ROZDZIAŁ IV A.

Przestrzenie unormowane.

§ 1. Przestrzeń wektorjalną E nazywamy *unormowaną*, jeżeli istnieje dla niej funkcjonał — który nazywamy *normą*, oznaczając go przez $|x|$ lub też $\|x\|$ — spełniający warunki następujące:

$$1) \quad |x| > 0 \quad \text{gdy} \quad x \neq \Theta, \quad |\Theta| = 0;$$

$$2) \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|;$$

$$3) \quad |tx| = |t|\,|x| \quad (t \text{ — liczba}).$$

Jeśli odległość dwóch elementów x, y przestrzeni E określimy przez wzór

$$(x, y) = |x - y|,$$

wówczas otrzymujemy oczywiście pewną przestrzeń metryczną. W przypadku, gdy przestrzeń ta jest zupełna (t. j. gdy warunek $\lim\limits_{p,q \to \infty} |x_p - x_q| = 0$ pociąga za sobą istnienie elementu x, takiego, że $\lim\limits_{p \to \infty} |x_p - x| = 0$), przestrzeń tę nazywamy przestrzenią (B) [1]. Jest jasne, że każda przestrzeń typu (B) jest przestrzenią (F); twierdzenie odwrotne byłoby fałszywe, jak widać choćby na przy-

[1]) Ta klasa przestrzeni traktowana była ogólnie poraz pierwszy w pracy cytowanej pod [1]) na str. 38.

kładzie przestrzeni (s). Określone w § 1 rozdziału I przestrzenie, z wyjątkiem przestrzeni (s) oraz (S), są oczywiście typu (B).

§ 2. W ustępie tym zajmiemy się narazie przestrzeniami unormowanemi, niekoniecznie jednak zupełnemi. Przez E oznaczać będziemy rozważaną przestrzeń unormowaną.

Twierdzenie 1. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by funkcjonał addytywny, określony w przestrzeni wektorjalnej $G \subset E$, był linjowy, jest istnienie takiej liczby M, że*

$$|f(x)| \leqslant M|x|, \quad \textit{jeśli} \quad x \subset G.$$

Dowód[1]). Warunek jest konieczny. Przypuśćmy bowiem, że niema liczby M, spełniającej powyższy warunek; istnieje wówczas ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$|f(x_n)| > M_n |x_n| \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty.$$

Kładąc $Y_n = \dfrac{1}{M_n |x_n|} \cdot x_n$, mielibyśmy $|Y_n| = \dfrac{1}{M_n}$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \Theta$; zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(Y_n) = 0$, co jest niemożliwe, gdyż

$$|f(Y_n)| = \frac{1}{M_n |x_n|} \cdot |f(x_n)| > 1.$$

Warunek jest wystarczający. Jeżeli bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, gdzie $x_n \subset E$, $x \subset E$, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} |x - x_n| = 0$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(x - x_n)| \leqq \lim\limits_{n\to\infty} M|x - x_n| = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Jeżeli funkcjonał linjowy $f(x)$ określony jest w przestrzeni wektorjalnej G, wówczas *normą* funkcjonału $f(x)$ w zbiorze G nazywamy najmniejszą liczbę M, spełniającą nierówność

$$|f(x)| \leqslant M|x| \quad \text{dla} \quad x \subset G.$$

---

[1]) Praca cytowana pod [1]) na str. 38 (p. 51—53).

Normę funkcjonału $f(x)$ w zbiorze G oznaczać będziemy symbolem

$$|f|_G.$$

Jeżeli $G = E$, wówczas zamiast $|f|_E$ piszemy wprost $|f|$.

Mamy więc $|f(x)| \leqslant |f|_G . |x|$ dla $x \subset G$.

Łatwo zauważyć, że

$$|f|_G = \underset{x \subset G,\ |x| \leqslant 1}{\text{kres górny}} |f(x)|.$$

Nasuwa się pytanie, czy w każdej przestrzeni wektorjalnej, unormowanej istnieje funkcjonał linjowy nieznikający tożsamościowo.

Aby na pytanie to odpowiedzieć, zauważmy, że z twierdzenia 1 rozdziału II wynika twierdzenie następujące:

Twierdzenie 2. *Jeżeli w zbiorze G określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$, wówczas istnieje funkcjonał linjowy $F(x)$ określony w E taki, że*

$$F(x) = f(x) \quad dla \quad x \subset G$$

oraz

$$|F| = |f|_G.$$

Dowód [1]. Twierdzenie powyższe wynika z tw. 1 rozdziału II, jeżeli przyjmiemy tam

$$p(x) = |x| . |f|_G.$$

Łatwo stąd otrzymujemy

Twierdzenie 3. *Dla każdego elementu $x_0 \subset E$ istnieje funkcjonał linjowy $F(x)$ taki, że*

$$F(x_0) = |x|, \quad |F| = 1.$$

Dowód [2]. Twierdzenie powyższe wynika z poprzedniego,

---

[1]) Zob.: S. Banach, Sur les fonctionelles linéaires, Stud. Math. I. (1929) p. 211—216, w szczeg. théorème 2.

