $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, c. b. d. d.

(9.5) *Jeżeli ciąg funkcyj $\{f_n(x)\}$ całkowalnych $\mathfrak{R}$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ jest w nim jednostajnie zbieżny do funkcji $f(x)$, to funkcja $f(x)$ jest całkowalna w tym przedziale i*

$$(29)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Dowód. Niech H_n będzie zbiorem punktów nieciągłości funkcji $f_n(x)$ i niech $H = H_1 + H_2 + \dots$ Ponieważ zbiory $H_1, H_2, \dots$ są miary $\mathfrak{L}$ zero, zatem na mocy tw. (7.4) H jest również zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero. Jeżeli więc punkt x_0 przedziału $\langle a,b\rangle$ nie należy do H, to wszystkie funkcje ciągu $\{f_n(x)\}$ są ciągłe w x_0, skąd na mocy tw. (2.5), str. 125, funkcja $f(x)$ jest ciągła w x_0. Zatem zbiór punktów nieciągłości funkcji $f(x)$ mieści się w H, więc jego miara $\mathfrak{L}$ jest również zerem na mocy tw. (7.1). Ponieważ nadto funkcja $f(x)$ jest na mocy tw. (2.4), str. 125, ograniczona w przedziale $\langle a,b\rangle$, więc na mocy tw. (8.1) jest ona całkowalna $\mathfrak{R}$ w tym przedziale.

Wobec założenia, że $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, istnieje dla każdego $\varepsilon > 0$ takie N, że $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ dla $n > N$, skąd

$$(30)\qquad \left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leqslant \varepsilon|b-a|$$

dla $x \in \langle a,b\rangle$ i $n \geqslant N$. Z nierówności (30) wynika (29), ponieważ $\varepsilon > 0$ było dowolne.

10. Całka Riemanna a funkcja pierwotna. Możemy teraz dowieść następujących własności całki Riemanna:

(10.1) *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w przedziałach $\langle a,c\rangle$ i $\langle c,b\rangle$, oraz $a < c < b$, to funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a,b\rangle$ i*

$$(31)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dowód. Zbiór punktów nieciągłości funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a,b\rangle$ jest na mocy tw. (7.1) miary $\mathfrak{L}$ zero, jako suma zbiorów punktów nieciągłości tej funkcji w przedziałach $\langle a,c\rangle$ i $\langle c,b\rangle$, które są miary $\mathfrak{L}$ zero na mocy tw. (8.1). Zatem na mocy tw. (8.1) funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a,b\rangle$.

Niech $\{\Delta_n\}$ będzie ciągiem podziałów przedziału $\langle a,b\rangle$ zachowujących stałe punkt c jako punkt podziału. Oznaczając przez R_n sumę dla podziału Δ_n, a przez R'_n i R''_n sumę składników, które odpowiadają odcinkom podziału Δ_n mieszczącym się w przedziałach $\langle a,c\rangle$ i $\langle c,b\rangle$, otrzymamy $R_n=R'_n+R''_n$. Otrzymujemy stąd równość (30), przechodząc do granicy dla $n\to\infty$.

Uwaga. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a,b\rangle$, to przyjmujemy, że

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^a f(x)\,dx=0.$$

Dowodzi się łatwo, że w tym znakowaniu wzór (31) zachodzi dla dowolnych liczb a,b,c, byleby istniały wszystkie całki występujące w tym wzorze.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale o końcach a,b i K jest kresem górnym funkcji $|f(x)|$ w tym przedziale, to

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant|b-a|K. \tag{32}$$

Gdy $a<b$, nierówność (32) jest identyczna z nierównością (3), str. 163. Stąd wynika łatwo nierówność (32) dla $a\geqslant b$.

(10.2) *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w przedziale $\langle a,b\rangle$, to funkcja*

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt, \qquad \textit{gdzie} \quad a\leqslant c\leqslant b \quad \textit{i} \quad a\leqslant x\leqslant b,$$

jest ciągła w przedziale $\langle a,b\rangle$, a ponadto w każdym punkcie x_0, w którym funkcja $f(x)$ jest ciągła, istnieje pochodna $F'(x_0)$ i

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Dowód. Oznaczmy przez K kres górny funkcji $|f(x)|$ w przedziale $\langle a,b\rangle$. Dla dowolnych punktów x' i x'' tego przedziału mamy, stosując tw. (10.1),

$$|F(x')-F(x'')|=\left|\int_c^{x'} f(t)\,dt-\int_c^{x''} f(t)\,dt\right|=\left|\int_c^{x''} f(t)\,dt+\int_{x''}^{x'} f(t)\,dt-\int_c^{x''} f(t)\,dt\right|=$$
$$=\left|\int_{x''}^{x'} f(t)\,dt\right|\leqslant|x'-x''|K.$$

Funkcja $F(x)$ spełnia więc w przedziale $\langle a, b\rangle$ warunek Lipschitza, a tym samym jest ciągła w $\langle a, b\rangle$.

Niech teraz $x_0 \in \langle a, b\rangle$ będzie punktem ciągłości funkcji $f(x)$. Dla każdego $x \in \langle a, b\rangle$ oznaczmy przez K_x kres górny różnicy $|f(x)-f(x_0)|$ w przedziale $\langle x_0, x\rangle$. Wówczas

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}[f(t)-f(x_0)]\,dt\right|\leqslant K_x.$$

Z ciągłości funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 wynika, że $K_x\to 0$ dla $x\to x_0$, skąd

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0),$$

czyli $F'(x_0)=f(x_0)$, c. b. d. d.

Funkcję $F(x)$ nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, gdy w każdym punkcie tego przedziału $F'(x)=f(x)$.

(10.3) *Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ całkowalnej $\mathfrak{R}$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{33}$$

Dowód. Niech Δ będzie dowolnym podziałem odcinka $\langle a, b\rangle$ punktami $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Mamy

$$F(b)-F(a)=\big(F(x_1)-F(x_0)\big)+\big(F(x_2)-F(x_1)\big)+\ldots+\big(F(x_n)-F(x_{n-1})\big).$$

Na mocy twierdzenia o wartości średniej

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1}), \qquad \text{gdzie} \quad x_{i-1}<\xi_i<x_i.$$

Ponieważ $F'(\xi_i)=f(\xi_i)$, więc dla $\delta x_i=\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ otrzymujemy

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\delta x_i=R.$$

Jeżeli więc $\{\Delta_n\}$ jest dowolnym ciągiem normalnym podziałów, dostaniemy $F(b)-F(a)=R_n$, skąd otrzymujemy (33), przechodząc do granicy dla $n\to\infty$.

§ 2. Całki wielokrotne.

1. Podział przedziału. Niech I będzie dowolnym przedziałem zamkniętym przestrzeni $\mathcal{E}^n$.

Podziałem przedziału I nazywamy dowolny skończony zbiór Δ nie zachodzących na siebie przedziałów zamkniętych $I_1, \dots, I_m$, których sumą jest I.

Podział przedziału $I = \langle a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n \rangle$ możemy otrzymać np., tworząc najpierw dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$ dowolny podział Δ_i przedziału $\langle a_i, b_i \rangle$ za pomocą punktów

(1) $$a_i = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \dots < x_i^{(k_i)} = b_i.$$

Podziałem przedziału I będzie wówczas zbiór wszystkich przedziałów postaci

(2) $$\langle x_1^{(j_1)}, \dots, x_n^{(j_n)};\; x_1^{(j_1+1)}, \dots, x_n^{(j_n+1)} \rangle,$$

gdzie j_i jest dowolną z liczb $0, 1, \dots, k_i - 1$, a więc gdzie $\langle x_i^{(j_i)}, x_i^{(j_i+1)} \rangle$ jest dowolnym odcinkiem podziału Δ_i odcinka $\langle a_i, b_i \rangle$.

Taki podział nazywamy *siatką* przedziału I.

Siatkę prostokąta otrzymujemy np., dzieląc go na prostokąty za pomocą prostych równoległych do jego boków. Podobnie, siatkę prostopadłościanu $I = \langle a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 \rangle$ dostajemy, dzieląc go na prostopadłościany płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn xy, yz i zx.

(1.1) *Jeżeli przedziały $I_1, \dots, I_m$ (zachodzące na siebie lub nie) leżą w przedziale I, to istnieje siatka Δ o tej własności, że każdy przedział I_l, gdzie $l = 1, \dots, m$, jest sumą pewnych przedziałów tej siatki.*

Niech bowiem I_l będzie postaci (2). Utwórzmy podział Δ_i odcinka $\langle a_i, b_i \rangle$ za pomocą punktów (1). Siatka Δ otrzymana z podziałów Δ_i dla $i = 1, 2, \dots, n$ spełnia oczywiście tezę twierdzenia.

Uwaga. W szczególności, jeżeli przedziały $I_1, \dots, I_m$ nie zachodzą na siebie, to dołączając do nich te przedziały siatki Δ, które nie są w nich zawarte, otrzymamy siatkę, w której skład wchodzą przedziały $I_1, \dots, I_n$.

Podział Δ_1 nazywamy *podziałem następczym* podziału Δ, jeżeli każdy przedział podziału Δ_1 jest zawarty w jakimś przedziale podziału Δ.

Oczywiście

(1.2) *Jeżeli* Δ_2 *jest podziałem następczym podziału* Δ_1, *a* Δ_3 *podziału* Δ_2, *to* Δ_3 *jest podziałem następczym podziału* Δ_1.

Z (1.1) wynika, że

(1.3) *Dla każdego podziału* Δ *istnieje siatka* Δ_1, *która jest jego podziałem następczym.*

(1.4) *Dla każdych dwóch siatek* Δ' *i* Δ'' *przedziału* I *istnieje siatka* Δ, *która jest podziałem następczym zarówno siatki* Δ' *jak siatki* Δ''.

Niech bowiem siatka Δ' powstaje z podziałów odcinków $\langle a_i, b_i\rangle$ dla $i=1,\dots,n$ za pomocą punktów $a_i=\xi_i^{(0)}<\xi_i^{(1)}<\dots<\xi_i^{(r_i)}=b_i$, a Δ'' za pomocą punktów $a_i=\eta_i^{(0)}<\eta_i^{(1)}<\dots<\eta_i^{(s_i)}=b_i$. Wówczas siatkę Δ następczą siatek Δ' i Δ'' otrzymamy, tworząc siatkę powstającą z podziałów odcinków $\langle a_i, b_i\rangle$ za pomocą punktów $\xi_i^{(0)}, \xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(r_i)}, \eta_i^{(0)}, \eta_i^{(1)}, \dots, \eta_i^{(s_i)}$.

(1.5) *Dla każdych dwóch podziałów* Δ' *i* Δ'' *przedziału* I *istnieje siatka* Δ, *która jest podziałem następczym zarówno podziału* Δ' *jak podziału* Δ''.

Na mocy tw. (1.3) istnieją bowiem siatki $\overline{\Delta'}$ i $\overline{\Delta''}$ następcze podziałów Δ' i Δ''. Na mocy zaś tw. (1.4) istnieje siatka Δ następcza siatek Δ' i Δ''. Oczywiście siatka Δ jest na mocy (1.2) podziałem następczym podziałów Δ' i Δ''.

Największą średnicę przedziałów $I_1,\dots,I_m$ podziału Δ oznaczamy przez $|\Delta|$:

$$|\Delta| = \max_{i=1,\dots,m} d(I_i).$$

Ciąg podziałów $\{\Delta_\nu\}_{\nu=1,2,\dots}$ nazywamy *normalnym*, jeżeli $|\Delta_\nu|\to 0$ dla $\nu\to\infty$.

Np. dzieląc przedziały $\langle a_i, b_i\rangle$ na $\nu=1,2,\dots$ równych części i tworząc do tych podziałów siatki Δ_ν, otrzymamy ciąg normalny podziałów. Mamy bowiem $|\Delta_\nu| = \frac{1}{\nu}\sqrt{(b_1-a_1)^2+\dots+(b_n-a_n)^2}\to 0$ dla $\nu\to\infty$.

2. Miara przedziału. *Miarą przedziału* zamkniętego lub otwartego $I=[a_1,\dots,a_n;\ b_1,\dots,b_n]$ nazywamy iloczyn

(3) $$|I| = (b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_n-a_n) = \prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

W szczególności więc miarą przedziału $[a, b]$ linii prostej jest jego *długość* $|b-a|$; miarą przedziału $[a_1, a_2; b_1, b_2]$ płaszczyzny $\mathcal{E}^2$ jest jego pole pole $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$; miarą przedziału $[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3]$ przestrzeni $\mathcal{E}^3$ jest jego *objętość* $(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$ itd.

(2.1) *Jeżeli przedział zamknięty I jest sumą skończonej liczby przedziałów $I_1, \ldots, I_m$ nie zachodzących na siebie, to*

$$|I| = |I_1| + \ldots + |I_m|. \tag{4}$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że przedziały te tworzą siatkę Δ otrzymaną z podziałów punktami $a_i = x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \ldots < x_i^{(k_i)} = b_i$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas $|b_i - a_i| = |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| + \ldots + |x_i^{(k_i)} - x_i^{(k_i-1)}|$, a zatem na mocy (3)

$$|I| = (|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| + \ldots + |x_1^{(k_1)} - x_1^{(k_1-1)}|) \cdot \ldots \cdot (|x_n^{(1)} - x_n^{(0)}| + \ldots + |x_n^{(k_n)} - x_n^{(k_n-1)}|).$$

Składniki sumy, jakie otrzymamy po wykonaniu mnożenia, są to miary przedziałów $I_1, \ldots, I_m$ tworzących siatkę Δ.

Załóżmy teraz ogólnie, że przedziały te tworzą dowolny podział Δ przedziału I. Utwórzmy siatkę Δ' będącą podziałem następczym podziału Δ (p. str. 180). Każdy przedział I_j dla $j = 1, \ldots, m$ jest sumą pewnej liczby przedziałów siatki Δ' (które, jak łatwo widzieć, tworzą siatkę przedziału I_j). Zatem miara przedziału I_j jest sumą miar tych przedziałów. Wynika stąd, że suma miar przedziałów $I_1, \ldots, I_m$ równa jest sumie miar przedziałów siatki Δ', a więc mierze przedziału I, c. b. d. d.

