ROZDZIAŁ I.

Zbiory i operacje mierzalne (B) w przestrzeniach metrycznych.

§ 1. O danym zbiorze niepustym E powiadamy, że tworzy *przestrzeń metryczną* lub *przestrzeń (D)*, jeśli każdej parze uporządkowanej jego elementów x, y przyporządkowana jest pewna liczba (x, y), spełniająca następujące warunki[1]):

1) $(x, x) = 0, \quad (x, y) > 0$ przy $x \neq y$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(x, z) \leqslant (x, y) + (y, z)$.

Liczba (x, y) nazywa się *odległością* punktów (elementów) x, y. Ciąg punktów $\{x_n\}$ określamy jako *zbieżny*[2]), gdy

$$\lim_{p, q \to \infty} (x_p, x_q) = 0; \tag{1}$$

powiadamy, że jest on *zbieżny do punktu* x_0, pisząc $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, skoro

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, x_0) = 0. \tag{2}$$

[1]) Łatwo zauważyć, że warunki 1 — 3 możnaby zastąpić przez warunki: 1* $(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = y$; 2* $(x, z) \leqslant (x, y) + (z, y)$.

[2]) Ciągi zbieżne nazywa się zwykle ciągami spełniającemi *warunek Cauchy'ego* t. j. warunek (1).

Punkt x_0 nazywamy wtedy *granicą* ciągu $\{x_n\}$.

Łatwo widzieć, że relacja (2) pociąga za sobą (1); mamy bowiem stale

$$(x_p, x_q) \leqslant (x_p, x_0) + (x_q, x_0).$$

Gdy więc dany ciąg punktów jest zbieżny do pewnego punktu, to temsamem jest zbieżny; rozumie się, że niezawsze naodwrót. Przestrzeń (D) o tej własności, że każdy ciąg punktów zbieżny jest zbieżny do pewnego punktu, nazywamy *zupełną*. Przestrzenie euklidesowe stanowią proste przykłady przestrzeni D zupełnych. Wyszczególnimy tu szereg innych ważnych przykładów tego rodzaju.

1. Niech (S) oznacza zbiór funkcyj mierzalnych w przedziale $< 0,1 >$. Przyporządkujmy każdej parze uporządkowanej x, y elementów tego zbioru liczbę [1])

$$(x, y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|}\, dt.$$

Łatwo sprawdzamy, że spełnione są podane poprzednio warunki 1 — 3. Co dotyczy warunków 1 i 2 jest to widoczne (nie rozróżniamy przytem pomiędzy funkcjami różniącemi się jedynie na zbiorze o mierze zero); aby przekonać się o tem, że warunek 3 jest również spełniony, wystarczy zauważyć, że przy dowolnych liczbach a, b

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Zbiór (S) tworzy więc przestrzeń (D); jest ona zupełna. Zbieżność bowiem ciągu punktów $\{x_n\}$ (do punktu x_0) sprowadza się do zbieżności według miary ciągu funkcyj $\{x_n(t)\}$ (do funkcji $x_0(t)$) w $< 0,1 >$.

---

[1]) Kładziemy $x = x(t)$, $y = y(t)$ oraz $x_n = x_n(t)$, $x_0 = x_0(t)$; podobnie w przykładach 2 — 5.

2. Oznaczmy przez (M) zbiór funkcyj mierzalnych i ograniczonych w $<0,1>$. Kładąc dla każdych dwóch elementów x, y tego zbioru

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \text{istotne } |x(t) - y(t)|,$$

uzyskujemy przestrzeń (D) zupełną. Zbieżność ciągu punktów $\{x_n\}$ (do punktu x_0) oznacza zbieżność jednostajną ciągu funkcyj $\{x_n(t)\}$ (do funkcji $x_0(t)$) prawie wszędzie w $<0,1>$.

3. Niech $(L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ oznacza zbiór funkcyj całkowalnych wraz z p-tą potęgą w przedziale $<0,1>$. Kładąc

$$(x, y) = \left[\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

widzimy, że zbiór $(L^{(p)})$ stanowi przestrzeń (D) zupełną. Na to, by ciąg punktów $\{x_n\}$ był zbieżny (do punktu x_0), potrzeba i wystarcza, by ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ był zbieżny przeciętnie z p-tą potęgą (do funkcji $x_0(t)$) w $<0,1>$.