[2]) l. c., uwaga po Théorème 2.

jeżeli za zbiór G uważać będziemy zbiór elementów postaci $h\, x_0$ (h — dowolna liczba) i przyjmiemy

$$f(h\, x_0) = h \,.\, | x_0 | \,.$$

Otrzymujemy stąd, w szczególności, że w każdem polu wektorjalnem i unormowanem istnieje funkcjonał linjowy nieznikający tożsamościowo.

Twierdzenie 4. *Jeśli $f(x)$ jest funkcjonałem, określonym w pewnym zbiorze W, wówczas na to, by istniał funkcjonał linjowy $F(x)$, określony w E i spełniający warunki*

1^0 $f(x) = F(x)$ *dla* $x \subset W$,

2^0 $| F | \leqslant M$, *gdzie M jest daną liczbą dodatnią, konieczne jest i wystarcza, by nierówność*

$$\Big| \sum_{i=1}^{r} h_i\, f(x_i) \Big| \leqslant M \Big| \sum_{i=1}^{r} h_i\, x_i \Big|$$

spełniona była dla każdego skończonego układu elementów $x_1, x_2, \ldots, x_r$ zbioru W oraz każdego skończonego układu liczb rzeczywistych $h_1, h_2, \ldots, h_r$.

Dowód [1]. Warunek jest konieczny. Jeżeli bowiem istnieje żądany funkcjonał linjowy $F(x)$, wówczas

$$\Big| F\Big(\sum_{i=1}^{r} h_i\, x_i \Big) \Big| \leqslant |F| . \Big| \sum_{i=1}^{r} h_i\, x_i \Big| , \quad \text{zatem}$$

$$\Big| \sum_{i=1}^{r} h_i\, F(x_i) \Big| \leqslant M . \Big| \sum_{i=1}^{r} h_i\, x_i \Big| .$$

---

[1] l. c. p. 214. W przypadku pewnych przestrzeni specjalnych udowodnił twierdzenie to p. F. Riesz. Ob.: F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann., 69, (1910), p. 449—497. Ogólniejsze uzyskał p. E. Helly: E. Helly, Über lineare Funktionaloperationen, Wiener Berichte 121 (1912), p. 265 — 297.

Jeżeli $x_i \subset W$, wówczas $F(x_i) = f(x_i)$, a stąd otrzymujemy podany warunek.

Warunek jest wystarczający. Oznaczmy przez G przestrzeń wektorjalną elementów z kształtu $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i$, gdzie $x_i \subset W$, h_i — liczby, r — dowolna liczba naturalna, i przyjmijmy

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i). \tag{1}$$

Jeżeli $z = \sum_{i=1}^{r} h_i x_i = \sum_{i=1}^{s} h_i' x_i'$, wówczas, na mocy założenia,

$$\left| \sum_{i=1}^{r} h_i f(x) - \sum_{i=1}^{s} h_i' f(x_i') \right| \leqslant M . \left| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i - \sum_{i=1}^{s} h_i' x_i' \right| = 0 .$$

Funkcjonał $\varphi(z)$ jest zatem jednoznacznie określony w G i jest przytem, jak łatwo widać, addytywny. Ponieważ zaś

$$|\varphi(z)| = \left| \sum_{i=1}^{r} h_i f(x_i) \right| \leqslant M \left| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i \right| ,$$

zatem

$$|\varphi|_G \leqslant M$$

i na mocy twierdzenia 2 istnieje żądany funkcjonał linjowy $F(x)$.

W szczególności, jeżeli W będzie ciągiem elementów $\{x_n\}$, a wartości funkcjonału $f(x)$ oznaczymy odpowiednio przez C_n, wówczas otrzymamy

Twierdzenie 5. *Na to, aby istniał funkcjonał linjowy $F(x)$, spełniający warunki:*

1) $F(x_n) = C_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$,

2) $|F| \leqslant M$

(x_n — dany ciąg elementów, C_n — dane liczby rzeczywiste, M — dana liczba dodatnia), konieczne jest i wystarcza, by nierówność

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i C_i\right| \leqslant M \left|\sum_{i=1}^{r} h_i x_i\right|$$

spełniona była dla każdego skończonego układu liczb rzeczywistych $h_1, h_2, \ldots h_r$.

§ 3. Zajmiemy się teraz zagadnieniami, które w teorji przestrzeni unormowanych grają podobną rolę, jak twierdzenie Weierstrass'a o przybliżaniu funkcyj ciągłych przez wielomiany, w teorji funkcyj zmiennej rzeczywistej.

Lemmat. *Jeżeli G jest przestrzenią wektorjalną, odległość zaś elementu y_0 od G jest $d > 0$, wówczas istnieje funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w E i spełniający następujące warunki:*

$$1)\quad f(x) = 0 \quad dla \quad x \subset G, \qquad 2)\quad f(y_0) = 1,$$

$$3)\quad |f| = \frac{1}{d}.$$

Dowód [1]). Niechaj G_1 oznacza zbiór x-ów kształtu

$$x = x' + \alpha y_0, \quad \text{gdzie } x' \subset G, \quad \alpha \text{ — dowolna liczba.} \tag{1}$$

Oczywiście G_1 jest zbiorem linjowym, a ponieważ $d > 0$, zatem przedstawienie (1) elementu x jest jedyne.

Określamy w G_1 funkcjonał addytywny $F(x)$, przyjmując $F(x) = \alpha$, jeżeli x jest postaci (1).