(2.2) *Jeżeli przedziały $I_1, \ldots, I_m$ nie zachodzą na siebie i zawarte są w sumie przedziałów $J_1, \ldots, J_l$, to*

$$|I_1| + \ldots + |I_m| \leqslant |J_1| + \ldots + |J_l|. \tag{5}$$

Dowód. Niech I będzie dowolnym przedziałem zamkniętym, zawierającym wszystkie przedziały

$$I_1, \ldots, I_m, \qquad J_1, \ldots, J_l. \tag{6}$$

Na mocy tw. (1.1) istnieje siatka Δ przedziału I o tej własności, że każdy z przedziałów (6) jest sumą pewnej liczby przedziałów siatki Δ. A zatem miara każdego z przedziałów (6) jest sumą miar tych przedziałów siatki Δ, które w nim leżą. Stąd wynika już łatwo (5).

3. Określenie całki wielokrotnej. Niech $f(x_1,\ldots,x_n)$ będzie funkcją ograniczoną, określoną w przedziale zamkniętym

$$I=\langle a_1,\ldots,a_n;\ b_1,\ldots,b_n\rangle.$$

Utwórzmy dowolny podział Δ przedziału I, złożony z przedziałów $I_1,\ldots,I_m$. Dla każdego $j=1,\ldots,m$ weźmy pod uwagę w przedziale I_j dowolny punkt p_j o współrzędnych $\xi_1^{(j)},\xi_2^{(j)},\ldots,\xi_n^{(j)}$ i niech

$$R=\sum_{j=1}^{m} f(\xi_1^{(j)},\xi_2^{(j)},\ldots,\xi_n^{(j)})\cdot|I_j|=\sum_{j=1}^{m} f(p_j)\cdot|I_j|. \tag{7}$$

Jeżeli dla wszystkich ciągów normalnych podziałów $\{\Delta_\nu\}$ przedziału I sumy R dążą do tej samej granicy (niezależnie od wyboru punktów p_j), wówczas granicę tą nazywamy *n-krotną całką Riemanna funkcji $f(x_1,\ldots,x_n)$ w I* i oznaczamy ją przez

$$\int\limits_I\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \quad \text{lub przez} \quad \int\limits_I f(p)\,dp.$$

Funkcję f nazywamy wówczas *całkowalną* $\mathfrak{R}$ (czyli *całkowalną według Riemanna*) w przedziale I.

Uwaga. Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów sumy (7) są zbieżne, to są one zbieżne do tej samej granicy (p. str. 163).

(3.1) *Niech $f(p)$ będzie funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$ w przedziale I. Wówczas:*

(i) *Jeżeli k i K są kresami dolnym i górnym funkcji $f(p)$ w I, to*

$$k|I|\leqslant\int\limits_I f(p)\,dp\leqslant K|I|.$$

(ii) *Jeżeli L jest kresem górnym funkcji $|f(p)|$ w I, to*

$$\left|\int\limits_I f(p)\,dp\right|\leqslant L|I|.$$

(iii) *Dla każdej liczby c funkcja $cf(p)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w I i*

$$\int\limits_I cf(p)\,dp=c\int\limits_I f(p)\,dp.$$

(iv) *Jeżeli $\varphi(p)$ jest również funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$ w przedziale I, to suma $f(p)+\varphi(p)$ jest funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$ w I i*

$$\int\limits_I [f(p)+\varphi(p)]\,dp=\int\limits_I f(p)\,dp+\int\limits_I \varphi(p)\,dp.$$

Dowody przebiegają podobnie jak dowód tw. (3.1), str. 164.

4. Sumy dolne i górne. Oznaczmy przez k_j i K_j kresy dolny i górny funkcji f w przedziale I_j.

Sumą dolną s i *górną* S nazywamy wyrażenia (p. str. 164):

$$s=\sum_{j=1}^{m} k_j|I_j|, \qquad S=\sum_{j=1}^{m} K_j|I_j|.$$

Oznaczając przez k i K kresy dolny i górny funkcji f w przedziale I, mamy $k_j \geqslant k$ i $K_j \leqslant K$, więc

$$k|I| \leqslant s \leqslant S \leqslant K|I|.$$

Podobnie jak na str. 165, można udowodnić, że S jest kresem górnym, s zaś kresem dolnym sum R odpowiadających podziałowi Δ przedziału I i dowolnie obranym punktom $p_j \in I_j$. Oznaczając oscylację funkcji f w przedziale I_j przez ω_j, t. zn. przyjmując $\omega_j = K_j - k_j$, mamy (p. str. 165):

$$S-s=\sum_{j=1}^{m} \omega_j|I_j|.$$

5. Całki dolne i górne. Kres górny sum dolnych s i kres dolny sum górnych S nazywamy odpowiednio *całką dolną* i *całką górną* funkcji f w przedziale I. Całkę dolną oznaczamy przez

$$\underline{\int_I \ldots \int} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n \quad \text{lub} \quad \underline{\int_I} f(p)\,dp,$$

całkę zaś górną przez

$$\overline{\int_I \ldots \int} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n \quad \text{lub} \quad \overline{\int_I} f(p)\,dp.$$

Podobnie jak dla całek pojedynczych (str. 166), dla całek wielokrotnych zachodzi następujący lemat:

(5.1) *Dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje takie* $\eta > 0$, *że jeżeli podział* Δ *spełnia nierówność* $|\Delta| \leqslant \eta$, *to*

$$\underline{\int_I} f(p)\,dp - \varepsilon \leqslant s \quad \textit{oraz} \quad S \leqslant \overline{\int_I} f(p)\,dp + \varepsilon. \tag{8}$$

Dowód. Dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje podział $\bar{\Delta}$, dla którego suma górna $\bar{S}$ spełnia nierówność

$$\bar{S}\leqslant\bar{\int_I} f(p)\,dp+\varepsilon/2. \tag{9}$$

Oznaczmy przez $\bar{\eta}$ najmniejszą szerokość (str. 76) przedziałów podziału $\bar{\Delta}$ i niech

$$0<\eta<\bar{\eta}/2. \tag{10}$$

Utwórzmy dowolny podział Δ przedziału I tak, by

$$|\Delta|\leqslant\eta. \tag{11}$$

Weźmy pod uwagę dowolny przedział $\bar{I}_j$ podziału $\bar{\Delta}$ i oznaczmy przez $I_1,\dots,I_r$ przedziały podziału Δ zawarte w $\bar{I}_j$. Przedziały te pokrywają zatem wszystkie punkty przedziału $\bar{I}_j$ odległe od jego brzegu co najmniej o η. Jeżeli więc $\bar{I}_j=\langle a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n\rangle$, to $I_1+\dots+I_r$ zawiera przedział $\langle a_1+\eta,\dots,a_n+\eta;b_1-\eta,\dots,b_n-\eta\rangle$. Zatem

$$\sum_{i=1}^{r}|I_i|\geqslant(b_1-a_1-2\eta)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n-2\eta),$$

skąd

$$\begin{aligned}|\bar{I}_j|-\sum_{i=1}^{r}|I_i|&\leqslant[(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)]-[(b_1-a_1-2\eta)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n-2\eta)]\leqslant\\&\leqslant(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)\left[1-\left(1-\frac{2\eta}{b_1-a_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2\eta}{b_n-a_n}\right)\right].\end{aligned} \tag{12}$$

Z określenia liczby η wynika, że

$$\bar{\eta}\leqslant|b_1-a_1|,\ \dots,\ \bar{\eta}\leqslant|b_n-a_n|.$$

Na mocy (10) mamy więc

$$2\eta/(b_1-a_1)\leqslant1 \qquad \text{itd.}$$

Opierając się na nierówności $(1-\varepsilon_1)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_n)\geqslant1-\varepsilon_1\cdot\ldots\cdot\varepsilon_n$ dla $0\leqslant\varepsilon_1\leqslant1,\dots,0\leqslant\varepsilon_n\leqslant1$, otrzymujemy tedy z (12)

$$|\bar{I}_j|-\sum_{i=1}^{r}|I_i|\leqslant|\bar{I}_j|\left[\frac{2\eta}{b_1-a_1}+\dots+\frac{2\eta}{b_n-a_n}\right]\leqslant\frac{2n|I|}{\bar{\eta}}\eta. \tag{13}$$

Oznaczając przez k i K kresy dolny i górny funkcji f w I, a przez $\bar{K}_j$ i K_i jej kresy górne w $\bar{I}_j$ i I_i, mamy

$$|\bar{I}_j|(K-\bar{K}_j)=\sum_{i=1}^{r}|I_i|(K-\bar{K}_j)+[|\bar{I}_j|-\sum_{i=1}^{r}|I_i|](K-\bar{K}_j),$$

a ponieważ $\bar{K}\geqslant K_i$ dla $i=1,\ldots,r$, więc na mocy (13)

$$|\bar{I}_j|(K-\bar{K}_j)\leqslant\sum_{i=1}^{r}|I_i|(K-\bar{K})+\frac{2n|I|}{\bar{\eta}}\eta(K-k).$$

Sumując ostatnie dwa wzory stronami dla wszystkich $\bar{m}$ przedziałów $\bar{I}_j$ podziału $\bar{\Delta}$ i stosując podobne rozumowanie jak na str. 167, otrzymujemy

$$K|I|-\bar{S}\leqslant K|I|-S+\frac{2n\bar{m}|I|}{\bar{\eta}}\eta(K-k),$$

skąd

$$S\leqslant\bar{S}+\frac{2n\bar{m}|I|}{\bar{\eta}}\eta(K-k). \tag{14}$$

Dobierając więc liczbę η tak, aby prócz nierówności (10) spełniona była jeszcze nierówność

$$\frac{2n\bar{m}|I|}{\bar{\eta}}\eta(K-k)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}, \tag{15}$$

otrzymamy z (14) i (9)

$$S\leqslant\overline{\int_I} f(p)\,dp+\varepsilon$$

dla każdego podziału Δ spełniającego warunek (11) i dla każdej liczby $\eta>0$, spełniającej warunki (10) i (15).

Podobnie wyprowadza się pierwszą z nierówności (8).

(5.2) *Dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\Delta_\nu\}$ przedziału I ciąg sum $\{s_\nu\}$ dąży dla $\nu\to\infty$ do całki dolnej, a ciąg $\{S_\nu\}$ do górnej.*

(5.3) *Całka dolna jest niewiększa od całki górnej*:

$$\underline{\int_I} f(p)\,dp\leqslant\overline{\int_I} f(p)\,dp.$$

Dowody twierdzeń (5.2) i (5.3) za pomocą lematu (5.1) są podobne do dowodów twierdzeń (5.2) i (5.3), str. 167 i 168, za pomocą lematu (5.1).

(5.4) *Jeżeli $f(p)$ jest funkcją ograniczoną w przedziale I, a Δ jest dowolnym podziałem tego przedziału na przedziały $I_1,\ldots,I_m$, to*

$$(16)\qquad \overline{\int_I} f(p)\,dp=\sum_{i=1}^{m}\overline{\int_{I_i}} f(p)\,dp,\qquad \underline{\int_I} f(p)\,dp=\sum_{i=1}^{m}\underline{\int_{I_i}} f(p)\,dp.$$

Dowód. Niech $\{\Delta_{ij}\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów następczych podziału Δ. Oznaczając przez S_j sumę górną dla podziału Δ_j, a przez $S_j^{(i)}$ składniki (sumy górnej) odpowiadające tym przedziałom podziału Δ_j, które zawarte są w przedziale I_i (gdzie $i=1,\ldots,m$), dostajemy

$$(17)\qquad S_j=\sum_{i=1}^{m}S_j^{(i)}\qquad \text{dla}\quad j=1,2,\ldots$$

Ponieważ na mocy tw. (5.2) S_j dla $j\to\infty$ dąży do lewej strony pierwszej z równości (16), a $S_j^{(i)}$ — do całki górnej $\overline{\int_{I_i}} f(p)\,dp$, więc z (17) otrzymujemy pierwszą z równości (16) dla $j\to\infty$.

Podobnie dowodzi się drugiej z równości (16) (dla całek dolnych).

6. Warunki całkowalności $\mathfrak{R}$. Następujących twierdzeń dowodzi się podobnie jak twierdzeń (6.1)-(6.4) dla całek pojedynczych (str. 168 i 169):

(6.1) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcja ograniczona $f(x_1,\ldots,x_n)$ w przedziale I była w tym przedziale całkowalna według Riemanna, jest to, żeby jej całki dolna i górna były równe.*

(6.2) *Jeżeli funkcja $f(x_1,\ldots,x_n)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w przedziale I, wówczas*

$$(18)\qquad \underline{\int_I} f(p)\,dp=\int_I f(p)\,dp=\overline{\int_I} f(p)\,dp.$$

(6.3) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcja $f(x_1,\ldots,x_n)$ była całkowalna $\mathfrak{R}$ w przedziale I, jest, żeby do każdej liczby $\varepsilon>0$ istniał podział Δ przedziału I na przedziały $I_1,\ldots,I_m$, czyniący zadość nierówności*

$$(19)\qquad S-s=\sum_{i=1}^{m}\omega_i|I_i|\leqslant\varepsilon$$

(gdzie ω_i oznacza, jak poprzednio, oscylację funkcji f w przedziale I_i).

(6.4) *Każda funkcja ciągła w przedziale I jest w tym przedziale całkowalna $\mathfrak{R}$.*

7. Zbiory miary Lebesgue'a 0. Mówimy, że zbiór E, leżący w przestrzeni $\mathcal{E}^n$, jest *miary Lebesgue'a zero* lub *miary $\mathfrak{L}$ zero*, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje skończony lub przeliczalny zbiór przedziałów $\{I_i\}$, dla którego

$$\text{(i)} \quad E \subset \sum_i I_i \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_i |I_i| \leqslant \varepsilon.$$

Twierdzenia (7.1)-(7.6), str. 171 i 172, dla zbiorów liniowych miary $\mathfrak{L}$ zero zachodzą również dla zbiorów miary $\mathfrak{L}$ zero w przestrzeni $\mathcal{E}^n$ i dowodzą się podobnie.

(7.1) *Brzeg każdego przedziału $I \subset \mathcal{E}^n$ jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.*

Dowód. Niech $I = \langle a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n \rangle$. Oznaczmy dla każdego $i = 1, \ldots, n$ przez A_i zbiór punktów $(x_1, \ldots, x_n)$ przedziału I, dla których $x_i = a_i$, a przez B_i zbiór punktów przedziału I, dla których $x_i = b_i$. Brzeg przedziału I jest oczywiście sumą zbiorów A_i i B_i. Wystarczy zatem dowieść, że każdy ze zbiorów A_i i B_i jest miary $\mathfrak{L}$ zero. Ze względu na symetrię założeń można ograniczyć dowód np. do zbiorów A_i.

