ROZDZIAŁ VI A.

Operacje pełnociągłe i stowarzyszone.

Ciągi biortogonalne.

§ 1. Zajmiemy się klasą t. zw. operacyj pełnociągłych (linjowych) w przestrzeniach typu (B).

Lemmat 1. *Każdy zbiór zwarty jest ośrodkowy.*

Dowód. Niech G będzie zbiorem zwartym; udowodnimy, że jest ośrodkowy, t. j. iż posiada część przeliczalną wszędzie-gęstą.

Niechaj $x_1 \subset G$ i niech x_n $(n > 1)$ oznacza element, spełniający warunki:

a) $x_n \subset G$,

b) jeżeli $x \subset G$, wówczas $d \leqslant 2\, d_n$, gdzie d, wzgl. d_n, oznacza odległość elementu x, wzgl. x_n, od zbioru $(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})$.

Ciąg $\{x_n\}$ jest wszędziegęsty w G. Gdyby bowiem istniał element $x \subset G$ taki, że

$$|x - x_n| \geqslant \alpha > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wówczas mielibyśmy, na mocy b), dla każdego p, q,

$$|x_p - x_q| \geqslant \frac{1}{2}\alpha,$$

co jest niemożliwe, gdyż z ciągu $\{x_n\}$ daje się wyrwać ciąg zbieżny.

D e f i n i c j a. Operacja $U(x)$ linjowa nazywa się *pełnociągła*, jeżeli każdy zbiór ograniczony przekształca na zbiór zwarty.

Przykład: jeżeli X_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ są funkcjonałami linjowemi, a x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ — elementami, wówczas operacja

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, x_i$$

jest operacją pełnociągłą

Twierdzenie 1. *Przeciwdziedzina operacji $U(x)$ pełnociągłej jest zbiorem ośrodkowym.*

D o w ó d. Oznaczmy przez K_n zbiór wszystkich elementów $U(x)$ dla $|x| \leqslant n$.

Zbiór K_n jest zwarty, zatem na mocy lemmatu jest ośrodkowy. Temsamem jednak ośrodkowy jest również zbiór $\sum_{n=1}^{\infty} K_n$, t. j. przeciwdziedzina operacji U.

Twierdzenie 2. *Jeżeli $\{U_n(x)\}$ jest ciągiem operacyj linjowych pełnociągłych i jeżeli dla pewnej operacji linjowej $U(x)$ zachodzi*

$$\lim_{n \to \infty} |U_n - U| = 0,$$

wówczas $U(x)$ jest również operacją pełnociągłą.

D o w ó d. Niechaj ciąg $\{x_i\}$ będzie ciągiem ograniczonym. Metodą przekątni łatwo można wyjąć z ciągu $\{x_i\}$ ciąg częściowy $\{\bar{x}_i\}$, tak, by dla każdego n istniała granica $\lim\limits_{i \to \infty} U_n(\bar{x}_i)$

Mamy, dla każdego n,

$$|U(\bar{x}_p) - U(\bar{x}_q)| = |U(\bar{x}_p) - U_n(\bar{x}_p)| + |U_n(\bar{x}_p) - U_n(\bar{x}_q)| + \\ + |U_n(\bar{x}_q) - U(\bar{x}_q)|,$$

a zatem

$$|U(\bar{x}_p) - U(\bar{x}_q)| \leqslant |U - U_n| [|\bar{x}_p| + |\bar{x}_q|] + |U_n(\bar{x}_p) - U_n(\bar{x}_q)|,$$

skąd oczywiście

$$\overline{\lim_{p,q \to \infty}} |U(\bar{x}_p) - U(\bar{x}_q)| = 0.$$

Ciąg $U(\overline{x_i})$ jest tedy zbieżny, a więc operacja $U(x)$ jest pełnociągła.

§ 2. Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją ciągłą dla $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, wówczas wyrażenie

$$y(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \tag{1}$$

jest funkcją ciągłą zmiennej s dla każdej funkcji $x(t)$ całkowalnej. Jeżeli wyrażenie (1) uważać będziemy za operację, której dziedziną jest jedna z przestrzeni (C), $(L^{(r)})$, (L), (M), a przeciwdziedzinę uważać będziemy za część tej samej przestrzeni lub innej z wyżej wymienionych, wówczas łatwo udowodnimy, że operacja (1) jest pełnociągła.

