Dr STEFAN BANACH
PROFESOR UNIWERSYTETU JANA KAZIMIERZA WE LWOWIE

TEORJA OPERACYJ

TOM I

OPERACJE LINJOWE

WYDAWNICTWO KASY IM. MIANOWSKIEGO
INSTYTUTU POPIERANIA NAUKI
WARSZAWA — 1931 — PAŁAC STASZICA

DZIEŁO TO
POŚWIĘCAM
MOJEJ ŻONIE

DRUKARNIA M. GARASIŃSKI W WARSZAWIE

PRZEDMOWA.

Teorja operacyj, stworzona przez V. Volterrę, zajmuje się badaniem funkcyj, określonych w przestrzeniach o nieskończenie wielu wymiarach. Niema prawie dziedziny matematyki, gdzieby teorja powyższa nie wnikała w sposób istotny. Dość wspomnieć, że rachunek warjacyjny i teorja równań całkowych okazały się szczególnemi przypadkami ogólnych działów, zawartych w teorji operacyj. Piękność teorji operacyj leży głównie w tem, że w niej łączą się w harmonijną całość metody matematyki klasycznej z metodami matematyki nowożytnej. Teorja operacyj pozwala często interpretować twierdzenia teorji mnogości lub topologji w sposób zupełnie nieoczekiwany. Twierdzenie np. z topologji o stałym punkcie daje się (jak zauważyli Birkhoff i Kellogg), przy pomocy teorji operacyj przetłumaczyć na twierdzenie klasyczne o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych. Są działy matematyki, których głębsze zrozumienie możliwe jest tylko przy pomocy znajomości teorji operacyj. Takiemi działami są: teorja funkcyj zmiennej rzeczywistej, równania całkowe, rachunek warjacyjny i t. p.

Jeżeli zwrócimy uwagę na piękno, tkwiące w teorji operacyj, to pomijając nawet jej liczne zastosowania (które są nieistotne dla oceny piękna samej teorji), możemy ją słusznie zaliczyć do najpiękniejszych teorji matematyki.

Po tem wszystkiem nie zdziwi nas zdanie p. J. Hadamarda, że teorja operacyj przedstawia najpotężniejszą metodę badań matematyki nowożytnej.

Tom pierwszy niniejszego dzieła stanowi ustęp z algebry teorji operacyj. W tomie tym zajmuję się badaniem t. zw. operacyj linjowych. Odpowiada to w algebrze badaniu form linjowych kształtu: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$.

W odpowiednich ustępach podaję zastosowania, otrzymanych twierdzeń, do rozmaitych dziedzin matematyki jak np. do teorji funkcyj zmiennej rzeczywistej, szeregów ortogonalnych, teorji sumacyj, równań całkowych i t. p. Przy twierdzeniach podaję zawsze autora, o ile tylko jest mi znanym.

Jest tylko kilka dzieł, poświęconych teorji operacyj. Oto najważniejsze:

1. V. Volterra: *Leçons sur les fonctions de lignes,* (Coll. Borel), Gauthier-Villars, Paris, 1913.

2. V. Volterra: *Theory of Functionals,* Blackie, London and Glasgow, 1930.

3. P. Lévy: *Leçons d'analyse fonctionnelle,* (Coll. Borel), Gauthier-Villars, Paris, 1922.

W książce (2) podana jest również literatura.

Przystępuję do miłego obowiązku złożenia podziękowania tym wszystkim, którzy służyli mi radą i pomocą przy redakcji tego tomu, a w szczególności:

p. Dr. H. Auerbachowi za częściową redakcję wstępu,

p. S. Mazurowi za wybitną pomoc użyczoną przy redakcji tej książki, a w szczególności przy redakcji uwag, znajdujących się na końcu tego tomu,

p. Dr. S. Saksowi, Docentowi Uniw. Warszawskiego za cenne uwagi i poprawki, podane w czasie druku, które przyczyniły się do uproszczenia i wyjaśnienia wielu kwestyj, jakoteż do usunięcia wielu błędów i usterek,

Kasie im. Mianowskiego za podjęcie się wydania tego dzieła.

Stefan Banach

Lwów dn. 20. VII. 1931.

WSTĘP.