Niech $\varepsilon > 0$. Łatwo stwierdzić, że zbiór A_i zawarty jest w przedziale

$$I_i' = \langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - \varepsilon, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i + \varepsilon, \ldots, b_n \rangle.$$

Ponieważ miara przedziału I_i jest równa $|I| 2\varepsilon/(b_i - a_i)$, więc z uwagi na to, że $\varepsilon > 0$ jest dowolne, A_i jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero, c. b. d. d.

Rzutem punktu $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$ na $\mathcal{E}^n$ nazywamy punkt $(x_1 \ldots, x_n)$ przestrzeni $\mathcal{E}^n$, a rzutem zbioru $A \subset \mathcal{E}^{n+1}$ na $\mathcal{E}^n$ — zbiór rzutów punktów należących do A, t.j. zbiór (p. Rozdział I, str. 13)

$$r(A) = \underset{x_1, \ldots, x_n}{E} \ \sum_{x_{n+1}} [(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in A].$$

(7.2) *Jeżeli rzut zbioru $A \subset \mathcal{E}^{n+1}$ na $\mathcal{E}^n$ jest miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^n$, to A jest miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^{n+1}$.*

Dowód. Ponieważ zbiór $r(A)$ jest z założenia miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^n$, więc do każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony lub przeliczalny zbiór przedziałów $\{I_i\}$ przestrzeni $\mathcal{E}^n$, spełniających warunki:

$$\text{(i)} \quad r(A) \subset \sum_i I_i, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_i |I_i| \leqslant \varepsilon.$$

Dla dowolnego $k=1,2,\ldots$ weźmy pod uwagę w przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$ przedział $I_k=\langle -k,\ldots,-k;\ +k,\ldots,+k\rangle$ oraz przedziały J_i złożone z punktów $(x_1,\ldots,x_{n+1})$, dla których $(x_1,\ldots,x_n)\in I_i$ i $-k\leqslant x_{n+1}\leqslant k$:

$$J_i=\underset{x_1,\ldots,x_{n+1}}{E}[(x_1,\ldots,x_n)\in I_i]\,[-k\leqslant x_{n+1}\leqslant k].$$

Oczywiście $|J_i|=2k|I_i|$. Zatem na mocy (ii)

(20) $$\sum_i|J_i|\leqslant 2k\sum_i|I_i|\leqslant 2k\varepsilon.$$

Ponieważ, jak łatwo widzieć, $A\cdot I_k\subset\sum_i J_i$, więc dla każdego $k=1,2,\ldots$ zbiór $A\cdot I_k$ jest na mocy (20) miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^{n+1}$ (gdyż wzór (20) zachodzi dla dowolnego $\varepsilon>0$). Z uwagi na to, że $A=A\cdot I_1+A\cdot I_2+\ldots$, zbiór A jest również miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^{n+1}$ jako suma przeliczalnej rodziny zbiorów miary $\mathfrak{L}$ zero.

Wykresem lub *wykresem geometrycznym* funkcji o wartościach rzeczywistych $f(x_1,\ldots,x_n)$ określonej w zbiorze $A\subset\mathcal{E}^n$ nazywamy zbiór takich punktów $(x_1,\ldots,x_{n+1})$ przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$, że $(x_1,\ldots,x_n)\in A$ i $x_{n+1}=f(x_1,\ldots,x_n)$, tj. zbiór

$$W=\underset{x_1,\ldots,x_{n+1}}{E}[(x_1,\ldots,x_n)\in A]\cdot[x_{n+1}=f(x_1,\ldots,x_n)].$$

Udowodnimy obecnie twierdzenie, z którego w szczególności wynika, że wykres funkcji ciągłej nie może zawierać przedziału przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$.

(7.3) *Jeżeli funkcja $f(x_1,\ldots,x_n)$ jest ciągła w zbiorze zamkniętym A przestrzeni $\mathcal{E}^n$, to jej wykres jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero w przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$.*

Dowód. Niech I będzie dowolnym przedziałem zamkniętym przestrzeni $\mathcal{E}^n$. Iloczyn $A\cdot I$ jest więc zbiorem ograniczonym zamkniętym, a przeto funkcja $f(x_1,\ldots,x_n)$ jest jednostajnie ciągła w $A\cdot I$. Dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje więc takie $\eta>0$, że

(21) $$\varrho(p',p'')\leqslant\eta \quad\text{pociąga}\quad |f(p')-f(p'')|\leqslant\varepsilon \quad\text{dla}\quad p',p''\in A\cdot I.$$

Utwórzmy dowolny podział Δ przedziału I i oznaczmy przez $I_1,\ldots,I_r$ te przedziały podziału Δ, które mają punkty wspólne ze zbiorem A. Niech k_i i K_i będą kresami dolnym i górnym funkcji f

w I_i i niech J_i będzie przedziałem przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$ złożonym z punktów $(x_1, \dots, x_{n+1})$, dla których $(x_1, \dots, x_n) \in I_i$ i $k_i \leqslant x_{n+1} \leqslant K_i + \varepsilon$:

$$J_i = \underset{x_1, \dots, x_{n+1}}{E} [(x_1, \dots, x_n) \in I_i] \cdot [k_i \leqslant x_{n+1} \leqslant K_i + \varepsilon].$$

Oczywiście $|J_i| = (K_i - k_i + \varepsilon)|I_i|$ dla $i = 1, 2, \dots, r$. Jeżeli przyjmiemy $|\varDelta| \leqslant \eta$, to na mocy (21) będzie $K_i - k_i \leqslant \varepsilon$, zatem $|J_i| \leqslant 2\varepsilon |I_i|$, skąd

(22) $$|J_1| + \dots + |J_r| \leqslant 2\varepsilon(|I_1| + \dots + |I_r|) \leqslant 2\varepsilon |I|.$$

Łatwo widzieć, że wykres geometryczny funkcji f dla zbioru $A \cdot I$ jest zawarty w sumie $J_1 + \dots + J_r$. Na mocy więc (22) ta część wykresu funkcji f jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero (gdyż $\varepsilon > 0$ jest dowolne).

Jeżeli teraz przestrzeń $\mathcal{E}^n$ podzielimy na przeliczalną mnogość przedziałów zamkniętych I (por. pojęcie kraty, str. 77), to części wykresu funkcji f, odpowiadające tym przedziałom, będą zbiorami miary $\mathfrak{L}$ zero. Na mocy tw. (7.4), str. 171, cały wykres funkcji f, jako suma przeliczalnej rodziny zbiorów miary $\mathfrak{L}$ zero, jest więc zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero, c. b. d. d.

(7.4) *Jeżeli współrzędne $x_1, \dots, x_n$ punktów zbioru ograniczonego A leżącego w przestrzeni $\mathcal{E}^n$ spełniają równanie*

(23) $$a + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0,$$

w którym przynajmniej jeden ze współczynników $a_1, \dots, a_n$ jest różny od 0, to A jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^n$.

Dowód. Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$, gdyż w tym przypadku zbiór A redukuje się do jednego punktu $x_1 = -a/a_1$. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$.

Jeżeli $a_n = 0$, to punkty rzutu zbioru A na $\mathcal{E}^{n-1}$ spełniają równanie $a + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} = 0$, zatem rzut jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^{n-1}$, wobec czego na mocy tw. (7.2) zbiór A jest miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^n$.

Jeżeli zaś $a_n \neq 0$, to zbiór A jest zawarty w wykresie geometrycznym funkcji $x_n = (a + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1})/a_n$, ciągłej w $\mathcal{E}^{n-1}$, wobec czego na mocy tw. (7.3) A jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^n$.

Na mocy zasady indukcji twierdzenie zachodzi więc dla każdego $n = 1, 2, \dots$, c. b. d. d.

Z tw. (7.4) wynika od razu dla zbiorów płaskich (p. str. 75), że

(7.5) *Każdy zbiór płaski w $\mathcal{E}^n$ jest miary $\mathfrak{L}$ zero w $\mathcal{E}^n$.*

W szczególności zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero jest linia prosta w $\mathcal{E}^n$ dla $n \geqslant 2$, płaszczyzna w $\mathcal{E}^n$ dla $n \geqslant 3$ itd. Na mocy tw. (7.5), zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero jest więc także odcinek w $\mathcal{E}^n$ dla $n \geqslant 2$, wielokąt płaski w $\mathcal{E}^n$ dla $n \geqslant 3$ itd. Wynika stąd, że linia łamana w $\mathcal{E}^n$ dla $n \geqslant 2$, brzeg wielościanu w $\mathcal{E}^n$ dla $n \geqslant 3$ itd. są również zbiorami miary $\mathfrak{L}$ zero w tych przestrzeniach.

PRZYKŁADY. 1. Wykres funkcji $y=f(x)$, ciągłej w przedziale liniowym $\langle a,b\rangle$, jest zbiorem płaskim miary $\mathfrak{L}$ zero, gdy tymczasem — jak widzieliśmy (p. tw. (2.1), str. 152) — wykres dwóch funkcyj ciągłych w przedziale liniowym (krzywa ciągła) może zawierać przedział płaski (kwadrat).

2. Powierzchnia, która jest wykresem geometrycznym funkcji $z=f(x,y)$, ciągłej w przedziale płaskim $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$ (t.j. w przedziale $\langle a_1, a_2; b_1, b_2\rangle$), jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero w przestrzeni trójwymiarowej.

3. Okrąg koła $x^2+y^2=1$ jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero w płaszczyźnie, gdyż jest sumą wykresów funkcyj $y=-\sqrt{1-x^2}$ i $y=\sqrt{1-x^2}$, ciągłych w przedziale $\langle -1, 1\rangle$, a więc sumą dwu zbiorów miary $\mathfrak{L}$ zero w płaszczyźnie.

4. Powierzchnia kuli $x^2+y^2+z^2=1$ jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero w przestrzeni $\mathcal{E}^3$ jako suma wykresów funkcyj $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ i $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, ciągłych w kole $x^2+y^2 \leqslant 1$.

8. Warunki Lebesgue'a całkowalności $\mathfrak{R}$. Następujące twierdzenia dowodzą się zupełnie podobnie do twierdzeń dla całek pojedynczych:

(8.1) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcja ograniczona $f(p)$, określona w przedziale I przestrzeni $\mathcal{E}^n$, była w tym przedziale całkowalna $\mathfrak{R}$, jest, żeby zbiór jej punktów nieciągłości był zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.*

(8.2) *Wartość bezwzględna funkcji całkowalnej $\mathfrak{R}$ jest funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$.*

(8.3) *Iloczyn dwóch funkcyj całkowalnych $\mathfrak{R}$ jest funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$.*

(8.4) *Funkcja całkowalna $\mathfrak{R}$ w przedziale I jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w każdym przedziale $J \subset I$.*

(8.5) *Funkcja ograniczona $f(p)$, określona w przedziale I przestrzeni $\mathcal{E}^n$, która przybiera w nim wartość 0 z wyjątkiem zbioru zamkniętego miary $\mathfrak{L}$ zero, jest funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$ w I i jej całka równa jest zeru:* $\int\limits_I f(p)\,dp = 0$.

Z tw. (8.5) otrzymujemy następujący wniosek:

(8.6) *Jeżeli wartości funkcji ograniczonej $\varphi(p)$ całkowalnej $\mathfrak{R}$ w przedziale I zmienić dowolnie w zbiorze zamkniętym miary $\mathfrak{L}$ zero, tak jednak, by otrzymana funkcja $\psi(p)$ też była ograniczona, to $\psi(p)$ będzie również funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$ w I i* $\int\limits_I \varphi(p)\,dp = \int\limits_I \psi(p)\,dp$.

Wynika to łatwo z twierdzenia (8.5), jeżeli zastosować je do funkcji $f(p) = \varphi(p) - \psi(p)$.

9. Własności całki wielokrotnej. Poprzestaniemy tu na następujących trzech twierdzeniach:

(9.1) *Jeżeli ciąg funkcyj $\{f_n(p)\}$ całkowalnych $\mathfrak{R}$ w przedziale I dąży w nim jednostajnie do funkcji $f(p)$, wówczas $f(p)$ jest funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$ w I i*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_I f_n(p)\,dp = \int\limits_I f(p)\,dp. \tag{23}$$

Dowód przebiega podobnie do dowodu tw. (9.5), str. 176.

(9.2) *Jeżeli przedział I jest podzielony na przedziały $I_1, \ldots, I_m$ i funkcja $f(p)$ jest w nich całkowalna $\mathfrak{R}$, to jest ona całkowalna $\mathfrak{R}$ w całym przedziale I i*

$$\int\limits_I f(p)\,dp = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{I_i} f(p)\,dp. \tag{24}$$

Dowód. Ponieważ dla każdego $i = 1, \ldots, m$ punkty nieciągłości funkcji $f(p)$ w przedziale I_i tworzą na mocy tw. (8.1) zbiór H_i miary $\mathfrak{L}$ zero, więc zbiór $H = H_1 + \ldots + H_m$ punktów nieciągłości tej funkcji w całym przedziale I jest również miary $\mathfrak{L}$ zero.

Ponieważ ponadto funkcja $f(p)$ jest ograniczona w I, jako ograniczona w każdym z przedziałów $I_1, \ldots, I_m$, więc na mocy tw. (8.1) jest ona całkowalna $\mathfrak{R}$ w I. Stąd i z tw. (5.3) wynika łatwo wzór (24). $\underline{\int} \leqslant \overline{\int}$

(9.3) *Jeżeli funkcja $f(p)$ jest ograniczona w przedziale I, a poza tym przedziałem wszędzie $f(p) = 0$, wówczas dla każdego przedziału $J \subset I$:*

$$\overline{\int\limits_J} f(p)\,dp = \overline{\int\limits_I} f(p)\,dp, \qquad \underline{\int\limits_J} f(p)\,dp = \underline{\int\limits_I} f(p)\,dp. \tag{25}$$

Dowód. Utwórzmy dowolny podział Δ przedziału J, tak jednak, by I był jednym z przedziałów podziału Δ. We wnętrzu każdego przedziału I_i podziału Δ, różnego od I, funkcja $f(p)$ jest zerem. Ponieważ brzeg przedziału I_i jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero na mocy tw. (7.1), str. 187, więc na mocy tw. (8.1) funkcja $f(p)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w I_i i całka jej w tym przedziale jest równa zeru. Wzory (25) wynikają stąd na mocy tw. (5.3), str. 185.