4. Uważajmy zbiór (C) funkcyj ciągłych w $<0,1>$ i niech dla każdych dwóch jego elementów x, y

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|.$$

Zbiór (C) jest przestrzenią (D) zupełną; przytem zbieżność ciągu punktów $\{x_n\}$ (do punktu x_0) sprowadza się do zbieżności jednostajnej ciągu funkcyj $\{x_n(t)\}$ (do funkcji $x_0(t)$) w przedziale $<0,1>$.

5. Niech $(C^{(p)})$ (p dowolne naturalne) będzie zbiorem funkcyj posiadających p-tą pochodną ciągłą w przedziale $<0,1>$. Kładąc

$$(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x^{(p)}(t) - y^{(p)}(t)|,$$

uzyskujemy przestrzeń (D) zupełną. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by ciąg punktów $\{x_n\}$ był zbieżny (do punktu x_0), jest to, by zarówno ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ jak i $\{x_n^{(p)}(t)\}$ był zbieżny jednostajnie (odpowiednio do funkcji $x_0(t)$, $x_0^{(p)}(t)$) w $<0,1>$.

6. Niech (s) oznacza zbiór wszystkich ciągów liczbowych; połóżmy dla każdych dwóch jego elementów x, y [1])

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}.$$

Zbiór (s) stanowi przestrzeń (D) zupełną. Zbieżność ciągu punktów $\{x_n\}$ (do punktu x_0) oznacza, że każdy z ciągów $\{\xi_{n,m}\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ jest zbieżny (do ξ_m), gdzie $x_n = \{\xi_{n,m}\}$ $(x_0 = \{\xi_m\})$.

7. Oznaczmy przez (m) zbiór ciągów ograniczonych i niech

$$(x, y) = \underset{n=1,2,\ldots}{\text{kres górny}} |\xi_n - \eta_n|.$$

Zbiór (m) stanowi widocznie przestrzeń (D) zupełną.

8. Niech $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ będzie zbiorem ciągów liczbowych $\{\xi_n\}$, takich, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$ jest zbieżny. Kładąc dla każdych dwóch jego elementów x, y

$$(x, y) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \eta_n|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

uzyskujemy przestrzeń (D) zupełną.

9. Oznaczając przez (c) zbiór ciągów zbieżnych i określając dla każdych dwóch jego elementów x, y liczbę (x, y) tak jak w przypadku zbioru (m), wnioskujemy łatwo, że zbiór (c) stanowi przestrzeń (D) zupełną.

§ 2. Niech E oznacza jakąkolwiek przestrzeń (D), zaś G będzie jakimś zbiorem punktów tej przestrzeni. Powiadamy, że punkt x_0 jest *punktem skupienia* zbioru G, jeśli istnieje ciąg punktów $\{x_n\}$, taki, że $x_n \subset G$, $x_n \neq x_0$ oraz $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru G nazywamy jego *pochodną*, oznaczamy ją przez G'; zbiór $\overline{G} = G + G'$ nosi nazwę *domknięcia* zbioru G. Zbiór G określamy jako *zamknięty* gdy $G' \subset G$, jako

---

[1]) Kładziemy $x = \{\xi_n\}$ $y = \{\eta_n\}$; podobnie w przykładach 7—9.

doskonały gdy $G' = G$. O zbiorze G powiadamy, że jest *otwarty*, gdy dopełnienie jego jest zbiorem zamkniętym. Każdy zbiór otwarty nazywa się *otoczeniem* każdego swojego punktu.

Zbiór wszystkich punktów x, takich, że

$$(x, x_0) \leqslant r_0,$$

gdzie x_0 oznacza dany punkt, zaś r_0 liczbę > 0, nazywamy *kulą*; x_0 jest jej *środkiem*, r_0 *promieniem*. Zbiór wszystkich punktów x takich, że

$$(x, x_0) < r_0,$$

przyczem x_0, r_0 mają znaczenie poprzednie, określamy jako *kulę otwartą*; x_0 nazywamy znowu jej środkiem, r_0 promieniem. O zbiorze G powiadamy, że jest *wszędziegęsty*, gdy $\overline{G} = E$; mówimy, że jest *nigdziegęsty*, skoro domknięcie jego nie zawiera żadnej kuli.

Przestrzeń E nazywamy *ośrodkową* [1]), jeżeli zawiera zbiór przeliczalny wszędziegęsty.

Zbiór G nazywa się *pierwszej kategorji*, jeśli jest sumą przeliczalnej mnogości zbiorów nigdziegęstych; w razie przeciwnym powiadamy, że zbiór G jest *drugiej kategorji*. Zbiór G jest *pierwszej kategorji w punkcie* x_0, gdy istnieje otoczenie O punktu x_0 takie, że zbiór $G \cdot O$ jest pierwszej kategorji; jeżeli żadne otoczenie punktu x_0 własności takiej nie posiada, to mówimy, że zbiór G jest *drugiej kategorji w punkcie* x_0.

