ROZDZIAŁ III A.

O przestrzeniach typu *(F)*.

§ 1. Niech E będzie jakąś przestrzenią (D) wektorjalną, spełniającą warunki następujące:

1) $(x, y) = (x - y, \Theta) \qquad (x, y \subset E)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ (h_n — liczby) pociąga $\lim\limits_{n\to\infty} h_n x = \Theta$ $(x \subset E)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta$ $(x_n \subset E)$ pociąga $\lim\limits_{n\to\infty} h x_n = \Theta$ (h — liczba).

Z powyższych założeń wynikają odrazu następujące własności granicy:

a) Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, gdzie $x_n, x, y_n, y \subset E$, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że zawsze $(x_n + y_n, x + y) = (x_n + y_n - x - y, \Theta) \leqslant (x_n - x + y_n - y, y_n - y) + (y_n - y, \Theta) = (x_n - x, \Theta) + (y_n - y, \Theta) = (x_n, x) + (y_n, y)$.

b) Gdy $\lim\limits_{n} h_n = h$ (h_n, h liczby), to $\lim\limits_{n} h_n x = h x$ $(x \subset E)$.

Istotnie mamy stale $(h_n x, h x) = ((h_n - h) x, \Theta)$.

Kładąc dalej, dla skrócenia,

$$|x| = (x, \Theta),$$

łatwo sprawdzamy, że zachodzą relacje (przyczem x, y są dowolnemi punktami uważanej przestrzeni):

a) $(x, y) = |x - y|$;

b) $|x| > 0$, gdy $x \neq \Theta$; $|\Theta| = 0$;

c) $|-x| = |x|$;

d) $|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Pozatem widoczne jest, że przestrzeń E jest doskonała oraz *spójna*, t. zn. nie jest sumą dwóch zbiorów zamkniętych rozłącznych i niepustych.

Gdy dany jest ciąg punktów $\{x_n\}$, to powiadamy, że *szereg* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *jest zbieżny*, skoro ciąg $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right\}$ jest zbieżny; mówimy, że jest on *zbieżny do punktu* x, albo, że punkt x jest jego *sumą* — pisząc $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = x$, — gdy ciąg $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right\}$ jest zbieżny do x [1]).

Uwaga 1. *Gdy* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = x$, *to* $|x| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$. Gdy bowiem ε jest liczbą > 0, to istnieje wskaźnik n taki, że $|x - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i| < \varepsilon$. Temsamem $|x| - |\sum\limits_{i=1}^{n} x_i| < \varepsilon$ oraz $|x| < \varepsilon + |\sum\limits_{i=1}^{n} x_i|$; ponieważ zaś $|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$, przeto $|x| < \varepsilon + \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$, co wobec dowolności liczby dodatniej ε dowodzi prawdziwości uwagi.

Uwaga 2. *Gdy* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$, *to szereg* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ *jest zbieżny.*

---

[1]) Jest jasne, jaki sens należy nadać przytem symbolowi $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Kładąc bowiem $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ $(n = 1, 2 \ldots)$, mamy, dla $p < q$, $|S_p - S_q| =$
$= |\sum_{i=p+1}^{q} x_i| \leqslant \sum_{i=p+1}^{q} |x_i|$; widać stąd, że $\lim_{p,\, q \to \infty} |S_p - S_q| = 0$, a więc, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest zbieżny.

Z uwagi 2 wynika, że gdy przestrzeń E jest zupełna, wówczas każdy szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, dla którego $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$, jest zbieżny do pewnego punktu tej przestrzeni; pokażemy, że naodwrót zachodzi

Twierdzenie 1. *Jeżeli każdy szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *taki, że* $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$, *jest zbieżny do pewnego punktu, wówczas przestrzeń E jest zupełna.*

D o w ó d. Niech dany będzie jakiś ciąg punktów $\{y_n\}$ zbieżny. Weźmy ciąg liczb dodatnich $\{\varepsilon_n\}$ o tej własności, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ jest zbieżny. Połóżmy $n_0 = 1$ i dobierzmy ciąg liczb naturalnych $\{n_i\}$, tak by stale

$$n_i \geqslant n_{i+1}, \qquad |y_p - y_q| \leqslant \varepsilon_i \quad \text{dla} \quad p, q \geqslant n_i. \tag{1}$$

Niech

$$x_1 = y_{n_1}, \qquad x_i = y_{n_i} - y_{n_{i-1}} \quad \text{dla} \quad i = 2, 3, \ldots;$$

wówczas wobec (1), $|x_i| = |y_{n_i} - y_{n_{i-1}}| \leqslant \varepsilon_{i-1}$ dla $i > 1$, i temsamem $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leqslant |y_{n_1}| + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$. Szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ jest zbieżny na mocy uwagi 2, ponieważ $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$; niech y będzie jego sumą. Dla $n \geqslant n_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$ mamy

$$|y - y_n| \leqslant |y - \sum_{j=1}^{i} x_j| + |\sum_{i=1}^{i} x_j - y_n|, \tag{2}$$

a ponieważ $\sum_{=1}^{i} x_j = y_{n_i}$, przeto, według (1),

$$\left|\sum_{j=1}^{i} x_j - y_n\right| \leqslant \varepsilon_i. \tag{3}$$

Z (2) i (3) wynika natychmiast, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |y - y_n| \leqslant \varepsilon_i \qquad (i = 2, 3 \ldots);$$

lecz $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, a więc temsamem ciąg $\{y_n\}$ jest zbieżny do y.

W dalszym ciągu ograniczać się będziemy stale do rozpatrywania przestrzeni E, które poza własnościami, o których mówiliśmy na początku tego §, posiadają jeszcze i tę, że są zupełne; nazywamy je *przestrzeniami* (F).

Podane w § 1 rozdziału I przykłady 1 — 9 przestrzeni (D) zupełnych, stanowią — jak zauważyliśmy w rozdziale II — przy zwykłych definicjach działań, przestrzenie wektorjalne; ponieważ zaś w przypadku tych przestrzeni spełnione są sformułowane poprzednio warunki 1 — 3, przeto są one przestrzeniami (F).

§ 2. Niech E będzie jakąś przestrzenią (F), i x_0 jej punktem. Operacja $U(x) = x + x_0$ określa pewne odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne przestrzeni E na siebie; odwzorowania tego typu noszą nazwę *przesunięcia*. Łatwo widzieć, że obrazem kuli (kuli otwartej) przy przesunięciu jest kula (kula otwarta) o tym samym promieniu; podobnie zbiory zamknięte, doskonałe, otwarte, mierzalne (B), wszędziegęste, nigdziegęste, pierwszej, względnie drugiej, kategorji przechodzą na zbiory o tych samych odpowiednio własnościach. Niech teraz h oznacza daną liczbę $\neq 0$. Operacja $U(x) = hx$ określa znowu pewne odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne pzzestrzeni E na siebie. Przy odwzorowaniach tego rodzaju również zbiory zamknięte, doskonałe, otwarte, mierzalne (B), wszędziegęste, nigdziegęste, pierwszej, względnie drugiej, kategorji przechodzą na zbiory o tych samych własnościach.

Twierdzenie 2. *Przestrzeń wektorjalna $L \subset E$, mierzalna (B) oraz drugiej kategorji, jest identyczna z E.*