Uwaga. Jeżeli do założeń twierdzenia (9.3) dodamy założenie, że *funkcja $f(p)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w I*, wówczas — jak to wynika ze wzorów (25) — *funkcja $f(p)$ jest całkowalna w każdym przedziale $J\supset I$ i*

(26) $$\int_J f(p)\,dp=\int_I f(p)\,dp.$$

10. Całka wielokrotna jako całka iterowana. Niech dany będzie w przestrzeni $\mathcal{E}^n$ przedział

(27) $$I=\langle a_1,\dots,a_n;\ b_1,\dots,b_n\rangle,$$

a w przestrzeni $\mathcal{E}^k\subset\mathcal{E}^n$, gdzie k jest jedną z liczb $1,\dots,n$, przedział

(28) $$J'=\langle a_1,\dots,a_k;\ b_1,\dots,b_k\rangle;$$

wreszcie, w przestrzeni $\mathcal{E}^{n-k}\subset\mathcal{E}^n$ zmiennych $x_{k+1},\dots,x_n$ — przedział

(29) $$J''=\langle a_{k+1},\dots,a_n;\ b_{k+1},\dots,b_n\rangle.$$

(10.1) *Jeżeli funkcja $f(x_1,\dots,x_n)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w przedziale I, wówczas funkcje:*

(i) $$\varphi(x_1,\dots,x_k)=\overline{\int\!\dots\!\int_{J''}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_{k+1}\dots dx_n,$$

(ii) $$\psi(x_{k+1},\dots,x_n)=\overline{\int\!\dots\!\int_{J'}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_k$$

są całkowalne $\mathfrak{R}$: pierwsza w J', a druga w J'', i ponadto

(iii) $$\int_I f(p)\,dp=\int\!\dots\!\int_{J'}\Big[\overline{\int\!\dots\!\int_{J''}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_{k+1}\dots dx_n\Big]dx_1\dots dx_k=$$
$$=\int\!\dots\!\int_{J''}\Big[\overline{\int\!\dots\!\int_{J'}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_k\Big]dx_{k+1}\dots dx_n,$$

przy czym całki górne we wzorach (i)-(iii) *można zastąpić dolnymi.*

Dowód. Niech Δ' będzie dowolnym podziałem przedziału J' na przedziały $J'_1, \dots, J'_\mu$, a Δ'' podziałem przedziału J'' na przedziały $J''_1, \dots, J''_\nu$. Oznaczmy przez I_{ij} przedział przestrzeni $\mathcal{E}^n$, złożony z punktów $p = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, dla których $(x_1, \dots, x_k) \in J'_i$ oraz $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in J''_j$. Wszystkie tak określone przedziały I_{ij} dla $i = 1, 2, \dots, \mu$ i $j = 1, 2, \dots, \nu$ tworzą pewien podział Δ przedziału I i miary ich spełniają równości

$$(30) \qquad |I_{ij}| = |J'_i| \cdot |J''_j|,$$

a średnice ich czynią zadość nierównościom

$$d(I_{ij}) = \sqrt{[d(J'_i)]^2 + d(J''_i)^2} \leqslant \sqrt{|\Delta'|^2 + |\Delta''|^2}$$

czyli

$$(31) \qquad |\Delta| \leqslant \sqrt{|\Delta'|^2 + |\Delta''|^2}.$$

Weźmy pod uwagę dla każdego $i = 1, 2, \dots, \mu$ dowolny punkt $(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_k^{(i)}) \in J'_i$ i utwórzmy sumę

$$(32) \qquad R = \sum_{i=1}^{\mu} \varphi(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_k^{(i)}) \cdot |J'_i|.$$

Na mocy tw. (9.2)

$$(33) \qquad \begin{aligned} \varphi(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_k^{(i)}) &= \overline{\int \dots \int_{J''}} f(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_k^{(i)}, x_{k+1}, \dots, x_n)\, dx_{k+1} \dots dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^{\nu} \overline{\int \dots \int_{J''_j}} f(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_k^{(i)}, x_{k+1}, \dots, x_n)\, dx_{k+1} \dots dx_n. \end{aligned}$$

Niech m_{ij} i M_{ij} oznaczają kresy dolny i górny funkcji $f(x_1, \dots, x_n)$ w przedziale I_{ij}. Wówczas na mocy określenia przedziału I_{ij}

$$m_{ij}|J''_j| \leqslant \overline{\int \dots \int_{J''_j}} f(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_k^{(i)}, x_{k+1}, \dots, x_n)\, dx_{k+1} \dots dx_n \leqslant M_{ij}|J''_j|,$$

skąd na mocy (33)

$$\sum_{j=1}^{\nu} m_{ij}|J''_j| \leqslant \varphi(\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_k^{(i)}) \leqslant \sum_{j=1}^{\nu} M_{ij}|J''_j|,$$

a stąd wobec (32)

$$\sum_{i=1}^{\mu} [\sum_{j=1}^{\nu} m_{ij}|J''_j|]|J'_i| \leqslant R \leqslant \sum_{i=1}^{\mu} [\sum_{j=1}^{\nu} M_{ij}|J''_j|]|J'_i|.$$

Na mocy więc (30)

$$\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\nu} m_{ij}|I_{ij}| \leqslant R \leqslant \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\nu} M_{ij}|I_{ij}|.$$

Lewa strona powyższej nierówności jest sumą dolną s, a prawa — sumą górną S dla funkcji $f(x_1,\ldots,x_n)$, dla podziału Δ przedziału I. Zatem

$$s \leqslant R \leqslant S. \tag{34}$$

Niech teraz $\{\Delta_l'\}$ i $\{\Delta_l''\}$ będą ciągami normalnymi podziałów przedziałów J' i J''. Utwórzmy za ich pomocą ciąg podziałów $\{\Delta_l\}$ przedziału I tak, jak poprzednio utworzyliśmy podział Δ za pomocą podziałów Δ' i Δ''. Z (31) wynika, że ciąg $\{\Delta_l\}$ będzie ciągiem normalnym podziałów przedziału I i na mocy (34) otrzymamy

$$s_l \leqslant R_l \leqslant S_l \qquad \text{dla} \quad l=1,2,\ldots \tag{35}$$

Ponieważ sumy s_l i S_l dążą dla $l\to\infty$ do całki funkcji $f(x_1,\ldots,x_n)$ w przedziale I, więc na mocy (35)

$$R_l \to \int_I\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \qquad \text{dla} \quad l\to\infty.$$

Wynika stąd całkowalność $\mathfrak{R}$ funkcji $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ w przedziale J'', a ponadto pierwsza część wzoru (iii). Podobnie dowodzi się drugiej części wzoru (iii), jak również analogicznego twierdzenia dla całek dolnych.

(10.2) *Jeżeli funkcja $f(x_1,\ldots,x_n)$ jest ciągła w przedziale zamkniętym I, wówczas*

$$\begin{aligned}\int_I f(p)\,dp &= \int_{J'}\!\!\cdots\!\int \Big[\int_{J''}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{k+1}\ldots dx_n\Big]dx_1\ldots dx_k = \\ &= \int_{J''}\!\!\cdots\!\int \Big[\int_{J'}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_k\Big]dx_{k+1}\ldots dx_n.\end{aligned} \tag{iv}$$

Wzór (iv) wynika ze wzoru (iii) twierdzenia (10.1), w którym dzięki założeniu ciągłości możemy całki górne zastąpić całkami zwykłymi (p. tw. (8.1), str. 190).

Uwaga. Wzór (iv) zachodzi przy założeniach ogólniejszych. Wystarczy założyć, że funkcja $f(x_1,\ldots,x_n)$ jest całkowalna w I i że istnieją całki występujące w nawiasach [ ]: pierwsza dla każdego układu wartości $(x_1,\ldots,x_k)\in J'$, a druga dla każdego układu wartości $(x_{k+1},\ldots,x_n)\in J''$.

Wzór (iv) wyraża również *twierdzenie o zmianie porządku całkowania.*

(10.3) *Jeżeli funkcja* $f(x_1,...,x_n)$ *jest ciągła w przedziale*

$$I=\langle a_1,...,a_n;\ b_1,...,b_n\rangle,$$

wówczas

$$\text{(v)}\qquad \int\limits_I f(p)\,dp=\int\limits_{a_1}^{b_1}...\int\limits_{a_i}^{b_i}...\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1,...,x_n)\,dx_1...dx_n.$$

We wzorze tym granice a_i i b_i, gdzie $i=1,2,...,n$, odnoszą się oczywiście do zmiennej x_i, przy czym całki pojedyncze można napisać w dowolnym porządku.

Dowód polega na zastosowaniu wzoru (iii) nie do całki w przedziale I, lecz do całek w przedziałach J' i J'' itd., aż się dojdzie do całek pojedynczych.

PRZYKŁADY. 1. Jeżeli $f(x,y)$ jest funkcją ciągłą w prostokącie $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$, tj. w przedziale płaskim $I=\langle a,c;\ b,d\rangle$, wówczas

$$\int\limits_I\int f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b\Big[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx=\int\limits_c^d\Big[\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy.$$

2. Jeżeli $f(x,y,z)$ jest funkcją ciągłą w prostopadłościanie I $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ i $e\leqslant z\leqslant f$, to

$$\int\limits_I\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b\Big[\int\limits_c^d\int\limits_e^f f(x,y,z)\,dy\,dz\Big]dx=$$

$$=\int\limits_a^b\int\limits_c^d\Big[\int\limits_e^f f(x,y,z)\,dz\Big]dx\,dy=\int\limits_a^b\Big\{\int\limits_c^d\Big[\int\limits_e^f f(x,y,z)\,dz\Big]dy\Big\}dx.$$

§ 3. Miara Jordana. Całka $\mathfrak{R}$ na zbiorze.

1. Miara zewnętrzna $\mathfrak{J}$. Niech A będzie zbiorem ograniczonym w przestrzeni $\mathcal{E}^n$, a $I_1,...,I_k$ dowolną skończoną rodziną przedziałów tej przestrzeni, których suma zawiera (pokrywa) zbiór A.

Kres dolny sumy miar przedziałów dla wszelkich takich rodzin nazywamy *miarą zewnętrzną Jordana* lub *miarą zewnętrzną* $\mathfrak{J}$ zbioru A w przestrzeni $\mathcal{E}^n$ i oznaczamy przez $m_z(A)$. Zatem:

(1.1) *Jeżeli* $A\subset I_1+...+I_k$, *to*

$$m_z(A)\leqslant|I_1|+...+|I_k|.$$

(1.2) *Do każdej liczby* $\varepsilon>0$ *istnieje taka skończona rodzina przedziałów* $I_1,...,I_k$, *że*

(i) $A\subset I_1+...+I_k$, (ii) $m_z(A)+\varepsilon>|I_1|+...+|I_k|$.

W szczególności:

(1.3) *Dla przedziałów (otwartych i zamkniętych) miara zewnętrzna* $\mathfrak{J}$ *i miara* (w sensie określonym w Rozdziale III, § 2, str. 76) *są równe*:

$$m_z(I)=|I|.$$

Istotnie, $I\subset I$, więc $m_z(I)\leqslant|I|$. Z drugiej strony, jeżeli $I\subset I_1+...+I_k$, to $|I|\leqslant|I_1|+...+|I_k|$, a zatem $|I|\leqslant m_z(I)$.

Z określenia miary zewnętrznej $\mathfrak{J}$ wynika bezpośrednio, że:

(1.4) *Jeżeli zbiór* A *składa się z jednego punktu, to* $m_z(A)=0$.

(1.5) *Jeżeli* $A\subset B$, *to* $m_z(A)\leqslant m_z(B)$.

2. Miara wewnętrzna $\mathfrak{J}$. Niech $I'_1,...,I'_l$ będzie dowolną skończoną rodziną niezachodzących na siebie przedziałów przestrzeni $\mathcal{E}^n$, zawartych w zbiorze A.

Kres górny sumy miar przedziałów dla wszelkich takich rodzin nazywamy *miarą wewnętrzną Jordana* lub *miarą wewnętrzną* $\mathfrak{J}$ zbioru A w przestrzeni $\mathcal{E}^n$ i oznaczamy przez $m_w(A)$.

Przy tym, jeżeli A jest zbiorem brzegowym w $\mathcal{E}^n$, a przeto (p. definicję str. 62 i tw. (4.1), str. 79) nie zawierającym żadnego przedziału, wówczas przyjmujemy $m_w(A)=0$. Zatem:

(2.1) *Jeżeli* $I'_1+...+I'_l\subset A$ *i przedziały* $I'_1,...,I'_l$ *nie zachodzą na siebie, to*

$$|I'_1|+...+|I'_l|\leqslant m_w(A).$$

(2.2) *Jeżeli* $m_w(A)\neq0$, *to do każdej liczby* $\varepsilon>0$ *istnieje taka skończona rodzina niezachodzących na siebie przedziałów* $I'_1,...,I'_l$, *że*:

(i′) $I'_1+...+I'_l\subset A$, (ii′) $|I'_1|+...+|I'_l|>m_w(A)-\varepsilon$.

W szczególności:

(2.3) *Dla przedziałów (otwartych i zamkniętych) miara wewnętrzna* $\mathfrak{J}$ *i miara* (w sensie określonym w Rozdziale III, § 2, str. 76) *są równe*:

$$m_w(I)=|I|.$$

Istotnie, $I \subset I$, więc $|I| \leqslant m_w(I)$. Z drugiej strony, jeżeli $I'_1 + \ldots + I'_l \subset I$ i przedziały $I'_1, \ldots, I'_l$ nie zachodzą na siebie, to $|I'_1| + \ldots + |I'_l| \leqslant |I|$, a zatem $m_w(I) \leqslant |I|$.

Z określenia miary wewnętrznej $\mathfrak{J}$ wynika wprost, że

(2.4) *Jeżeli* $A \subset B$, *to* $m_w(A) \leqslant m_w(B)$.

3. Własności miary Jordana. Między miarami zewnętrzną $\mathfrak{J}$ a wewnętrzną $\mathfrak{J}$ dowolnego zbioru A zachodzi związek

(3.1) $$m_w(A) \leqslant m_z(A).$$

Dowód. Jeżeli $m_w(A) = 0$, nierówność (3.1) jest oczywista. W przeciwnym razie do każdego $\varepsilon > 0$ istnieją na mocy (1.2) i (2.2) przedziały $I_1, \ldots, I_k$ oraz $I'_1, \ldots, I'_l$, czyniące zadość warunkom (ii) oraz (ii'), skąd na mocy tw. (2.2), str. 181, $|I'_1| + \ldots + |I'_l| \leqslant |I_1| + \ldots + |I_k|$, więc $m_w(A) - \varepsilon \leqslant m_z(A) + \varepsilon$. Stąd wobec dowolności liczby ε wynika nierówność (3.1), c. b. d. d.