Mamy:

$$|x| = |x' + \alpha y_0| = |\alpha| . \left|\frac{x'}{\alpha} + y_0\right| \geqslant |\alpha| . d,$$

zatem

$$|F(x)| = |\alpha| \leqslant \frac{1}{d} |x|.$$

[1]) l. c. Théorème 4. Twierdzenie 6—tam również jako Théorème 6.

Wynika stąd, że

$$|F|_{G_1} \leqslant \frac{1}{d}. \tag{2}$$

Zauważmy teraz, że, jeżeli

$$x_n \subset G \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} |x_n - y_0| = d,$$

wówczas

$$|F(x_n - y_0)| = 1 \leqslant |x_n - y_0| \,.\, |F|_{G_1},$$

a więc

$$1 \leqslant d \,.\, |F|_{G_1}, \quad \text{lub} \quad \frac{1}{d} \leqslant |F|_{G_1},$$

skąd, na mocy (2), $|F|_{G_1} = \frac{1}{d}$.

W myśl więc twierdzenia 2 istnieje funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w E taki, że

$$f(x) = F(x), \text{ jeśli } x \subset G_1, \text{ oraz } |f| = |F|_{G_1} = \frac{1}{d}.$$

W szczególności więc $f(x) = 0$ dla $x \subset G$, oraz $f(y_0) = 1$.

Jeśli dane są jakieś elementy $x_1, x_2, \ldots x_n$, wówczas każdy element x postaci $x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$, gdzie $c_1, c_2, \ldots c_n$ są liczbami, nazywamy *kombinacją linjową* elementów $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Twierdzenie 6. *Jeśli W jest dowolnym zbiorem elementów, oraz y_0 dowolnym elementem, wówczas na to, by istniał ciąg $\{w_n\}$ kombinacyj linjowych elementów zbioru W takich, że*

$$\lim_{n\to\infty} w_n = y_0,$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego funkcjonału linjowego $f(x)$ warunek $f(x) = 0$ dla $x \subset W$ pociągał za sobą $f(y_0) = 0$.

Dowód. Konieczność warunku jest oczywista.

Jeżeli bowiem $\lim_{n\to\infty} w_n = y_0$ i $f(x) = 0$, $x \subset W$, wówczas $f(w_n) = 0$, a zatem $f(y_0) = 0$.

Dostateczność wynika z poprzedniego lemmatu, jeżeli przez G oznaczymy zbiór wszystkich kombinacyj linjowych elementów zbioru W.

Zbiór elementów G nazywa się *podstawowy*, jeżeli zbiór wszystkich kombinacyj linjowych elementów zbioru G jest wszędziegęsty w E.

Zbiór elementów G nazywa się *pełny*, jeżeli dla każdego funkcjonału linjowego $f(x)$ warunek $f(x) = 0$ dla $x \subset G$ pociąga za sobą $f(x) = 0$ dla każdego $x \subset E$.

Twierdzenie 7. *Na to, aby zbiór G był podstawowy, konieczne jest i wystarcza, aby był zbiorem pełnym.*

Dowód wynika łatwo z twierdzenia poprzedniego.

Powiadamy, że funkcjonał linjowy $f(x)$ jest *ortogonalny* względem elementu x_0, jeżeli $f(x_0) = 0$. Z lemmatu, podanego na początku tego §, wynika: jeżeli zbiór G linjowy zamknięty nie obejmuje całej przestrzeni, wówczas istnieje w tej przestrzeni funkcjonał linjowy ortogonalny do G (t. zn. ortogonalny do każdego elementu zbioru G).

§ **4.** Zajmiemy się tu ustaleniem postaci ogólnej funkcjonałów linjowych w poszczególnych przestrzeniach (B).

1. *Przestrzeń* (C). Przypuśćmy, że w przestrzeni (C) dany jest funkcjonał linjowy $f(x)$. Ponieważ norma, określona w przestrzeni (M), pokrywa się w przypadku funkcyj ciągłych z normą w przestrzeni (C), przeto (C) uważać można za przestrzeń wektorjalną w (M).

Z twierdzenia 2 wynika więc, że istnieje funkcjonał linjowy $F(z)$, określony w (M) i spełniający związki

$$F(z) = f(z) \quad \text{dla} \quad z \subset C, \qquad |F| = |f|,$$

gdzie $|F|$ oznacza normę $F(z)$ w (M), a $|f|$ normę $f(z)$ w (C).

Niech

$$\xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant u \leqslant t, \\ 0 & \text{dla } t < u \leqslant 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Oznaczając, dla skrócenia, przez ξ_t funkcję $\xi_t(u)$, przyjmijmy

$$F(\xi_t) = g(t). \tag{2}$$

Pokażemy, że funkcja $g(t)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem.