D o w ó d. Na mocy twierdzenia 1 rozdziału I istnieje punkt $y_0 \subset L$, taki, że w punkcie y_0 zbiór L jest drugiej kategorji. Niech $y \subset L$ i przypuśćmy, że w tym punkcie L jest kategorji pierwszej; istnieje zatem kula G o środku y, taką, że zbiór LG jest pierwszej kategorji. Niech G_0 oznacza kulę, w jaką przechodzi kula G przy przesunięciu $U(x) = x + (y_0 - y)$; środkiem kuli G_0 jest oczywiście punkt y_0. Łatwo widzieć, że przy omawianem przesunięciu zbiór LG przechodzi w zbiór LG_0; wystarczy zauważyć, że, gdy $x \subset L$, to $U(x) \subset L$, bo $y_0 - y \subset L$. Zbiór LG_0 jest więc kategorji pierwszej; jest to sprzeczne z tem, że w punkcie y_0 zbiór L jest drugiej kategorji. Pokazaliśmy w ten sposób, że zbiór L jest drugiej kategorji w każdym swoim punkcie; aby dowieść teraz, że jest on drugiej kategorji w każdym wogóle punkcie, wystarczy oczywiście stwierdzić jeszcze, że jest wszędziegęsty. Pochodna zbioru L zawiera pewną kulę G; można założyć, że środek jej $y \subset L$. Kula G_0 w jaką przechodzi kula G przy przesunięciu $U(x) = x - y$ zawiera się w L' i przytem Θ jest jej środkiem. Gdy x jest dowolnym punktem, to, z uwagi na to, że $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} x = \Theta$, istnieje naturalne n_0, takie, że $\frac{1}{n_0} x \subset G_0$. Można dobrać punkty $x_n \subset L$ w ten sposób, by $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{n_0} x$; temsamem $\lim\limits_{n \to \infty} n_0 x_n = x$, co dowodzi tego, że $x \subset L'$. Widać ostatecznie, że zbiór L jest drugiej kategorji w każdym punkcie przestrzeni. Ponieważ zbiór L, jako mierzalny (B), spełnia na mocy twierdzenia 3 rozdziału I warunek B a i r e'a, przeto zbiór $E - L$ jest w pewnym punkcie y_0 pierwszej kategorji; temsamem jednak jest pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie. Załóżmy bowiem, że $y \subset E - L$ oraz że zbiór $E - L$ jest w punkcie y drugiej kategorji. Niech G_0 będzie kulą otwartą o środku y_0. Weźmy ciąg punktów $\{l_n\}$, należących do L, zbieżny do $y_0 - y$; ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} (y + l_n) = y_0$, istnieje więc wskaźnik n_0 taki, że $y + l_{n_0} \subset G_0$. Istnieje dalej kula G_0^* o środku $y + l_{n_0}$, zawarta w G_0; niech G oznacza kulę, w jaką przechodzi kula G_0^* przy przesunięciu $U(x) = x - l_{n_0}$. Środkiem kuli G jest punkt y, a więc zbiór $(E-L)\,G$ jest drugiej kategorji. Ponieważ zaś zbiór $(E-L)\,G$ powstaje, jak łatwo widzieć, przez translację $U(x)$ ze zbioru $(E-L)\,G_0^*$, przeto i ten ostatni jest drugiej kategorji; tembardziej zbiór $(E-L)\,G_0$ jest drugiej kategorji, co — wobec tego, że G_0 może być dowolną kulą otwartą o środku y_0 — oznacza, że zbiór $E-L$ jest w punkcie y_0 drugiej kategorji, wbrew założeniu. Zbiór $E-L$, będąc pierwszej kategorji w każdym swoim punkcie, jest pierwszej kategorji. Przypuśćmy, że $y_0 \subset E-L$. Zbiór L_1^* powstały przez przesunięcie $U(x) = x + y_0$ ze zbioru L zawarty jest w $E-L$; zbiór L jest drugiej, zaś $E-L$ pierwszej kategorji. Powstała sprzeczność dowodzi tego, że $E-L=0$, o co chodziło.

§ 3. W ustępie tym zakładać będziemy, że E, E^* są przestrzeniami (F), i zajmiemy się operacjami określonemi w E, których przeciwdziedziny mieszczą się w E^*. Daną operację $U(x)$ nazywać będziemy *linjową* w przypadku, gdy jest addytywna oraz ciągła [1]).

Twierdzenie 3. *Operacja linjowa jest jednorodna.*

D o w ó d. Widoczne jest, iż dla każdej liczby wymiernej w oraz każdego punktu x, $U(wx) = wU(x)$, gdy $U(x)$ jest operacją linjową. Jeśli t jest daną liczbą, zaś $\{w_n\}$ ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do t, to $\lim\limits_{n\to\infty} w_n x = tx$ i temsamem $\lim\limits_{n\to\infty} U(w_n x) = U(tx)$; ponieważ zaś stale $U(w_n x) = w_n U(x)$, przeto $\lim\limits_{n\to\infty} U(w_n x) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n U(x) = t\,U(x)$.

Twierdzenie 4. *Operacja addytywna, ciągła w pewnym punkcie, jest linjowa.*

---

[1]) Twierdzenia 3 — 5 w przypadku specjalnej klasy przestrzeni (F), a mianowicie rozpatrywanych w rozdziale V przestrzeni (B), znajdują się w pracy: S. B a n a c h, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fund. Math., III, (1922), p. 133—181, w szczeg. p. 152—153.

Dowód. Załóżmy, że operacja addytywna $U(x)$ jest ciągła w punkcie x_0. Niech x będzie dowolnym punktem, oraz $\{x_n\}$ ciągiem punktów zbieżnym do x. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x + x_0) = x_0$, skąd $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n - x + x_0) = U(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = U(x)$.

Twierdzenie 5. *Operacja addytywna, będąca granicą ciągu zbieżnego operacji ciągłych, jest linjowa.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 2 oraz 5 rozdziału I, operacja, o którą chodzi, jest ciągła w pewnym punkcie; wystarczy wobec tego uwzględnić jeszcze tylko twierdzenie 4.

Ostatnie twierdzenie zawiera się w następującem ogólnem twierdzeniu:

Twierdzenie 6. *Operacja addytywna oraz mierzalna* (B) *jest linjowa.*

Dowód. Przypuśćmy, że operacja $U(x)$ jest addytywna oraz mierzalna (B). Na mocy twierdzeń 2 i 4 rozdziału I istnieje zbiór H pierwszej kategorji, taki, że w zbiorze $E - H$ operacja $U(x)$ jest ciągła. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem punktów zbieżnym do Θ. Przyjmijmy $H_0 = H$ i oznaczmy pozatem, dla każdej liczby naturalnej n, przez H_n zbiór powstały z H przez przesunięcie $U_n(x) = x + x_n$; każdy ze zbiorów H_n jest pierwszej kategorji i temsamem własność tę ma zbiór $\sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n$. Według wspomnianego już twierdzenia 2 rozdziału I zbiór $E - \sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n$ jest niepusty (drugiej kategorji); załóżmy, że pewien punkt x_0 należy do wszystkich zbiorów $E - H_n$. Wówczas $x_0 \subset E - H$, $x_0 - x_n \subset E - H$ $(n = 1, 2, \ldots)$, skąd, ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_0 - x_n) = x_0$, mamy $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_0 - x_n) = U(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$. Operacja $U(x)$ jest ciągła w punkcie Θ; wobec twierdzenia 4 jest więc linjowa.

Twierdzenie 7. *Zbiór punktów zbieżności ciągu operacyj linjowych jest albo pierwszej kategorji albo identyczny z* E.

D o w ó d [1]) wynika bezpośrednio z twierdzenia 8 rozdziału I oraz twierdzenia 2.

Twierdzenie 8. *Jeśli* $\{U_{p,q}(x)\}$ *jest ciągiem podwójnym operacyj linjowych i istnieje ciąg punktów* $\{x_p\}$, *taki, że dla żadnego* p *ciąg* $\{U_{p,q}(x_p)\}$ *nie jest zbieżny, wówczas zbiór tych wszystkich punktów* x_0, *dla których choćby jeden z ciągów* $\{U_{p,q}(x)\}$ $(p=1,2,\ldots)$ *jest zbieżny, jest pierwszej kategorji.*

D o w ó d. Dla każdej liczby naturalnej p oznaczmy przez H_p zbiór punktów zbieżności ciągu $\{U_{p,q}(x)\}$. Wobec twierdzenia 7 zbiory U_p są pierwszej kategorji; tę samę własność ma więc zbiór

$$\sum_{p=1}^{\infty} H_p\,.$$

Twierdzenie 9. *Jeśli dla ciągu* $\{U_n(x)\}$ *operacyj ciągłych jest* $\lim\limits_{n\to\infty} |U_n(x)| < +\infty$ *na pewnym zbiorze* H *drugiej kategorji, wówczas istnieje kula* K *oraz taka liczba* N, *że* $|U_n(x)| \leqslant N$ *w każdym punkcie* $x \subset K$ $(n=1,2,\ldots)$.

D o w ó d. Niech H_n będzie zbiorem tych punktów x, dla których $|U_i(x)| \leqslant n$ $(i=1,2,\ldots)$. Ponieważ $H \subset \sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n$, więc jakiś zbiór H_N jest drugiej kategorji; z uwagi na to, że każdy ze zbiorów H_n jest zamknięty, zbiór H_N zawierać musi pewną kulę, która spełnia widocznie żądane warunki.

Twierdzenie 10. *Przeciwdziedzina operacji linjowej jest albo zbiorem pierwszej kategorji, albo identyczna z* E^*.

