ROZDZIAŁ II.

Ogólne przestrzenie wektorjalne.

§ 1. Niech E oznacza jakiś zbiór niepusty. Przypuśćmy, że każdej parze uporządkowanej x, y elementów tego zbioru przyporządkowany jest pewien element $x+y$, należący do niego — nazwiemy go *sumą* elementów x, y; załóżmy dalej, że dla każdej liczby t oraz każdego elementu x zbioru E określony jest pewien element $t x$ tego zbioru; nazwiemy go *iloczynem* liczby t oraz elementu x. Niech dla tych działań, *dodawania elementów* i *mnożenia liczb przez elementy,* spełnione będą następujące warunki (gdzie x, y, z oznaczają dowolne elementy zbioru E, zaś a, b — liczby):

1) $x+y=y+x$;

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$;

3) $x+y=x+z$ pociąga $y=z$;

4) $a(x+y)=a x+a y$;

5) $(a+b) x=a x+b x$;

6) $a(b x)=(a b) x$;

7) $1 x=x$.

Przy powyższych założeniach powiadamy, że zbiór E stanowi *przestrzeń wektorjalną*. Łatwo widzieć, że wtedy istnieje dokładnie jeden element, oznaczymy go przez Θ, taki, że stale $x + \Theta = x$; równość $a x = b x$ przy $x \neq \Theta$ daje $a = b$, pozatem z równości $a x = a y$, przy $a \neq 0$, wynika $x = y$. Definjujemy dalej:

$$-x = (-1)\, x;$$

$$x - y = x + (-y).$$

Gdy $x \neq y$, to przez *odcinek* łączący elementy x, y rozumiemy zbiór wszystkich elementów postaci $t x + (1-t) y$, gdzie t oznacza dowolną liczbę przedziału $< 0{,}1 >$. O danym zbiorze $G \subset E$ powiada się, że jest *wypukły*, jeśli zawiera każdy odcinek, łączący dwa dowolne jego elementy.

Podane w § 1 rozdziału I przykłady 1 — 9 przestrzeni (D) stanowią widocznie zarazem przykłady przestrzeni wektorjalnych, przy zwykłych definicjach dodawania elementów oraz mnożenia liczb przez elementy.

§ 2. Niech E, E^* oznaczają jakieś przestrzenie wektorjalne; przypuśćmy, że $f(x)$ jest operacją określoną w E, której przeciwdziedzina mieści się w E^*. Powiadamy, że operacja $f(x)$ jest *addytywna*, gdy dla każdej pary elementów x, y jest

$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$

nazywamy ją *jednorodną*, skoro dla każdego elementu x oraz każdej liczby t

$$f(t\,x) = t\, f(x).$$

Twierdzenie 1. [1]) *Jeśli $p(x)$ jest funkcjonałem określonym w E, takim, że stale*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \qquad p(t\,x) = t\, p(x) \quad dla \quad t \geqslant 0$$

i jeśli w pewnej przestrzeni wektorjalnej [2]) $G \subset E$ *dany jest funkcjonał addytywny oraz jednorodny $f(x)$, o tej własności, że zawsze*

$$f(x) \leqslant p(x),$$

---

[1]) Zob.; S. Banach, Sur les fonctionnelles linéaires II, Stud. Math., I, (1929), p. 223 — 239, w szczeg. p. 226.

[2]) Rozumie się, przy przyjętych w przestrzeni E definicjach działań.

to istnieje funkcjonał oddytywny i jednorodny $F(x)$ w E, dla którego stale

$$F(x) \leqslant p(x)$$

oraz

$$F(x) = f(x), \text{ jeśli } x \subset G.$$

Dowód. Można założyć, że $G \neq E$; niech $x_0 \subset E - G$. Gdy $x', x'' \subset G$, to

$$f(x'') - f(x') = f(x'' - x') \leqslant p(x'' - x') =$$

$$p[(x'' + x_0) + (-x' - x_0)] \leqslant p(x'' + x_0) + p(-x' - x_0),$$

i temsamem

$$-p(-x' - x_0) - f(x') \leqslant p(x'' + x_0) - f(x'').$$

Niech m oznacza kres górny liczb $-p(-x - x_0) - f(x)$, zaś M kres dolny liczb $p(x + x_0) - f(x)$ dla $x \subset G$; według poprzedniego m, M są skończone i przytem $m \leqslant M$. Weźmy jakąkolwiek liczbę r_0, taką, że $m \leqslant r_0 \leqslant M$; wówczas dla każdego $x \subset G$

$$-p(-x - x_0) - f(x) \leqslant r_0 \leqslant p(x + x_0) - f(x). \tag{1}$$

Uważajmy zbiór G_0 wszystkich elementów y postaci

$$y = x + t\,x_0, \text{ gdzie } x \subset G, \text{ a } t \text{ jest liczbą;} \tag{2}$$