W rzeczy samej, niechaj $t_0, t_1, \ldots t_n$ oznacza ciąg punktów $(a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ i niech

$$\varepsilon_i = \text{sign.} \{g(t_i) - g(t_{i-1})\} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \{g(t_i) - g(t_{i-1})\} \varepsilon_i =$$

$$= F\left[\sum_{1}^{n} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\} \varepsilon_i\right] \leqslant |F| \, . \left\| \sum_{1}^{n} \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\} \varepsilon_i \right\| .$$

Ponieważ, jak łatwo zauważyć, norma powyższej sumy jest równa 1 i $|F| = |f|$, zatem

$$\underset{a \leqslant t \leqslant b}{\text{wahanie}}\ g(t) \leqslant |f| . \tag{3}$$

Niechaj $x(t) \subset C$ i niech

$$z_n(u) = \sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right)\left[\xi_{\frac{r}{n}}(u) - \xi_{\frac{r-1}{n}}(u)\right]. \tag{4}$$

Funkcja $z_n(u)$ jest więc funkcją, która w przedziałach

$$\frac{r-1}{n} < u \leqslant \frac{r}{n}$$

przyjmuje odp. wartości $x\left(\frac{r}{n}\right)$.

Ponieważ $x(u)$ jest funkcją ciągłą, zatem

$$\lim_{n \to \infty} \| x - z_n \| = 0, \text{ skąd } \lim_{n \to \infty} F(z_n) = F(x) = f(x). \tag{5}$$

Na mocy (2), (4) mamy:

$$F(z_n) = \sum_{r=1}^{n} x\left(\frac{r}{n}\right)\left[g\left(\frac{r}{n}\right) - g\left(\frac{r-1}{n}\right)\right],$$

zatem

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \int_0^1 x(t)\,dg,$$

gdyż $x(t) \subset C$, a $g(t)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem. Z (5) wynika, że

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg \quad \text{dla} \quad x(t) \subset C.$$

Ponieważ

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,dg\right| \leqslant \underset{a\leqslant t\leqslant b}{\text{wahanie}}\, g(t) \,.\, \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|, \tag{6}$$

zatem, na mocy (3) i określenia symbolu $|f|$, dostajemy

$$\underset{a\leqslant t\leqslant b}{\text{wahanie}}\, g(t) = |f|.$$

Otrzymaliśmy więc twierdzenie [1]):

Każdy funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w przestrzeni (l), jest kształtu

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg,$$

gdzie $g(t)$ jest pewną funkcją, niezależną od $x(t)$, o wahaniu równem $|f|$.

Odwrotnie, jeżeli $g(t)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem, to oczywiście

---

[1]) Twierdzenie to w tej formie udowodnił pierwszy p. F. Riesz. Zob.: F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, C. R. 149 (1909), p. 974 — 977.

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg \quad \text{dla} \quad x(t) \subset C$$

jest funkcjonałem linjowym, jak to wynika z (6).

2. *Przestrzeń* $(L^{(r)})$ $(r \geqslant 1)$. Załóżmy, że w przestrzeni $L^{(r)}$ określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$. Niech:

$$\xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant u \leqslant t\,, \\ 0 & \text{dla } t < u \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Oznaczając, dla skrócenia, przez ξ_t funkcję $\xi_t(u)$, przyjmijmy

$$f(\xi_t) = g(t).$$

Pokażemy, że funkcja $g(t)$ jest funkcją bezwzględnie ciągłą. W rzeczy samej, niechaj $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ oznacza zbiór przedziałów, nie zachodzących na siebie, o końcach odpowiednio t_i, t_i' $(t_i < t_i')$. Kładąc $\varepsilon_i = \text{sign.}\,[g(t_i') - g(t_i)]$, mamy

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i') - g(t_i)| = \sum_{i=1}^{n} \{g(t_i') - g(t_i)\}\,\varepsilon_i =$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}\}\,\varepsilon_i\right) \leqslant |f| \,.\, \left\| \sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}\}\,\varepsilon_i \right\|. \tag{1}$$

Wyrażenie $(\xi_{t_i'} - \xi_{t_i})\,\varepsilon_i$ oznacza funkcję, która w przedziale δ_i przyjmuje wartość $\varepsilon_i = \pm 1$, a pozatem zero. Z uwagi więc na to, że przedziały δ_i nie zachodzą na siebie, otrzymujemy

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \{\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}\}\,\varepsilon_i \right\| = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|}\,,$$

gdzie $|\delta_i|$ oznacza długość przedziału δ_i.

Z (1) wynika więc

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i') - g(t_i)| \leqslant |f| \cdot \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |\delta_i|}\,.$$

Funkcja $g(t)$ jest przeto bezwzględnie ciągła. Przyjmijmy $g'(t) = \alpha(t)$. Funkcja $\alpha(t)$ jest funkcją całkowalną. Mamy oczywiście

$$f(\xi_t) = \int_0^t \alpha(t)\, dt,$$

gdyż $\xi_0 = 0$, a więc

$$f(\xi_t) = \int_0^1 \xi_t(u)\, \alpha(u)\, du. \tag{2}$$

Niechaj $0 \leqslant t_0 < t_1 \ldots < t_n = 1$, $c_1, c_2, \ldots c_n$ niech będą dowolnemi liczbami, i niech

$$x(t) = C_i \quad \text{dla} \quad t_{i-1} \leqslant t < t_i \quad (i = 1, 2 \ldots, n).$$

Oczywiście

$$x(t) = \sum C_i . \{\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}\},$$

zatem, na mocy (2),

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt. \tag{3}$$

Widzimy więc, że dla każdej funkcji $\alpha(t)$ schodkowej spełniona jest relacja (3).

Jeżeli teraz $x(t)$ jest dowolną funkcją mierzalną, ograniczoną, wówczas istnieje ciąg $\{x_n(t)\}$ funkcyj schodkowych wspólnie ograniczonych, zdążających prawie wszędzie do $x(t)$.