D o w ó d. Założmy, że przeciwdziedzina H operacji linjowej $U(x)$ jest drugiej kategorji. Pokażemy naprzód, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\eta > 0$ o tej własności, że obraz kuli otwartej $|x| < \varepsilon$, przy odwzorowaniu określonem zapomocą operacji $U(x)$, zawiera kulę otwartą $|y| < \eta$. Niech ε będzie liczbą > 0. Dla każdego n naturalnego oznaczmy przez E_n zbiór wszyst-

[1]) Dla przypadku przestrzeni (B) twierdzenia 7, 9 znajdują się w pracy S. B a n a c h et H. S t e i n h a u s, Sur les principe de la condensation de singularités, Fund. Math., IX, (1927), p. 50 — 61, w szczeg. p. 53 — 55.

kich punktów x postaci $x = n x'$, gdzie $|x'| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$; H_n niech będzie obrazem zbioru E_n przy wspomnianem wyżej odwzorowaniu, a więc zbiorem wszystkich punktów y, takich, że $y = U(x)$, gdzie $x \subset E_n$. Gdy x jest dowolnym punktem, to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} x = \Theta$, istnieje więc naturalne n, dla którego $|\frac{1}{n} x| < \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$ i temsamem $x \subset E_n$. Wynika stąd, że $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ oraz $H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$. Ponieważ zbiór H jest drugiej kategorji, przeto pewien zbiór H_{n_0} posiada również tę własność. Niech G_1 będzie kulą otwartą o środku y_1 oraz promieniu $\bar{\eta}$, zawartą w zbiorze H_{n_0}'. Łatwo widzieć, że kula otwarta G_2 o środku $\frac{1}{n_0} y_1$ i promieniu $\frac{1}{n_0} \bar{\eta}$ zawiera się w zbiorze H_1'. Istotnie niech $y \subset G_2$, t.j. $|y - \frac{1}{n_0} y_1| < \frac{1}{n_0} \bar{\eta}$; wtedy $n_0 y \subset G_2$, bowiem $|n_0 y - y_1| = |n_0(y - \frac{1}{n_0} y_1)| \leqslant n_0 |y - \frac{1}{n_0} y_1| < \bar{\eta}$. Istnieją punkty $\bar{y}_n \subset H_{n_0}$, takie, że $\lim_{n\to\infty} \bar{y}_n = n_0 y$, temsamem $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n_0} \bar{y}_n = y$ oraz $\frac{1}{n_0} \bar{y}_n \subset H_1$, skąd $y \subset H_1'$. Niech G_3 będzie dowolną kulą otwartą, zawartą w G_2, o środku $y_3 \subset H_1$ i promieniu ρ. Zbiór punktów $y_3 - y$ przy $y \subset H_1$ posiada tę własność, że jego skupieniem jest każdy punkt kuli otwartej $|y| < \bar{\eta}$. Gdy $y_3 = U(x_3)$, $y = U(x)$, $x_3, x \subset E_1$, to $|x_3 - x| \leqslant |x_3| + |x| < \bar{\varepsilon}$ oraz $U(x_3 - x) = y_3 - y$. Udowodniliśmy w ten sposób, że pochodna obrazu kuli otwartej $|x| < \bar{\varepsilon}$ zawiera kulę otwartą $|y| < \bar{\eta}$. Niech teraz $\varepsilon_i = \frac{\bar{\varepsilon}}{2^i}$ $(i = 1, 2 \ldots)$.

Według poprzedniego dobrać można ciąg liczb dodatnich η_i — nie przedstawia to ograniczenia, jeżeli przypuścimy, że jest on zbieżny do 0 — o tej własności, że pochodna obrazu kuli otwartej $|x| < \varepsilon$ zawiera kulę otwartą $|y_i| < \eta_i$. Niech $|y| < \eta_i = \eta$; określimy przez indukcję ciąg punktów $\{y_i\}$ w sposób następujący:

a) y_1 jest dowolnym punktem takim, że $|y - y_1| < \eta_2$, istnieje taki punkt x_1, iż $U(x_1) = y_1$, $|x_1| < \varepsilon_1$;

b) y_n jest dowolnym punktem takim, że $|y - \sum_{k=1}^{\infty} y_k| < \eta_{n+1}$, istnieje punkt x_n taki, że $U(x_n) = y_n$, $|x_n| < \varepsilon_n$ $(n = 2, 3, \dots)$.

Mamy przedewszystkiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y. \tag{1}$$

Ponieważ stale $|x_n| < \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$, przeto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon; \tag{2}$$

z uwagi 2 wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny. Oznaczając sumę jego przez x, mamy, wobec (2) oraz uwagi 1, $|x| < \varepsilon$, a przytem $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$, według (1). Widać więc, że obraz kuli otwartej $|x| < \varepsilon$ zawiera kulę $|y| < \eta$. Gdy $y \subset E^*$, to, ponieważ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} y = \Theta$, istnieje naturalne n, dla którego $|\frac{1}{n} y| < \eta$; można znaleźć więc x o tej własności, że $U(x) = \frac{1}{n} y$ i temsamem $U(nx) = y$. Oznacza to, że $H = E^*$, zgodnie z twierdzeniem.

Twierdzenie 11. *Jeśli operacja linjowa $U(x)$ odwzorowuje E na E^*, wówczas dla każdego ciągu punktów $\{y_n\}$ zbieżnego do $y_0 = U(x_0)$ istnieje ciąg punktów $\{x_n\}$ zbieżny do x_0, taki, że stale $U(x_n) = y_n$.*

Dowód. Niech $\{\varepsilon_n\}$ będzie ciągiem liczb > 0, zbieżnym do 0. Według wyniku uzyskanego przy dowodzie ostatniego twierdzenia obraz kuli otwartej $|x| < \varepsilon_n$ zawiera pewną kulę otwartą $|y| < \eta_n$ $(n = 1, 2 \dots)$.

Weźmy naturalne m_0 tak, by dla każdego wskaźnika $m > m_0$ istniało naturalne n, dla którego $|y_m - y_0| < \eta_n$. Przy $m \leqslant m_0$ weźmiemy za x_m jakikolwiek punkt, dla którego $U(x_m) = y_m$. O ile $m > m_0$ lub $y_m = y_0$, to niech $x_m = x_0$. Gdy w końcu $m > m_0$ i $y_m \neq y_0$, to, oznaczając przez n_m największą liczbę naturalną n, dla której $|y_m - y_0| < \eta_n$, weźmiemy za x_m dowolny punkt kuli $|x - x_0| < \varepsilon_{n_m}$, dla którego $y_m = U(x_m)$. Łatwo sprawdzamy, że tak określony ciąg punktów $\{x_n\}$ posiada własności żądane.

Twierdzenie 12. *Jeżeli operacja linjowa odwzorowuje w sposób jedno-jednoznaczny E na E^*, wówczas odwzorowanie to jest obustronnie ciągłe.*

D o w ó d wynika bezpośrednio z twierdzenia poprzedniego [1].

Twierdzenie 13. *Jeżeli przestrzeń wektorjalna E jest przestrzenią (F) zarówno przy pewnej definicji odległości (x, y), jak i przy pewnej innej definicji odległości $(x y)_1$, i jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0 \text{ pociąga zawsze } \lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0,$$

wówczas także

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x)_1 = 0 \text{ pociąga zawsze } \lim_{n\to\infty} (x_n, x) = 0;$$

innemi słowy przy powyższych założeniach pojęcie granicy w obu wypadkach jest to samo.

D o w ó d. Dowód wynika z poprzedniego twierdzenia, jeżeli za E^* obierzemy E, z odległością $(x y)_1$, zaś operację linjową $y = U(x)$ zdefinjujemy przez związek $y = x$.

Twierdzenie 14. *Jeżeli operacja addytywna $y = U(x)$ spełnia warunek:*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x_0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} U(x_n) = y_0 \text{ pociąga } y_0 = U(x_0),$$

wówczas $U(x)$ jest operacją linjową.

---

[1]) Dla przypadku przestrzeni (B) twierdzenie to, łącznie z twierdzeniem 13 jako wnioskiem, znajduje się w pracy cytowanej na str. 26 pod [1]) (p. 238—239). Podany tam dowód przebiega odmiennie.

D o w ó d. Wprowadzimy nowe pojęcie odległości w przestrzeni E, przyjmując

$$(x', x'')_1 = (x', x'') + (y', y''),$$

gdzie $y' = U(x')$, $y'' = U(x'')$, a (y', y'') oznacza odległość elementów y' i y'' w E^*. Łatwo sprawdzić, że E, przy tak określonej odległości jest przestrzenią (F); sprawdzamy w szczególności, że jest przestrzenią zupełną. Przypuśćmy bowiem, że ciąg punktów $\{x_n\}$ spełnia warunek

$$\lim_{p,\, q \to \infty} (x_p, x_q)_1 = 0.$$

Mamy zatem

$$\lim_{p,\, q \to \infty} (x_p, x_q) = \lim_{p,\, q \to \infty} (y_p, y_q) = 0,$$

istnieją więc elementy x_0 i y_0 takie, że

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, x_0) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n \to \infty} (y_n, y_0) = 0;$$

na mocy tedy założenia $y_0 = U(x_0)$, skąd

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, x_0)_1 = 0.$$

Ponieważ, jak łatwo widać, stale

$$(x', x'')_1 \geqslant (x', x''),$$

więc $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, x)_1 = 0$ pociąga $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, x) = 0$.

