ROZDZIAŁ VA.

Przestrzenie typu *(B)*.

§ 1. Podamy tu pewne twierdzenia, które związane są istotnie z przestrzeniami unormowanemi zupełnemi, a więc — przestrzeniami typu (B).

Twierdzenie 1. *Jeżeli $F(x)$ jest operacją mierzalną (B) oraz $u(x)$ operacją addytywną, spełniającą warunek*

$$|F(x)| \geqslant |U(x)| \quad \textit{dla każdego } x,$$

wówczas $U(x)$ jest operacją linjową.

Dowód. Istnieje zbiór H pierwszej kategorji taki, że w zbiorze $E-H$ operacja $F(x)$ jest ciągła.

Niechaj $x_0 \subset E-H$. Istnieje zatem takie $r > 0$ i liczba $M > 0$, że

$$|U(x)| \leqslant |F(x)| \leqslant M, \quad \text{jeżeli } |x - x_0| \leqslant r, \quad x \subset E-H. \tag{1}$$

Niechaj $|x'| < \frac{r}{2}$, oraz niech G oznacza zbiór wszystkich punktów kształtu

$$x' + x, \qquad |x - x_0| \leqslant \frac{r}{2}, \qquad x \subset E-H.$$

Zbiór G jest zbiorem drugiej kategorji, gdyż zbiór elementów x, spełniających związki

$$|x - x_0| \leqslant \frac{1}{2} r, \qquad x \subset E - H$$

jest zbiorem drugiej kategorji.

W zbiorze G istnieje zatem element

$$x' + x_1 \subset E - H, \qquad x_1 \subset E - H.$$

Ponieważ $|x_1 - x_0| \leqslant \frac{1}{2} r < r$, $|x' + x_1 - x_0| \leqslant r$,

zatem, na mocy (1),

$$|U(x')| \leqslant |U(x' + x_1)| + |U(x_1)| \leqslant 2M.$$

W kuli więc $|x| \leqslant \frac{r}{2}$ norma elementu $U(x)$ jest ograniczona, operacja U jest zatem ciągła (tw. 1 rozdziału IV A).

Twierdzenie 2. *Jeżeli, dla operacji addytywnej $U(x)$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ pociąga za sobą zawsze $\underline{\lim}_{n \to \infty} |U(x_n)| \geqslant |U(x)|$, wówczas operacja $U(x)$ jest linjowa.*

Dowód [1]). Oznaczmy przez G_n zbiór elementów x, spełniających nierówność $|U(x)| \leqslant n$.

Zbiór G_n jest, jak wynika z założenia, zamknięty. Ponieważ $E = \sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, zatem jeden ze zbiorów G_n zawiera kulę, w której operacja $U(x)$ jest ograniczona według normy.

Na mocy więc twierdzenia 1 rozdziału IV A operacja $U(x)$ jest linjowa; z ograniczoności bowiem operacji $U(x)$ według normy w pewnej kuli wynika oczywiście ograniczoność jej w każdej kuli.

Twierdzenie 4. *Jeżeli ciąg operacyj linjowych $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny w zbiorze H, wszędziegęstym w pewnej kuli K, i jeżeli ciąg norm $\{|U_n|\}$ jest ograniczony, wówczas ciąg $\{U_n(x)\}$ jest zbieżny w całej przestrzeni.*

---

[1]) Praca cytowana wyż. na str. 38. Théorème 3.

D o w ó d [1]). Niechaj x_0 będzie dowolnym elementem kuli K. Istnieje ciąg $\{x_n\} \subset H$, którego granicą jest x_0.

Mamy, dla każdej trójki liczb n, p, q,

$$|U_p(x_0) - U_q(x_0)| \leqslant |U_p(x_0 - x_n)| + |U_q(x_n - x_0)| + |U_p(x_n) - U_q(x_n)|,$$

zatem

$$\overline{\lim_{p,q\to\infty}} |U_p(x_0) - U_q(x_0)| \leqslant 2M|x_0 - x_n| \qquad (M = \overline{\lim_{n\to\infty}} |U_p|).$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_0 - x_n| = 0$, więc

$$\lim_{p,q\to\infty} |U_p(x_0) - U_q(x_0)| = 0,$$

skąd wynika zbieżność ciągu $U_n(x_0)$.