Temsamem

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 | x_n(t) - x(t) |^r dt = 0,$$

a więc $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0$ i, na mocy (3),

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt.$$

Związek (3) zachodzi więc dla każdej funkcji $x(t)$ mierzalnej ograniczonej.

Załóżmy teraz, że $r > 1$.

Przyjmijmy:

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{s-1} \operatorname{sign.} \alpha(t), & \text{jeżeli } |\alpha(t)|^{s-1} \leqslant n, \\ n \operatorname{sign.} \alpha(t), & \text{jeżeli } |\alpha(t)|^{s-1} > n, \end{cases}$$

gdzie $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Mamy:

$$|f(x_n)| = \left| \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt \right| \leqslant |f| \sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r\,dt}.$$

Ponieważ

$$x_n(t)\,\alpha(t) = |x_n(t)|\,.\,|\alpha(t)| \geqslant |x_n(t)|\,.\,|x_n(t)|^{\frac{1}{s-1}},$$

więc

$$\int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{s}{s-1}} \leqslant |f| \sqrt[r]{\int_0^1 |x_n(t)|^r\,dt}.$$

skąd, ponieważ $\frac{s}{s-1} = r$,

$$\left\{ \int_0^1 |x_n(t)|^r\,dt \right\}^{1-\frac{1}{r}} \leqslant |f|.$$

Ponieważ nierówność powyższa spełniona jest dla każdego n i ponieważ

a) $|x_n(t)|^r \leqslant |\alpha(t)|^{rs-r} = |\alpha(t)|^s$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n(t)|^r = |\alpha(t)|^s$ prawie wszędzie,

więc

$$\sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s\,dt} \leqslant |f|. \tag{4}$$

Funkcja $\alpha(t)$ jest tedy całkowalna w potędze s.

Jeżeli więc $x(t)$ jest dowolną funkcją mierzalną całkowalną w r-tej potędze, to oczywiście iloczyn $x(t)\alpha(t)$ jest funkcją całkowalną.

Określimy teraz ciąg $\{x_n(t)\}$, przyjmując:

$$x_n(t) = \begin{cases} |x(t)| \operatorname{sign} x(t), & \text{jeżeli } |x(t)| \leqslant n, \\ n \operatorname{sign} x(t), & \text{jeżeli } |x(t)| > n; \end{cases} \tag{5}$$

wówczas

$$\|x - x_n\| = \sqrt[r]{\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^r \, dt} \to 0, \tag{6}$$

a więc

$$\left| \int_0^1 x(t)\alpha(t)\, dt - f(x_n) \right| = \left| \int_0^1 [x(t) - x_n(t)]\alpha(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[r]{\int_0^1 |x(t) - x_n(t)|^r \, dt} \,.\, \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s \, dt}$$

i na mocy (6),

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \int_0^1 x(t)\alpha(t)\, dt;$$

skoro tedy

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 x(t)\alpha(t)\, dt \right| \leqslant \sqrt[r]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s \, dt} \,.\, \|x\|,$$

zatem, na mocy (4),

$$|f| = \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s \, dt}.$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie [1]:

Wszelki funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w $(L^{(r)})$ $(r > 1)$, jest kształtu

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

gdzie $\alpha(t) \subset (L^{(s)})$, *przyczem*

$$|f| = \sqrt[s]{\int_0^1 |\alpha(t)|^s\,dt}.$$

Przypuśćmy teraz, że $r = 1$. Niechaj $0 \leqslant u < u + h \leqslant 1$, i niech

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, & \text{jeśli } u \leqslant t \leqslant u + h, \\ 0, & \text{jeśli } 0 \leqslant t < u \text{ lub } u + h < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Mamy, na mocy (3),

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt\right| = \frac{1}{h}\left|\int_u^{u+h} \alpha(t)\,dt\right|,$$

ponieważ zaś

$$|f(x)| \leqslant |f| \,.\, \|x\| = |f| \,.\, 1,$$

przeto

$$\left|\int_u^{u+h} \alpha(t)\,dt\right| \leqslant |f| \,.\, h.$$

Funkcja $g(u) = \int_0^u \alpha(t)\,dt$ spełnia więc warunek Lipschitz'a,

---

[1]) Dla $p = 2$ twierdzenie to udowodnił pierwszy p. M. Fréchet. Zob. M. Fréchet, Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires, Paris, C. R., 144 (1907), p. 1414 — 1416. W przypadku ogólnym znajduje się w pracy p. F. Riesz'a cytowanej na str. 71 (p. 475).

a ponieważ prawie wszędzie $g'(t) = \alpha(t)$, więc

$$|\alpha(t)| \leqslant |f| \text{ prawie wszędzie.} \tag{7}$$

Jeżeli teraz $x(t)$ jest dowolną funkcją całkowalną, wówczas, określając ciąg $\{x_n(t)\}$ tak jak w (5), mamy

$$\| x - x_n \| = \int_0^1 |x(t) - x_n(t)|\, dt \to 0,$$

skąd

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

gdyż

$$|x_n(t)\,\alpha(t)| \leqslant |x(t)\,\alpha(t)|.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\left| \int_0^1 x(t)\,\alpha(t) \right| \leqslant \int_0^1 |x(t)|\,dt \,.\, \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{max istotne}} \,|\alpha(t)|.$$