Dowód opiera się na znanem twierdzeniu Arzeli:

Warunkiem wystarczającym na to, aby z ciągu funkcyj ciągłych $\{y_n(t)\}$ *dał się wyrwać ciąg jednostajnie zbieżny, jest to, by dla każdej liczby* $\varepsilon > 0$ *istniała liczba* $\eta > 0$ *taka, że jeżeli* $|t' - t''| < \eta$, *wówczas*

$$|y_n(t') - y_n(t'')| \leqslant \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Przypuśćmy, że $\|x_n(t)\| \leqslant 1$, i niech w przedziale $<0,1>$ zmiennej s

$$y_n(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x_n(t)\, dt.$$

Ponieważ $K(s,t)$ jest funkcją ciągłą, zatem każdej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba η, że nierówność $|s_1 - s_2| < \eta$ pociąga za sobą $|K(s_1,t) - K(s_2,t)| \leqslant \varepsilon$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Zatem:

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| \leqslant \left| \int_0^1 \{K(s_1,t) - K(s_2,t)\}\, x_n(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_0^1 |x_n(t)|\, dt. \tag{2}$$

Można łatwo sprawdzić, że w przestrzeniach (C), $(L^{(r)})$, (L), (M) mamy zawsze

$$\int_0^1 |x_n(t)|\,dt \leqslant \|x_n\|.$$

Stąd, na mocy (2),

$$|y_n(s_1) - y_n(s_2)| \leqslant \varepsilon,$$

i na mocy wspomnianego wyżej twierdzenia Arzeli wyjąć możemy z ciągu $\{y_n(s)\}$ ciąg jednostajnie zbieżny. Ponieważ zaś ciąg jednostajnie zbieżny funkcyj ciągłych w przestrzeniach (C), $(L^{(r)})$, (L), (M) jest również zbieżny wedle normy ustalonej w tej przestrzeni, przeto udowodniliśmy temsamem, że operacja (1) jest pełnociągła.

Przestrzeń (C). Aby operacja (1) była pełnociągła w (C) wystarczy założyć, że dla każdego s_0 zachodzi

$$\lim_{s \to s_0} \int_0^1 |K(s_0, t) - K(s, t)|\,dt = 0. \tag{3}$$

Łatwo bowiem z warunku (3) wynika, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\eta > 0$, że, jeżeli $|s_1 - s_2| \leqslant \eta$, wówczas

$$\int_0^1 |K(s_1, t) - K(s_2, t)|\,dt \leqslant \varepsilon.$$

Stąd podobnie, jak poprzednio, wynika łatwo, że operacja (1) jest w (C) pełnociągła.

Warunek (3) jest spełniony np., jeżeli $K(s, t)$ jest funkcją ograniczoną i jeżeli dla każdego s_0 zachodzi

$$\lim_{s \to s_0} K(s, t) = K(s_0, t) \quad \text{dla prawie każdego } t.$$

Operacja

$$y(s) = \int_0^s K(s, t)\, x(t)\,dt$$

jest operacją pełnociągłą, jeżeli $K(s, t)$ spełnia warunek (3).

Przestrzeń $(L^{(p)})$. Niech $K(s,t)$ będzie funkcją mierzalną dla $0 \leqslant s,t \leqslant 1$, a r niech oznacza mniejszą z dwu liczb $p, \dfrac{q}{q-1}$ $(p>1,$ $q>1)$. Wówczas, jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}} ds\, dt < +\infty,$$

operacja (1) jest pełnociągła dla $x \subset (L^{(p)})$, a przeciwdziedzina jej mieści się w $(L^{(q)})$.

Dowód. Niechaj $\{K_n(s,t)\}$ oznacza ciąg funkcyj ciągłych, przyczem niech

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 |K_n(s,t) - K(s,t)|^{\frac{r}{r-1}} ds\, dt = 0. \tag{4}$$

Ponieważ operacja

$$y = U_n(x) = \int_0^1 K_n(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją pełnociągłą dla $x \subset (L^{(p)})$, $y \subset (L^{(q)})$, zatem

$$\| U_n(x) - U(x) \|^q \leqslant \int_0^1 \left| \int_0^1 (K_n - K)\, x(t)\, dt \right|^q ds \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^1 ds \left[\int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt \right]^{\frac{q(r-1)}{r}} \right\} \left\{ \int_0^1 |x(t)|^r dt \right\}^{\frac{q}{r}}.$$

Ponieważ $r \leqslant p$, więc $\displaystyle\int_0^1 |x(t)|^r dt \leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{r}{p}}$;

ponieważ dalej $r \leqslant \dfrac{q}{q-1}$, więc $\dfrac{q(r-1)}{r} \leqslant 1$, zatem

$$\| U_n(x) - U(x) \|^q \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 |K_n - K|^{\frac{r}{r-1}} dt\, ds \right\}^{\frac{q(r-1)}{r}} \| x \|^q$$

czyli

$$\| U_n - U \| \leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 | K_n - K |^{\frac{r}{r-1}} ds\, dt \right\}^{\frac{r-1}{r}}.$$

Stąd na mocy (4)

$$\lim_{n \to \infty} \| U_n - U \| = 0,$$

i operacja $y = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$ jest pełnociągła przy $y \subset (L^{(q)})$.

Uwaga. Z poprzedniego wynika, przyjmując $p = q = 2$, że, jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(s,t)\, ds\, dt < +\infty,$$

wówczas operacja

$$y = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest pełnociągła przy $x \subset (L^{(2)})$, $y \subset (L^{(2)})$.

§ 3. Niechaj $y = U(x)$ będzie operacją linjową, określoną w E, przyczem przeciwdziedzina jej niechaj mieści się w E_1. O przestrzeniach E i E_1 zakładamy, jak zwykle, że są typu (B).