Podamy tu pewne definicje i twierdzenia, z których w dalszym ciągu będziemy korzystać. Przyjmujemy, że czytelnik posiada znajomość teorji miary i całki Lebesgue'a[1]).

§ 1. *Niektóre twierdzenia z teorji całki Lebesgue'a*[2]).

Jeżeli funkcje mierzalne $x_n(t)$ są wspólnie ograniczone, a ciąg $\{x_n(t)\}$ jest prawie wszędzie zbieżny do funkcji $x(t)$ w $<a, b>$, to

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt.$$

Ogólniej, jeżeli istnieje funkcja całkowalna $\varphi(t) \geqslant 0$, dla której $|x_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, to funkcja graniczna jest również całkowalna i spełnia powyższy związek.

Jeżeli $\{x_n(t)\}$ jest ciągiem, niemalejącym funkcyj całkowalnych w $<a, b>$, zbieżnym do funkcji $x(t)$, to

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt,$$

o ile funkcja $x(t)$ jest całkowalna, zaś w przeciwnym razie:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt = +\infty.$$

---

[1]) Por. np. C. de la Vallé'e Poussin, Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Paris. G.-Villars, 1916, lub H. Lebesgue, Leçons sur l'Intégration, 2 éd., Paris, G.-Villars, 1928.

[2]) Por. np. Poussin, l. c., p. 49.

Jeżeli ciąg $\{x_n(t)\}$ funkcyj całkowalnych z p-tą potęgą ($p \geqslant 1$) jest prawie wszędzie zbieżny do funkcji $x(t)$, a nadto

$$\int_a^b |x_n(t)|^p \, dt < K \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

to również funkcja $x(t)$ jest całkowalna z p-tą potęgą[1]).

§ 2. *Nierówności dla funkcyj całkowalnych z p-tą potęgą*[2]).

Klasę funkcyj całkowalnych wraz z p-tą potęgą ($p > 1$), w przedziale $< a, b >$ oznaczamy przez $(L^{(p)})$. Liczbie p przyporządkowujemy liczbę q związaną z nią równaniem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, którą nazywamy wykładnikiem sprzężonym do p. Przy $p = 2$ jest również $q = 2$.

Jeżeli $x(t) \subset (L^{(p)})$, $y(t) \subset (L^{(q)})$, to funkcja $x(t) \,.\, y(t)$ jest całkowalna, a dla jej całki zachodzi nierówność następująca:

$$\left| \int_a^b x \,.\, y \, dt \right| \leqslant \left(\int_a^b |x|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}};$$

W szczególności dla $p = 2$ mamy

$$\left| \int_a^b x\, y \, dt \right| \leqslant \left(\int_a^b x^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b y^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Jeżeli funkcje $x(t), y(t)$ należą do $(L^{(p)})$, to również $x(t) + y(t)$ należy do $(L^{(p)})$ i

$$\left(\int_a^b |x + y|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tym nierównościom odpowiadają następujące nierówności arytmetyczne:

---

[1]) Por. E. W. Hobson. The Theory of Functions of a real variable etc., 2 wyd., Cambridge, 1921/26, vol. I, p. 300.

[2]) Por. np. Hobson, l. c., I., p. 588.

$$\left|\sum_{v=1}^{n} a_v b_v\right| \leqslant \left(\sum_{v=1}^{n} |a_v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{v=1}^{n} |b_v|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{v=1}^{n} |a_v + b_v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{v=1}^{n} |a_v|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{v=1}^{n} |b_v|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dla $p = 2$ pierwsza z nich daje znaną nierówność Schwarza:

$$\left|\sum_{v=1}^{n} a_v b_v\right| \leqslant \left(\sum_{v=1}^{n} a_v^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{v=1}^{n} b_v^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Do każdej funkcji $x(t)$ całkowalnej z p-tą potęgą $(p \geqslant 1)$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła $\varphi(t)$ taka, że

$$\int_a^b |x - \varphi|^p < \varepsilon \text{ [1]}.$$

§ 3. *Zbieżność asymptotyczna.*

Ciąg $\{x_n(t)\}$ funkcyj mierzalnych w pewnym zbiorze nazywamy zbieżnym asymptotycznie, lub zbieżnym wedle miary (en mesure) do funkcji $x(t)$, określonej w tym zbiorze, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} m\, E\,(|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon) = 0 \text{ [2]}$$

dla każdego $\varepsilon > 0$.