Jest jasne, że, gdy zbiór G jest pierwszej kategorji, to jest pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie; co więcej — w każdym punkcie przestrzeni E. Zachodzi również

Twierdzenie 1. *Zbiór G, który jest pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie, jest zbiorem pierwszej kategorji.*

D o w ó d. Uważajmy klasę wszystkich kul otwartych K o tej

---

[1]) Klasę przestrzeni tego rodzaju badał pierwszy p. M. F r é c h e t; termin „ośrodkowa" podał p. W. S i e r p i ń s k i, jako polski odpowiednik „séparable".

własności, że zbiór GK jest pierwszej kategorji; ustawmy te kule w ciąg pozaskończony

$$K_0, K_1, \ldots K_\xi, \ldots \qquad (\xi < \alpha).$$

Niech $P_\xi = GK_\xi$, oraz

$$Q_0 = P_0, \quad Q_\xi = P_\xi - \sum_{\eta<\xi} K_\eta \quad \text{dla} \quad 0 < \xi < \alpha. \tag{1}$$

Według założenia każdy ze zbiorów P_ξ jest pierwszej kategorji; wobec (1) tę samą własność mają zbiory Q_ξ.

Niech tedy

$$Q_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} Q_\xi^{(n)}, \tag{2}$$

gdzie każdy ze zbiorów $Q_\xi^{(n)}$ jest nigdziegęsty; połóżmy

$$G_n = \sum_{\xi<\alpha} Q_\xi^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Łatwo widzieć, że

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n; \tag{4}$$

twierdzimy, że każdy ze zbiorów G_n jest nigdziegęsty. Istotnie w przeciwnym razie istniałoby naturalne n_0, takie, że zbiór $\overline{G}_{n_0}$ zawierałby jakąś kulę otwartą K. Niech ξ_0 oznacza najmniejszą liczbę porządkową o tej własności, że

$$KK_{\xi_0} \neq 0;$$

liczba taka istnieje, bo, gdyby stale było $KK_\xi=0$, to z uwagi na

$$G \subset \sum_{\xi<\alpha} K_\xi,$$

mielibyśmy $GK = 0$, co jest niemożliwe, skoro $K \subset \overline{G}_{n_0}$, a według (4), $G_{n_0} \subset G$. Oznaczmy przez K^* jakąkolwiek kulę otwartą zawartą w zbiorze KK_{ξ_0}. Mamy

$$K^* Q_\xi^{(n_0)} = 0 \quad \text{dla} \quad \xi < \alpha, \ \xi \neq \xi_0. \tag{5}$$

Gdy bowiem $\xi < \xi_0$, to $KK_\xi = 0$, a pozatem $K^* \subset K$ oraz, na mocy (1) i (2), $Q_\xi^{(n_0)} \subset K_\xi$; w przypadku zaś, gdy $\xi > \xi_0$, dostajemy z (1) $K_{\xi_0} Q_\xi = 0$, tak, że wystarczy uwzględnić jeszcze to, że $K^* \subset K_{\xi_0}$ i, wobec (2), $Q_\xi^{(n_0)} \subset Q_\xi$. Z (3) i (5) wynika, że

$$K^* G_{n_0} = K^* Q_{\xi_0}^{(n_0)}$$

oraz

$$\overline{K^* G_{n_0}} \subset \overline{Q_{\xi_0}^{(n_0)}}; \tag{6}$$

z drugiej strony łatwo sprawdzamy, że

$$K^* \subset \overline{K^* G_{n_0}}. \tag{7}$$

Relacje (6), (7) dowodzą, że kula otwarta K^* jest zawarta w zbiorze $\overline{Q_{\xi_0}^{(n_0)}}$; jest to sprzeczne z tem, że zbiór $Q_{\xi_0}^{(n_0)}$ jest nigdziegęsty.

Uwaga 1. *Gdy zbiór G jest drugiej kategorji, to istnieje kula K o tej własności, że w każdym jej punkcie zbiór G jest drugiej kategorji.* Istotnie, niech G_0 oznacza zbiór tych punktów z G, w których zbiór G jest pierwszej kategorji. Na mocy twierdzenia 1 zbiór G_0 jest widocznie pierwszej kategorji; temsamem zbiór $G - G_0$ jest drugiej kategorji. Każda kula K zawarta w domknięciu zbioru $G - G_0$ posiada własność żądaną.