Funkcjonały linjowe, określone w E, oznaczać będziemy literą X, określone w E_1 — literą Y.

Weźmy pod uwagę wyrażenie

$$Y\, U(x), \tag{1}$$

gdzie Y jest dowolnym funkcjonałem określonym w E_1.

Wyrażenie (1) możemy oczywiście uważać jako funkcjonał określony w E.

Niech

$$X(x) = Y\, U(x).$$

Funkcjonał X jest addytywny i ciągły. Mamy bowiem

$$|X(x)| \leqslant |YU(x)| \leqslant |Y|\,|U|\,|x|,$$

skąd

$$|X| \leqslant |Y|\,|U|. \tag{2}$$

Związek między X oraz Y jest nową operacją

$$X = \overline{U}(Y).$$

Dziedziną jej jest zbiór funkcjonałów linjowych, określonych w E_1, przeciwdziedzina zaś mieści się w zbiorze funkcjonałów, określonych w E.

Operacja ta jest wreszcie addytywna i ciągła, jak to wynika ze związku (2).

Operację $\overline{U}(Y)$ nazywamy operacją *stowarzyszoną* lub *sprzężoną* z operacją $U(x)$.

Twierdzenie 3. *Jeżeli $\overline{U}(Y)$ jest operacją stowarzyszoną z operacją linjową $U(x)$, wówczas*

$$|\overline{U}| = |U|. \tag{1}$$

D o w ó d. Mamy, dla każdego $x \subset E$,

$$|YU(x)| \leqslant |Y| \,.\, |U| \,.\, |x|,$$

skąd

$$|\overline{U}(Y)| = |YU| \leqslant |Y| \,.\, |U|,$$

a więc

$$|\overline{U}| \leqslant |U|. \tag{2}$$

Niech, z drugiej strony, x_0 będzie dowolnym elementem przestrzeni E. Istnieje, w myśl tw. 3 rozdz. IVA, funkcjonał Y_0, określony w przestrzeni E_1 taki, iż

$$|Y_0| = 1, \qquad |Y_0 U(x_0)| = |U(x_0)|.$$

Zatem

$$|U(x_0)| = |Y_0 U(x_0)| \leqslant |\overline{U}| \,.\, |Y_0| \,.\, |x_0| = |\overline{U}| \,.\, |x_0|,$$

skąd

$$|U(x_0)| \leqslant |\overline{U}| \,.\, |x_0|,$$

a więc

$$|U| \leqslant |\overline{U}|,$$

co, łącznie z (2), daje (1).

Twierdzenie 4. *Jeżeli operacja linjowa $U(x)$ jest pełnociągła, wówczas operacja sprzężona $\overline{U}(Y)$ jest również pełnociągła.*

[t. zn. jeżeli $|Y_n| < A$, wówczas istnieje taki ciąg $\{Y_{n_i}\}$ oraz funkcjonał X, że $\lim\limits_{i\to\infty} |U(Y_{n_i}) - X| = 0$].

D o w ó d. Ponieważ przeciwdziedzina operacji $U(x)$ ma część przeliczalną wszędziegęstą, przeto z ciągu funkcjonałów $\{Y_n\}$ ($|Y_n| < A$) można wyjąć ciąg częściowy $\{Y_{n_i}\}$ zbieżny dla każdego y, należącego do przeciwdziedziny operacji $U(x)$.

Niech zatem

$$\lim_{i\to\infty} Y_{n_i} U(x) = \lim_{i\to\infty} X_{n_i}(x) = X(x).$$

Niechaj x_i będzie elementem takim, że

$$|x_i| = 1, \qquad |X(x_i) - X_{n_i}(x_i)| \geqslant \tfrac{1}{2} |X - X_{n_i}|. \tag{1}$$

Gdyby istniała liczba $\alpha > 0$ taka, że $|X - X_{n_i}| > \alpha$ dla każdego i, wówczas mielibyśmy, na mocy (1),

$$|Y_i' U(x_i) - \lim_{i\to\infty} Y_i' U(x_i)| \geqslant \tfrac{1}{2}\alpha, \qquad \text{gdzie } Y_i' = Y_{n_i}. \tag{2}$$

Ponieważ $|x_i| = 1$, istnieje więc ciąg wskaźników k_i taki, że $\lim\limits_{i\to\infty} U(x_{k_i}) = y_0$. Zatem, jeżeli $\varepsilon > 0$, wówczas dla $i > N$,

$$|y_0 - U(x_{k_i})| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |Y_{k_i}'(y_0) - \lim_{i\to\infty} Y_{k_i}'(y_0)| < \varepsilon.$$

Mamy więc, dla $i > N$,

$$|Y_{k_i}' U(x_{k_i}) - \lim_{i\to\infty} Y_{k_i}' U(x_{k_i})| \leqslant |Y_{k_i}'[U(x_{k_i}) - y_0]| + |Y_{k_i}'(y_0) -$$

$$- \lim_{i\to\infty} Y_{k_i}'(y_0)| + |\lim_{i\to\infty} Y_{k_i}'[U(x_{k_i}) - y_0]| \leqslant A\varepsilon + \varepsilon + A\varepsilon,$$

co wobec dowolności liczby $\varepsilon > 0$ sprzeczne jest z (2).