Ciąg $\{x_n(t)\}$ zbieżny asymptotycznie do funkcji $x(t)$ zawiera zawsze ciąg częściowy zbieżny prawie wszędzie (w zwykłem znaczeniu) do tej funkcji.

Na to, by dany ciąg $\{x_n(t)\}$ był zbieżny asymptotycznie do pewnej funkcji, potrzeba i wystarcza, by

$$\lim_{p,\, q\to\infty} m\, E\,(|x_p(t) - x_q(t)| > \varepsilon) = 0$$

przy każdem $\varepsilon > 0$ [3].

---

[1]) Por. np. Hobson, l. c., II., p. 250.

[2]) $m\, E\,(|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon)$ oznacza miarę zbioru wartości t, dla których $|x_n(t) - x(t)| > \varepsilon$. Podobnie niżej.

[3]) Por. np. Hobson l. c. II. p. 242—244.

§ 4. *Zbieżność przeciętna.*

Niech $\{x_n(t)\}$ będzie ciągiem funkcyj całkowalnych z p-tą potęgą ($p \geqslant 1$) w przedziale $< a, b >$. Mówimy, że ciąg ten jest zbieżny przeciętnie z p-tą potęgą do funkcji $x(t)$, również całkowalnej z p-tą potęgą, jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b | x_n(t) - x(t) |^p \, dt = 0 .$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym dla istnienia takiej funkcji $x(t)$ jest:

$$\lim_{i, k \to \infty} \int_a^b | x_i(t) - x_k(t) |^p \, dt = 0 .$$

Funkcja $x(t)$ jest wówczas określona jednoznacznie, poza zbiorem o mierze zero.

Ciąg zbieżny przeciętnie do jakiejś funkcji jest do niej również asymptotycznie zbieżny, zawiera zatem zawsze ciąg częściowy zbieżny do tej funkcji prawie wszędzie w zwykłem znaczeniu[1]).

§ 5. *Całka Stieltjesa*[2]).

Oznaczmy przez $x(t)$ funkcję ciągłą, zaś przez $\alpha(t)$ funkcję o wahaniu ograniczonem w przedziale $< a, b >$. Jeżeli podzielimy przedział $< a, b >$ na przedziały częściowe przy pomocy liczb

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_n = b ,$$

a w każdym z przedziałów częściowych obierzemy dowolną liczbę ϑ_i, to, podobnie jak przy definicji całki Riemanna, możemy utworzyć sumę:

$$S = \sum_{i=1}^{n} x(\vartheta_i) \, [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})] \qquad [t_i \geqslant \vartheta_i \geqslant t_{i-1}],$$

---

1) Por. np. Hobson, l. c., II, p. 245.

2) Por. np. Lebesgue, Leçons, Chap. XI.

Udowadnia się, że dla każdego ciągu podziałów, dla którego największy przedział częściowy dąży do zera, sumy S posiadają granicę, zawsze tęsamą, którą oznaczamy przez

$$\int_a^b x(t)\, d\,\alpha(t)$$

i nazywamy całką Stieltjesa.

Całka ta posiada następujące własności:

$$\int_a^b x(t)\, d\,\alpha(t) = -\int_b^a x(t)\, d\,\alpha(t),$$

$$\int_a^b x(t)\, d\,\alpha(t) + \int_b^c x(t)\, d\,\alpha(t) = \int_a^c x(t)\, d\,\alpha(t),$$

$$\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]\, d\,\alpha(t) = \int_a^b x_1(t)\, d\,\alpha(t) + \int_a^b x_2(t)\, d\,\alpha(t).$$

Pierwsze twierdzenie o średniej wartości wyraża się tu przez nierówność:

$$\left|\int_a^b x(t)\, d\,\alpha(t)\right| \leqslant M\, V,$$

przyczem M oznacza górny kres bezwzględnej wartości $|x(t)|$, zaś V całkowite wahanie funkcji $\alpha(t)$ w $< a, b >$.