§ 3. Załóżmy, że E jest przestrzenią (D) zupełną. Udowodnimy

Lemmat. *Gdy dany jest ciąg kul $\{K_n\}$, taki, że stale $K_{n+1} \subset K_n$ i przytem $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, gdzie r_n oznacza promień kuli K_n, to istnieje punkt wspólny wszystkim kulom K_n.*

Dowód. Niech x_n oznacza środek kuli K_n. Dla $p < q$ mamy

$$x_q \subset K_q \subset K_p,$$

skąd

$$(x_p, x_q) \leqslant r_p, \tag{1}$$

co dowodzi, że ciąg punktów $\{x_n\}$ jest zbieżny. Kładąc $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x$, mamy przy $p < q$, na mocy (1),

$$(x_p, x_0) \leqslant (x_p, x_q) + (x_q, x_0) \leqslant r_p + (x_q, x_0),$$

a zatem

$$(x_p, x_0) \leqslant r_p;$$

wobec tego, że p jest dowolne, punkt x_0 jest wspólny wszystkim kulom K_n.

Prostym wnioskiem z powyższego lemmatu jest

Twierdzenie 2. *Przestrzeń E jest zbiorem drugiej kategorji.*

Dowód. Przypuśćmy, że

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n, \tag{1}$$

przyczem każdy ze zbiorów E_n jest nigdziegęsty. Istnieje widocznie ciąg kul $\{K_n\}$ o własnościach następujących:

a) $K_1 E_1 = 0$, promień kuli K_1 jest < 1;

b) $K_{n+1} \subset K_n$, $K_{n+1} E_{n+1} = 0$, promień kuli K_{n+1} jest $< \dfrac{1}{n+1}$.

Na mocy lemmatu istnieje punkt x_0, który należy do wszystkich K_n, a więc, który z uwagi na $K_n E_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nie mógłby należeć do żadnego ze zbiorów E_n. Jest to jednak oczywiście sprzeczne z (1).

§ 4. Niech E będzie przestrzenią (D), zaś E^* dowolnym niepustym zbiorem punktów tej przestrzeni. Zachowując dla elementów tego zbioru przyjętą w przestrzeni E definicję odległości, uzyskujemy pewną przestrzeń (D). Otóż, gdy zbiór $G \subset E^*$ jest nigdziegęsty, skoro rozpatrujemy go w przestrzeni E^*, to powiadamy, że jest *nigdziegęsty względem (zbioru) E^**; jedynie w tym przypadku, gdy $E^* = E$, zwykło się opuszczać przytem słowa „względem (zbioru) E". Analogicznie postępujemy, gdy chodzi o inne określenia, które wprowadziliśmy w § 2.

Z twierdzenia 1 wynika, że gdy zbiór G jest pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie względem zbioru E^*, to jest zbiorem pierwszej kategorji względem E^*. Podobnie z twierdzenia 2 wynika, że, gdy przestrzeń E jest zupełna, a zbiór E^* zamknięty, to zbiór E^* jest drugiej kategorji względem siebie.

§ 5. Niech E oznacza znowu jakąkolwiek przestrzeń (D). Uważajmy najmniejszą klasę K zbiorów w tej przestrzeni, spełniającą warunki następujące:

1) każdy zbiór zamknięty należy do K;

2) suma przeliczalnej mnogości zbiorów, należących do K, należy do K;

3) dopełnienie zbioru, należącego do K, należy do K.

Zbiory klasy K nazywamy zbiorami *mierzalnemi* (B). Pokażemy, że zbiory mierzalne (B) spełniają t. zw. *warunek Baire'a*. O danym zbiorze P powiadamy, że spełnia warunek Baire'a, jeżeli każdy zbiór doskonały $G\ (\neq 0)$ zawiera punkt x_0 o tej własności, że conajmniej jeden ze zbiorów PG, $G-P$ jest pierwszej kategorji w punkcie x_0 względem zbioru G.