Stąd, na mocy twierdzenia 13, $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, x) = 0$ pociąga za sobą $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, x)_1 = 0$, a zatem pociąga $\lim\limits_{n \to \infty} U(x_n) = U(x)$. Operacja $U(x)$ jest więc ciągła.

Lemmat 1. *Niechaj $U_1(x)$, $U_2(y)$ będą operacjami linjowemi, określonemi odpowiednio w przestrzeniach E_1 i E_2 typu (F), przeciwdziedziny tych operacyj niechaj się mieszczą w przestrzeni E_3 również typu (F).*

Jeżeli równanie

$$U_1(x) = U_2(y)$$

ma dla każdego x jedno dokładnie rozwiązanie $y = U(x)$, wówczas operacja $U(x)$ jest operacją linjową.

Dowód wynika z twierdzenia 14, gdyż, jak łatwo zauważyć, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x_0)$ pociąga za sobą $y_0 = U(x_0)$.

Lemmat 2. *Jeżeli $y = U(x)$ jest operacją addytywną, a $z = V(y)$ operacją linjową, przyczem $V(y) = \Theta$, pociąga $y = \Theta$, wówczas, jeżeli $VU(x)$ jest operacją linjową, to $U(x)$ jest również operacją linjową.*

Dowód. Równanie $VU(x) = V(y)$ ma dla każdego x jedno-jedyne rozwiązanie $y = U(x)$. Zatem na mocy twierdzenia poprzedniego operacja $U(x)$ jest linjowa.

Jeżeli zbiór L operacyj linjowych $V(x)$ [określonych w przestrzeni E typu (F)] ma tę własność, że warunki

$$V(x) = 0 \quad \text{dla} \quad V \subset L$$

pociągają za sobą $x = \Theta$, wówczas zbiór L nazywa się zbiorem *pełnym* operacyj.

Twierdzenie 15. *Jeżeli $y = U(x)$ jest operacją addytywną, L zaś zbiorem pełnym operacyj linjowych określonych w E^*, i jeżeli wyrażenie*

$$VU(x)$$

jest dla każdego $V \subset L$ operacją linjową, wówczas $U(x)$ jest operacją linjową.

Dowód. Przypuśćmy, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ $[y_n = U(x_n)]$. Mamy, dla $V \subset L$, $\lim_{n\to\infty} VU(x_n) = \lim_{n\to\infty} V(y_n) = V(y_0)$ oraz $\lim_{n\to\infty} VU(x_n) = VU(x_0)$, gdyż operacja $VU(x)$ jest linjowa. Zatem $VU(x_0) - V(y_0) = 0$, czyli $V[U(x_0) - y_0] = 0$ dla $V \subset L$, a więc $U(x_0) = y_0$. Na mocy więc twierdzenia 14 operacja $U(x)$ jest operacją linjową.

Twierdzenie 16. *Jeżeli $\{U_i\}$ i $\{V_i\}$ są ciągami operacyj linjowych, określonych odpowiednio w przestrzeniach E_1 (x-ów) i E_2 (y-ów), i jeżeli układ równań*

$$U_i(x) = V_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

ma dla każdego x jedno-jedyne rozwiązanie $y = U(x)$, wówczas operacja $y = U(x)$ jest operacją linjową.

O przeciwdziedzinach operacyj U_i, V_i zakładamy oczywiście, że mieszczą się w tej samej przestrzeni typu (F).

Dowód. Jeżeli bowiem $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, a dla ciągu odpowiedniego $\{y_n\}$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, wówczas z ciągłości operacyj $\{U_i\}$ i $\{V_i\}$ wynika:

$$U_i(x_0) = V_i(y_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

czyli

$$y_0 = U(x_0).$$

Stąd na mocy twierdzenia 14 wynika ciągłość operacji $y = U(x)$.

ROZDZIAŁ III B.

O przestrzeniach typu *(F)*.

(ciąg dalszy)

§ 1. Niech E będzie dowolną przestrzenią (F), a $E_0 \subset E$ przestrzenią wektorjalną zamkniętą.

Nazwiemy dwa elementy x_1, $x_2 \subset E$ *równoważnemi*, pisząc $x_1 \equiv x_2$, jeśli $x_1 - x_2 \subset E_0$.

Niechaj X oznacza dowolną klasę elementów, spełniającą warunki:

a) jeżeli $x_1 \subset X$ i $x_2 \subset X$, wówczas $x_1 \equiv x_2$;

b) jeżeli $x_1 \subset X$ i $x_1 \equiv x_2$, wówczas $x_2 \subset X$.

Niechaj $\overline{E}$ oznacza zbiór wszystkich klas X, spełniających warunki a), b).

W zbiorze E określimy dodawanie i mnożenie przez liczbę h w następujący sposób:

1. Jeżeli $X_1 \subset \overline{E}$ i $X_2 \subset \overline{E}$, wówczas $X_1 + X_2$ oznacza tę klasę $X \subset \overline{E}$, która zawiera element $x = x_1 + x_2$, gdzie x_1 i x_2 są dowolnemi elementami, należącemi odpowiednio do klas X_1 i X_2;

2. $h\, X_1$ oznaczą tę klasę $X \subset \overline{E}$, która zawiera element $x = h x_1$, gdzie x_1 jest dowolnym elementem klasy X_1.

Łatwo sprawdzamy, że przy tych umowach $\overline{E}$ stanowi przestrzeń wektorjalną.

Określimy teraz w przestrzeni $\overline{E}$ pojęcie odległości. Jeśli X, $Y \subset \overline{E}$, wówczas (X, Y) jest kresem dolnym liczb $|x - y|$, gdzie $x \subset X$, $y \subset Y$.

Określona tak odległość spełnia zwykłe warunki:

I. Jeżeli $(X, Y) = 0$, wówczas $X = Y$.

W samej rzeczy, jeśli $(X, Y) = 0$, wówczas istnieją dwa ciągi elementów $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, należące odpowiednio do X, Y, takie, że

$$\lim_{n \to \infty} | x_n - y_n | = 0. \tag{1}$$

Zauważmy, że stale $x_n - x_1 \equiv y_n - y_1 \equiv \Theta$, a zatem $x_n - x_1 - y_n + y_1 \subset E_0$.

Ponieważ E_0 jest przestrzenią wektorjalną zamkniętą, a na mocy (1),

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - x_1 - y_n + y_1) = y_1 - x_1,$$

zatem $y_1 - x_1 \subset E_0$, skąd $x_1 \equiv y_1$, lub $X = Y$.

II. $$(X, Z) \leqslant (X, Y) + (Y, Z).$$

Gdy ε jest liczbę > 0, to istnieją elementy x, y, y', z, takie, że $x \subset X$, $y, y' \subset Y$, $z \subset Z$, oraz

$$(X, Y) > | x - y | - \varepsilon, \quad (Y, Z) > | y' - z | - \varepsilon.$$

Ponieważ $-y + y' \subset E_0$, więc $x - y + y' \subset X$, zatem $| x - y + y' - z | \geqslant (X, Z)$; mamy $(X, Z) < (X, Y) + (Y, Z) + 2\varepsilon$, co dowodzi twierdzenia.

Mamy dalej:

a) $(X, Y) = (X - Y, \Theta)$,

b) $\lim_{n \to \infty} (h_n X, \Theta) = 0$, jeżeli $\lim_{n \to \infty} h_n = 0$ (h_n — liczby).

W rzeczy samej, jeżeli $x \subset X$, wówczas $h_n x \subset h_n X$, zatem $(h_n X, \Theta) \leqslant | h_n x |$, a więc $\lim_{n \to \infty} (h_n X, \Theta) \leqslant \lim_{n \to \infty} | h_n x | = 0$.

c) $\lim_{n \to \infty} (h X_n, \Theta) = 0$, jeśli $\lim_{n \to \infty} X_n = 0$.

Niechaj bowiem x^n oznacza element, należący do X_n, przyczem $| x_n | \leqslant 2 (X_n, \Theta)$. Zatem $h x_n \subset h X_n$, a więc $(h X_n, \Theta) \leqslant | h x_n |$. Ponieważ zaś $\lim_{n \to \infty} X_n = \Theta$, więc $\lim_{n \to \infty} | h x_n | = 0$, skąd również $\lim_{n \to \infty} (h X_n, \Theta) = 0$.

Pokażemy jeszcze, że $\overline{E}$ jest przestrzenią zupełną.

Przypuśćmy bowiem, że $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < +\infty$ $[|X_n| = (X_n, \Theta)]$.

Każdemu X_n przyporządkować możemy element x_n taki, że $x_n \subset X_n$ i $|X_n| \geqslant \frac{1}{2}|x_n|$. Mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < +\infty,$$

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest tedy zbieżny.