Jeżeli teraz x jest dowolnym elementem, x' zaś środkiem kuli K, wówczas istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że $x' + \varepsilon x \subset K$, a zatem że $\lim\limits_{n\to\infty} U(x' + \varepsilon x)$ istnieje.

Stąd oczywiście wynika, że również granica $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x)$ istnieje, gdyż ciąg $U_n(x')$ jest zbieżny.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $\{U_n(x)\}$ jest ciągiem funkcjonałów linjowych, wówczas zbiór H wszystkich elementów x, dla których*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x)| < +\infty$$

jest całą przestrzenią E albo zbiorem pierwszej kategorji.

D o w ó d. Zbiór H jest zbiorem linjowym, a na mocy twierdzenia 9 rozdziału I mierzalnym (B). Z twierdzenia 2 rozdziału IIIA wynika nasze twierdzenie.

Twierdzenie 5. *Jeżeli, dla ciągu operacyj linjowych $\{U_n(x)\}$, mamy w każdym punkcie x przestrzeni*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x)| < +\infty,$$

wówczas ciąg norm $\{|U_n|\}$ jest ograniczony.

---

[1]) Praca cytowana wyż. na str. 40 (p. 53). Tam również twierdzenia 4 i 5.

D o w ó d. Na mocy twierdzenia 9 rozdziału III A, istnieje kula K i liczba N taka, że

$$|U_n(x)| \leqslant N \quad \text{dla} \quad x \subset K \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Zatem, jak łatwo widać, mamy $|U_n| \leqslant \frac{2N}{r}$, gdzie r oznacza promień kuli K.

Twierdzenie 6. *Jeżeli zbiór L operacyj linjowych ma tę własność, że dla każdego elementu x istnieje liczba skończona $M(x)$ taka, że*

$$|U(x)| \leqslant M(x), \quad \textit{jeśli} \quad U \subset L,$$

wówczas normy operacyj zbioru L tworzą zbiór ograniczony.

D o w ó d. W przeciwnym bowiem przypadku istniałby ciąg $\{U_n(x)\}$, $[U_n(x) \subset L]$, taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} |U_n| = \infty$. Na mocy zatem twierdzenia 5, istniałby element x_0 taki, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x_0)| = +\infty$$

wbrew założeniu.

Z twierdzenia 4 i 5 wynika bezpośrednio

Lemmat. *Jeżeli dla ciągu $\{U_n(x)\}$ operacyj linjowych*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n| = +\infty,$$

wówczas nierówność

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |U_n(x)| < +\infty$$

spełniona być może conajwyżej tylko w zbiorze I-ej kategorji.

Twierdzenie 7. *Jeśli dla ciągu podwójnego $\{U_{pq}(x)\}$ funkcjonałów linjowych*

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} |U_{pq}| = +\infty \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

wówczas istnieje element x (niezależny od p), dla którego

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} |U_{pq}(x)| = +\infty \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

D o w ó d [1]) wynika z twierdzenia 4, gdyż zbiór H_p punktów x, w których

$$\lim_{q\to\infty} |U_{pq}(x)| < \infty$$

jest zbiorem pierwszej kategorji. Zbiór $H = \sum_{p=1}^{\infty} H_p$ jest zatem zbiorem pierwszej kategorji, a zbiór $E - H$ jest zbiorem drugiej kategorji (nie jest tedy pusty). Jak łatwo widać,

$$\overline{\lim_{q\to\infty}} |U_{pq}(x)| = \infty \quad \text{przy} \quad x \subset E - H \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Uwaga. W twierdzeniu 7, przeciwdziedziny E_p ciągów $\{U_{pq}\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ nie muszą być jednakowe. Oczywiście dla każdego p przeciwdziedzina ciągu $\{U_{pq}(x)\}$ musi być ta sama, gdyż w przeciwnym przypadku nie możnaby mówić o zbieżności.