Twierdzenie 3. *Każdy zbiór mierzalny (B) spełnia warunek Baire'a.*

Dowód. Łatwo zauważyć, że każdy zbiór zamknięty spełnia warunek Baire'a oraz że dopełnienie zbioru, spełniającego warunek Baire'a, spełnia warunek Baire'a. Wystarczy wobec tego jeszcze okazać, że suma przeliczalnej mnogości zbiorów, spełniających warunek Baire'a, spełnia warunek Baire'a. Przypuśćmy, że zbiory ciągu $\{P_n\}$ spełniają warunek Baire'a i niech G oznacza dowolny zbiór doskonały $\neq 0$; niech

$$P=\sum_{n=1}^{\infty} P_n. \tag{1}$$

Jeżeli zbiór PG jest pierwszej kategorji względem G, to w każdym punkcie x_0 zbioru G jest pierwszej kategorji względem G. Załóżmy, że PG jest drugiej kategorji względem G; temsamem, wobec (1), jakiś zbiór GP_{n_0} jest drugiej kategorji względem G. Na mocy uwagi 1, istnieje kula otwarta K względem G, o tej własności, że w każdym jej punkcie zbiór GP_{n_0} jest drugiej kategorji względem G. Z łatwością sprawdzamy, że zbiór $\overline{K}P_{n_0}$ jest drugiej kategorji względem $\overline{K}$ w każdym punkcie należącym do $\overline{K}$. Ponieważ zbiór $\overline{K}$ jest doskonały $(\neq 0)$, zaś zbiór P_{n_0} posiada własność B a i r e'a, wnioskujemy tedy o istnieniu punktu $x_0 \subset \overline{K}$, takiego, że zbiór $\overline{K} - P_{n_0}$ jest pierwszej kategorji w tym punkcie względem $\overline{K}$. Można jednak widocznie założyć, że nietylko $x_0 \subset \overline{K}$, lecz, że i $x_0 \subset K$; temsamem zbiór $G - P_{n_0}$ jest pierwszej kategorji w punkcie x_0 względem G. Ponieważ $G - P \subset G - P_{n_0}$, według (1), widać więc ostatecznie, że zbiór $G - P$ jest pierwszej kategorji w punkcie x_0 względem G. Każdy więc zbiór doskonały $G \neq 0$ zawiera punkt x_0, taki, że conajmniej jeden ze zbiorów PG, $G - P$ jest pierwszej kategorji w tym punkcie względem G; oznacza to, że zbiór P spełnia warunek B a i r e'a.

§ 6. Niech E i E_1 będą dowolnemi zbiorami niepustemi. Jeśli każdemu elementowi $x \subset E$ przyporządkowany jest pewien element $\subset E_1$ to powiadamy, że w zbiorze E określona jest *operacja*; element odpowiadający elementowi x nazywamy *wartością* tej operacji dla elementu x. Zbiór E określamy jako *dziedzinę* uważanej operacji, zbiór zaś wszystkich jej wartości jako jej *przeciwdziedzinę*. W przypadku szczególnym, gdy wartościami danej operacji są liczby, nazywamy ją zwykle *funkcjonałem*.

Załóżmy teraz, że zbiór E stanowi przestrzeń (D), i niech $U(x)$ będzie operacją, której dziedziną jest E, zaś przeciwdziedziną znowu jakaś przestrzeń (D). Powiadamy, że operacja $U(x)$ jest *ciągła w punkcie* x_0, jeżeli dla każdego ciągu punktów $\{x_n\}$ zbieżnego do punktu x_0 zachodzi $\lim_{n \to \infty} U(x_n) = U(x_0)$; mówimy, że operacja $U(x)$ jest *ciągła w* E, gdy jest ciągła w każdym punkcie tej przestrzeni. Gdy dany jest ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ określonych w E, i operacja $U_0(x)$ określona w tej przestrzeni—przyczem przeciwdziedzinami ich są części jakiejś przestrzeni (D)—to powiadamy, że ten ciąg operacji jest *zbieżny w punkcie* x_0 do operacji $U_0(x)$, jeśli ciąg punktów $\{U_n(x_0)\}$ jest zbieżny do punktu $U_0(x_0)$; mówimy, że ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ jest *zbieżny w* E do operacji $U_0(x)$, gdy jest zbieżny w każdym punkcie x tej przestrzeni do $U_0(x)$. Jeśli ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny w E do operacji $U_0(x)$, to tę ostatnią operację nazywamy *granicą w* E ciągu operacyj $\{U_n(x)\}$.

W przypadku, gdy wiadomo o jakiej przestrzeni mowa, używamy często terminu „operacja ciągła" zamiast „operacja ciągła w E"; analogicznie, jeśli chodzi o pozostałe terminy.

§ 7. Przypuśćmy, że E jest jakąś przestrzenią (D). Niech K będzie najmniejszą klasą operacji, których dziedziną jest E, których przeciwdziedziny zawarte są znowu w pewnej danej przestrzeni (D), i które przytem czynią zadość warunkom:

1) każda operacja ciągła należy do K;

2) granica ciągu zbieżnego operacji, należących do K, należy do K.