§ 4. *Przestrzeń* (C). Jeżeli $K(s,t)$ jest funkcją ciągłą dla $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, wówczas wyrażenie

$$\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt = U(x) \tag{1}$$

jest operacją ciągłą.

Niech $Y(y)$ $[y \subset (C)]$ będzie dowolnym funkcjonałem linjowym w (C), a więc, w myśl § 4 rozdz. IVA, postaci

$$Y(y) = \int_0^1 y(t)\, d\, Y(t),$$

gdzie $Y(t)$ jest pewną funkcją o wahaniu ograniczonem,—i niech

$$X(x) = Y\, U(x).$$

Funkcjonał $X(x)$ jest również linjowy w (C), a więc jest także postaci

$$X(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, X(t), \tag{1}$$

gdzie $X(t)$ jest znowuż pewną funkcją o wahaniu ograniczonem. Przyjmując zatem

$$y(s) = U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt, \tag{2}$$

mamy, dla każdej funkcji $x(t) \subset (C)$,

$$\int_0^1 x(s)\, d\, X(s) = \int_0^1 y(s)\, d\, Y(s). \tag{3}$$

Niech $x_{u,n}(s)$ oznacza funkcję równą 1 w przedziale $(0, u)$, zeru — w przedziale $\left(u + \frac{1}{n}, 1\right)$, oraz linjową — w przedziale

$(u, u+\frac{1}{n})$. Podstawiając tę funkcję zamiast $x(s)$ w (2) i (3), otrzymujemy

$$\int_0^1 x_{u,n}(s)\, dX(s) = \int_0^1 \left[\int_0^1 K(s,t)\, x_{u,n}(t)\, dt\right] dY(s)$$

$$= \int_0^1 x_{u,n}(t) \left[\int_0^1 K(s,t)\, d\,Y(s)\right] dt \text{ [1]}$$

i przechodząc do granicy, gdy $n \to \infty$, mamy w każdym punkcie u, w którym funkcja $X(s)$ jest ciągła — a więc w każdym punkcie przedziału $< 0,1 >$ z wyjątkiem conajwyżej przeliczalnej mnogości punktów —

---

[1]) Korzystamy tu z twierdzenia „o przemienności całkowania" dla całek wielokrotnych Stieltjesa funkcji ciągłej. Twierdzenie to formułujemy, jak następuje: *jeśli $F(s,t)$ jest funkcją ciągłą w kwadracie $K = < 0,1;\ 0,1 >$, $g(t)$, $h(t)$ są funkcjami o wahaniu ograniczonem w przedziale $< 0,1 >$, wówczas*

$$\int\int_K F(s,t)\, dg(s)\, dh(t) = \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s,t)\, dg(s)\right] dh(t) =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 F(s,t)\, dh(t)\right] dg(s).$$

Pierwszą („powierzchniową") z trzech powyższych całek należy rozumieć jako granicę sum postaci

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} F(s_i', t_j')\, [g(s_{i+1}) - g(s_i)]\, [h(t_{j+1}) - h(t_j)]$$

(gdzie: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = 1$, $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{m+1} = 1$, s_i', wzgl. t_j', są dowolnemi punktami przedziału $< s_i, s_{i+1} >$, wzgl. $< t_j, t_{j+1} >$), gdy długość największego z przedziałów $< s_i, s_{i+1} >$, $< t_j, t_{j+1} >$ dąży do zera. Dowód twierdzenia „o przemienności całkowania" dla całki Stieltjesa jest identyczny z dowodem analogicznego twierdzenia dla całki Riemanna.

$$X(u) = \int_0^u \left[\int_0^1 K(s,t)\, dY(s) \right] dt; \qquad (4)$$

ponieważ jednak wartość całki Stieltjesa (1) nie ulega zmianie, jeśli wartość funkcji $X(t)$ zmienić w conajwyżej przeliczalnej mnogości punktów (por. § 1 rozdz. IV B), przeto przyjąć można, iż funkcja $X(u)$ określona jest przez wzór (4) w *całym* przedziale $< 0{,}1 >$, a — temsamem — iż jest ciągła.

Wyrażenie (4) uważać tedy możemy za przedstawienie operacji sprzężonej $\overline{U}(Y) = X$. Należy to tak rozumieć, że, jeżeli $Y(s)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem, reprezentującą funkcjonał linjowy $\int_0^1 y(s)\, dY(s)$, wówczas odpowiednia funkcja $X(s)$ o wahaniu ograniczonem (w naszym wypadku przytem ciągła) reprezentuje funkcjonał linjowy $\int_0^1 x(t)\, dX(t)$.