§ 2. Jeżeli $\{f_i\}$ jest ciągiem funkcjonałów linjowych, określonych w E, przyczem $|f_i| \leqslant M$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (M — niezależne od n), jeżeli $\{y_i\}$ jest ciągiem elementów zbioru E, przyczem $|y_i| \leqslant M'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (M' — liczba niezależna od n), i jeżeli

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty,$$

wówczas wyrażenie

$$U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x) y_i$$

jest operacją linjową; mamy bowiem

$$|M(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \, |f_i(x)| \, |y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \, . \, M M' \, . \, |x| =$$

$$= |x| \, . \, M M' \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \, .$$

[1]) Praca cytowana wyż. na str. 40., Théorème 1.

Niechaj elementami zbioru E będą funkcje, określone w przedziale $< 0,1 >$ i spełniające warunki następujące:

1) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \text{as}\, x_n(t) = 0$;

2) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, wówczas istnieje ciąg częściowy $\{x_{n_i}\}$ i element x taki, że

$$|x_{n_i}(t)| \leqslant |x(t)|$$

dla każdego i oraz dla prawie każdego t ($|\;|$ oznacza tu wartość bezwzględną);

3) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \text{as}\, x_n(t) = x(t)$, wówczas

$$\varliminf_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|.$$

W warunkach powyższych zakładamy, że $\{x_n\} \subset E$ oraz $x \subset E$. Przestrzenie (C), $(L^{(p)})$, (M) sprawdzają powyższe własności; jeśli chodzi o sprawdzenie warunku 2), to funkcję $x(t)$ określimy jako sumę szeregu

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n_i}(t)| \quad \text{przy założeniu, że} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n_i}\| < \infty.$$

Twierdzenie 8. *Niechaj E i E_1, spełniają warunki* 1), 2), 3) *wyżej podane. Jeżeli $K(s, t)$ jest funkcją określoną w kwadracie* $< 0,1; 0,1 >$, *jeśli dla każdego $x \subset E$ całka*

$$y(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \tag{1}$$

istnieje dla prawie każdej wartości s, oraz jeśli $y(s) \subset E_1$, wówczas wyrażenie (1) *jest operacją linjową.*

D o w ó d [1]). Niechaj $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$ oraz niech $\{\bar{x}_n\}$ będzie dowolnym ciągiem częściowym ciągu $\{x_n\}$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$,

[1]) Praca cytowana wyż. na str. 38; Théorème 2.

przeto, na mocy warunku 2), w zbiorze E istnieje ciąg częściowy $\{\bar{x}_{n_i} - x\}$ i element z taki, że $|\bar{x}_{n_i}(t) - x(t)| \leqslant z(t)$ prawie wszędzie dla każdego i. Ponieważ $\lim_{i\to\infty} \text{as}\, \{K(s,t)\, [\bar{x}_{n_i}(t) - x(t)]\} = 0$,

$|K(s,t)\,(\bar{x}_{n_i} - x)| \leqslant |K(s,t)|\, z(t)$ i całka $\int\limits_0^1 K(s,t)\, z(t)\, dt$ istnieje

w zbiorze H o mierze 1, gdyż $z \subset E$; zatem

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^1 K(s,t)\,(\bar{x}_{n_i}(t) - x(t))\, dt = 0;$$

temsamem, $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 K(s,t)\, \bar{x}_{n_i}(t)\, dt = \int\limits_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$ dla $s \subset H$.

Ponieważ z każdego ciągu częściowego ciągu $\{y_n(s)\}$ można wyrwać ciąg zbieżny prawie wszędzie do $y(s)$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} \text{as}\, y_n(s) = y(s)$; wynika stąd już, że operacja $\int\limits_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$ jest linjowa.

Przestrzeń (L). Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją mierzalną dla $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, spełniającą warunek

$$\int\limits_0^1 C(s)\, ds = K < \infty \qquad (C(s) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \text{istotne}\, |K(s,t)|),$$

wówczas wyrażenie

$$U(x) = \int\limits_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest w polu (L) operacją linjową, której przeciwdziedzina mieści się również w (L).

Mamy bowiem

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \right| ds \leqslant \int_0^1 |x(t)|\, dt \,.\, \int_0^1 C(s)\, ds\,.$$

Przestrzeń (M). Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją mierzalną dla $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ i jeżeli

$$\int_0^1 |K(s,t)|\, dt < M < \infty \quad \text{dla każdego } s\,,$$

wówczas wyrażenie

$$U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową określoną w (M), której przeciwdziedzina mieści się także w (M).