Operacje tej klasy noszą nazwę operacji *mierzalnych* (B). O danej operacji $U(x)$, której dziedziną jest przestrzeń E, zaś przeciwdziedziną również pewna przestrzeń (D), powiada się, że spełnia *warunek Baire'a*, jeśli dla każdego zbioru doskonałego niepustego $G \subset E$, będącego drugiej kategorji względem siebie, istnieje część G_0 zbioru G, pierwszej kategorji względem niego i taka, że operacja $U(x)$, rozpatrywana w przestrzeni $G - G_0$, jest w niej ciągła. Udowodnimy, że każda operacja mierzalna (B) spełnia warunek Baire'a.

Przypuśćmy, że w E określone są operacje $U_n(x)$ $(n = 1, 2, ..)$ oraz $U_0(x)$; przeciwdziedziny ich niech mieszczą się w pewnej przestrzeni (D). Udowodnimy

Lemmat. *Jeżeli ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny do operacji $U_0(x)$, i jeśli dla każdego n istnieje zbiór $E_n \neq E$ pierwszej kategorji, taki, że operacja $U_n(x)$, uważana w $E - E_n$, jest ciągła, wtedy istnieje zbiór E_0 pierwszej kategorji, taki, że*

1⁰
$$E - E_0 \subset E^* = E - \sum_{n-1}^{\infty} E_n, \tag{1}$$

2⁰ *warunki*

$$x_i \subset E^* \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad x_0 \subset E - E_0, \qquad \lim_{i \to \infty} x_i = x_0$$

pociągają

$$\lim_{i \to \infty} U_0(x_i) = U_0(x_0).$$

Dowód. Dla każdej pary liczb naturalnych m, n, oznaczmy przez $L_{n,m}$ zbiór wszystkich punktów x, takich, że

$$x \subset E^*, \quad \text{oraz} \quad (U_p(x), U_q(x)) \leqslant \frac{1}{m} \quad \text{dla } p, q \geqslant n. \tag{2}$$

Z uwagi, że ciąg operacji $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny, wynika, że

$$E^* = \sum_{n=1}^{\infty} L_{n,m} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Ponieważ, wobec (1), stale $E^* \subset E - E_n$, przeto każda z operacji $U_n(x)$ jest w E^* (o ile zbiór ten jest $\neq 0$) ciągła; ponadto zbiór $L_{n,m}$ był określony jako zbiór tych punktów x, dla których spełnione są relacje (2), więc

$$\overline{L}_{n,m} E^* \subset L_{n,m} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Niech $K_{n,m}$ oznacza sumę wszystkich kul otwartych, zawartych w zbiorze $\overline{L}_{n,m}$; zbiór $L_{n,m} - K_{n,m}$ jest oczywiście nigdziegęsty. A zatem, jeżeli położymy

$$H_m = \sum_{n=1}^{\infty} L_{n,m} K_{n,m} \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

to, wobec wynikającej z (3) relacji:

$$E^* - H_m \subset \sum_{n=1}^{\infty} (L_{n,m} - K_{n,m}),$$

każdy ze zbiorów $E^* - H_m$ jest pierwszej kategorji. Twierdzimy obecnie, że, jeżeli przy pewnem m_0

$$x_i \subset E^* \ (i = 1, 2, \ldots), \qquad x_0 \subset H_{m_0}, \qquad \lim_{i \to \infty} x_i = x_0 \tag{6}$$

wówczas

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} (U_0(x_i), U_0(x_0)) \leqslant \frac{2}{m_0}. \tag{7}$$

Istotnie, z (5), (6) wynika przedewszystkiem, że przy pewnem n_0 naturalnem $x_0 \subset L_{n_0,m_0} K_{n_0,m_0}$; ponieważ $x_0 \subset K_{n_0,m_0}$ i K_{n_0,m_0} jest zbiorem otwartym, a pozatem według (6), $\lim_{i \to \infty} x_i = x_0$, przeto istnieje liczba N, taka, że przy $i \geqslant N$ jest $x_i \subset K_{n_0, m_0}$. Ponieważ dalej $K_{n_0, m_0} \subset \overline{L}_{n_0, m_0}$ i $x_i \subset E^*$, przeto z (4) wnioskujemy, że

$$x_i \subset L_{n_0, m_0} \text{ dla } i \geqslant N. \tag{8}$$

Mamy

$$(U_0(x_i), U_0(x_0)) \leqslant (U_0(x_i), U_{n_0}(x_i)) + (U_{n_0}(x_i), (U_{n_0}(x_0)) + (U_{n_0}(x_0), U_0(x_0));$$