G_0 stanowi oczywiście przestrzeń wektorjalną. Połóżmy

$$\varphi(y) = f(x) + t\,r_0, \tag{3}$$

gdzie element y jest określony przez wzór (2); ponieważ $x_0 \subset E - G$, przeto każdy element $y \subset G_0$ posiada dokładnie jedno przedstawienie postaci (2), skąd wynika, że funkcjonał $\varphi(y)$ jest w G_0 określony jednoznacznie. Widać pozatem, że jest on addytywny i jednorodny oraz pokrywa się z funkcjonałem $f(x)$ w G; pokażemy teraz, że

$$\varphi(y) \leqslant p(y) \text{ przy } y \subset G_0. \tag{4}$$

Istotnie, pisząc y w postaci (2), można założyć, że $t \neq 0$. Biorąc w nierówności (1) $\frac{x}{t}$ zamiast x oraz mnożąc prawą, wzgl.

lewą, jej stronę przez t, zależnie od tego czy $t > 0$ czy też $t < 0$, dostajemy

$$t\, r_0 \leqslant p(x + t\, x_0) - f(x);$$

wobec (3) wynika stąd relacja (4).

Widać, że wystarczy dobrze uporządkować wszystkie elementy zbioru $E - G$, aby rozszerzając kolejno funkcjonał $f(x)$ przy pomocy metody wyżej podanej, uzyskać w końcu funkcjonał $F(x)$ w E, spełniający żądane warunki.

U w a g a 1. *Jeśli $p(x)$ jest funkcjonałem określonym w E, przyczem stale*

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \qquad p(t\,x) = t\,p(x) \quad dla \quad t \geqslant 0,$$

wówczas istnieje w tej przestrzeni funkcjonał addytywny i jednorodny $F(x)$, taki, że stale

$$F(x) \leqslant p(x).$$

Niech bowiem $x_0 \subset E$ i weźmy zbiór G wszystkich elementów postaci $t\,x_0$, gdzie t jest dowolną liczbą; G stanowi przestrzeń wektorjalną. Połóżmy w niej

$$f(t\,x_0) = t\,p(x_0).$$

Wówczas stale

$$f(t\,x_0) \leqslant p(t\,x_0).$$

Istotnie przy $t \geqslant 0$ mamy $t\,p(x_0) = p(t\,x_0)$, zaś przy $t < 0$ dostajemy kolejno $0 = p(0) \leqslant p(x_0) + p(-x_0)$, $p(x_0) \geqslant -p(-x_0)$, $t\,p(x_0) \leqslant -t\,p(-x_0) = p(t\,x_0)$. Wystarczy teraz uwzględnić twierdzenie 1, aby przekonać się o prawdziwości uwagi.

3. Omówimy tu kilka interesujących zastosowań twierdzenia 1 i uwagi 1.

1. Niech E będzie zbiorem wszystkich funkcji rzeczywistych ograniczonych $x(s)$, określonych na brzegu pewnego koła o obwodzie 1; s niech oznacza przytem łuk liczony od pewnego punktu tego okręgu w umówionym zwrocie. Przy zwykłych definicjach działań zbiór E stanowi przestrzeń wektorjalną. Dla każdego jej

elementu x określmy $p(x)$ jako kres dolny wszystkich liczb $M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ postaci [1])

$$M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = \underset{(-\infty < s < +\infty)}{\text{kres górny}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(s + \alpha_k),$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ jest dowolnym układem liczb. Funkcjonał $p(x)$ spełnia wszystkie warunki uwagi 1. Przedewszystkiem jest widocznie stale $p(tx) = t\,p(x)$ przy $t \geqslant 0$.