Przestrzeń (C). Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją ciągłą w kwadracie $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, wówczas wyrażenie

$$U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową określoną w (C), przyczem przeciwdziedzina mieści się również w (C).

Podobnie, wyrażenie

$$U(x) = x(t) - \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową.

Przestrzeń $(L^{(p)})$. Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją mierzalną dla $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ i jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)\, x(t)\, y(s)|\, ds\, dt < \infty \tag{1}$$

dla każdej pary funkcyj $x(t) \subset (L^{(p)})$, $y(s) \subset (L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$ $(p, q > 1$, wówczas wyrażenie

$$U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \tag{2}$$

jest operacją linjową określoną w przestrzeni $(L^{(p)})$, przyczem przeciwdziedzina mieści się w polu $(L^{(q)})$.

Obierzmy dowolne $x \subset (L^{(p)})$. Dla każdego $y \subset (L^{\left(\frac{q}{q-1}\right)})$ mamy

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt = \int_0^1 y(s) \left[\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \right] ds;$$

wynika stąd, że

$$\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \subset (L^{(q)}),$$

a zatem — że $U(x)$ jest operacją linjową.

Aby warunek (1) zachodził, wystarczy założyć, że

$\int_0^1 \int_0^1 | K(s,t)^{\frac{r}{r-1}} |\, ds\, dt < \infty$, gdzie r jest mniejszą z liczb p, $\frac{q}{q-1}$

(w szczególności — iż $K(s,t)$ jest ograniczone, gdy $r = 1$, lub całkowalne polowo, gdy $p = q = +\infty$).

Mamy bowiem na mocy nierówności Riesz'a

$$| \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt | \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 | K(s,t) |^{\frac{r}{r-1}} ds\, dt \right\}^{\frac{r}{r-1}} \cdot \left\{ \int_0^1 | x(s) |^r ds \right\}^{\frac{1}{r}} \cdot \left\{ \int_0^1 | y(t) |^r dt \right\}^{\frac{1}{r}}.$$

W szczególności, jeżeli $p = q = 2$, wówczas warunek (1) można zastąpić warunkiem

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s, t)|^2 \, ds \, dt < +\infty. \tag{3}$$

Z warunku (3) wynika wówczas, że operacja (2) jest linjowa w $(L^{(2)})$, przyczem $y(s) \subset (L^{(2)})$.

Uwaga. To, co wyżej powiedzieliśmy, ważne jest również w przypadkach $p, q = 1, \infty$.

ROZDZIAŁ V B.

Przestrzenie typu *(B)*

(Ciąg dalszy).

§ 1. *Jeżeli* $\alpha(t)$ *jest funkcją mierzalną w* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *i jeżeli dla każdego* $x(t) \subset (L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ *istnieje całka*

$$\int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt,$$

wówczas dla $p > 1$ *mamy* $\int_0^1 |\alpha(t)|^{\frac{p}{p-1}} < \infty$, *a dla* $p = 1$ *istotny kres górny* $|\alpha(t)|$ *jest skończony.*

Dowód [1]). Niechaj dla n naturalnego

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{jeżeli} \quad |\alpha(t)| \leqslant n, \\ n \operatorname{sign} \alpha(t), & \text{jeżeli} \quad |\alpha(t)| > n. \end{cases}$$

Mamy

$$|x(t)\, \alpha(t)| \geqslant |x(t)\, \alpha_n(t)|,$$

a więc, ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n(t) = \alpha(t)$,

---

[1]) Dla $p > 1$ twierdzenie to znalazł p. F. Riesz. Ob. pracę cytowaną na str. 71 (p. 457).