Niech $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Oznaczymy przez X tę klasę, która zawiera element x. Ponieważ $\sum_{i=1}^{n} x_i \subset S_n$, gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, zatem $x - \sum_{i=1}^{n} x_i \subset X - S_n$ (dodawanie i odejmowanie rozumiane tu jest w znaczeniu wektorjalnem, określonem poprzednio). A więc

$$|X - S_n| \leqslant |x - \sum_{i=1}^{n} x_i|, \text{ zatem } \lim_{n \to \infty} |X - S_n| = 0.$$

Na mocy twierdzenia 1 rozdziału III A, przestrzeń E jest tedy zupełna, jest zatem *przestrzenią* (F).

§ 2. Z twierdzenia 5 rozdziału III A, łatwo wynika istnienie *funkcji ciągłej, nie mającej w zbiorze o mierze dodatniej pochodnej* [1]).

[1]) Twierdzenie to znajduje się w pracy: S. Banach, Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires, Bull. des Sciences math., 2[0] série, t. L (1926), p. 27 — 32 oraz p. 36 — 43, w szczeg p. 43. Zastosowaną tu metodę rozwinęli, używając jej przy traktowaniu różnych problemów teorji funkcyj pp. S. Saks i H. Steinhaus. Zob.: S. Saks, Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions, Fund. Math., X (1927), p. 186 — 196; H. Steinhaus, Anwendungen der Funktionalanalysis auf einige Fragen der reellen Funktionentheorie, Stud. Math., I (1929), p. 51 — 81.

Niech (C') oznacza zbiór funkcyj ciągłych perjodycznych, o perjodzie 1, i niech, dla każdej pary funkcyj $x(t) \subset C'$ oraz $x_1(t) \subset C'$,

$$(x(t),\ \ x_1(t)) = \max_{<0,1>} |x(t) - x_1(t)|.$$

Jak łatwo sprawdzić, (C') jest przestrzenią typu (F). Niech $h \neq 0$ będzie dowolną liczbą i niech

$$y(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{1}$$

Przyjmijmy, że $y(t) \subset (S')$ [(S') oznacza zbiór funkcyj mierzalnych]. Zbiór (S') jest zbiorem typu (F).

Wyrażenie (1) określa, jak łatwo zauważyć, operację linjową, której dziedziną jest (C'), przeciwdziedzina zaś mieści się w (S').

Niech $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, $\quad (h_n \neq 0)$, $\quad$ i niech

$$U_n(x) = \frac{x(t+h_n) - x(t)}{h_n}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{2}$$

Gdyby każda funkcja ciągła miała prawie wszędzie pochodną, wówczas granica wyrażenia (2) istniałaby dla prawie każdej wartości t, a zatem, dla każdego $x \subset C'$, istniałaby granica

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x),$$

będąc zarazem granicą, określoną w polu (S'), t. j. granicą według miary.

Przyjmując $U(x) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$, otrzymujemy operację addytywną $U(x)$, która nadto jest na mocy tw. 5 rozdz. IIIA — linjowa.

Oczywiście $U(x)$ oznacza pochodną funkcji $x(t)$.

Z ciągłości operacji $U(x)$ wynika, że, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ jednostajnie, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'(t) = 0$ wedle miary.

Jeśli jednak $x_n(t) = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{nt}{2\pi}$, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ jednostajnie, podczas gdy ciąg pochodnych $\left\{\dfrac{1}{2\pi} \cos n \dfrac{t}{2\pi}\right\}$ nie dąży do zera wedle miary. Istnieją zatem funkcje, nie mające pochodnej w zbiorze o mierze dodatniej.

§ 3. Niech $F(x) = 0$ będzie równaniem różniczkowem linjowem cząstkowem, np. równaniem rzędu drugiego

$$F(x) \equiv a_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + a_2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} + a_3 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + a_4 \frac{\partial x}{\partial u} + a_5 \frac{\partial x}{\partial v} + a_6 x = 0. \quad (1)$$

Funkcje a_i niech będą funkcjami ciągłemi zmiennych u, v w obszarze domkniętym G, którego brzegiem jest krzywa zamknięta C bez punktów podwójnych.

Może się zdarzyć, że przy pewnym charakterze warunków brzegowych równanie (1) ma zawsze jedno tylko rozwiązanie $x(u, v)$ ciągłe w obszarze domkniętym $\overline{G}$, wraz z pochodnemi cząstkowemi aż do rzędu drugiego wewnątrz obszaru $\overline{G}$.

Warunki brzegowe mogą być rozmaitego rodzaju. Polegać mogą np. na podaniu wartości funkcji na krzywej C (typ eliptyczny), wartości funkcji na części krzywej C (typ hyperboliczny, paraboliczny), wartości pochodnej wzdłuż normalnej na całej krzywej C, i t. p.

Załóżmy, że, jeśli t jest parametrem bieżącym na krzywej C, wówczas do każdej funkcji $\xi(t)$ ciągłej wraz z kilkoma pochodnemi np. do rzędu r, istnieje rozwiązanie równania $F(x) = 0$, redukujące się na krzywej C do funkcji $\xi(t)$. O rozwiązaniu $x(u, v)$ zakładamy, że jest ciągłe w $\overline{G}$, o pochodnych cząstkowych (tych, które występują w równaniu $F(x) = 0$), iż są ciągłe wewnątrz obszaru $\overline{G}$.

Pokażemy, że, *jeżeli ciąg* $\{\xi_n(t)\}$ *spełnia warunki wyżej podane* (dla $\xi(t)$) *i jeżeli* $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n(t) = 0$ *oraz* $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n^{(i)}(t) = 0$ $(i = 1, 2, \dots r)$ (granice powyższe oznaczają zbieżność jednostajną), *wówczas, oznaczając przez* $\{x_n(u, v)\}$ *ciąg odpowiednich rozwiązań równania* (1), *mamy*: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n(u, v) = 0$ *jednostajnie w* $\overline{G}$, *oraz* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\partial^2 x_n}{\partial u^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\partial^2 x_n}{\partial v^2} = 0$ . . . *i t. d. jednostajnie w każdym obszarze domknię-*

tym zawartym wewnątrz krzywej C. Stosuje się to do tych pochodnych cząstkowych, które występują w równaniu (1)).

Dowód. Oznaczmy przez E zbiór wszystkich funkcyj $x(u,v)$, spełniających równanie (1), ciągłych w $\overline{G}$ i posiadających pochodne cząstkowe (te, które występują w równaniu (1)) ciągłe wewnątrz $\overline{G}$. W polu E określimy odległość w następujący sposób: Niechaj $\{\overline{G}_n\}$ będzie ciągiem obszarów domkniętych, położonych wewnątrz G i takich, że $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n = G$ (gdzie G jest wnętrzem C).

Jeżeli $x(u,v) \subset E$, $y(u,v) \subset E$, wówczas określamy (x,y) jako

$$\max_{u,v \subset \overline{G}} |x(u,v) - y(u,v)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max\limits_{u,v \subset \overline{G}_n} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \ldots}{1 + \max\limits_{u,v \subset \overline{G}_n} \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \right| + \ldots}.$$

We wzorze powyższym znajdują się różnice tych pochodnych, które występują w równaniu (1).

Łatwo można sprawdzić, że E jest przy takiem określeniu odległości przestrzenią typu (F), związek $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (wedle odległości) oznacza, że ciąg $\{x_n\}$ zdąża w $\overline{G}$ jednostajnie do x, pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ldots$ (występujące w równaniu (1)) zdążają jednostajnie do odpowiednich pochodnych cząstkowych funkcji x w każdym obszarze domkniętym $\overline{G}_n$.

Oznaczmy przez E_1 zbiór funkcyj $\xi(t)$ (t parametr bieżący na krzywej C) ciągłych wraz z pochodnemi aż do rzędu r. Jeżeli $\xi(t) \subset E_1$ i $\eta(t) \subset E_1$, to połóżmy

$$(\xi, \eta) = \max |\xi(t) - \eta(t)| + \sum_{n=1}^{r} \max |\xi^{(n)}(t) - \eta^{(n)}(t)|.$$

Oznaczymy teraz przez $\xi = U(x)$ operację, która każdej funkcji $x = x(u,v) \subset E$ przyporządkowuje funkcję $\xi = \xi(t)$, do jakiej redukuje się funkcja $x(u, v)$ na brzegu C. Określona tak operacja $U(x)$ jest oczywiście addytywna i ciągła.

Ponieważ, na mocy założenia, istnieje operacja odwrotna $x = U^{-1}(\xi)$ i ponieważ przeciwdziedzina operacji $U(x)$ jest przestrzenią typu (F), zatem operacja $x = U^{-1}(\xi)$ jest operacją ciągłą (na mocy twierdzenia 12 rozdziału IIIA). Z ciągłości operacji $U^{-1}(\xi)$ wynika wyżej wypowiedziane twierdzenie.