Dla operacji linjowej

$$U(x) = X(s) - \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \qquad [K(s,t), \text{ j. w.}]$$

mamy

$$\overline{U}(Y) = Y(t) - \int_0^t dt \int_0^1 K(s,t)\, dY(s) = X(t).$$

Przestrzeń $(L^{(p)})$. Jeżeli $K(s,t)$ jest mierzalne dla $0 \leqslant s,t \leqslant 1$ i jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)\, x(t)\, y(s)|\, ds\, dt < +\infty$$

dla każdej pary $x(t) \subset (L^{(p)}), y(s) \subset (L^{(\frac{q}{q-1})})$ $(p > 1,\ q > 1)$, wówczas operacja

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową dla $x \subset (L^{(p)})$, $y \subset (L^{(q)})$.

Funkcjonał linjowy Y w przestrzeni $(L^{(q)})$ jest kształtu

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds,$$

gdzie $Y(s)$ jest pewną funkcją należącą do $(L^{(p)})$.

Mamy

$$Y(y) = \int_0^1 Y(s)\, ds \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, dt \int_0^1 K(s,t)\, Y(s)\, ds.$$

Niech

$$X(t) = \int_0^1 K(s,t)\, Y(s)\, ds; \tag{1}$$

wówczas

$$\int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds = \int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt. \tag{2}$$

Wyrażenie (1) uważać możemy za przedstawienie operacji sprzężonej $\overline{U}(Y) = X$.

Jeśli $p = q > 1$, wówczas dla operacji linjowej

$$U(x) = x(s) - \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

operacja sprzężona ma kształt

$$X = \overline{U}(Y) = Y(t) - \int_0^1 K(s,t)\, Y(s)\, ds.$$

Uwaga. Poprzednie uwagi odnoszą się również do przestrzeni (L).

Jeżeli

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)\, x(t)\, y(s)|\, ds\, dt < +\infty$$

dla $x \subset (L)$, $y \subset (M)$, wówczas wyrażenie

$$y = U(x) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest operacją linjową przy $x \subset (L)$, $y \subset (L)$.

Operacja stowarzyszona ma postać

$$X = \overline{U}(Y) = \int_0^1 K(s,t)\, Y(s)\, ds,$$

gdzie $Y(s) \subset (M)$ reprezentuje funkcjonał linjowy

$$\int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds \qquad [y(s) \subset (L)],$$

podczas gdy $X(t) \subset (M)$ reprezentuje funkcjonał linjowy

$$\int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt \qquad [x(t) \subset (L)].$$

Dla pary odpowiedniej X, Y oraz x, y mamy

$$\int_0^1 X(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds.$$

§ 3. W dalszym ciągu korzystać będziemy wielokrotnie z twierdzenia następującego:

Jeżeli $\{x_n\}$ *jest ciągiem elementów przestrzeni E typu (B) takim, iż, dla każdego funkcjonału* $f(x)$ *w E,*

$$\limsup_{n\to\infty} |f(x_n)| < \infty, \tag{1}$$

wówczas również

$$\limsup_{n\to\infty} |x_n| < \infty \tag{2}$$

(t. zn. iż ciąg $\{x_n\}$ *jest ograniczony według normy).*

Dowód. Niech $\overline{E}$ będzie zbiorem funkcjonałów linjowych określonych w E. Zachowując zwykłą definicję normy funkcjonału, uważać możemy $\overline{E}$ za pewną przestrzeń (B). Określimy w przestrzeni tej ciąg funkcjonałów linjowych Φ_n, przyjmując dla każdego funkcjonału $f \subset E$,

$$\Phi_n(f) = f(x_n).$$

W myśl (1) mamy dla każdego $f \subset E$

$$\limsup_{n\to\infty} |\Phi_n(f)| < \infty,$$

a więc (rozdz. VA, twierdz. 5) istnieje taka liczba M, iż

$$|\Phi_n(f)| \leqslant M \cdot |f|. \tag{3}$$

Na mocy twierdzenia 3 rozdz. IVA istnieje dla każdego n taki funkcjonał linjowy $f_n(x)$ w przestrzeni E, iż

$$|f_n| = 1, \qquad |f_n(x_n)| = |x_n|.$$

Otrzymujemy tedy z (3), dla każdego n,

$$|x_n| = |f_n(x_n)| = |\Phi_n(f_n)| \leqslant M \cdot |f_n| = M,$$

skąd oczywiście wynika związek (2).

§ 4. Ciąg elementów $\{x_i\}$ i funkcjonałów linjowych $\{f_i\}$ nazywamy *biortogonalnym*, jeżeli spełnione są warunki

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{„ } i \neq j. \end{cases}$$

Jeżeli x jest dowolnym elementem, wówczas szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

nazywamy *rozwinięciem elementu x wedle ciągu biortogonalnego* $\{x_i\}$, $\{f_i\}$.

Jeżeli ciąg $\{f_i\}$ jest ciągiem pełnym i jeżeli szereg (1) jest dla pewnego elementu x zbieżny, wówczas x jest sumą tego szeregu. Mamy bowiem:

$$f_j\left[x - \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)\right] = f_j(x) - f_j(x) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Twierdzenie 5. *Jeżeli szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$ jest dla każdego elementu x zbieżny, wówczas szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f(x_i)$$

jest dla każdego funkcjonału f zbieżny w każdym punkcie x.