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x(t)\, \alpha_n(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt.$$

Wyrażenie $\int_0^1 x(t)\, \alpha_n(t)\, dt$ jest funkcjonałem linjowym w $(L^{(p)})$ ($\alpha_n(t)$ jest funkcją ograniczoną), $\int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt$ jest tedy, na mocy twierdzenia 5 rozdziału IIIA, również funkcjonałem linjowym. W myśl przeto twierdzenia o postaci ogólnej funkcjonałów linjowych w $(L^{(p)})$ dla $p > 1$, istnieje funkcja $\bar{\alpha}(t) \subset (L^{\frac{p}{p-1}})$ taka, że

$$\int_0^1 x(t)\bar{\alpha}(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt \quad \text{dla} \quad x(t) \subset (L^{(p)}).$$

Przyjmując

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 0 & \text{,, } t_0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

mamy

$$\int_0^{t_0} \bar{\alpha}(t)\, dt = \int_0^{t_0} \alpha(t)\, dt \qquad \text{dla każdego } 0 \leqslant t_0 \leqslant 1,$$

skąd prawie wszędzie

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t).$$

Analogicznie postępuje się dla $p = 1$.

§ 2. *Jeżeli dla każdego ciągu zbieżnego* $x = \{\xi_i\}$ *szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$ *jest zbieżny, wówczas* $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty$.

D o w ó d. Wyrażenie $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$ jest funkcjonałem linjowym w przestrzeni (c), ponieważ zaś

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\xi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i$$

przeto z twierdzenia 5 rozdziału III A wynika, że wyrażenie $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i$ jest także funkcjonałem linjowym. Istnieje więc liczba $M>0$ taka, że

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i\right|\leqslant M\,\|x\|=M\,.\,\underset{i=1,2,\ldots}{\text{kres górny}}\,|\xi_i|.$$

Przyjmując tu

$$\xi_i=\operatorname{sign}\alpha_i,\quad \text{jeśli}\quad i\leqslant n,\quad \alpha_i\neq 0,$$

$$\xi_i=0,\qquad \text{jeśli}\quad i>n\quad \text{lub}\quad \alpha_i=0,$$

otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\leqslant M\qquad (n=1,2,\ldots),$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|\leqslant M.$$

Jeżeli dla każdego ciągu $x=\{\xi_i\}\subset(l^{(p)})$ $(p\geqslant 1)$ *szereg* $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\,\xi_i$ *jest zbieżny, wówczas, jeśli* $p>1$, *mamy*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^{\frac{p}{p-1}}<\infty,$$

jeśli zaś $p=1$, *wówczas ciąg* $\{\alpha_i\}$ *jest ograniczony.*

Dowód analogiczny do poprzedniego [1]).

---

[1]) Ostatnie twierdzenie znalazł p. E. Landau. Zob. E. Landau, Über einen Konvergenzsatz, Gött. Nachr. 1907. p. 25—27.

§ 3. Twierdzenie 8 rozdziału III A, oraz 7 rozdziału VA przedstawiają funkcjonalnie t. zw. zasadę zagęszczania osobliwości. Wyjaśnimy to na paru przykładach [1]).

Niechaj $\{g_k(t)\}$ będzie ciągiem ortogonalnym, unormowanym funkcyj całkowalnych wraz z kwadratem w przedziale $<0,1>$. Jeżeli $x(t)$ jest funkcją całkowalną w przedziale $<0,1>$, wówczas szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds$$

nazywa się rozwinięciem funkcji $x(t)$ wedle ciągu $\{g_k(t)\}$, o ile oczywiście istnieją całki $\int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

a) *Jeżeli dla każdego punktu t_p pewnego ciągu przeliczalnego $\{t_p\}$ punktów przedziału $<0,1>$ istnieje funkcja ciągła $x_p(t)$, której rozwinięcie jest w punkcie t_p rozbieżne (wzgl. rozwinięcie dla t_p jest nieograniczone), wówczas istnieje funkcja $x(t)$, której rozwinięcie jest dla każdego punktu t_p rozbieżne (wzgl. której rozwinięcie jest w każdym punkcie t_p nieograniczone).*

D o w ó d wynika z twierdzenia 8 rozdziału IIIA oraz 7 rozdziału VA, jeżeli przyjmiemy

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t_p) \int_0^1 g_k(s)\, x(s)\, ds$$

i wyrażenia $U_{pq}(x)$ uważać będziemy za funkcjonały linjowe w przestrzeni funkcyj ciągłych.

b) *Jeżeli dla każdego przedziału $<\alpha_p, \beta_p>$ pewnej rodziny przeliczalnej przedziałów odcinka $<0,1>$ istnieje funkcja całko-*

[1]) Zob. pracę cytowaną na str. 40.

walna $x_p(t)$, której rozwinięcie ma własność

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_{\alpha_p}^{\beta_p} |s_n(t)|\, dt = \infty, \quad gdzie \quad s_n(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t) \int\limits_0^1 g_k(t)\, x_p(t)\, dt,$$

wówczas istnieje funkcja $x(t)$ całkowalna, posiadającą powyższą własność dla wszystkich jednocześnie przedziałów powyższej rodziny.