UWAGA. Gdybyśmy nie założyli jednoznaczności rozwiązania równania (1), wówczas, opierając się na twierdzeniu 11 rozdziału III, otrzymujemy wniosek, że, jeżeli $\{\xi_n(t)\}$ ma znaczenie poprzednie, to istnieje ciąg $\{x_n(u, v)\}$ funkcyj, spełniających równanie (1) i redukujących się na C do $\xi_n(t)$, przyczem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(u, v) = 0$ jednostajnie w G, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial^2 x_n}{\partial v^2} = 0$, i t. d. — jednostajnie w każdym obszarze domkniętym wewnątrz C.

§ 4. Niech $\{a_i\}$ będzie dowolnym ciągiem elementów pewnej przestrzeni typu (F). Niech E oznacza zbiór wszystkich ciągów liczb $\{\xi_i\}$, dla których szereg $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i a_i$ jest zbieżny. Zbiór E jest przestrzenią wektorjalną.

Jeżeli x oznacza ciąg $\{\xi_i\} \subset E$, a y ciąg $\{\eta_i\} \subset E$, wówczas niech

$$(x, y) = \underset{n=1,2\ldots}{\text{kres górny}} \left| \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)\, a_i \right|.$$

Jeżeli $a_i \neq \Theta$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wówczas łatwo można pokazać, że E jest przestrzenią zupełną.

Jeżeli bowiem $\lim\limits_{p,q\to\infty} (x_p, x_q) = 0$ $(x_n \subset E,\ \ x_n = \{\xi_i^{(n)}\})$, wówczas: $\lim\limits_{p,q\to\infty} | a_1 (\xi_1^{(p)} - \xi_1^{(q)}) | = 0$, zatem $\lim\limits_{p,q\to\infty} | \xi_1^{(p)} - \xi_1^{(q)} | = 0$, a więc istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = \xi_1$.

Przy pomocy indukcji udowodniamy łatwo, że istnieją ogólnie wszystkie granice $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Jeżeli $\varepsilon > 0$, wówczas, dla $p, q > N_1$, mamy $(x_p, x_q) < \varepsilon$, czyli

$$|\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(p)} - \xi_i^{(q)})\, a_i| \leqslant \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

skąd

$$|\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(p)} - \xi_i)\, a_i| \leqslant \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Ponieważ szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(p)} a_i$ jest zbieżny, przeto istnieje taka liczba N_2, że, dla $r \geqslant s > N_2$,

$$|\sum_{i=s}^{r} \xi_i^{(p)} a_i| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Lecz, dla $r \geqslant s > 1$,

$$|\sum_{i=s}^{r} \xi_i a_i| \leqslant |\sum_{i=s}^{r} (\xi_i - \xi_i^{(p)}) a_i| + |\sum_{i=s}^{r} \xi_i^{(p)} a_i| \leqslant$$

$$\leqslant |\sum_{i=1}^{r} (\xi_i - \xi_i^{(p)}) a_i| + |\sum_{i=1}^{s-1} \xi_i^{(p)}) a_i| + |\sum_{i=1}^{r} \xi_i^{(p)} a_i|\,.$$

Zatem dla $r \geqslant s > N = \max(N_1, N_2)$, wobec (1) i (2),

$$|\sum_{i=s}^{r} \xi_i a_i| \leqslant 3\,\varepsilon\,.$$

Szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i a_i$ jest tedy zbieżny, a więc $\{\xi_i\} \subset E$. Łatwo już można sprawdzić, że E jest *przestrzenią typu (F)*. Mamy:

$$|x| = \underset{n=1,2,\ldots}{\text{kres górny}} |\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i|\,.$$

§ 5. Niech (a_{ik}) $(i, k = 1, 2, \ldots)$ będzie dowolną tablicą liczb rzeczywistych. Niech E_1 będzie przestrzenią typu (F), której elementami są ciągi liczbowe.

Jeżeli dla każdego ciągu $y = \{\eta_i\} \subset E_1$ *układ równań*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{I}$$

ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie $\{\xi_k\}$, *wówczas istnieją funkcjonały linjowe w polu* E_1

$$\xi_k = f_k(y) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

spełniające związki

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k(y) = \eta_i \qquad dla \qquad y \subset E_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dowód. Oznaczmy przez E zbiór wszystkich ciągów $x = \{\xi_k\}$, spełniających warunki:

a) szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k$ jest szeregiem zbieżnym dla $i = 1, 2, \ldots$;

b) ciąg $\{\eta_i\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k\right\}$ należy do E_1.

Jeśli $x' = \{\xi_k'\} \subset E$, $\quad x'' = \{\xi_k''\} \subset E$, wówczas przyjmiemy

$$(x', x'')_i = \underset{n=1,2,\ldots}{\text{kres górny}} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\xi_k' - \xi_k'') \right|,$$

a przez $(x', x'')_0$ oznaczymy odległość w E_1 ciągów $\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k} \xi_k'\right\}$, $\left\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k''\right\}$.

Określimy teraz odległość elementów x' i x'' przez wzór

$$(x', x'') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{(x', x'')_i}{1 + (x', x'')_i}.$$

Zbiór E jest przestrzenią wektorjalną i, jak łatwo z poprzedniego ustępu wynika, przestrzenią typu (F).

Zauważmy, że, jeżeli $x_n = \{\xi_k^{(n)}\} \subset E$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, wówczas $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Na mocy bowiem jednoznaczności rozwiązań systemu równań (I) w kolumnie k-tej jeden przynajmniej wyraz $a_{ik} \neq 0$. Przypuśćmy więc, że $a_{i_k, k} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, więc $\lim_{n\to\infty} (x_n, \Theta)_{i_1} = 0$, zatem $\lim_{n\to\infty} \xi_1^{(n)} = 0$, gdyż $a_{i_1, 1} \neq 0$.

Przez indukcję można teraz pokazać łatwo, że ogólnie

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Jeżeli ciągi $x = \{\xi_k\} \subset E$ i $y = \{\eta_i\} \subset E_1$ spełniają równania (I), wówczas przyjmiemy

$$y = U(x).$$

Mamy, jak łatwo zauważyć,

$$(y, \Theta) = (x, \Theta)_0 \leqslant (x, \Theta) \tag{1}$$

Oczywiście (y, Θ) oznacza tu odległość w E_1, (x, Θ) — odległość w E.

Na mocy (1) $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$ pociąga $\lim_{n\to\infty} U(x_n) = \Theta$. Operacja $y = U(x)$ jest zatem operacją linjową. Ponieważ operacja linjowa $y = U(x)$ odwzorowuje w sposób jednoznaczny zbiór E na E_1, przeto, na mocy twierdzenia 12 rozdziału IIIA, operacja odwrotna $x = U^{-1}(y)$ jest również linjowa.

Jeżeli $x = U^{-1}(y)$, wówczas niech: $\xi_k = f_k(y)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Z tego, co wyżej było powiedziane, wynika, że, jeżeli $\lim_{n\to\infty} y_n = \Theta$, a $x_n = U^{-1}(y_n) = \{\xi_k^n\}$, wówczas $\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta$, a więc $\lim_{n\to\infty} \xi_k^{(n)} = 0$.

Funkcjonały addytywne $f_k(y)$ są tedy funkcjonałami linjowemi w E_1.

Z twierdzenia powyższego wynika następujące twierdzenie [1]).

Jeżeli układ równań (I) *ma dokładnie jedno rozwiązanie dla każdego ciągu* $\{\eta_i\}$, *należącego do:*

a) *przestrzeni ciągów zbieżnych do zera,*

b) „ (s),

c) „ (l),

d) „ $(l^{(p)})$, $p > 1$;

wówczas istnieje tablica $\{b_{ki}\}$ *taka, że*

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\,\eta_i \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

gdzie ($\{\xi_k\}$ i $\{\eta_i\}$ *są ciągami, spełniającemi równania* (I), *przyczem w przypadkach* a), b), c), d) *mamy odp.*

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\, b_{ki} \,| < \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots);$

b) *tablica* (b_{ki}) *ma wiersze skończone, t. zn. istnieje ciąg liczb* N_k *taki, że* $b_{ki} = 0$ *dla* $i > N_k$;

c) $|\, b_{ki} \,| < M_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *gdzie* $\{M_k\}$ *jest pewnym ciągiem liczb*;

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\, b_{ki} \,|^{\frac{p}{p-1}} < +\infty \qquad (k = 1, 2, \ldots).$

UWAGA. Jeżeli założymy, że dla każdego ciągu zbieżnego $\{\eta_i\}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równań (I), wówczas istnieje ciąg ograniczony $\{C_k\}$ i tablica $\{b_{ki}\}$, spełniająca warunki pod a), przyczem:

$$\xi_k = C_k \lim_{i\to\infty} \eta_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\,\eta_i \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

---

[1]) Pominąwszy przypadek d), twierdzenie to było dotąd nieznane (por. F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913).