Niech x, y będą elementami E, zaś ε dowolną liczbą > 0. Istnieją układy liczb $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ oraz $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_q$ takie, że

$$M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p) \leqslant p(x) + \varepsilon, \quad M(y; \beta_1, \beta_2, \dots \beta_q) \leqslant p(y) + \varepsilon. \quad (1)$$

Ustawiając wszystkie liczby $\alpha_k + \beta_l$ $(k = 1, 2, \dots, p;\ l = 1, 2, \dots, q)$ dowolnie w ciąg $J_1, J_2, \dots J_{pq}$, mamy

$$p(x + y) \leqslant M(x + y; J_1, J_2, \dots J_{pq}), \quad (2)$$

przyczem łatwo sprawdzamy, że

$$M(x+y; J_1, J_2 \dots J_{pq}) \leqslant M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p) + M(y; \beta_1, \beta_2, \dots \beta_q). \quad (3)$$

Z (1), (2) i (3) wynika, że $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$; wobec dowolności liczby dodatniej ε, dowodzi to, że $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$. Na mocy uwagi 1 istnieje w przestrzeni E funkcjonał addytywny i jednorodny $F(x)$, taki, że stale $F(x) \leqslant p(x)$. Gdy $x(s) = 1$, to $p(x) = 1$ i $p(-x) = -1$, a ponieważ $F(x) \leqslant p(x)$ oraz $F(x) = -F(-x) \geqslant -p(-x)$, przeto ostatecznie $F(x) = 1$. Gdy $x(s) \geqslant 0$, to $F(x) \geqslant 0$; mamy bowiem $p(-x) \leqslant 0$, a z drugiej strony znowu $F(x) = -F(-x) \geqslant -p(-x)$. Funkcjonał $F(x)$ posiada pozatem jeszcze tę własność, że, gdy s_0 jest dowolną liczbą, to $F[x(s + s_0)] = F[x(s)]$. Istotnie, kładąc $y(s) = x(s + s_0) - x(s)$ oraz $\alpha_k = (k - 1)\,s_0$ $(k = 1, 2, \dots)$, mamy, przy wszelkiem n:

$$p(y) \leqslant M(y; \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = \frac{1}{n} \underset{(-\infty, +\infty)}{\text{kres górny}} [x(s + n\,s_0) - x(s)],$$

i temsamem $p(y) \leqslant 0$; analogicznie wynika, że $p(-y) \leqslant 0$. Lecz

[1]) Kładziemy $x = x(s)$ oraz $y = y(s)$.

$F(y) \leqslant p(y)$ i $F(y) = -F(-y) \geqslant -p(-y)$, więc $F(y) = 0$. Oznaczając symbolem $\int x(s)\,ds$ funkcjonał $\frac{1}{2}[F(x(s)) + F(x(1-s))]$ dostajemy twierdzenie:

Każdej funkcji $x(s)$ klasy E przyporządkować można liczbę $\int x(s)\,ds$, tak by spełnione były warunki (gdzie $x(s), y(s)$ są dowolnemi funkcjami klasy E, zaś a, b, s_0 — liczbami):

1) $\int [a\,x(s) + b\,y(s)]\,ds = a \int x(s)\,ds + b \int y(s)\,ds;$

2) $\int x(s)\,ds \geqslant 0$ gdy $x(s) \geqslant 0;$

3) $\int x(s + s_0)\,ds = \int x(s)\,ds;$

4) $\int x(1-s)\,ds = \int x(s)\,ds;$

5) $\int 1\,ds = 1.$

Łatwo sprawdzić, że funkcjonał $\int x(s)\,ds$, spełniając warunki 1 — 5, zawarty jest stale między całką dolną oraz górną funkcji $x(s)$ w sensie Riemann'a; temsamem więc dla każdej funkcji całkowalnej (R) pokrywa się z jej całką. Dla funkcyj całkowalnych (L) nie pokrywa się naogół z ich całkę (L); lecz gdy wyjdziemy z przestrzeni wektorjalnej G, jaką stanowi ta właśnie klasa funkcji i określimy w niej funkcjonał $f(x)$ jako całkę (L) funkcji $x(s)$, to uzyskamy przy pomocy twierdzenia 1 w przestrzeni E funkcjonał $F(x)$, posiadający oczywiście tę własność, że funkcjonał $\int x(s)\,ds = \frac{1}{2}[F(x(s)) + F(x(1-s))]$ spełnia wszystkie warunki 1 —5, a przytem dla każdej funkcji całkowalnej (L) pokrywa się z jej całką.