D o w ó d. Niech

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \,.\, f(x_i).$$

Mamy

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f(x_i) = f\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)\right],$$

zbieżność ciągu $\{S_n(x)\}$ jest widoczna tedy w każdym punkcie x.

Twierdzenie 6. *Jeżeli sumy częściowe szeregu*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \,.\, f(x_i)$$

są ograniczone, wówczas szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

jest zbieżny dla każdego elementu x, który jest granicą jakiegoś ciągu kombinacyj linjowych utworzonych z wyrazów ciągu $\{x_i\}$.

Dowód. Niech

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x).$$

Mamy

$$f s_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) f_i(x) = S_n(x),$$

gdzie

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i \,.\, f(x_i).$$

Ponieważ $|S_n| \leqslant M$ (M — niezależne od n), więc

$$|S_n(x)| \leqslant M\,|x|;$$

temsamem (§ 3), dla każdego x, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |s_n(x)| < +\infty$, i na mocy twierdzenia 6 rozdziału V B istnieje liczba $\overline{M}$, niezależna od n oraz x), taka iż

$$|s_n(x)| \leqslant \overline{M}\,|x|.$$

Ponieważ zaś $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x_i) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, przeto zwykłe już rozumowanie prowadzi do wniosku, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ istnieje dla każdego x, spełniającego warunki założeniu.

Twierdzenie 7. *Jeżeli sumy częściowe szeregu*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

mają normy ograniczone dla każdego funkcjonału linjowego, wówczas szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i f(x_i)$$

jest zbieżny dla każdego funkcjonału f, który jest granicą ciągu kombinacyj linjowych utworzonych z wyrazów ciągu $\{f_i\}$.

Dowód przebiega analogicznie do poprzedniego.

Twierdzenie 8. *Jeżeli $\{x_i\}$ jest ciągiem pełnym i jeżeli szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

ma sumy częściowe według normy ograniczone dla każdego elementu x, wówczas szereg powyższy jest dla każdego elementu zbieżny.

Dowód. Niech

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x).$$

Mamy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |s_n(x)| < +\infty \quad \text{dla każdego } x,$$

ponadto

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_i) = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

skąd na mocy twierdzenia 3 rozdziału VA wynika nasze twierdzenie.

ROZDZIAŁ VI B.

Operacje pełnociągłe i stowarzyszone.

Ciągi biortogonalne.

(Ciąg dalszy)

§ 1. Niechaj $\{x_i(t)\}$ będzie ciągiem funkcyj przestrzeni $(L^{(p)})$ $(p > 1)$ oraz $\{y_i(t)\}$ ciągiem funkcyj przestrzeni $(L^{(\frac{p}{p-1})})$, przyczem niech

$$\int_0^1 x_i(t)\, y_j(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \quad " \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

Założymy dalej, że ciągi $\{x_i\}$ i $\{y_i\}$ są zupełne (lub zamknięte) w $(L^{(p)})$, wzgl. $(L^{(\frac{p}{p-1})})$.

Przy założeniach powyższych można wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 1. *Jeżeli szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt$$

jest zbieżny przeciętnie w potędze p dla każdej funkcji $x(t) \subset (L^{(p)})$, *wówczas szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt \tag{2}$$

jest zbieżny przeciętnie w potędze $\frac{p}{p-1}$ *dla każdej funkcji* $y(t)$ *przestrzeni* $(L^{(\frac{p}{p-1})})$.

D o w ó d. Niech

$$f_i(x) = \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt \quad \text{dla} \quad x(t) \subset (L^{(p)}).$$

Na mocy założenia szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x)$$

jest dla $x \subset (L^{(p)})$ zbieżny przeciętnie w potędze p t. zn. wedle normy, stąd, na mocy twierdzenia 7 rozdz. poprzedniego szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i\, f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt, \quad \text{gdzie } y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})}),$$

jest wedle normy zbieżny w $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ (t. zn. przeciętnie w potędze $\frac{p}{p-1}$) dla każdego funkcjonału linjowego f w przestrzeni $(L^{(p)})$; temsamem więc zbieżny jest szereg (2) dla każdej funkcji $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$.

Załóżmy teraz, że $x_i(t) = y_i(t) \subset (L^{(s)})$, gdzie s jest większą z liczb p, $\frac{p}{p-1}$.

Przy założeniu tem wynika z twierdzenia poprzedniego:

Jeżeli szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt$$

jest dla każdego $x \subset (L^{(p)})$ zbieżny w potędze p, wówczas szereg ten jest dla każdego $x \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ zbieżny przeciętnie w potędze $\frac{p}{p-1}$.

Można tu założyć w szczególności, że $\{x_i\}$ są np. funkcjami ograniczonemi.