Twierdzenia powyższe wynikają z twierdzenia, podanego na początku tego ustępu i z odpowiedniego przedstawienia funkcjonału linjowego w poszczególnych przestrzeniach (ob. twierdzenie 1 § 6, oraz ustępy 3 i 4 § 4 rozdziału IV).

§ **6**. Podamy tu szereg własności przestrzeni (s) (ob. rozdział I, § 1) oraz przestrzeni (σ). Przestrzeń (σ) jest to zbiór wszystkich ciągów liczbowych $x = \{\xi_n\}$ skończonych w tym sensie, że prawie wszystkie wyrazy ich są równe zeru. Przy zwykłych definicjach działań zbiór ten stanowi pewną przestrzeń wektorjalną. Określimy w przestrzeni tej nie pojęcie odległości, lecz jedynie pojęcie granicy w sposób następujący: powiadamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \quad (x_n = \{\xi_i^{(n)}\}, \quad x = \{\xi_i\})$, gdy spełnione są warunki:

1) istnieje N takie, że $\xi_i^{(n)} = 0 \quad$ dla $\quad i > N, \quad n = 1, 2, \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$

Łatwo spostrzec, że uzyskujemy w ten sposób pewną przestrzeń (L) w sensie *Fréchet'a*. Pozatem:

1) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$;

2) Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$ (t_n—liczby), to $\lim\limits_{n\to\infty} t_n x_n = tx$;

3) Jeżeli $\lim\limits_{p,q\to\infty} (x_p - x_q) = 0$, to istnieje x takie, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Wychodząc z definicji granicy, można oczywiście określić, jak w § 2 rozdziału I, zbiory zamknięte, otwarte i t. d.

Twierdzenie 1. *Każdy funkcjonał linjowy $f(x)$ w przestrzeni (s) jest postaci:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i,$$

gdzie N jest liczbą naturalną zależną od f.

Dowód. Niechaj $\{x_n\} = \{\xi_i^{(n)}\}$, gdzie $\xi_i^{(n)} = 0$ dla $i \neq n$, oraz $\xi_n^{(n)} = 1$. Przyjmijmy $f(x_n) = \alpha_n$. Ponieważ, dla każdego ciągu $x = \{\xi_n\}$, mamy $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$, więc

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n .$$

Ponieważ szereg ten ma być dla każdego ciągu $\{\xi_n\}$ zbieżny, więc istnieje liczba naturalna N taka, że $\alpha_n = 0$ dla $n > N$. Zatem

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i .$$

Lemmat. *Jeżeli $G \subset (s)$ jest przestrzenią wektorjalną zamkniętą, a $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\}$ do G nie należy, wówczas istnieje funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w przestrzeni (s) i spełniający warunki:*

$$f(x_0) \neq 0, \quad \textit{oraz} \quad f(x) = 0 \quad \textit{dla} \quad x \subset G.$$

Dowód. Jeżeli x_0 nie należy do G, wówczas istnieje liczba $N > 0$ taka, że

$$\sum_{i=1}^{N} | \xi_i - \xi_i^{(0)} | \neq 0 \quad \text{dla} \quad \{\xi_i\} \subset G, \tag{1}$$

w przeciwnym bowiem razie istniałby ciąg $\{x_n\} = \{\xi_i^{(n)}\}$, spełniający warunki:

$$\sum_{i=1}^{n} | \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(0)} | = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

i mielibyśmy $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. To zaś jest niemożliwe, gdyż G jest zbiorem zamkniętym, a x_0 nie należy do G.

Na mocy (1) istnieją zatem liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$, dla których

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i^{(0)} = 1, \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i = 0, \quad \text{jeśli} \quad \{\xi_i\} \subset G.$$

Jeżeli więc $f(x)$ oznacza funkcjonał, określony przez równość $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i$, wówczas $f(x) = 0$ dla $x \subset G$, i $f(x_0) = 1$.

Twierdzenie 2. *Każda przestrzeń wektorjalna zamknięta $G \subset (s)$ jest zbiorem wszystkich ciągów $x = \{\xi_k\}$, spełniających nieskończenie wiele równań:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

gdzie $\{a_{ik}\}$ *zależą od zbioru* (G), *przyczem istnieje ciąg liczb* $\{N_i\}$ *taki, że* $a_{ik} = 0$ *dla* $k > N_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Dowód. Niech H oznacza zbiór wszystkich ciągów skończonych $\{\alpha_i\}$, spełniających warunek

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,\xi_i = 0$$

dla $\{\xi_i\} \subset G$.

Przypuśćmy, że ciąg $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\}$ nie należy do G.

Na mocy lemmatu istnieją zatem liczby $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots \alpha_N^0$, dla których:

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^0\,\xi_i = 0 \quad \text{jeśli} \quad \{\xi_i\} \subset G, \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^0\,\xi_i^{(0)} = 1.$$

Mamy więc $\{\alpha_i^0\} \subset H$ i widzimy, że zbiór G jest zbiorem wszystkich ciągów $\{\xi_i\}$, spełniających związki

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,\xi_i = 0 \quad \text{dla} \quad \{\alpha_i\} \subset H.$$

Niech H_n oznacza zbiór ciągów $\{\alpha_i\} \subset H$, dla których $\alpha_n \neq 0$, oraz $\alpha_i = 0$ dla $i > n$. Zbiór H_n zawiera conajwyżej n linjowo niezależnych ciągów $\{\alpha_i\}$. Oznaczmy je symbolami $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots A_{i_n}^{(n)}$.

Oczywiście każdy ciąg $\{\alpha_i\} \subset H$ jest linjową kombinacją ciągów $A_j^{(n)}$. Wypisując ciągi $A_j^{(n)}$ kolejno w postaci $\{a_{ik}\}$ widzimy, że G jest zbiorem rozwiązań nieskończenie wielu równań

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

gdzie $\{a_{ik}\}$ jest dla każdego i ciągiem skończonym.

Twierdzenie 3. *Jeżeli w przestrzeni $G \subset (s)$ wektorjalnej zamkniętej, określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$, wówczas istnieje funkcjonał linjowy $F(x)$, określony w całej przestrzeni (s) i spełniający warunek*

$$f(x) = F(x) \quad dla \quad x \subset G.$$

D o w ó d. Oznaczmy przez H zbiór wszystkich ciągów x, spełniających warunek

$$f(x) = 0, \quad x \subset G.$$

Niech $$x_0 \subset G \quad \text{i} \quad f(x_0) = 1. \tag{1}$$

Zbiór H jest zbiorem linjowym zamkniętym, jest tedy zbiorem wszystkich rozwiązań pewnego nieskończonego układu równań linjowych:

$$\sum_{k=1}^{N_i} a_{ik}\,\xi_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Ponieważ x_0 nie należy do H, istnieje taka liczba j, że

$$\sum_{k=1}^{N_j} a_{jk}\,\xi_k^{(0)} = \alpha \neq 0, \quad (\text{gdzie } \{\xi_k^{(0)}\} = x_0).$$

Niech teraz, dla każdego ciągu $x = \{\xi_i\}$,

$$F(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{N_j} a_{jk}\,\xi_k.$$

Mamy $f(x_0) = F(x_0) = 1$, oraz $F(x) = 0$ dla $x \subset H$.
Jeżeli $x \subset G$, wówczas, przyjmując $x - f(x)\,x_0 = y$, mamy:

$$x = y + f(x)\,x_0. \tag{2}$$

Ponieważ $f(y) = f(x) - f(x)\,f(x_0) = 0$, więc $y \subset H$, zatem $F(y) = 0$.

Przeto, na mocy (2),

$$F(x) = F(y) + f(x)\,F(x_0) = f(x).$$

Twierdzenie 4. *Każdy funkcjonał linjowy w przestrzeni* (σ) *jest kształtu:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i .$$

Dowód przedstawia się podobnie, jak dla odpowiedniego twierdzenia w przestrzeni (s).

Twierdzenie 5. *Każda przestrzeń wektorjalna* $G \subset (\sigma)$ *jest przestrzenią zamkniętą.*

Dowód wynika z następującej uwagi: Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ ($x_n \subset (\sigma)$, $x_0 \subset (\sigma)$), wówczas x_n i x_0 uważać możemy za wektory pewnej przestrzeni N-wymiarowej. Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, zatem x_0 jest kombinacją linjową pewnych N wektorów ciągu $\{x_n\}$. Zatem $x_0 \subset G$.