Ponieważ dla każdego zbioru A mamy oczywiście $m_z(A) \geqslant 0$ i $m_w(A) \geqslant 0$, więc wnosimy stąd na mocy (3.1), że

(3.2) *Jeżeli* $m_z(A) = 0$, *to również* $m_w(A) = 0$.

(3.3) *Dla każdej rodziny skończonej zbiorów ograniczonych* $A_1, \ldots, A_r$ *zachodzi wzór*

$$m_z(A_1 + \ldots + A_r) \leqslant m_z(A_1) + \ldots + m_z(A_r).$$

Dowód. Wystarczy oczywiście dowieść, że

(1) $$m_z(A_1 + A_2) \leqslant m_z(A_1) + m_z(A_2).$$

Do każdego $\varepsilon > 0$ istnieją na mocy tw. (1.2) przedziały $I_1, \ldots, I_{k_1}$, i $I_{k_1+1}, \ldots, I_{k_2}$ o własnościach:

(2) $$A_1 \subset I_1 + \ldots + I_{k_1}, \quad A_2 \subset I_{k_1+1} + \ldots + I_{k_2},$$

(3) $$|I_1| + \ldots + |I_{k_1}| < m_z(A_1) + \varepsilon, \quad |I_{k_1+1}| + \ldots + |I_{k_2}| < m_z(A_2) + \varepsilon.$$

Na mocy (2) jest $A_1 + A_2 \subset I_1 + \ldots + I_{k_2}$, skąd

$$m_z(A_1 + A_2) \leqslant |I_1| + \ldots + |I_{k_2}|,$$

a stąd na mocy (3)

$$m_z(A_1 + A_2) < m_z(A_1) + m_z(A_2) + 2\varepsilon.$$

Wobec dowolności liczby ε wynika stąd nierówność (1), c. b. d. d.

(3.3') *Dla każdej rodziny skończonej zbiorów ograniczonych rozłącznych* $A_1,\dots,A_r$ *zachodzi wzór*

$$m_w(A_1)+\dots+m_w(A_r)\leqslant m_w(A_1+\dots+A_r).$$

Dowód. Wystarczy oczywiście dowieść, że

$$(1')\qquad m_w(A_1)+m_w(A_2)\leqslant m_w(A_1+A_2).$$

Do każdego $\varepsilon>0$ istnieją na mocy (2.1) niezachodzące na siebie przedziały $I'_1,\dots,I'_{l_1}$ i niezachodzące na siebie przedziały $I'_{l_1+1},\dots,I'_{l_2}$ o własnościach:

$$(2')\qquad I'_1+\dots+I'_{l_1}\subset A_1,\qquad I'_{l_1+1}+\dots+I'_{l_2}\subset A_2,$$

$$(3')\qquad m_w(A_1)-\varepsilon<|I'_1|+\dots+|I'_{l_1}|,\qquad m_w(A_2)-\varepsilon<|I'_{l_1+1}|+\dots+|I'_{l_2}|.$$

Wobec rozłączności zbiorów A_1 i A_2, wnosimy z (2'), że przedziały całej rodziny $I'_1,\dots,I'_{l_2}$ nie zachodzą na siebie, a ponadto że $I'_1+\dots+I'_{l_2}\subset A_1+A_2$, skąd $|I'_1|+\dots+|I'_{l_2}|\leqslant m_w(A_1+A_2)$, a stąd na mocy (3')

$$m_w(A_1)+m_w(A_2)-2\varepsilon<m_w(A_1+A_2).$$

Wobec dowolności liczby ε wynika stąd nierówność (1'), c. b. d. d.

(3.4) *Dla miar* $\mathfrak{J}$ *dowolnego zbioru ograniczonego* A *i jego pochodnej* A' (p. str. 59) *zachodzi wzór*

$$m_w(A)\leqslant m_w(A')\leqslant m_z(A')=m_z(A).$$

Dowód. Pierwsza z nierówności wynika stąd, że jeżeli przedział jest zawarty w zbiorze, to jest zawarty także w jego pochodnej. Druga jest bezpośrednim wnioskiem z (3.1).

Niech $I_1,\dots,I_k$ będą takimi przedziałami zamkniętymi, że $A\subset I_1+\dots+I_k$. Ponieważ suma tych przedziałów jest zbiorem zamkniętym, więc $A'\subset I_1+\dots+I_k$. Zatem

$$(4)\qquad m_z(A')\leqslant m_z(A).$$

Z drugiej strony, dla każdego $\varepsilon>0$ istnieją takie przedziały otwarte $J_1,\dots,J_r$, że

$$(5)\qquad A'\subset J_1+\dots+J_r,$$

$$(6)\qquad |J_1|+\dots+|J_r|<m_z(A')+\varepsilon.$$

Na mocy (5) zbiór A nie ma punktów skupienia poza przedziałami $J_1, \ldots, J_r$, a więc poza tymi przedziałami leży co najwyżej skończona liczba punktów zbioru A. Punkty te można tedy pokryć skończoną liczbą przedziałów $J_{r+1}, \ldots, J_s$ o sumie miar nie przekraczającej ε. Ponieważ $A \subset J_1 + \ldots + J_s$, więc

$$m_z(A) \leqslant |J_1| + \ldots + |J_s| \leqslant m_z(A') + 2\varepsilon$$

na mocy (6). Wobec dowolności ε mamy zatem

$$(7) \qquad m_z(A) \leqslant m_z(A').$$

Z (4) i (7) wynika równość $m_z(A') = m_z(A)$, c. b. d. d.

PRZYKŁADY. 1. Zbiór liczb postaci $1/n$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, ma miarę zewnętrzną $\mathfrak{J}$ równą zeru, taka jest bowiem miara pochodnej tego zbioru, jako złożonej z jednego punktu (punktu 0).

2. Zbiór liczb wymiernych przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ ma miarę zewnętrzną $\mathfrak{J}$ równą jedności, czyli mierze tego przedziału (jako swej pochodnej), miarę zaś wewnętrzną $\mathfrak{J}$ równą zeru, ponieważ jest zbiorem brzegowym.

To samo dotyczy zbioru liczb niewymiernych przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

3. Każdy zbiór gęsty w przedziale ma miarę zewnętrzną $\mathfrak{J}$ równą mierze tego przedziału.

(3.5) *Jeżeli A jest zbiorem ograniczonym, a $B(A)$ jego brzegiem, to:*

$$m_w[B(A)] = 0, \qquad m_z[B(A)] = m_z(A) - m_w(A).$$

Dowód. Pierwsza równość jest oczywista, ponieważ zbiór $B(A)$ nie ma punktów wewnętrznych.

Na mocy (i), (ii), (i') i (ii') istnieją dla każdego $\varepsilon > 0$ przedziały zamknięte $I_1, \ldots, I_k, I_{k+1}, \ldots, I_r$ i niezachodzące na siebie przedziały $I'_1, \ldots, I'_l$ o własnościach:

$$(8) \qquad I'_1 + \ldots + I'_l \subset A \subset I_1 + \ldots + I_k,$$

$$(9) \qquad m_z(A) + \varepsilon > |I_1| + \ldots + |I_k|, \qquad m_w(A) - \varepsilon < |I'_1| + \ldots + |I'_l|,$$

$$(10) \qquad B(A) \subset I_{k+1} + \ldots + I_r,$$

$$(11) \qquad m_z[B(A)] + \varepsilon > |I_{k+1}| + \ldots + |I_r|.$$

Niech I będzie przedziałem zamkniętym, zawierającym $I_1, \ldots, I_r$, a Δ podziałem przedziału I na takie podprzedziały, żeby $I_1, \ldots, I_r$ były ich sumami.

Oznaczmy przez $J_1, \ldots, J_\mu$ te spośród przedziałów podziału Δ, których wnętrza zawarte są w różnicy $(I_1 + \ldots + I_k) - (I'_1 + \ldots + I'_l)$, a przez $J'_1, \ldots, J'_\nu$ te, których wnętrza zawarte są w różnicy $A - (I_{k+1} + \ldots + I_r)$. Zatem:

$$I_1 + \ldots + I_k = J_1 + \ldots + J_\mu + I'_1 + \ldots + I'_l,$$
$$A \subset J'_1 + \ldots + J'_\nu + I_{k+1} + \ldots + I_r$$

i na mocy (8) i (10) po prawej stronie każdego z tych wzorów występują przedziały nie zachodzące na siebie. Na mocy (9) i (11) otrzymujemy więc:

$$\begin{aligned} m_z(A) + \varepsilon &\geqslant |J_1| + \ldots + |J_\mu| + m_w(A) - \varepsilon, \\ m_z(A) &\leqslant |J'_1| + \ldots + |J'_\nu| + m_z[B(A)] + \varepsilon. \end{aligned} \tag{12}$$

Ponieważ zbiór $B(A)$, jako brzeg zbioru A, jest zawarty na mocy (8) w $J_1 + \ldots + J_\mu$, więc

$$m_z[B(A)] \leqslant |J_1| + \ldots + |J_\mu|, \tag{13}$$

a ponieważ wnętrza przedziałów $J'_1, \ldots, J'_\nu$ są zawarte w A, więc

$$m_w(A) \geqslant |J'_1| + \ldots + |J'_\nu|. \tag{14}$$

Z nierówności (12), (13) i (14) otrzymujemy

$$m_z(A) - m_w(A) - \varepsilon \leqslant m_z[B(A)] \leqslant m_z(A) - m_w(A) + 2\varepsilon$$

dla każdego $\varepsilon > 0$, a więc równość, c. b. d. d.

(3.6) *Jeżeli A jest zbiorem ograniczonym, a $W(A)$ jego wnętrzem, to*

$$m_w[W(A)] = m_w(A).$$

Istotnie, wobec $W(A) \subset A$ mamy na mocy (1.5)

$$m_w[W(A)] \leqslant m_w(A).$$

Z drugiej strony, każdy przedział otwarty, zawarty w A, jest zawarty w $W(A)$, skąd $m_w(A) \leqslant m_w[W(A)]$.

4. Zbiory mierzalne $\mathfrak{J}$. Zbiór ograniczony A nazywamy *mierzalnym w sensie Jordana* lub *mierzalnym* $\mathfrak{J}$, jeżeli jego miary zewnętrzna $\mathfrak{J}$ i wewnętrzna $\mathfrak{J}$ są równe, t.j. jeżeli $m_w(A)=m_z(A)$.

Wspólną wartość obu miar nazywamy wówczas *miarą* $\mathfrak{J}$ zbioru A i oznaczamy przez $m(A)$.

PRZYKŁADY. 1. Każdy przedział I jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ i $m(I)=|I|$ (por. (1.3) i (2.3)).

2. Zbiór W liczb wymiernych przedziału $\langle 0,1\rangle$ nie jest mierzalny $\mathfrak{J}$, gdyż $m_w(W)=0$ i $m_z(W)=1$ (p. przykład 2, str. 199).

(4.1) *Jeżeli $m(A)=0$, to A jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.*

Wynika to wprost z określenia miary zewnętrznej $\mathfrak{J}$ i miary $\mathfrak{L}$ zero.

(4.2) *Jeżeli $m_z(A)=0$, to A jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ i $m(A)=0$.*

Na mocy bowiem (3.1), str. 197, mamy wtedy $m_w(A)=0$.

Natomiast zbiór miary $\mathfrak{L}$ zero może nie być mierzalny $\mathfrak{J}$, jak wskazuje przykład zbioru liczb wymiernych, który nie jest mierzalny $\mathfrak{L}$, a jako przeliczalny jest miary $\mathfrak{L}$ zero.

(4.3) *Każdy zbiór A zamknięty, ograniczony* i *miary $\mathfrak{L}$ zero jest mierzalny $\mathfrak{J}$ i $m(A)=0$.*

98

Istotnie, na mocy tw. ~~(8.2), str. 98~~, dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje wówczas skończona liczba przedziałów pokrywających zbiór A, których suma miar jest mniejsza niż ε. Zatem $m_z(A)<\varepsilon$ dla każdego $\varepsilon>0$, skąd $m_z(A)=0$. Zatem na mocy tw. (4.1) jest $m(A)=0$.

W szczególności, ponieważ brzeg przedziału jest zbiorem zamkniętym i ograniczonym o mierze $\mathfrak{L}$ zero (tw. (7.1), str. 187), więc:

(4.4) *Miara $\mathfrak{J}$ brzegu przedziału jest zerem.*

(4.5) *Jeżeli A jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$, to jego pochodna A' jest również zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ i $m(A)=m(A')$.*

Wynika to wprost z tw. (3.4).

Uwaga. Twierdzenie odwrotne byłoby fałszywe: pochodna A' może być zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$, a sam zbiór A może nie być mierzalny $\mathfrak{J}$. Np. zbiór liczb wymiernych przedziału $\langle 0,1\rangle$ nie jest mierzalny $\mathfrak{J}$ (przykład 2, str. 201), podczas gdy jego pochodna jest przedziałem $\langle 0,1\rangle$, a więc zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.

(4.6) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by zbiór ograniczony był mierzalny* $\mathfrak{J}$, *jest, żeby jego brzeg był zbiorem miary* $\mathfrak{J}$ *zero.*

Wynika to z tw. (3.6).

Uwaga. Ponieważ brzeg jest zbiorem zamkniętym, więc tw. (4.6) pozostaje prawdziwe, gdy miarę $\mathfrak{J}$ brzegu zastąpić miarą $\mathfrak{L}$.

Z tw. (3.7) wynika, że

(4.7) *Mierzalność* $\mathfrak{J}$ *zbioru* A *jest równoważna mierzalności* $\mathfrak{J}$ *jego wnętrza* $W(A)$ *i*

$$m(A)=m[W(A)].$$

PRZYKŁADY. 1. *Wielokąt jest zbiorem mierzalnym* $\mathfrak{J}$.

Brzeg jego jest bowiem linią łamaną, a więc zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero (p. tw. (7.3), str. 188).

2. *Koło* $x^2+y^2\leqslant r^2$ *jest zbiorem mierzalnym* $\mathfrak{J}$.