Na mocy więc (7)

$$|f| = \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{max istotne}}\, |\alpha(t)|.$$

Udowodniliśmy w ten sposób twierdzenie [1]):

Każdy funkcjonał linjowy określony w (L) *jest postaci*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,.\,\alpha(t)\,dt,$$

gdzie $\alpha(t)$ *jest funkcją prawie wszędzie ograniczoną, przyczem*

$$|f| = \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{max istotne}}\, |x(t)|.$$

---

[1]) Twierdzenie to udowodnił pierwszy p. H. Steinhaus. Zob.: H. Steinhaus, Additive und stetige Funktional-operationen, Math. Zeitschr., 5, (1918), p. 186—221.

3. *Przestrzeń* (c). Przypuśćmy, że w (c) określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$. Niech

$$\xi_i^n = \begin{cases} 1 \text{ dla } n = i, \\ 0 \text{ dla } n \neq i. \end{cases}$$

Oznaczmy przez x_n ciąg $\{\xi_i^n\}$, przez x' — ciąg $\{\xi_i^i\}$. Niechaj

$$f(x_n) = C_n, \qquad f(x') = C',$$

i niech x oznacza ciąg $\{\xi_n\} \subset (c)$, oraz $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

Zauważmy, że

$$\| x - \alpha x' - \sum_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha) x_n \| = \text{górny kres}_{n>r} |\xi_n - \alpha|.$$

Zatem

$$x = \alpha x' + \lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} (\xi_n - \alpha) x_n, \quad \text{czyli}$$

$$x = \alpha x' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) x_n.$$

Mamy więc

$$f(x) = \alpha f(x') + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) f(x_n),$$

skąd

$$f(x) = \alpha C' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \alpha) C_n.$$

Niechaj teraz x oznacza ciąg $\{\xi_n\}$, gdzie

$$\xi_n = \begin{cases} \operatorname{sign} C_n, & \text{dla } n \leqslant r, \\ 0, & \text{dla } n > r. \end{cases}$$

Wówczas $\| x \| = 1$, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{r} |C_n|$, ponieważ zaś $|f(x)| \leqslant |f| . \|x\|$, więc

$$\sum_{n=1}^{r} |C_n| \leqslant |f|,$$

i z uwagi na to, że r jest liczbą dowolną, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|$ jest zbieżny.

Niech

$$C' - \sum_{n=1}^{\infty} C_n = C.$$

Mamy ogólnie

$$f(x) = \alpha C + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n.$$

Jeśli tu przyjmiemy

$$\xi_n = \begin{cases} \text{sign } C_n & \text{dla } n \leqslant r, \\ \text{sign } C & \text{dla } n > r, \end{cases}$$

wówczas: $\|x\| = 1$, $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \text{sign } C$ oraz

$$f(x) = |C| + \sum_{n=1}^{r} |C_n| + \sum_{n=r+1}^{\infty} C_n \, \text{sign } C \leqslant |f|.$$

Ponieważ ostatnia nierówność zachodzi dla każdego r, zatem

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \leqslant |f|.$$

Z drugiej strony, $f(x) \leqslant \{|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|\} \, |x|$, a więc, łącznie z poprzednią nierównością, mamy

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|.$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie:

Wszelki funkcjonał linjowy $f(x)$ określony w (c) ma kształt

$$f(x) = C \lim_{n\to\infty} \xi_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \xi_n,$$

przyczem

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| = |f|$$

(ξ_n *są tu wyrazami ciągu* x).

4. *Przestrzeń* $(l^{(r)})$ $(r \geqslant 1)$. Oznaczmy, jak poprzednio, przez x_n ciąg $\{\xi_i^n\}$, gdzie

$$\xi_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = i, \\ 0 & \text{dla } n \neq i. \end{cases}$$

Jeżeli x oznacza dowolny ciąg $\{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$, wówczas

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \| = \sqrt[r]{\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^r} \to 0,$$

a zatem

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i. \tag{1}$$

Przypuśćmy, że w $(l^{(r)})$ określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$. Niech

$$f(x_i) = C_i.$$

Mamy na mocy (1)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i. \tag{2}$$

Przypuśćmy najpierw, że $r = 1$.

Niech

$$\xi_n = \operatorname{sign} C_n,$$

$$\xi_i = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq n.$$

Mamy wówczas $f(x) = |C_n| \leqslant |f|$.

Z drugiej strony, dla każdego ciągu $x = \{\xi_i\} \subset (l)$,

$$|f(x)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|\right) . \text{górny kres}_{i=1,2,\ldots} |C_i|,$$

a zatem

$$|f| = \text{górny kres}_{i=1,2,\ldots} |C_i|.$$

Udowodniliśmy tedy twierdzenie:

Każdy funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w (l), jest postaci

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i,$$

gdzie $|f| = \text{górny kres}_{i=1,2,\ldots} \{|C_i|\}$ (ξ_i *są wyrazami ciągu* x).