§ 2. Niechaj $\{x_i(t)\}$ będzie ciągiem funkcyj całkowalnych oraz $\{y_i(t)\}$ ciągiem funkcyj ograniczonych w przedziale $0 \leqslant t \leqslant 1$, spełniających warunki (1) § poprzedniego. Niechaj nadto $\{x_i(t)\}$ będzie ciągiem zupełnym w przestrzeni (L).

Twierdzenie 2. *Jeżeli szereg* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 y_i(t)\, x(t)\, dt$ *jest dla każdego* $x(t) \subset L$ *zbieżny przeciętnie, wówczas szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, y(t)\, dt$$

jest ograniczony prawie wszędzie dla każdego $x(t) \subset (M)$ *(i naodwrót).*

D o w ó d przeprowadza się analogicznie jak poprzednio: x_i uważa się za elementy pola L, a y_i za reprezentanty funkcjonałów linjowych i korzysta się z twierdzenia 8 rozdziału VIA.

Uwaga 1. Jeżeli $x_i(t) = y_i(t) \subset (M)$ i jeżeli szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt \tag{1}$$

jest dla każdego $x(t) \subset (L)$ przeciętnie zbieżny, wówczas szereg ten jest dla każdego $x(t) \subset (M)$ ograniczony, i odwrotnie.

Uwaga 2. Jeżeli $x_i(t) = y_i(t) \subset (C)$ i jeśli ponadto $\{x_i\}$ jest ciągiem zupełnym w (C), wówczas zbieżność jednostajna szeregu (1) dla każdego $x(t) \subset (C)$ pociąga za sobą zbieżność przeciętną dla każdego $x(t) \subset (L)$, i naodwrót.

Pierwszą część dowodu otrzymujemy, uważając x_i za elementy pola (C), a $y_i = x_i$ za reprezentanty funkcjonałów, drugą część dowodu otrzymamy, uważając $x_i(t)$ za elementy pola (L), a $y_i = x_i$ za reprezentanty funkcjonałów linjowych w polu (L).

§ 3. *W każdej przestrzeni ośrodkowej E istnieje układ biortogonalny $\{f_i(x)\}$, $\{x_i\}$, pełny* [1]).

W rzeczy samej, niechaj $\{y_i\}$ będzie ciągiem wszędziegęstym w E oraz $\{\varphi_i\}$ — ciągiem funkcjonałów, z którego do każdego funkcjonału φ da się wyrwać ciąg zbieżny.

W ciągu $\{\varphi_i\}$ istnieje funkcjonał nieortogonalny do y_1. Przypuśćmy, że $\varphi_1(y_1) \neq 0$.

Przyjmijmy: $x_1 = y_1$, $f_1 = \dfrac{1}{\varphi_1(y_1)}\varphi_1$. Mamy $f_1(x_1) = 1$.

Utwórzmy ciągi

$$\{y_i - x_1 f_1(y_i)\} = \{y_i'\}, \quad \{\varphi_i - f_1 \varphi_i(x_i)\} = \{\varphi_i'\}.$$

Mamy

$$f_1(y_i') = 0, \quad \varphi_i'(x_1) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

W ciągu $\{\varphi_i'\}$ istnieje funkcjonał różny od zera.

Niechaj φ_2' będzie pierwszym różnym od zera. W ciągu $\{y_i')$ istnieje element nieortogonalny do φ_2'. W przeciwnym bowiem wypadku mielibyśmy

$$\varphi_2'(y_i') = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad \varphi_2'(x_1) = 0,$$

czyli

$$\varphi_2'(y_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

co jest niemożliwe. Przypuśćmy, że

$$\varphi_2'(y_2') \neq 0.$$

Niech

$$f_2 = \varphi_2', \quad x_2 = \frac{1}{\varphi_2'(y_2')} y_2'.$$

---

[1]) t. zn. iż w przestrzeni E pełny jest zarówno ciąg elementów $\{x_i\}$ (§ 3 rozdz. IV A), jak i ciąg funkcjonałów $\{f_i(x)\}$ (§ 3 rozdz. III A).

Mamy:

$$f_2(x_1) = 0, \quad f_2(x_2) = 1, \quad f_1(x_2) = 0.$$

Utwórzmy ciąg

$$\{y_i' - x_2 f_2(y_i')\} = \{y_i''\} \qquad \{\varphi_i' - f_2 \varphi_i'(x_2)\} = \{\varphi_i''\}.$$

Obierzmy teraz w ciągu $\{y_i''\}$ pierwszy element nie znikający i oznaczmy go przez x_3.

Do elementu x_3 dobierzmy pierwszy funkcjonał ciągu $\{\varphi_i''\}$ nieortogonalny. Postępując tak dalej otrzymamy ciąg biortogonalny $\{x_i\}$, $\{f_i\}$. Ponieważ każdy element ciągu $\{y_i\}$ i każdy funkcjonał ciągu $\{\varphi_i\}$ daje się linjowo wyrazić przy pomocy wyrazów ciągów $\{x_i\}$ i $\{f_i\}$, zatem łatwo zauważyć, iż otrzymany ciąg biortogonalny jest pełny.