Brzeg jego jest bowiem sumą wykresów funkcyj $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $y=-\sqrt{r^2-x^2}$, ciągłych w przedziale $\langle -r,r\rangle$; na mocy tw. (7.3), str. 188, jest on więc zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero.

Podobnie, *kula jest zbiorem mierzalnym* $\mathfrak{J}$.

3. *Każdy wielościan w przestrzeni* $\mathcal{E}^n$ *jest zbiorem mierzalnym* $\mathfrak{J}$.

Brzeg wielościanu tworzą bowiem jego ściany, a każda ściana jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero (p. str. 190).

(4.8) *Suma skończonej liczby zbiorów* $A_1,\ldots,A_r$ *mierzalnych* $\mathfrak{J}$ *jest zbiorem mierzalnym* $\mathfrak{J}$ *i*

$$m(A_1+\ldots+A_r)\leqslant m(A_1)+\ldots+m(A_r).$$

Mierzalność sumy $A_1+\ldots+A_r$ wynika z tw. (4.6), ponieważ brzeg sumy zbiorów $A_1,\ldots,A_r$ zawarty jest w sumie brzegów tych zbiorów. Wzór zaś wynika z tw. (3.3), str. 197, przez zastąpienie w nim miary zewnętrznej $\mathfrak{J}$ przez miarę $\mathfrak{J}$.

(4.9) *Jeżeli zbiory* $A_1,\ldots,A_r$ *są mierzalne* $\mathfrak{J}$ *i rozłączne, to*

$$m(A_1+\ldots+A_r)=m(A_1)+\ldots+m(A_r). \tag{15}$$

Istotnie, zastępując w tw. (3.3'), str. 198, miarę wewnętrzną $\mathfrak{J}$ przez miarę $\mathfrak{J}$, dostajemy

$$m(A_1+\ldots+A_r)\geqslant m(A_1)+\ldots+m(A_r), \tag{16}$$

a nierówność odwrotną mamy z tw. (4.8).

Uwaga. Tw. (4.9) zachodzi już przy założeniu, że *zbiory* $A_1,\ldots,A_r$ *mierzalne* $\mathfrak{J}$ *mają wnętrza rozłączne.*

Mamy bowiem wobec tw. (3.3')

(17) $m_w[W(A_1)+\ldots+W(A_r)]\geqslant m_w[W(A_1)]+\ldots+m_w[W(A_r)]$.

Ponieważ na mocy tw. (4.6) jest $m_w[W(A_i)]=m_w(A_i)=m(A_i)$ dla $i=1,2,\ldots,r$ oraz $W(A_1)+\ldots+W(A_r)\subset A_1+\ldots+A_r$, więc

$$m_w[W(A_1)+\ldots+W(A_r)]\leqslant m(A_1+\ldots+A_r).$$

Stąd na mocy (4.7) dostajemy (16), a z (4.9) równość (15).

(4.10) *Iloczyn skończonej liczby zbiorów mierzalnych $\mathfrak{J}$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.*

Wynika to z tw. (4.7), ponieważ brzeg iloczynu zbiorów jest zawarty w sumie ich brzegów.

(4.11) *Dopełnienie zbioru mierzalnego $\mathfrak{J}$ do przedziału jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.*

Dowód. Jeżeli zbiór A jest zawarty w przedziale I, to brzeg zbioru $I-A$ jest zawarty w sumie brzegu zbioru A i brzegu przedziału I. Ponieważ oba brzegi są zbiorami miary $\mathfrak{L}$ zero na mocy tw. (4.1) i (4.6), więc ich suma, a tym bardziej brzeg zbioru $I-A$, jako jej część, ma miarę $\mathfrak{L}$ zero. Na mocy tw. (4.6) zbiór $I-A$ jest więc mierzalny $\mathfrak{J}$.

(4.12) *Jeżeli zbiory A i B są mierzalne $\mathfrak{J}$, to różnica $A-B$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$.*

Jeżeli ponadto $B\subset A$, wówczas

$$m(A-B)=m(A)-m(B).$$

Dowód. Niech I będzie przedziałem zawierającym $A+B$. Wówczas $A-B=A\cdot(I-B)$ i różnica $A-B$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ na mocy tw. (4.10), jako iloczyn zbiorów A i $I-B$, z których pierwszy jest mierzalny $\mathfrak{J}$ z założenia, a drugi na mocy tw. (4.11).

Jeżeli ponadto $B\subset A$, wówczas $A=B+(A-B)$, skąd

$$m(A)=m[B+(A-B)]=m(B)+m(A-B),$$

gdyż zbiory A i $A-B$ są rozłączne.

5. Przesunięcie równoległe. Niech E będzie dowolnym zbiorem ograniczonym w $\mathcal{E}^n$, a $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ dowolnym układem n liczb. Niech każdemu punktowi $p=(x_1, ..., x_n)$ zbioru E przyporządkowany będzie punkt $p'=(x_1', ..., x_n')$ za pomocą równań

$$x_i' = x_i + \alpha_i \qquad (i=1, 2, ..., n). \tag{18}$$

Przyporządkowanie to jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym i ciągłym zbioru E na zbiór E' punktów p'.

Odwzorowanie (18) nazywamy *przesunięciem (równoległym)*.

Z określenia wynika, że odwzorowanie odwrotne

$$x_i = x_i' - \alpha_i \qquad (i=1, 2, ..., n) \tag{19}$$

jest przesunięciem (równoległym) zbioru E' na zbiór E.

Przez przesunięcie równoległe przedział $I=\langle a_1, ..., a_n; b_1, ..., b_n\rangle$ przechodzi na przedział $I'=\langle a_1+\alpha_1, ..., a_n+\alpha_n; b_1+\alpha_1, ..., b_n+\alpha_n\rangle$ i miara przedziału zostaje zachowana, t.j. $|I|=|I'|$. Ogólnie:

(5.1) *Jeżeli zbiór ograniczony E przechodzi przez przesunięcie równoległe w zbiór E', to*

$$m_w(E) = m_w(E'), \qquad m_z(E) = m_z(E').$$

Dowód. Niech $E \subset I_1 + ... + I_m$. Zbiór E' jest oczywiście zawarty w sumie przedziałów $I_1', ..., I_m'$, na które przejdą przedziały $I_1, ..., I_m$ przez przesunięcie (18). Ponieważ przesunięcie równoległe zachowuje miarę przedziałów, więc $|I_1|+...+|I_m| = |I_1'|+...+|I_m'|$, skąd $m_z(E) \geqslant m_z(E')$. Na odwrót, ponieważ przez przesunięcie (19) E' przechodzi na E, więc dostajemy $m_z(E') \geqslant m_z(E)$. Zatem $m_z(E)=m_z(E')$.

Podobnie dowodzi się równości miar wewnętrznych.

Wynika stąd od razu twierdzenie następujące:

(5.2) *Jeżeli zbiór E jest mierzalny $\mathfrak{J}$, to jego przesunięcie E' jest również zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ i miary $\mathfrak{J}$ obu zbiorów są równe.*

6. Całka $\mathfrak{R}$ funkcji w zbiorze. Niech E będzie zbiorem ograniczonym w $\mathcal{E}^n$, a $f(p)$ funkcją ograniczoną, określoną w E.

Oznaczmy przez f^* funkcję, która jest przedłużeniem funkcji f na całą przestrzeń $\mathcal{E}^n$, przyjmując $f^*(p)=0$ dla p nie należących do E. Zatem funkcja $f^*(p)$ jest określona w całej przestrzeni $\mathcal{E}^n$ i ograniczona w tej przestrzeni.

Dla dowolnych dwóch przedziałów zamkniętych I' i I'', z których każdy zawiera E, mamy

$$(20)\qquad \overline{\int_{I'}} f^*(p)\,dp = \overline{\int_{I''}} f^*(p)\,dp, \qquad \underline{\int_{I'}} f^*(p)\,dp = \underline{\int_{I''}} f^*(p)\,dp.$$

W przypadku, gdy $I' \subset I''$, wzór (20) wynika z tw. (9.3), str. 191. W przypadku przeciwnym, oznaczając przez I dowolny przedział zawierający $I' + I''$, widzimy, że całki funkcji f^* w I' i I'' są równe jej całce w I, a zatem równe między sobą.

Całką górną (dolną) funkcji $f(p)$ w zbiorze E nazywamy całkę górną (dolną) funkcji $f^*(p)$ w przedziale I zawierającym E i oznaczamy ją przez

$$\overline{\int_E} f(p)\,dp \qquad \left(\underline{\int_E} f(p)\,dp\right).$$

Zatem według określenia

$$(21)\qquad \overline{\int_E} f(p)\,dp = \overline{\int_I} f^*(p)\,dp, \qquad \underline{\int_E} f(p)\,dp = \underline{\int_I} f^*(p)\,dp,$$

przy czym całki górna i dolna funkcji f w zbiorze E nie zależą od wyboru przedziału I, zawierającego ten zbiór.

Jeżeli całki górna i dolna w E są równe, mówimy, że funkcja $f(p)$ jest *całkowalna* $\mathfrak{R}$ *w zbiorze* E i całkę jej w tym zbiorze oznaczamy przez

$$\int_E f(p)\,dp.$$

Na mocy (20) funkcja $f^*(p)$ jest wówczas całkowana $\mathfrak{R}$ w każdym przedziale I zawierającym E i

$$\int_E f(p)\,dp = \int_I f^*(p)\,dp.$$

Dla całek $\mathfrak{R}$ w zbiorach zachodzą niektóre spośród twierdzeń zachodzących dla całek $\mathfrak{R}$ w przedziałach.

(6.1) *Jeżeli funkcje $f(p)$ i $\varphi(p)$ są całkowalne $\mathfrak{R}$ w zbiorze ograniczonym E, to funkcje $f(p) \pm \varphi(p)$, i $c f(p)$, gdzie $c = const$, są całkowalne $\mathfrak{R}$ w E i*

$$(22)\qquad \int_E [f(p) \pm \varphi(p)]\,dp = \int_E f(p)\,dp \pm \int_E \varphi(p)\,dp,$$

$$(23)\qquad \int_E c f(p)\,dp = c \int_E f(p)\,dp.$$

Dowód. Weźmy pod uwagę przedłużenia funkcyj $f(p)$ i $\varphi(p)$:

$$f^*(p)=\begin{cases} f(p) & \text{dla} \quad p\in E, \\ 0 & \text{dla} \quad p\in -E, \end{cases} \qquad \varphi^*(p)=\begin{cases} \varphi(p) & \text{dla} \quad p\in E, \\ 0 & \text{dla} \quad p\in -E. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że wówczas funkcja $f^*(p)\pm\varphi^*(p)$ jest przedłużeniem funkcji $f(p)\pm\varphi(p)$ i że również $f^*(p)\pm\varphi^*(p)=0$ dla p nie należących do E. Na mocy określenia całki funkcji w zbiorze wynika stąd całkowalność sumy (różnicy) dwóch funkcyj i wzór (22) na jej całkę. Podobnie dowodzi się pozostałej części twierdzenia oraz wzoru (23).

7. Miara Jordana jako całka. Niech $E\subset\mathcal{E}^n$ i niech $f(p)$ będzie *funkcją charakterystyczną* zbioru E, t.j. funkcją

$$f(p)=\begin{cases} 1 & \text{dla} \quad p\in E, \\ 0 & \text{dla} \quad p\in -E. \end{cases}$$

(7.1) *Jeżeli zbiór E jest ograniczony, to*

(24) $$m_w(E)=\underline{\int_E} 1\,dp, \qquad m_z(E)=\overline{\int_E} 1\,dp.$$

Dowód. Niech $\varepsilon>0$. Na mocy tw. (1.2) i (2.2), str. 196, istnieją przedziały zamknięte $I_1,\ldots,I_k$ oraz $I'_1,\ldots,I'_l$, spełniające warunki:

(25) $$I'_1+\ldots+I'_l\subset E\subset I_1+\ldots+I_k,$$

(26) $$m_z(E)+\varepsilon>|I_1|+\ldots+|I_k|, \qquad m_w(E)-\varepsilon<|I'_1|+\ldots+|I'_l|.$$

Niech I będzie dowolnym przedziałem zawierającym sumę

$$I_1+\ldots+I_k+I'_1+\ldots+I'_l.$$

Na mocy tw. (1.1), str. 179, istnieje taka siatka Δ przedziału I, że każdy z przedziałów występujących w (25) jest sumą pewnych przedziałów tej siatki. Oznaczmy przez s i S sumę dolną i górną dla funkcji f, odpowiadającą podziałowi Δ. Suma dolna s jest więc sumą miar tych przedziałów siatki Δ, które są zawarte w E. Ponieważ przedziały $I'_1,\ldots,I'_l$ są zawarte w E i każdy z nich jest sumą przedziałów siatki Δ, więc na mocy (25)

(27) $$|I'_1|+\ldots+|I'_l|\leqslant s\leqslant m_w(E).$$

Podobnie S jest sumą miar przedziałów siatki Δ, mających punkty wspólne z E. Ponieważ przedziały takie pokrywają E, a zarazem są zawarte w $I_1+\ldots+I_k$, więc na mocy (25)

(28) $$m_z(E)\leqslant S\leqslant |I_1|+\ldots+|I_k|.$$

Z (27) i (28) dostajemy na mocy (26)

$$m_w(E)-\varepsilon\leqslant \underline{\int_I} f(p)\,dp\leqslant m_w(E),\qquad m_z(E)\leqslant \overline{\int_I} f(p)\,dp\leqslant m_z(E)+\varepsilon,$$

skąd wobec dowolności liczby $\varepsilon>0$

$$m_w(E)=\underline{\int_I} f(p)\,dp,\qquad m_z(E)=\overline{\int_I} f(p)\,dp,$$

co daje wzory (24) na mocy określenia funkcji $f(p)$.