Dowód opiera się na twierdzeniu 7 rozdziału VA; wystarczy przyjąć

$$U_{pq}(x) = \sum_{k=1}^{q} g_k(t) \int\limits_0^1 g_k(t)\, x(t)\, dt \qquad (\alpha_p \leqslant t \leqslant \beta_p)$$

i wyrażenia U_{pq} uważać za operacje linjowe, określone w przestrzeni funkcyj całkowalnych przedziału $< 0,1 >$, których przeciwdziedziny mieszczą się w przestrzeni funkcyj całkowalnych w przedziale $< \alpha_p, \beta_p >$.

Uwaga. Jeżeli punkty o spółrzędnych (α_p, β_p) tworzą zbiór wszędziegęsty w kwadracie $< 0,1; 0,1 >$, wówczas powyższa własność zachodzi dla każdego odcinka $< \alpha, \beta >$ przedziału $< 0,1 >$.

Opierając się na tej uwadze, można udowodnić dla szeregów Fourier'a *istnienie funkcji całkowalnej $x(t)$, dla której*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} s_n(t)\, dt \right| = +\infty$$

w każdym podprzedziale przedziału $(0,2\pi)$.

§ 4. Niech dana będzie tablica nieskończona liczb

$$(A) \qquad \begin{matrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Jeśli dla danego ciągu liczb $x = \{\xi_k\}$ każdy z szeregów $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\, \xi_k$ jest zbieżny i ciąg ich sum $\{A_i(x)\}$ jest także zbieżny (*do* $A(x)$), wówczas mówimy, że ciąg x jest *sumowalny metodą* A *odpowiadającą tablicy* (A), lub krótko *metodą* A (*do* $A(x)$).

O metodzie A mówimy, że jest *zachowawcza*, jeśli każdy ciąg zbieżny jest sumowalny tą metodą do swej granicy.

Twierdzenie 1. *Na to, by metoda A była zachowawcza; konieczne jest i wystarcza, by spełnione były warunki*

$$1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant M \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$2) \quad \lim_{i \to \infty} a_{i,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$3) \quad \lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} = 1 .$$

D o w ó d [1]). Warunki są k o n i e c z n e. Dla każdego ciągu zbieżnego $x = \{\xi_k\}$ oraz każdego i, szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\,\xi_k$ jest zbieżny; wobec wyniku uzyskanego w § 2 szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$ jest temsamem bezwzględnie zbieżny. Określone więc w przestrzeni (c) funkcjonały $A_i(x)$ są linjowe, ponieważ zaś ciąg ich jest zbieżny, przeto z twierdzenia 5 rozdziału VA wynika konieczność warunku 1.

Niech teraz $\xi_i^{(0)} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\xi_i^{(n)} = 0$ dla $i \neq n$, $\xi_n^{(n)} = 1$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$, i niech x_n oznacza ciąg $\{\xi_i^{(n)}\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Ponieważ $A_i(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$, $A_i(x_n) = a_{i,n}$ dla $n > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, widać więc, że spełnione są warunki 2 i 3, bowiem

---

[1]) Twierdzenie to znalazł p. O. T o e p l i t z. Zob.: O. T o e p l i t z, Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace mat.-fiz. XXII, (1911), p. 113—119.

$A(x_0)=1$, $A(x_n)=0$ dla $n>0$. Wystarczalność podanych warunków wynika łatwo z uwagi, że ciąg określony powyżej $\{x_n\}$ jest w przestrzeni (c) zupełny.