stąd wobec (8) oraz uwagi, że według (2),

$$(U_{n_0}(x), U_0(x)) \leqslant \frac{1}{m_0} \quad \text{dla } x \subset L_{n_0, m_0},$$

dostajemy

$$(U_0(x_i), U_0(x_0)) \leqslant \frac{2}{m_0} + (U_{n_0}(x_i), U_{n_0}(x_0)) \text{ dla } i \geqslant N;$$

lecz $x_0 \subset L_{n_0, m_0} \subset E^*$ więc, wobec (6), oraz ciągłości operacji $U_{n_0}(x)$ w zbiorze E^*, ostatnie nierówności dowodzą prawdziwości relacji (7). Niech

$$E_0 = E - \prod_{m=1}^{\infty} H_m; \tag{9}$$

okażemy, że określony przez powyższy wzór zbiór E_0 posiada własności żądane. Dla dowodu zauważmy przedewszystkiem, że, wobec (1), zbiór $E - E^*$ jest pierwszej kategorji; ponieważ każdy ze zbiorów $E^* - H_m$ jest pierwszej kategorji, a pozatem — jak to wynika z (9) —

$$E^* - (E - E_0) \subset \sum_{m=1}^{\infty} (E^* - H_m),$$

przeto również zbiór $E^* - (E - E_0)$ jest pierwszej kategorji. Wystarczy teraz zauważyć, że

$$E_0 \subset (E - E^*) + [E^* - (E - E_0)],$$

aby stwierdzić że zbiór E_0 jest pierwszej kategorji. Przypuśćmy, że $x_i \subset E^*$, $x_0 \subset E - E_0$, $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = x_0$; wobec (9), $x_0 \subset H_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, a ponieważ — jak wiemy — relacje (6) implikują (7), więc $\lim\limits_{i\to\infty} U_0(x_i) = U_0(x_0)$. Pozatem, z uwagi na (3), (5) i (9), mamy $E - E_0 \subset E^*$.

Twierdzenie 4. *Każda operacja mierzalna (B) spełnia warunek Baire'a.*

Dowód. Jest jasne, że każda operacja ciągła spełnia warunek Baire'a. Wystarczy zatem dowieść jeszcze tylko, że granica zbieżnego ciągu operacyj, spełniających warunek Baire'a, spełnia warunek Baire'a. Niech więc dany będzie ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$, spełniających warunek Baire'a, zbieżny do operacji $U_0(x)$; załóżmy, że zbiór G jest doskonały, niepusty, drugiej kategorji względem siebie. Dla każdego n istnieje część G_n zbioru G o tej własności, że jest pierwszej kategorji względem G i że operacja $U_n(x)$ rozpatrywana w $G - G_n$ jest ciągła. Na mocy lemmatu (przyjmując $G = E$ oraz $G_n = E_n$) istnieje część G_0 zbioru G pierwszej kategorji względem niego, taka, że operacja $U_0(x)$ jest w $G - G_0$ ciągła.

Zauważmy, że z dowiedzionego lemmatu wynika również

Twierdzenie 5. *Gdy operacja $U_0(x)$ jest granicą ciągu operacyj ciągłych $\{U_n(x)\}$, to istnieje zbiór E_0 pierwszej kategorji, taki, że w każdym punkcie $x_0 \subset E - E_0$ operacja $U_0(x)$ jest ciągła.*

Dowód. Istotnie można przyjąć $E_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$; wówczas $E^* = E$.

§ 8. Podamy obecnie pewien związek między zbiorami oraz operacjami mierzalnemi (B). Zakładamy stale, że chodzi o operacje określone w pewnej przestrzeni (D) — oznaczymy ją przez E —, których wartościami są elementy pewnej przestrzeni E^*, również (D).

Twierdzenie 6. *Gdy operacja $U(x)$ jest mierzalna (B), to dla każdego zbioru $G^* \subset E^*$ mierzalnego (B), zbiór G tych punktów x, w których $U(x) \subset G^*$, jest mierzalny (B).*