Otrzymujemy stąd od razu twierdzenia następujące:

(7.2) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by zbiór E był mierzalny $\mathfrak{J}$, jest, żeby funkcja charakterystyczna zbioru E była całkowalna w E.*

(7.3) *Jeżeli zbiór E jest mierzalny $\mathfrak{J}$, to*

$$m(E)=\int_E 1\,dp.$$

8. Warunki całkowalności $\mathfrak{R}$ funkcji w zbiorze. Udowodnimy teraz, że

(8.1) *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcja ograniczona, określona w zbiorze E mierzalnym $\mathfrak{J}$, była w nim całkowalna $\mathfrak{R}$, jest, żeby zbiór punktów nieciągłości tej funkcji w zbiorze E był miary $\mathfrak{L}$ zero.*

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f(p)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w zbiorze $E\subset I$. Jej przedłużenie

$$f^*(p)=\begin{cases} f(p) & \text{dla } p\in E,\\ 0 & \text{dla } p\in -E\end{cases}$$

jest więc funkcją całkowalną $\mathfrak{R}$ w I, a przeto na mocy tw. (8.1), str. 190, zbiór H^* jej punktów nieciągłości w przedziale I jest miary $\mathfrak{L}$ zero. Ponieważ H^* zawiera zbiór H punktów nieciągłości funkcji $f(p)$ w zbiorze E, więc i H jest miary $\mathfrak{L}$ zero. Warunek jest zatem konieczny.

Załóżmy teraz, że zbiór H punktów nieciągłości funkcji $f(p)$ jest miary $\mathfrak{L}$ zero. Ponieważ zbiór E jest z założenia mierzalny $\mathfrak{J}$, więc na mocy tw. (4.6), str. 202, jego brzeg $B(E)$ jest miary $\mathfrak{L}$ zero. Ponieważ funkcja $f^*(p)$ jest stała (bo równa 0), a zatem ciągła w punktach wewnętrznych zbioru $I-E$, więc $H^* \subset H+B(E)$. Wynika stąd, że H^* jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero, a zatem że funkcja $f^*(p)$ jest całkowalna w I, czyli że funkcja $f(p)$ jest całkowalna w E. Warunek jest więc dostateczny.

(8.2) *Jeżeli zbiory $A_1, \dots, A_m$ ograniczone i mierzalne $\mathfrak{J}$ nie zachodzą na siebie i funkcja $f(p)$ jest w każdym z nich całkowalna $\mathfrak{R}$, to jest ona całkowalna $\mathfrak{R}$ w sumie $E = A_1 + \dots + A_m$ i*

(29) $$\int_E f(p)\,dp = \int_{A_1} f(p)\,dp + \dots + \int_{A_m} f(p)\,dp.$$

Dowód. Weźmy pod uwagę przedłużenia funkcji $f(p)$:

(30) $$f_i^*(p) = \begin{cases} f(p) & \text{dla } p \in A_i \\ 0 & \text{dla } p \in -A_i \end{cases} \qquad (i=1, \dots, m),$$

(31) $$f^*(p) = \begin{cases} f(p) & \text{dla } p \in E, \\ 0 & \text{dla } p \in -E. \end{cases}$$

Ponieważ zbiory $A_1, \dots, A_m$ mają z założenia wnętrza rozłączne, więc funkcja

(32) $$\varphi(p) = f^*(p) - f_1^*(p) - \dots - f_m^*(p)$$

przybiera wartość 0 we wszystkich punktach zbioru E, z wyjątkiem być może punktów należących do brzegów zbiorów $A_1, \dots, A_m$, a więc do zbiorów zamkniętych miary $\mathfrak{L}$ zero, funkcja $\varphi(p)$ jest przeto zerem wszędzie poza sumą tych brzegów, t.j. poza pewnym zbiorem zamkniętym miary $\mathfrak{L}$ zero. Wynika stąd na mocy tw. (8.1), że całka $\mathfrak{R}$ funkcji $\varphi(p)$ w każdym przedziale zamkniętym I istnieje i jest równa 0.

Niech teraz $E \subset I$. Ponieważ funkcje $\varphi(p), f_1^*(p), \dots, f_m^*(p)$ są całkowalne $\mathfrak{R}$ w I, więc wnosimy z (32) na mocy tw. (3.1), str. 182, że funkcja $f^*(p)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w I, a stąd na mocy tw. (6.1), że funkcja $f(p)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w E.

Wzór (32) daje zarazem

$$\int_I f^*(p)\,dp = \int_I f_1^*(p)\,dp + \dots + \int_I f_m^*(p)\,dp,$$

skąd wynika (29) na mocy określenia całki $\mathfrak{R}$ w zbiorze.

9. Całka Riemanna jako miara Jordana. Następujące twierdzenia wyrażają związki między całkowalnością $\mathfrak{R}$ a mierzalnością $\mathfrak{J}$:

(9.1) *Jeżeli funkcja* $y=f(p)$, *określona w zbiorze ograniczonym* $E\subset\mathcal{E}^n$, *jest ograniczona i nieujemna, a zbiór* $D\subset\mathcal{E}^{n+1}$ *składa się z punktów* $q=(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$, *których współrzędne spełniają warunki*

$$(33)\qquad (x_1,\dots,x_n)\in E,\qquad 0\leqslant x_{n+1}\leqslant f(x_1,\dots,x_n),$$

to całkowalność $\mathfrak{R}$ *funkcji* $f(p)$ *w zbiorze* E *jest równoważna mierzalności* $\mathfrak{J}$ *zbioru* D.

Ponadto, jeżeli funkcja $f(p)$ *jest całkowalna* $\mathfrak{R}$ *w* E, *to jej całka* $\mathfrak{R}$ *w tym zbiorze równa się mierze* $\mathfrak{J}$ *zbioru* D *w przestrzeni* $\mathcal{E}^{n+1}$:

$$(34)\qquad \int\limits_E f(p)\,dp=m(D).$$

Dowód. Niech $E\subset I$ i niech Δ będzie podziałem przedziału I na przedziały $I_1,\dots,I_m$. Przedłużmy funkcję $f(p)$ w przedziale I:

$$(35)\qquad f^*(p)=\begin{cases} f(p) & \text{dla}\quad p\in E,\\ 0 & \text{dla}\quad p\in I-E\end{cases}$$

i oznaczmy: przez k_i i K_i kresy dolny i górny funkcji $f^*(p)$ w przedziale I_i, przez I_i' zbiór tych punktów $q=(x_1,\dots,x_{n+1})$ przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$, których współrzędne spełniają warunki

$$(x_1,\dots,x_n)\in I_i,\qquad 0\leqslant x_{n+1}\leqslant k_i,$$

wreszcie przez I_i'' zbiór tych punktów przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$, których współrzędne spełniają warunki

$$(x_1,\dots,x_n)\in I_i,\qquad 0\leqslant x_{n+1}\leqslant K_i.$$

Weźmy pod uwagę te zbiory I_i', dla których $k_i>0$; zbiory te są niezachodzącymi na siebie przedziałami o miarach $\mu_i=k_i|I_i|$, zawartymi w D. Z określenia miary wewnętrznej wynika zatem, że

$$(36)\qquad \sum_{i=1}^{m}k_i|I_i|\leqslant m_w(D),$$

przy czym suma powyższa dlatego mogła zostać rozciągnięta na wszystkie wskaźniki $i=1,\dots,m$, że dla $k_i=0$ jest $k_i|I_i|=0$.

Zauważmy teraz, że $E \subset I_1 + \ldots + I_m$. Jeżeli $K_i > 0$, to I_i'' jest przedziałem o mierze $K_i|I_i|$, jeżeli zaś $K_i = 0$, to I_i'' jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ o mierze $K_i|I_i| = 0$. Na mocy więc tw. (4.8) mamy

$$(37) \qquad m_z(D) \leqslant m_z(I_1 + \ldots + I_m) \leqslant \sum_{i=1}^{m} K_i|I_i|.$$

$\sum_{i=1}^{m} k_i|I_i|$ jest sumą dolną, a $\sum_{i=1}^{m} K_i|I_i|$ — sumą górną funkcji $f^*(p)$ dla podziału Δ. Ponieważ dla ciągu normalnego podziałów sumy te dążą do całek dolnej i górnej funkcji $f^*(p)$ w I, więc z określenia pojęcia całki $\mathfrak{R}$ w zbiorze dostajemy na mocy (36) i (37)

$$(38) \qquad \underline{\int_E} f(p)\,dp \leqslant m_w(D) \leqslant m_z(D) \leqslant \overline{\int_E} f(p)\,dp.$$

Wynika stąd, że jeżeli funkcja $f(p)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w zbiorze E, to zbiór D jest mierzalny $\mathfrak{J}$ i miara jego wyraża się wzorem (34).

Na odwrót, załóżmy, że zbiór D jest mierzalny $\mathfrak{J}$ i oznaczmy przez J przedział przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$ złożony z punktów $q = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, których współrzędne spełniają warunki:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in I, \qquad 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant a,$$

gdzie a jest dowolną liczbą większą od kresu górnego funkcji $f(p)$ w zbiorze E:

$$a > K.$$

Niech $\chi(q)$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru D.

Z określenia tego zbioru i funkcji $f^*(p)$ wynika, że jeżeli $(x_1, \ldots, x_n) \in I$, to $\chi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ jest zerem lub jednością zależnie od tego, czy $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant f^*(x_1, \ldots, x_n)$, czy $f^*(x_1, \ldots, x_n) < x_{n+1}$. Zatem

$$(39) \qquad \int_0^a \chi(x_1, \ldots, x_{n+1})\,dx_{n+1} = \int_0^{f^*(x_1 \ldots, x_n)} dx_{n+1} = f^*(x_1, \ldots, x_n).$$

Ponieważ zbiór D jest mierzalny $\mathfrak{J}$, więc funkcja χ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w D. Na mocy więc tw. (10.1), str. 192, wynika z (39), że funkcja f^* jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w I, czyli funkcja f w E, i że zachodzi wzór (34).

W szczególności, z tw. (9.1) otrzymujemy następujący wniosek:

(9.2) *Jeżeli funkcja* $y=f(x_1,\dots,x_n)$ *jest całkowalna w* E, *to jej wykres w* $\mathcal{E}^{n+1}$ *jest zbiorem miary* $\mathfrak{J}$ *zero.*

Wykres ten jest bowiem (p. str. 188) zbiorem punktów, których współrzędne spełniają warunki

$$(x_1,\dots,x_n)\in E, \qquad x_{n+1}=f(x_1,\dots,x_n),$$

a więc punktów leżących na brzegu zbioru D określonego w tw. (9.1) i mierzalnego $\mathfrak{J}$ na mocy tego twierdzenia; brzeg zaś zbioru mierzalnego $\mathfrak{J}$ jest miary $\mathfrak{J}$ zero na mocy tw. (4.6), str. 202.

PRZYKŁADY. 1. Jeżeli funkcja nieujemna $f(x)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ na odcinku $\langle a,b\rangle$, to zbiór płaski D, określony nierównościami $a\leqslant x\leqslant b$ i $0\leqslant y\leqslant f(x)$, jest mierzalny i jego miara $\mathfrak{J}$ (płaska) równa się $\int_a^b f(x)dx$. Wykres zaś funkcji $f(x)$ ma (również względem płaszczyzny) miarę $\mathfrak{J}$ zero.

2. Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest nieujemna i całkowalna $\mathfrak{R}$ w prostokącie $\langle a_1,a_2;b_1,b_2\rangle$, to zbiór punktów, których współrzędne spełniają nierówności $a_1\leqslant x\leqslant b_1$, $a_2\leqslant y\leqslant b_2$ i $0\leqslant z\leqslant f(x,y)$, jest mierzalny $\mathfrak{J}$ i jego miara $\mathfrak{J}$ (przestrzenna) równa się całce funkcji $f(x,y)$ w tym prostokącie.

(9.3) *Jeżeli funkcje* $f_1(x_1,\dots,x_n)$ *i* $f_2(x_1,\dots,x_n)$ *są całkowalne* $\mathfrak{R}$ *w zbiorze* $E\subset\mathcal{E}^n$ *mierzalnym* $\mathfrak{J}$ *i jeżeli*

$$(40)\qquad f_1(x_1,\dots,x_n)\geqslant f_2(x_1,\dots,x_n) \quad \textit{dla} \quad (x_1,\dots,x_n)\in E,$$

wówczas zbiór $R\subset\mathcal{E}^{n+1}$ *złożony z punktów o współrzędnych spełniających warunki*

$$(x_1,\dots,x_n)\in E, \qquad f_2(x_1,\dots,x_n)\leqslant x_{n+1}\leqslant f_1(x_1,\dots,x_n)$$

jest mierzalny $\mathfrak{J}$ *i*

$$(41)\qquad m(R)=\int_E [f_1(p)-f_2(p)]\,dp.$$

Dowód. Niech k będzie kresem dolnym funkcji $f_2(p)$ w E. Zatem z założenia

$$(42)\qquad f_1(p)-k\geqslant f_2(p)-k\geqslant 0 \qquad \text{dla} \quad p\in E.$$

Oznaczmy kolejno przez D_1, D_2 i D zbiory punktów

$$q=(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$$

przestrzeni $\mathcal{E}^n$, dla których $(x_1,\ldots,x_n)\in E$ oraz $0\leqslant x_{n+1}\leqslant f_1(x_1,\ldots,x_n)-k$, $0\leqslant x_{n+1}\leqslant f_2(x_1,\ldots,x_n)-k$ i

$$f_2(x_1,\ldots,x_n)-k\leqslant x_{n+1}\leqslant f_1(x_1,\ldots,x_n)-k. \tag{43}$$

Ponieważ zbiór E jest mierzalny $\mathfrak{J}$, więc funkcja $y=\text{const.}$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w E. Wobec tego funkcje $f_1(p)-k$ i $f_2(p)-k$ są całkowalne $\mathfrak{R}$ w E; na mocy tw. (9.1) zbiory D_1 i D_2 są więc mierzalne $\mathfrak{J}$ i

$$m(D_1)=\int\limits_E[f_1(p)-k]dp, \qquad m(D_2)=\int\limits_E[f_2(p)-k]dp. \tag{44}$$

Oznaczając przez W wykres funkcji $y=f_2(p)-k$ w przestrzeni $\mathcal{E}^{n+1}$, mamy z (43)

$$D=(D_1-D_2)+W. \tag{45}$$

Na mocy tw. (9.2) zbiór W jest mierzalny $\mathfrak{J}$ i $m(W)=0$. Zbiór D_1-D_2 jest mierzalny $\mathfrak{J}$ jako różnica dwóch zbiorów mierzalnych $\mathfrak{J}$, a stąd wobec (45) również zbiór D jest mierzalny $\mathfrak{J}$.

Ponieważ $D_2\subset D_1$ i $D_1W=0$, więc na mocy (44) i (45)

$$m(D)=m(D_1-D_2)+m(W)=m(D_1)-m(D_2)=\int\limits_E[f_1(p)-f_2(p)]dp. \tag{46}$$

Łatwo zauważyć, że D przechodzi w R przez przesunięcie równoległe $x_1'=x_1,\ldots,x_n'=x_n$, $x_{n+1}'=x_{n+1}+k$. Zatem na mocy tw. (5.2), str. 46, zbiór R jest mierzalny $\mathfrak{J}$ i $m(R)=m(D)$, skąd na mocy (46) wynika (41), c. b. d. d.