Przypuśćmy teraz, że $r > 1$. Niechaj $x^0 = \{\xi_i^0\}$, gdzie

$$\xi_i^0 = \begin{cases} |C_i|^{s-1} \text{ sign. } C_i & \text{dla } i \leqslant n \\ 0 & \text{dla } i > n. \end{cases} \qquad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1\right),$$

Mamy

$$\| x^0 \| = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^{rs-s}} = \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s}.$$

Zatem, na mocy (2),

$$f(x^0) = \sum_{i=1}^{n} |C_i|^s \leqslant |f| \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s},$$

skąd

$$\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{n} |C_i|^s} \leqslant |f|,$$

a że n jest liczbą dowolną, więc

$$\sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s} \leqslant |f|.$$

Z drugiej strony, dla każdego ciągu $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(r)})$,

$$f(x) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i C_i \right| \leqslant \sqrt[r]{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^r} \cdot \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s},$$

a więc ostatecznie
$$|f| = \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}.$$

Udowodniliśmy przeto twierdzenie:

Wszelki funkcjonał linjowy $f(x)$, określony w $(l^{(r)})$ $(r > 1)$, jest kształtu

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i \qquad (x = \{\xi_i\}),$$

przyczem
$$|f| = \sqrt[s]{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s}.$$

ROZDZIAŁ IV B.

Przestrzenie unormowane

(Ciąg dalszy).

§ 1. Ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x_n(t) \subset L^{(r)}, \quad r \geqslant 1)$ nazywamy *zamkniętym* w $(L^{(r)})$, jeżeli dla każdej funkcji $x(t) \subset (L^{(r)})$ istnieje ciąg $\{w_n\}$ wyrażeń postaci:

$$w_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t),$$

zdążający przeciętnie w potędze r do $x(t)$, t. zn. taki, iż

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 |x(t) - w_n(t)|^r dt = 0.$$

Ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ nazywamy *zupełnym* w $(L^{(r)})$, jeżeli dla każdej funkcji $y(t) \subset (L^{(s)})$ $\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1\right]$, gdy $r > 1$, wzgl. ograniczonej i mierzalnej, gdy $r = 1$, warunki:

$$\int_0^1 x_n(t)\, y(t)\, dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

pociągają $y(t) = 0$ prawie wszędzie. Pojęcia powyższe występują w teorji szeregów ortogonalnych.

Łatwo zauważyć, iż na to, aby ciąg funkcyj w przestrzeni $(L^{(r)})$ był zamknięty, wystarczy i jest konieczne, by był podstawowy w sensie definicji § 3 rozdziału IV A; podobnież, na to, by był zupełny, konieczne jest i wystarcza, by był pełny (*ibid*). W rzeczy samej, wystarczy przypomnieć, że każdy funkcjonał linjowy w $(L^{(r)})$ jest postaci

$$\int_0^1 \alpha(t)\, x(t)\, dt,$$

gdzie $\alpha(t) \subset L^{(s)}$ (jeżeli $r > 1$), wzgl. $\alpha(t) \subset M$ (jeżeli $r = 1$).

Analogiczne definicje ustalić można w przestrzeni (C).

Ciąg $\{x_n(t)\}$ $(x_n(t) \subset C,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$ jest w (C) *zamknięty*, jeżeli dla każdej funkcji $x(t) \subset (C)$ istnieje ciąg kombinacyj linjowych $\left\{\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} x_i(t)\right\}$, zdążających jednostajnie do $x(t)$.

Ciąg $\{x_n(t)\}$ jest *zupełny* w (C), jeżeli dla każdej funkcji $g(t)$ o wahaniu ograniczonem, warunki

$$\int_0^1 x_n(t)\, dg = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pociągają za sobą $g(t) = \text{const.}$, z pominięciem conajwyżej przeliczalnej mnogości punktów.

Z twierdzenia 7 rozdziału IV A wynika natychmiast, iż *na to, aby ciąg $\{x_n(t)\}$ był zupełny w $(L^{(r)})$, wzgl. (C), konieczne jest i wystarcza, by był zamknięty w $(L^{(r)})$, wzgl. (C).*

Postępując analogicznie, przenieść można definicje ciągów zamkniętych i zupełnych na przestrzenie $(l^{(r)})$, (c) i (m).

§ **2.** Twierdzenie 6 rozdziału IV A interpretować można w rozmaitych przestrzeniach; np.

a) *na to, aby istniały kombinacje linjowe utworzone z wyrazów ciągu $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ x_n(t) \subset (L^{(r)}))$, przybliżające przeciętnie w* r-tej *potędze funkcję $x(t) \subset (L^{(r)})$, konieczne jest i wystar-*

cza, by dla każdej funkcji $y(t) \subset (L^{(s)})$ *(wzgl. — ograniczonej, mierzalnej, gdy* $r = 1$*) warunki*

$$\int_0^1 y(t)\, x_n(t)\, dt = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pociągały za sobą

$$\int_0^1 y(t)\, x(t)\, dt = 0 .$$

b) *Na to, aby istniały wielomiany utworzone z wyrazów ciągu* $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1;\ x_n(t) \subset (C))$, *przybliżające jednostajnie funkcję* $x(t) \subset (C)$ *konieczne jest i wystarcza, by dla każdej funkcji o wahaniu ograniczonem* $g(t)$ *warunki*

$$\int_0^1 x_n(t)\, dg = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pociągały za sobą

$$\int_0^1 x(t)\, dg = 0 .$$

§ 3. Załóżmy, że dana jest tablica $\{\alpha_{ik}\}$ i ciąg liczb $\{c_i\}$. Zajmiemy się ustaleniem warunków na to, aby istniał ciąg liczb $\{z_i\}$, spełniających nieskończenie wiele równań