Dowód. Przypuśćmy naprzód, że zbiory G^* są zamknięte. O ile operacja $U(x)$ jest ciągła, to, jak łatwo widzieć, odpowiednie zbiory G są także zamknięte. Załóżmy tedy, że ciąg operacyj $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny do operacji $U_0(x)$ i że dla każdego

n oraz każdego zbioru zamkniętego G^* zbiór tych punktów x, w których $U_n(x) \subset G^*$, jest mierzalny (B). Niech $\{\varepsilon_n\}$ będzie ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do 0. Oznaczmy, dla danego zbioru zamkniętego G_0^*, przez G_n^* zbiór tak określony: jeśli $y \subset E^* - G_n^*$, wówczas kula o środku y oraz promieniu ε_n mieści się w zbiorze $E^* - G_0^*$. Każdy ze zbiorów G_n^* jest widocznie zamknięty, a przytem

$$G_0^* = \prod_{n=1}^{\infty} G_n^* .$$

Niech $G_{m,n}$ $(m, n = 1, 2 \ldots)$ będzie zbiorem tych punktów x, dla których $U_n(x) \subset G_m^*$; wedle założenia zbiory $G_{m,n}$ są mierzalne (B). Z łatwością sprawdzamy, że zbiór G_0 tych punktów x, dla których $U_0(x) \subset G_0^*$, można określić przez wzór

$$G_0 = \prod_{p=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} G_{p,q} ;$$

temsamem zbiór G_0 jest mierzalny (B). Widać obecnie, że, gdy G^* jest zbiorem zamkniętym, to odpowiedni zbiór G jest w każdym przypadku mierzalny (B). Lecz, gdy, dla pewnego zbioru G^* oraz pewnej operacji $U(x)$, G jest zbiorem tych punktów x, dla których $U(x) \subset G^*$, to zbiór punktów x o tej własności, że $U(x) \subset E^* - G^*$, jest identyczny ze zbiorem $E - G$; podobnie, gdy przy pewnym ciągu zbiorów $\{G_n^*\}$ oraz pewnej operacji $U(x)$, G_n jest zbiorem tych punktów x, dla których $U(x) \subset G_n^*$, to zbiór tych punktów x, dla których $U(x) \subset \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*$, jest identyczny ze zbiorem $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$. Z poprzedniego i powyższych uwag wynika prawdziwość naszego twierdzenia.

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 7. *Jeśli operacje $U'(x)$, $U''(x)$ są mierzalne (B), wówczas funkcjonał $(U'(x), U''(x))$ jest też mierzalny (B).*

D o w ó d wynika wprost z uwagi, że, gdy operacje $U'(x)$, $U''(x)$ są ciągłe, to funkcjonał $(U'(x), U''(x))$ jest ciągły, oraz że dla każdego punktu $y_0 \subset E^*$ funkcjonał $(y, y_0) \equiv (y_0, y)$ jest w E^* ciągły.

Z twierdzeń 6 i 7 wynika

Twierdzenie 8. *Jeśli* $\{U_n(x)\}$ *jest ciągiem operacyj mierzalnych* (B), *wówczas zbiór* G *tych punktów, w których ciąg ten jest zbieżny, jest mierzalny* (B).

Dowód. Dla każdych naturalnych p, q, r oznaczmy przez $G_{p,q,r}$ zbiór tych punktów x, dla których

$$(U_p(x),\ U_q(x)) \leqslant \frac{1}{r};$$

wobec twierdzeń 6, 7 zbiory $G_{p,q,r}$ są mierzalne (B). Lecz

$$G = \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \prod_{q=p}^{\infty} G_{p,q,r};$$

temsamem zbiór G jest mierzalny (B).

Zauważymy jeszcze, że zachodzi

Twierdzenie 9. *Gdy* $\{U_n'(x)\}$, $\{U_n''(x)\}$ *są ciągami operacyj mierzalnych* (B) *i przytem stale* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(U_n'(x),\ U_n''(x)) < +\infty$, *to funkcjonał* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(U_n'(x),\ U_n''(x))$ *jest mierzalny* (B).

Dowód. Niech dla każdej pary liczb naturalnych p, q oraz dla każdego punktu x

$$F_{p,q}(x) = \operatorname*{Max}_{n=p,\,p+1,\,\ldots\,p+q-1} (U_n'(x),\ U_n''(x)).$$

Jest widocznie dla każdego x

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(U_n'(x),\ U_n''(x)) = \lim_{p\to\infty}\lim_{q\to\infty} F_{p,q}(x);$$

wystarczy jeszcze pokazać, że każdy z funkcjonałów $F_{p,q}(x)$ jest mierzalny (B). Według twierdzenia 7 każdy z funkcjonałów $F_{p,1}(x) = (U_p'(x),\ U_p''(x))$ jest mierzalny (B); ponieważ stale

$$2\,F_{p,q+1}(x) = F_{p,q}(x) + F_{p+q,1}(x) + |\,F_{p,q}(x) - F_{p+q,1}(x)\,|,$$

przeto przez indukcję wnioskujemy, korzystając znowu z tw. 7, że funkcjonały $F_{p,q}(x)$ są mierzalne (B).