PRZYKŁADY. 1. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są całkowalne $\mathfrak{R}$ na odcinku $\langle a,b\rangle$ i $\varphi(x)\leqslant f(x)$ dla $x\in\langle a,b\rangle$, to zbiór płaski R, określony nierównościami $a\leqslant x\leqslant b$ i $\varphi(x)\leqslant y\leqslant f(x)$, jest mierzalny $\mathfrak{J}$ i $m(R)=\int\limits_a^b[f(x)-\varphi(x)]dx$.

2. Jeżeli funkcje $f(x,y)$ i $\varphi(x,y)$ są ciągłe w zbiorze E mierzalnym $\mathfrak{J}$ i $f(x,y)\geqslant\varphi(x,y)$ dla $(x,y)\in E$, to zbiór przestrzenny R, złożony z punktów (x,y,z), dla których $(x,y)\in E$ i $\varphi(x,y)\leqslant z\leqslant f(x,y)$, jest mierzalny $\mathfrak{J}$ i

$$m(R)=\iint\limits_E[f(x,y)-\varphi(x,y)]dxdy.$$

3. Koło $x^2+y^2\leqslant 1$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ jako zbiór płaski R złożony z punktów (x,y) spełniających nierówności

$-1 \leqslant x \leqslant 1$ oraz $-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}$. Wynika to z zastosowania przykładu 1 dla $a=-1$ i $b=1$.

Podobnie kula $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ jest zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$, jako złożona z punktów, które spełniają warunki $(x,y) \in E$ oraz $-\sqrt{1-x^2-y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$, gdzie E jest kołem $x^2+y^2 \leqslant 1$.

10. Całka w zbiorze jako całka iterowana. Niech E będzie zbiorem ograniczonym w przestrzeni $\mathcal{E}^n$. Oznaczmy dla $j=1,\dots,n-1$ rzut zbioru E na przestrzeń $\mathcal{E}^j$ zmiennych $x_1,\dots,x_j$ przez R', a na przestrzeń $\mathcal{E}^{n-j}$ zmiennych $x_{j+1},\dots,x_n$ — przez R''. Oznaczmy dalej dla każdego punktu $(x_1,\dots,x_j) \in R'$ przez $A'(x_1,\dots,x_j)$ zbiór tych wszystkich punktów $(x_1,\dots,x_n)$ należących do E, których rzutem jest punkt p; podobnie, dla każdego punktu $q=(x_{j+1},\dots,x_n)$ zbioru R'' niechaj $A''(x_{j+1},\dots,x_n)$ oznacza największy podzbiór zbioru E, którego rzutem jest punkt q.

(10.1) *Jeżeli funkcja $f(x_1,\dots,x_n)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w E, to funkcje*

$$\overline{F}(x_1,\dots,x_j)=\overline{\int\limits_{A'(x_1,\dots,x_j)}\!\!\dots\int} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_{j+1}\dots dx_n,$$

$$\overline{\Phi}(x_{j+1},\dots,x_n)=\overline{\int\limits_{A''(x_{j+1},\dots,x_n)}\!\!\dots\int} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_j,$$

$$\underline{F}(x_1,\dots,x_j)=\underline{\int\limits_{A'(x_1,\dots,x_j)}\!\!\dots\int} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_{j+1}\dots dx_n,$$

$$\underline{\Phi}(x_{j+1},\dots,x_n)=\underline{\int\limits_{A''(x_{j+1},\dots,x_n)}\!\!\dots\int} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_j$$

są całkowalne odpowiednio w R' i R'', a ponadto

$$\begin{aligned}\int\limits_E f(p)\,dp&=\int\limits_{R'}\!\dots\int\Big[\overline{\int\limits_{A'(x_1,\dots,x_j)}\!\!\dots\int} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_{j+1}\dots dx_n\Big]dx_1\dots dx_j=\\&=\int\limits_{R''}\!\dots\int\Big[\overline{\int\limits_{A''(x_{j+1},\dots,x_n)}\!\!\dots\int} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_j\Big]dx_{j+1}\dots dx_n.\end{aligned}\tag{47}$$

Dowód. Niech $E \subset I=\langle a_1,\dots,a_n;\, b_1,\dots,b_n\rangle$. Wówczas

$$R' \subset J'=\langle a_1,\dots,a_j;\, b_1,\dots,b_j\rangle \quad \text{i} \quad R'' \subset J''=\langle a_{j+1},\dots,a_n;\, b_{j+1},\dots,b_n\rangle.$$

Dla przedłużenia $f^*(p)$ funkcji $f(p)$ według wzoru (31), str. 208, mamy

$$\int_I f^*(p)\,dp = \int_E f(p)\,dp,$$

$$\overline{\int \ldots \int_{J''}} f^*(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{j+1}\ldots dx_n = \overline{\int \ldots \int_{A'(x_1,\ldots,x_j)}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{j+1}\ldots dx_n,$$

$$\overline{\int \ldots \int_{J'}} f^*(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_j = \overline{\int \ldots \int_{A''(x_{j+1},\ldots,x_n)}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_j,$$

skąd otrzymujemy (47) na mocy tw. (10.1), str. 192.

Uwaga. Jeżeli funkcja $f(x_1,\ldots,x_n)$ jest całkowalna $\mathfrak{R}$ w zbiorach A' i A'', tw. (10.1) pozostaje prawdziwe, gdy w nim całki górne i dolne zastąpić wprost jej całkami $F(x)$ i $\Phi(x)$.

W szczególności jest tak zawsze, ilekroć zbiory E, R' i R'' są mierzalne $\mathfrak{J}$, a f jest funkcją ciągłą w E.

PRZYKŁADY. 1. Niech funkcje $F(x)$ i $\Phi(x)$ będą ciągłe na odcinku $\langle a,b\rangle$ i spełniają dla $a\leqslant x\leqslant b$ nierówność $\Phi(x)\leqslant F(x)$, a funkcja $f(x,y)$ niechaj będzie ciągła w zbiorze płaskim E, określonym nierównościami $a\leqslant x\leqslant b$ i $\Phi(x)\leqslant y\leqslant F(x)$. Wówczas

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big[\int_{\Phi(x)}^{F(x)} f(x,y)\,dy\Big]\,dx.$$

Rzut bowiem R' zbioru E na oś x-ów jest odcinkiem $\langle a,b\rangle$, a $A'(x)$ czyli zbiór punktów $(x,y)\in E$, których rzutem jest x, jest odcinkiem $\langle \Phi(x), F(x)\rangle$.

2. Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła w kuli $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, to

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \Big\{\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\Big\}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\Big[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big\{\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\Big\}\,dy\Big]\,dx.$$

Kula jest bowiem zbiorem mierzalnym $\mathfrak{J}$ (p. przykład 2, str. 202), rzut R' danej kuli na płaszczyznę xy jest kołem $x^2+y^2\leqslant 1$, a zbiór $A'(x,y)$ (tj. zbiór punktów tej kuli, których rzutem jest punkt $(x,y)\in R'$) jest odcinkiem $\langle -\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2}\rangle$. Z tw. (10.1) dostajemy więc równość pierwszą.

Ponieważ R' jest zbiorem określonym nierównościami $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$, więc z przykładu 1 otrzymujemy równość drugą.

11. Miara (objętość) kuli w $\mathcal{E}^n$. *Kulą (zamkniętą)* $\mathcal{K}_n(r)$ *o środku* $p_0=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ *i o promieniu* $r>0$ przestrzeni $\mathcal{E}^n$ nazywamy zbiór punktów $p=(x_1,\ldots,x_n)$, dla których (p. str. 73)

(48) $$\varrho(p,p_0)\leqslant r.$$

Współrzędne punktów kuli (zamkniętej) spełniają zatem wzór

(49) $$(x_1-\xi_1)^2+\ldots+(x_n-\xi_n)^2-r^2\leqslant 0.$$

Punkty kuli, dla których we wzorze (49) zachodzi równość, tworzą *brzeg (powierzchnię)* kuli w $\mathcal{E}^n$, pozostałe zaś punkty są jej punktami wewnętrznymi. Brzeg kuli $\mathcal{K}_n(r)$ jest sumą wykresów geometrycznych w przestrzeni $\mathcal{E}^n$ następujących dwóch funkcyj:

$$x_n=\xi_n+\sqrt{r^2-(x_1-\xi_1)^2-\ldots-(x_{n-1}-\xi_{n-1})^2},$$
$$x_n=\xi_n-\sqrt{r^2-(x_1-\xi_1)^2-\ldots-(x_{n-1}-\xi_{n-1})^2},$$

t.j. funkcyj określonych w zbiorze $\mathcal{K}_{n-1}(r)$ złożonym z punktów $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ przestrzeni $\mathcal{E}^{n-1}$, których współrzędne spełniają nierówność

(50) $$(x_1-\xi_1)^2+\ldots+(x_{n-1}-\xi_{n-1})^2-r^2\leqslant 0,$$

i ciągłych w tym zbiorze.

Zbiór $\mathcal{K}_{n-1}(r)$, jak widać ze wzoru (50), jest kulą w $\mathcal{E}^{n-1}$. Z tw. (7.3), str. 188, wynika, że brzeg kuli jest zbiorem miary $\mathfrak{L}$ zero. Zatem na mocy tw. (4.6), str. 202,

(11.1) *Kula jest zbiorem mierzalnym* $\mathfrak{J}$.

Przez przesunięcie równoległe $x_i'=x_i+\xi_i$, gdzie $i=1,\ldots,n$, kula (49) przechodzi w zbiór $\mathcal{K}_n'$ określony nierównością

(51) $$x_1^2+\ldots+x_n^2-r^2\leqslant 0.$$

Jest to kula o promieniu r i środku w punkcie O. Na mocy tw. (5.2), str. 204, kule (50) i (51) mają zatem równe miary $\mathfrak{J}$. A więc

(11.2) *Miara kuli w $\mathcal{E}^n$ zależy tylko od promienia r.*

Oznaczmy przez $v_n(r)$ miarę $\mathfrak{J}$ kuli $\mathcal{K}'_n$ w $\mathcal{E}^n$. Udowodnimy za pomocą indukcji, że

$$v_n(r) = a_n r^n, \tag{11.3}$$

gdzie a_n jest liczbą stałą zależną tylko od n.

Dowód. Twierdzenie zachodzi dla $n=1$, gdyż kula $\mathcal{K}_1(r)$ jest odcinkiem $\langle -r, r\rangle$; zatem $v_1(r)=2r$ i $a_1=2$.

Załóżmy więc prawdziwość twierdzenia dla $n-1$. Z tw. (7.1), str. 207, mamy

$$v_n(r) = \int\limits_{\mathcal{K}_n(r)} \cdots \int 1\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{52}$$

Przyjmując $j=n-1$ w twierdzeniu (10.1), widzimy, że zbiór R'', czyli rzut kuli (51) na oś x_n, jest odcinkiem $\langle -r, r\rangle$; zbiór zaś $A''(x_n)$ jest kulą w przestrzeni $\mathcal{E}^{n-1}$, określoną nierównością

$$x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - (r^2 - x_n^2) \leqslant 0,$$

a więc kulą $\mathcal{K}'_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2})$; zatem

$$v_n(r) = \int_{-r}^{r} \Bigg[\int\limits_{\mathcal{K}'_{n-1}(\sqrt{r^2-x_n^2})} \cdots \int 1\, dx_1 \ldots dx_{n-1} \Bigg] dx_n.$$

Całka w [ ] równa się mierze kuli w $\mathcal{E}^{n-1}$ o promieniu $\sqrt{r^2-x_n^2}$. Na mocy założenia prawdziwości wzoru (11.3) dla $n-1$ całka ta wynosi zatem $a_{n-1}(\sqrt{r^2-x_n^2})^{n-1}$, skąd

$$v_n(r) = \int_{-r}^{r} a_{n-1} (\sqrt{r^2-x_n^2})^{n-1} dx_n.$$

Podstawiając $x_n = r\cos\varphi$, otrzymujemy

$$v_n(r) = a_{n-1} r^n \int_0^{\pi} \sin^n \varphi\, d\varphi = 2a_{n-1} r^n \int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi\, d\varphi.$$

Tym samym tw. (11.3) jest dowiedzione.

Udowodniliśmy zarazem, że $v_n(r)$ jest postaci (11.3), gdzie

(53) $$\alpha_n = 2\alpha_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n\varphi\, d\varphi = 2\alpha_{n-1}I_n.$$

Udowodnimy teraz, że

(11.4) $$v_{2n}(r) = \frac{\pi^n r^{2n}}{n!} \quad i \quad v_{2n+1}(r) = \frac{2^n\pi^n r^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)} \quad dla\ n\geqslant 1.$$

Dowód. Obliczając całkę $J_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n\varphi\, d\varphi$, dostajemy¹) dla $n\geqslant 1$:

(54) $$I_1 = 1, \quad I_{2n} = \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}, \quad I_{2n-1} = \frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2n+1}.$$

Podstawiając w (6) $n-1$ zamiast n, dostajemy $\alpha_{n-1} = 2\alpha_{n-2}I_{n-1}$, skąd na mocy (6) $\alpha_n = 2^2\alpha_{n-2}I_nI_{n-1}$, zatem:

$$\alpha_{2n} = 2^2\alpha_{2n-2}I_{2n}I_{2n-1}, \qquad \alpha_{2n+1} = 2^2\alpha_{2n-1}I_{2n+1}I_{2n},$$

a więc na mocy (7)

$$\alpha_{2n} = 2^2\alpha_{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{n}\,\alpha_{2n-2}, \qquad \alpha_{2n+1} = 2^2\alpha_{2n-1}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{2\pi}{2n+1}\cdot\alpha_{2n-1}.$$

Ponieważ $\alpha_1 = 2$ i $\alpha_2 = \pi$, otrzymujemy z powyższych wzorów redukcyjnych dla $n\geqslant 1$

$$\alpha_{2n} = \frac{\pi^n}{n!}, \qquad \alpha_{2n+1} = \frac{2^n\pi^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)},$$

skąd na mocy (11.3) wynika (11.4), c. b. d. d.

¹) P. S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom II, str. 158, Książnica Atlas, Wrocław 1949 (przedruk wydania z 1931 r.).