Uważajmy teraz klasę K wszystkich zbiorów na okręgu koła, o którem mowa, sam zaś okrąg oznaczymy przez A_0. Kładąc dla każdego zbioru A tej klasy $\mu(A)=\int x(s)\,ds$, gdzie $x(s)$ jest funkcją charakterystyczną zbioru A, otrzymujemy twierdzenie:

Każdemu zbiorowi A klasy K można przypisać liczbę $\mu(A)$, tak by spełnione były warunki (gdzie A, B są dowolnemi zbiorami klasy K):

1) $\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)$, *jeśli* $AB=0$;

2) $\mu(A)\geqslant 0$;

3) $\mu(A)=\mu(B)$ *dla* $A\cong B$;

4) $\mu(A_0)=1$.

Funkcjonał $\mu(A)$, który spełnia warunki 1 — 4, zawiera się między miarą wewnętrzną i zewnętrzną zbioru A w sensie Jordana; dla każdego zbioru mierzalnego (J) pokrywa się tedy z jego miarą. Dla dowolnych zbiorów mierzalnych (L) nie pokrywa się naogół z ich miarą (L); lecz tak jak poprzednio można uzyskać i to, aby warunek ten dodatkowy był spełniony [1]).

2. Niech E będzie zbiorem wszystkich funkcyj rzeczywistych ograniczonych $x(s)$ określonych w $(0,+\infty)$; przy zwykłych definicjach działań stanowi on przestrzeń wektorjalną. Dla każdego jego elementu x oznaczymy przez $p(x)$ kres dolny wszystkich liczb [2]):

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x(s+\alpha_k),$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ jest dowolnym układem liczb dodatnich. Z łatwością sprawdzamy, że określony tak w przestrzeni E funkcjonał $p(x)$ spełnia warunki uwagi 1; istnieje więc w E funkcjonał addytywny i jednorodny $F(x)$ o tej własności, że stale $F(x)\leqslant p(x)$. Oznaczając funkcjonał $F(x)$ symbolem $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$ [3]) dochodzimy do twierdzenia:

1) Por.: S. Banach, Sur le probléme de la mesure, Fund. Math., IV, (1923), p. 7 — 33.

2) Kładziemy $x=x(s)$.

3) Symbol „Lim" oznacza tedy pewną „granicę" uogólnioną; znak „lim" zachowujemy natomiast dla granicy w sensie zwykłym.

Każdej funkcji $x(s) \subset E$ *przypisać można liczbę* $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$, *tak by spełnione były warunki (gdzie* $x(s), y(s)$ *są dowolnemi funkcjami z* E, *zaś* a, b, s_0 *— liczbami, przyczem* $s_0 \geqslant 0$*)*:

1) $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} [a\,x(s) + b\,y(s)] = a \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s) + b \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} y(s)$;

2) $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s) \geqslant 0$, *jeśli* $x(s) \geqslant 0$;

3) $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s+s_0) = \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$;

4) $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} 1 = 1$.

Funkcjonał $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$, spełniając warunki 1 — 4, zawiera się stale między $\varliminf_{s\to\infty} x(s)$ oraz $\varlimsup_{s\to\infty} x(s)$; pokrywa się tedy z $\lim_{s\to\infty} x(s)$, o ile tylko granica ta w zwykłym sensie istnieje.

3. Niech $\{\xi_n\}$ będzie dowolnym ciągiem ograniczonym. Określimy w przedziale $(0, +\infty)$ funkcję $x(s)$ zapomocą umowy: $x(s) = \xi_n$ dla $n-1 < s \leqslant n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Funkcja $x(s)$ należy do zbioru E, o którym mówiliśmy w ustępie 2. Kładąc $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n = \operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$, gdzie $\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} x(s)$ posiada sens tam określony, dostajemy twierdzenie:

Każdemu ciągowi ograniczonemu $\{\xi_n\}$ *można przyporządkować liczbę* $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$, *tak by spełnione były warunki (gdzie* $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ *są dowolnemi ciągami ograniczonemi,* a, b *— liczbami)*:

1) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} [a\,\xi_n + b\,\eta_n] = a \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n + b \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$;

2) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n \geqslant 0$, *gdy stale* $\xi_n \geqslant 0$;

3) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_{n+1} = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$;

4) $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} 1 = 1$.

Z warunków 1 — 4 wynika z kolei, że funkcjonał $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$ zawiera się stale między $\varliminf_{n\to\infty} \xi_n$ oraz $\varlimsup_{n\to\infty} \xi_n$; dla każdego ciągu zbieżnego pokrywa się tedy z jego granicą[1]).

[1]) Por.: S. Mazur, O metodach sumowalności, Księga pamiątkowa pierwszego polskiego Zjazdu matematycznego, Kraków, 1929, p. 102—107, w szczeg. p. 103.