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik}\, z_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Rozwiązanie tego zagadnienia podamy w niektórych przypadkach.

a) *Przestrzeń* (*l*). Niechaj x_i oznacza ciąg $\{\alpha_{ik}\}$, przyczem niech

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{ik}| < +\infty \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Jak wiemy, wszelki funkcjonał linjowy w (l) ma kształt

$$f(x) = \sum z_i \xi_i,$$

gdzie x oznacza ciąg $\{\xi_i\}$; mamy wówczas $|f| = \underset{i=1,2,\ldots}{\text{kres górny}}\, z_i$.

Z twierdzenia 5 rozdziału IVA wynika tedy natychmiast:

Na to, by istniał ciąg ograniczony $\{z_k\}$, *spełniający równania*

$$\sum_{k=i}^{\infty} \alpha_{ik} z_k = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

oraz warunek

$$\text{kres górny } |z_k| \leqslant M,$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego układu skończonego liczb $h_1, h_2, \ldots h_r$ *spełniony był związek*

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i c_i\right| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{r} h_i \alpha_{ik}\right|.$$

b) *Przestrzeń* (c). Niechaj x_i oznacza ciąg $\{\alpha_{ik}\}$ zbieżny do zera, t. j. taki, iż $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{ik} = 0$. Funkcjonał linjowy w (c) ma kształt

$$f(x) = \alpha \lim_{n\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} z_i \xi_i,$$

gdzie

$$x = \{\xi_i\}, \qquad |f| = |\alpha| + \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|.$$

Z uwagi na to, że $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{ik} = 0$, otrzymujemy z twierdzenia 5 rozdziału IVA:

Na to, by istniał ciąg liczb $\{z_i\}$, *spełniających równania*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} z_k = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

oraz warunek

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_i| \leqslant M,$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego układu skończonego liczb $h_1, h_2, \ldots h_r$ zachodziła nierówność

$$\left|\sum_{i=1}^{r} h_i c_i\right| \leqslant M . \underset{k=1,2\ldots}{\text{kres górny}} \left|\sum_{i=1}^{r} h_i a_{ik}\right|$$

§ 4. Problemem momentów nazwano następujące zagadnienie: Dany jest ciąg funkcyj $\{\varphi_i\}$ i ciąg liczb $\{c_i\}$. Jakie są warunki na to, aby istniała funkcja f, spełniająca nieskończenie wiele równań

$$\int_a^b f \varphi_i \, dt = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Podamy rozwiązanie tego zagadnienia w niektórych przypadkach.

a) *Przestrzeń* (C). Niechaj x_i oznacza funkcję ciągłą $x_i(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Ponieważ wszelki funkcjonał linjowy $f(x)$ w (C) daje się przedstawić w postaci

$$f(x) = \int_0^1 x(t) \, dg,$$

gdzie $\underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{wahanie}}\, g(t) = |f|$, przeto z twierdzenia 5 rozdziału IVA otrzymujemy [1]):

[1]) Twierdzenie to znalazł pierwszy p. F. Riesz w pracy cytowanej na str. 77; zob. również pracę p. E. Helly'ego, cytowaną na str. 71. Twierdzenie pod b) udowodnił pierwszy również p. F. Riesz w pracy cytowanej na str. 71.

Na to, by istniała funkcja $g(t)$ o wahaniu ograniczonem, spełniająca równania

$$\int_0^1 x_i(t)\, dg = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

oraz warunek

$$\underset{0 \leqslant t \leqslant 1}{\text{wahanie}}\, g(t) \leqslant M,$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego układu skończonego liczb $h_1, h_2, \ldots h_r$ zachodziła nierówność

$$\left| \sum_{i=1}^{r} h_i c_i \right| \leqslant M \,.\, \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \sum_{i=1}^{r} h_i x_i(t) \right|.$$

b) *Przestrzeń* $(L^{(r)})$ $(r > 1)$. Postępując analogicznie, otrzymujemy twierdzenie:

Na to, by istniała funkcja $\alpha(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, *spełniająca równania*

$$\int_0^1 x_i(t)\, \alpha(t)\, dt = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (x_i(t) \subset (L^{(r)}))$$

oraz warunek

$$\int_0^1 |\alpha(t)|^s\, dt \leqslant M^s \qquad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1\right),$$

konieczne jest i wystarcza, by dla każdego skończonego układu liczb $h_1, h_2, \ldots h_k$ zachodziła nierówność

$$\left| \sum_{i=1}^{k} h_i c_i \right| \leqslant M \sqrt[r]{\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{k} h_i x_i(t) \right|^r dt}.$$

Jeżeli $r = 1$, wówczas $x_i(t)$ są funkcjami całkowalnemi, poszukiwana zaś funkcja $\alpha(t)$ ma być ograniczona i prawie wszędzie spełniać warunek

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \text{istotne} \mid \alpha(t) \mid \leqslant M .$$

Warunek wówczas jest następujący:

$$\left| \sum_{i=1}^{k} h_i c_i \right| \leqslant M \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{k} h_i x_i(t) \right| dt .$$