Lemmat 1. *Niech A będzie metodą zachowawczą oraz $\{\eta_i^{(0)}\}$ ciągiem zbieżnym. Jeśli dla każdego ciągu $\{\alpha_i\}$ warunki $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<+\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_{i,k}=0$ $(k=1,2,\ldots)$ pociągają za sobą $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^{(0)}=0$, wówczas dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje ciąg zbieżny x taki, że*

$$|A_i(x)-\eta_i^{(0)}|<\varepsilon \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Dowód. Niech G oznacza zbiór tych ciągów zbieżnych $\{\eta_i\}$, którym odpowiadają ciągi zbieżne x, takie, że $\eta_i=A_i(x)$ $(i=1,2,\ldots)$. Zbiór G stanowi oczywiście przestrzeń wektorjalną (rozpatrujemy go w przestrzeni (c)). Jeżeli $y_0=\{\eta_i^{(0)}\}$ nie jest punktem skupienia zbioru G, wówczas, jak wynika z lemmatu do twierdzenia 6 rozdziału IVA, istnieje w (c) funkcjonał linjowy $f(y)$ taki, że

$$f(y)=0 \quad \text{dla} \quad y\subset G, \qquad f(y_0)=1. \tag{1}$$

Z uwagi na ogólną postać funkcjonałów linjowych w (c) istnieje tedy ciąg liczb $\{\alpha_i\}$ taki, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ jest bezwzględnie zbieżny oraz

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i+\alpha\lim_{i\to\infty}\eta_i=0 \quad \text{dla} \quad \{\eta_i\}\subset G, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^{(0)}+\alpha\lim_{i\to\infty}\eta_i^{(0)}=1. \tag{3}$$

Ponieważ metoda A jest zachowawcza, przeto z (2) dostajemy

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i A_i(x)+\alpha\lim_{k\to\infty}\xi_k=0, \quad \text{jeśli} \quad x=\{\xi_k\}\subset(c). \tag{4}$$

Na mocy twierdzenia 1 istnieje liczba M taka, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant M \qquad (i=1, 2, \ldots), \text{ zatem}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \, |a_{i,k}| \, |\xi_k| \leqslant M \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \, \|x\| . \tag{5}$$

Z (5) dostajemy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,k} . \tag{6}$$

Przyjmując, dla ustalonej liczby naturalnej n, $\xi_n = 1$, oraz $\xi_k = 0$ jeśli $k \neq n$, mamy z uwagi na (4),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Przyjmując dalej $\xi_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, dostajemy z (4), (6) i (7 $\alpha = 0$, i temsamem, z uwagi na (3),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} = 1,$$

co wobec (7), sprzeczne jest z założeniem.

Lemmat 2. *Jeśli* $x_0 = \{\xi_k^{(0)}\}$ *jest ciągiem ograniczonym, sumowalnym metodą zachowawczą* A, *wówczas dla każdej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieje ciąg zbieżny* x *taki, że*

$$|A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

D o w ó d. Niech

$$\eta_i^{(0)} = A_i(x_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

i niech $\{\alpha_i\}$ oznacza dowolny ciąg, spełniający warunki

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Z uwagi na (1)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x_0); \tag{3}$$

A jest metodą zachowawczą, istnieje więc pewna liczba M taka, iż

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant M \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

i temsamem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \, |a_{i,k}| \, |\xi_k^{(0)}| \leqslant M \, . \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \, . \operatorname*{kres\ górny}_{k=1,2,\ldots} |\xi_k^{(0)}|,$$

skąd, zważywszy na (3),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(0)} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,k}$$

i, w myśl (2),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^{(0)} = 0.$$

Lemmat nasz wynika tedy natychmiast z lemmatu poprzedniego.

Lemmat 3. *Jeśli A jest metodą zachowawczą i warunki*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{i,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

pociągają za sobą $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wówczas, dla każdego ciągu zbieżnego $\{\eta_i^{(0)}\}$ i każdej liczby $\varepsilon > 0$, istnieje ciąg zbieżny x taki, iż

$$|A_i(x) - \eta_i^{(0)}| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

D o w ó d — natychmiastowy wobec lemmatu 1.

Metodę A nazywamy *odwracalną*, jeśli każdemu ciągowi zbieżnemu $\{\eta_i\}$ odpowiada dokładnie jeden ciąg x (zbieżny, lub nie), dla którego $A_i(x) = \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Powiadamy, że metoda B, odpowiadająca tablicy

$$(B) \quad \begin{array}{ll} b_{1,1}, & b_{1,2}, \ldots \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

jest *niesłabsza* od metody A, jeśli każdy ciąg sumowalny metodą A jest również sumowalny metodą B.