Twierdzenie 6. *Każdy funkcjonał addytywny i jednorodny, określony w przestrzeni* (σ), *jest linjowy.*

Dowód wynika wprost z uwagi podanej przy dowodzie twierdzenia poprzedniego.

Twierdzenie 7. *Jeżeli w przestrzeni wektorjalnej* $G \subset (\sigma)$ *określony jest funkcjonał linjowy* $f(x)$, *wówczas istnieje funkcjonał linjowy* $F(x)$, *określony w* (σ) *i spełniający warunek:*

$$f(x) = F(x), \quad \textit{jeśli} \quad x \subset G.$$

Dowód. Niech x_0 nie należy do G. Oznaczmy przez G zbiór elementów x kształtu $x = x' + \alpha x_0$, gdzie $x' \subset G$. Połóżmy $\varphi(x) = f(x') + \alpha$. Funkcjonał $\varphi(x)$ jest addytywny w G, i spełnia warunek $\varphi(hx) = h\varphi(x)$, oraz $\varphi(x) = f(x)$ dla $x \subset G$.

Rozszerzając w powyższy sposób stopniowo funkcjonał $f(x)$, otrzymamy w końcu funkcjonał addytywny $F(x)$, określony dla wszystkich elementów zbioru (σ) i spełniający warunki:

$$F(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \subset G, \qquad F(hx) = hF(x).$$

Z ostatniego związku wynika, na mocy twierdzenia 6, ciągłość funkcjonału $F(x)$.

Niech teraz dany będzie układ równań:

$$\sum_{k=i}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{I}$$

(a_{ik}, η_i — dane, ξ_k — niewiadome), z których każde posiada jednak skończoną tylko liczbę N_i spółczynników różnych od zera. (Liczby N_i mogą oczywiście wzrastać nieograniczenie wraz z i).

Twierdzenie 8. *Na to, aby istniał ciąg liczb* $\{\xi_k\}$, *spełniający równania* (I), *konieczne jest i wystarcza, by dla każdego skończonego układu liczb* $h_1, h_2, \ldots h_r$ *warunek*

$$\sum_{i=1}^{r} h_i\, a_{ik} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

pociągał za sobą

$$\sum_{i=1}^{r} h_i\, \eta_i = 0 .$$

D o w ó d [1]). Konieczność warunku wynika wprost ze związku:

$$\sum_{i=1}^{r} h_i\,\eta_i = \sum_{i=1}^{r} h_i \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{i=1}^{r} h_i\, a_{ik} .$$

Wystarczy pokazać tedy tylko, że podany warunek jest wystarczający.

Oznaczmy przez x_i ciąg skończony $\{a_{ik}\}$. Elementy x_i uważać możemy za elementy przestrzeni (σ).

Niech G oznacza zbiór linjowy wszystkich elementów x typu

$$x = \sum_{i=1}^{r} h_i\, x_i , \tag{1}$$

gdzie $h_1, h_2, \ldots h_r$ oznacza dowolny system skończony liczb.

---

[1]) Twierdzenie to udowodnił po raz pierwszy p. O. T o e p l i t z. Ob. O. T o e p l i t z, Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Palermo Rendiconti, 28 (1909), p. 88 — 96.

Jeżeli $\sum_{i=1}^{r} h_i x_i = \sum_{i=1}^{r'} h_i' x_i$, wówczas $\sum_{i=1}^{r} h_i a_{ik} = \sum_{i=1}^{r'} h_i' a_{ik}$,

zatem $$\sum_{i=1}^{r} h_i \eta_i = \sum_{i=1}^{r'} h_i' \eta_i. \tag{2}$$

Niech teraz, dla elementów x postaci (1),

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} h_i \eta_i . \tag{3}$$

Funkcjonał $f(x)$ jest w ten sposób (jak to wynika z (2)) jednoznacznie określony w zbiorze G, addytywny i jednorodny.

Zatem, w myśl twierdzenia 6, funkcjonał $f(x)$ jest linjowy, a na zasadzie twierdzenia 7, istnieje funkcjonał linjowy $F(x)$, określony w (σ) i taki, że

$$F(x) = f(x), \quad \text{jeśli} \quad x \subset G.$$

Na mocy więc twierdzenia 4, istnieje ciąg liczb $\{\alpha_k\}$, taki, że dla każdego elementu $x = \{\xi_k\} \subset (\sigma)$ spełniona jest równość

$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$. Ponieważ $F(x_i) = f(x_i) = \eta_i$, zatem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

co należało udowodnić.

Twierdzenie 9. *Jeżeli układ równań*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

posiada dla każdego ciągu $\{\eta_i\}$ dokładnie jedno rozwiązanie, wówczas dla każdego i istnieje liczba N_i taka, że

$$a_{ik} = 0 \quad dla \quad k > N_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dowód. Oznaczmy przez y ciąg $\{\eta_i\}$, i niech $\xi_k = f_k(y)$, jeżeli

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Na mocy twierdzenia § 5, funkcjonał $f_k(y)$ jest funkcjonałem linjowym w przestrzeni (s). Istnieje zatem, dla każdego k, skończony układ liczb $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \dots, \alpha_{N_k,k}$,

$$f_k(y) = \sum_{i=1}^{N_k} \alpha_{ik}\, \eta_i = \xi_k. \tag{2}$$

Układ (1) jest linjowo niezależny.

Przypuśćmy bowiem, że istnieje skończony ciąg liczb $\{h_k\}$ $(k = 1, 2, \dots r)$, taki, iż

$$\sum_{k=1}^{r} h_i\, a_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Mamy wówczas, w myśl (2),

$$\sum_{k=1}^{r} h_k\, \xi_k = \sum_{k=1}^{r} h_k\, f_k(y) = 0 \tag{3}$$

dla każdego ciągu $y = \{\eta_i\}$. Przyjmując $\eta_i^0 = a_{ij}$, gdzie j jest dowolnie ustaloną liczbą naturalną $\leqslant r$, stwierdzamy natychmiast, iż dla odpowiedniego rozwiązania $\{\xi_k^0\}$ układu (1) mamy

$$\xi_k^0 = 0 \quad \text{dla} \quad k \neq j, \quad \text{oraz} \quad \xi_j^0 = 1.$$

Podstawiając wartości te w (3), otrzymujemy $h_j = 0$, skąd wynika, iż wszystkie spółczynniki h_k muszą żnikać, a więc, iż układ (2) jest niezależny, i temsamem, iż w myśl twierdzenia 8 dla każdego ciągu $\{\xi_k\}$ istnieje ciąg liczb $\{\eta_i\}$, spełniających równania (2).

Wynika stąd, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k$$

jest dla każdego ciągu $\{\xi_k\}$ zbieżny, a więc, iż dla każdego i istnieje liczba N_i taka, że

$$a_{ik} = 0 \quad \text{dla} \quad k > N_i .$$

Uwaga. *Jeżeli w twierdzeniu powyższem nie założymy, że istnieje tylko jedno rozwiązanie, wówczas twierdzenie przestaje być prawdziwe.*

Jeżeli bowiem $\{\eta_j\}$ jest dowolnym ciągiem, wówczas istnieje szereg potęgowy o spółczynnikach rzeczywistych ξ_k, $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k z^k$, spełniając warunki:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k j^k = \eta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Układ powyższy ma zatem dla każdego ciągu $\{\eta_i\}$ rozwiązanie — oczywiście nie jedno, gdyż istnieje szereg potęgowy różny od zera taki, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k j^k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

§ 7. Dwie przestrzenie E i E_1 typu (F) nazywają się *izomorficzne*, jeśli istnieje operacja linjowa $y = U(x)$ $[x \subset E$, $y \subset E_1]$, odwzorowująca w sposób jedno-jednoznaczny i ciągły E na E_1.

Na mocy twierdzenia 12 rozdziału III, operacja $y = U(x)$ odwzorowuje w sposób jedno-jednoznaczny i obustronnie ciągły E na E_1.

Przestrzenie E, E_1 typu (F) nazywamy *równoważnemi*, jeżeli istnieje operacja linjowa $y = U(x)$, odwzorowująca w ten sposób jedno-jednoznacznie E na E_1, iż

$$|y| = |x|, \quad \text{jeśli} \quad y = U(x).$$

Oczywiście dwie przestrzenie równoważne są izomorficzne, niekoniecznie wszakże dwie przestrzenie izomorficzne muszą być równoważne.

P r z y k ł a d y.

1. Zbiór funkcjonałów linjowych w przestrzeni $(L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, jest równoważny przestrzeni $\left(L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$ dla $p > 1$, oraz przestrzeni (M) dla $p = 1$.

2. Zbiór funkcjonałów linjowych w $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ jest równoważny przestrzeni $\left(l^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}\right)$ dla $p > 1$, oraz przestrzeni (m) dla $p = 1$.