Jeżeli funkcja $\alpha(t)$ jest absolutnie ciągła, to całkę Stieltjesa można wyrazić przez całkę Lebesgue'a w sposób następujący:

$$\int_a^b x(t)\, d\,\alpha(t) = \int_a^b x(t)\, \alpha'(t)\, dt.$$

Jeżeli $\alpha(t)$ jest funkcją ściśle rosnącą [t. zn. $\alpha(t') < \alpha(t'')$ dla $a \leqslant t' < t'' \leqslant b$] wówczas, kładąc dla każdego s odcinka $< \alpha(a), \alpha(b) >$:

$\beta(s) =$ górny kres wartości t, dla których $s \geqslant \alpha(t)$, otrzymujemy

$$\int_a^b x(t)\,d\alpha(t) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,ds$$ [1])

D o w ó d.

Mamy $\qquad \beta[\alpha(t)] = t \qquad a \leqslant t \leqslant b \qquad \ldots. \quad (1)$

Ponieważ funkcja $\beta(s)$ jest funkcją rosnącą i przyjmuje wszystkie wartości przedziału $< \beta[\alpha(a)] = a, \ \beta[\alpha(b)] = b >$, przeto funkcja $\beta(s)$ jest ciągła. Wynika stąd, że funkcja $x[\beta(s)]$ jest również ciągłą.

Utwórzmy dowolny podział (δ) odcinka (a, b) przy pomocy liczb $a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$. Połóżmy $\alpha(t_i) = \vartheta_i$.

Mamy

$$I_i = \int_{\vartheta_{i-1}}^{\vartheta_i} x[\beta(s)]\,ds = (\vartheta_i - \vartheta_{i-1})\,x(\vartheta_i'),$$

gdzie $\vartheta_i' = \beta(s_i')$, przyczem $\vartheta_{i-1} \leqslant s_i' \leqslant \vartheta_i$.

Oczywiście $\beta(\vartheta_{i-1}) \leqslant \beta(s_i') = \vartheta_i' \leqslant \beta(\vartheta_i)$.

Na mocy (1) $\beta(\vartheta_{i-1}) = \beta[\alpha(t_{i-1})] = t_{i-1}$, oraz analogicznie $\beta(\vartheta_i) = t_i$.

Zatem

$$t_{i-1} \leqslant \vartheta_i' \leqslant t_i\,.$$

A więc

$$I_i = x(\vartheta_i')\,[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})]\,.$$

Stąd

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,ds = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} x(\vartheta_i')\,[\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})].$$

Ponieważ ostatnia suma zdąża do $\int_a^b x(t)\,d\alpha(t)$, gdy maximum długości przedziałów, wchodzących w skład podziału (δ), dąży do zera, przeto

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x[\beta(s)]\,ds = \int_a^b x(t)\,d\alpha(t).$$

Jeżeli teraz $\alpha(t)$ jest dowolną funkcją o wahaniu ograniczonem, to możemy ją zawsze przedstawić jako różnicę $\alpha_1(t) - \alpha_2(t)$, gdzie

[1]) Por. L e b e s g u e, l. c. p. 258—260.

$\alpha_1(t)$ i $\alpha_2(t)$ są funkcjami ściśle rosnącemi. Oznaczając, jak poprzednio przez $\beta_1(s)$, $\beta_2(s)$ odpowiednie funkcje, otrzymamy

$$\int_a^b x(t)\, d\,\alpha(t) = \int_a^b x(t)\, d\,\alpha_1(t) - \int_a^b x(t)\, d\,\alpha_2(t) =$$

$$\int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\beta_1(s)]\, ds - \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\beta_2(s)]\, ds.$$

Jeżeli ciąg $\{x_n(t)\}$ funkcyj ciągłych jest wspólnie ograniczony i zdąża wszędzie do funkcji ciągłej $x(t)$, wówczas dla każdej funkcji $\alpha(t)$ o wahaniu ograniczonem mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\, d\,\alpha(t) = \int_a^b x(t)\, d\,\alpha(t).$$

Jest bowiem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x_n[\beta_1(s)]\, ds = \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} x[\beta_1(s)]\, ds,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x_n[\beta_2(s)]\, ds = \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} x[\beta_2(s)]\, ds.$$