Lemmat 4. *Jeśli x_0 jest ciągiem sumowalnym metodą zachowawczą i odwracalną A i jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg zbieżny x, taki, iż*

$$|A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

wówczas ciąg x_0 jest sumowalny każdą metodą zachowawczą B, niesłabszą od A, do tej samej liczby.

Dowód. Metoda A jest odwracalna, na mocy przeto twierdzenia, udowodnionego w § 5 (uwaga) rozdziału IIIA istnieje tablica

$$\begin{array}{ll} \alpha_{1,1}, & \alpha_{1,2}, \ldots \\ \alpha_{2,1}, & \alpha_{2,2}, \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

oraz ciąg $\{\alpha_i\}$ o własnościach następujących:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{i,k}| < +\infty \quad (k = 1, 2, \ldots);$

b) jeśli, dla ciągu zbieżnego $y = \{\eta_i\}$, przyjmiemy

$$\xi_k = f_k(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i,k}\eta_i + \alpha_k \lim_{i\to\infty} \eta_i \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

wówczas

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\, \xi_k = \eta_i .$$

Określone w przestrzeni (c) funkcjonały $f_k(y)$ są linjowe.

Dla każdego ciągu zbieżnego y ciąg odpowiedni $x = \{\xi_k\}$ jest, w myśl założenia, sumowalny metodą B, a więc każdy z szeregów $\sum_{k=1}^{\infty} b_{i,k}\, \xi_k$ jest zbieżny i ciąg ich sum $\{B_i(x)\}$ jest zbieżny.

Niech teraz, dla $y \subset (c)$,

$$F_i(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{i,k}\, f_k(y) \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad F(y) = \lim_{i \to \infty} F_i(y);$$

widzimy, że funkcjonały $F_i(y)$ są linjowe, tę samą własność ma więc także funkcjonał $F(y)$.

Niech x_0 będzie dowolnym ciągiem, spełniającym warunki założenia, oraz ε — liczbą > 0. Istnieje ciąg zbieżny x, taki, że

$$|A_i(x) - A_i(x_0)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Przyjmując $y_0 = \{A_i(x_0)\}$, $y = \{A_i(x)\}$ mamy $y_0, y \subset (c)$ oraz $\| y - y_0 \| \leqslant \varepsilon$; temsamem

$$| F(y) - F(y_0) | \leqslant | F | \varepsilon . \tag{3}$$

Ponieważ $A(x) = B(x)$, przeto

$$|A(x_0) - B(x_0)| \leqslant |A(x_0) - A(x)| + |B(x) - B(x_0)|,$$

i z (2), (3) dostajemy

$$|A(x_0) - B(x_0)| \leqslant |F| \,.\, \varepsilon + \varepsilon ,$$

skąd oczywiście wynika, iż $A(x_0) = B(x_0)$, o co chodziło.

Twierdzenie 2. *Jeśli metoda zachowawcza B jest niesłabsza od metody zachowawczej i odwracalnej A, wówczas każdy ciąg ograniczony sumowalny metodą A jest sumowalny metodą B do tej samej liczby.*

D o w ó d [1]) opiera się na lemmatach 2 i 4.

Nazwiemy daną metodę A *doskonałą*, jeśli jest zachowawcza, odwracalna oraz, jeśli dla każdego ciągu $\{\alpha_i\}$ warunki

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < +\infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, a_{i,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

pociągają za sobą $\alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$. Wobec lemmatów 3 i 4 dostajemy [2])

Twierdzenie 3. *Jeśli A jest metodą doskonałą, a B metodą zachowawczą niesłabszą od A, wówczas każdy ciąg sumowalny metodą A jest sumowalny metodą B do tej samej liczby.*

---

[1]) Dla specjalnej klasy metod odwracalnych, a mianowicie t. zw. metod normalnych, znalazł to twierdzenie p. S. M a z u r. Zob.: S. M a z u r, Über lineare Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. 28 (1928) p. 599—611, Satz VII.

[2]) Dla metod normalnych zob.: S. M a z u r, Uber eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitzschen Limitierungsverfahren, Stud. Math. II (1930) p.