Metoda powyższa biortogonalizacji jest analogiczna do postępowania stosowanego zwykle w przestrzeni $(L^{(2)})$.

§ 4. Ciąg elementów $\{x_i\}$ nazywamy *bazą* [1]), jeżeli dla każdego elementu x istnieje jeden i tylko jeden ciąg liczb $\{\eta_i\}$ taki, że

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i.$$

Niechaj ciąg $\{x_i\}$ będzie bazą. Oznaczmy przez E_1 zbiór ciągów $y = \{\eta_i\}$, dla których szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i$$

jest szeregiem zbieżnym.

Niech

$$|y| = \underset{n=1,2,\ldots}{\text{kres górny}} \left| \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i \right|.$$

---

[1]) Pojęcie to wprowadzone zostało w przypadku ogólnym przez p. J. Schaudera. Zob. J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Ztschr., 26 (1927), p. 47 — 65.

Łatwo wykazać, że E_1 jest przy powyższej normie przestrzenią typu (B).

Niech teraz dalej, dla każdego ciągu $y = \{\eta_i\} \subset E_1$,

$$x = U(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i.$$

Operacja $U(y)$, w ten sposób określona, jest linjowa, gdyż

$$|U(y)| \leqslant |y|,$$

ponieważ zaś odwzorowuje w sposób jedno-jednoznaczny zbiór E_1 na E, zatem odwrotność tej operacji $y = U^{-1}(x)$ jest również operacją linjową.

Niech

$$f_i(x) = \eta_i \quad \text{dla} \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i.$$

Ponieważ

$$|\eta_i x_i| \leqslant 2|y|, \qquad |f_i(x)| = |\eta_i| \leqslant \frac{2}{|x_i|}|y| \leqslant \frac{2}{|x_i|}|U^{-1}|\,|x|,$$

więc funkcjonał f_i jest także funkcjonałem linjowym.

Mamy zatem

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i(x) \quad \text{dla} \quad x \subset E,$$

a ponieważ rozwinięcie powyższe jest jedyne, zatem

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j, \\ 0 & \quad ,, \quad\; i \neq j. \end{cases}$$

Ciąg $\{x_i\}$ i $\{f_i\}$ jest zatem ciągiem biortogonalnym.

Zauważymy, że dla każdego funkcjonału linjowego f, określonego w E, szereg

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i f(x_i)$$

jest zbieżny do $f(x)$. Mamy bowiem dla $x \subset E$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f(x_i) = \lim_{n\to\infty} f\left[\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x)\right] = f(x).$$

Nie wiadomo, czy w każdej przestrzeni typu (B) ośrodkowej istnieje baza.

W przestrzeniach (L^p) $p \geqslant 1$ bazą jest system ortogonalny Haara. W polu (C) bazę podał p. J. Schauder [1]).

W przestrzeniach (l^p) $(p \geqslant 1)$ bazą jest układ elementów

$$x_i = \{\xi_n^{(i)}\}, \text{ gdzie } \xi_n^{(i)} = \begin{cases} 1, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}; \text{ wówczas } f_i(x) = \xi_i \text{ dla } x = \{\xi_i\}$$

W polu (c) bazą jest tensam układ z dołączeniem elementu

$$x_0 = \{\xi_n^{(0)}\}, \text{ gdzie } \xi_n^{(0)} = 1 \ (n = 1, 2, \ldots);$$

mamy wówczas:

$$f_0(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i \quad \text{dla} \quad x = \{\xi_i\} \subset (c).$$

§ 5. *Niechaj ciągi $\{x_i\}$, $\{f_i\}$* i *$\{y_i\}$, $\{\varphi_i\}$ będą ciągami biortogonalnemi. Jeżeli równania*

$$f_i(x) = \varphi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

mają dla każdego elementu x jedno dokładnie rozwiązanie $y = U(x)$, wówczas zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i$ pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i$ dla każdego ciągu liczb $\{h_i\}$.

---

1) Schauder, l. c., p. 48—49.

Dowód. Jak łatwo zauważyć, $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ i $\lim_{n \to \infty} y_n = y_0$ $[y_n = U(x_n)]$ pociąga $y_0 = U(x_0)$. Na mocy więc twierdz. 14 rozdziału IIIA operacja $y = U(x)$ jest operacją linjową.

Przyjmując zatem $|U| = M$, mamy

$$|U(x)| \leqslant M|x|.$$

Ponieważ

$$U(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

zatem

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} h_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i \quad (h_i \text{ dowolne liczby rzeczywiste}),$$

skąd wynika nasze twierdzenie.

Uwaga. Jako wniosek z powyższego twierdzenia wynika: *Jeżeli* $\{x_i(t)\}$, $\{y_i(t)\}$ *są ciągami ortogonalnemi unormowanemi funkcyj ciągłych, i jeżeli dla każdej funkcji ciągłej* $x(t)$ *istnieje jedna jedyna funkcja ciągła* $y(t)$, *spełniająca warunki*

$$\int_0^1 x_i(t)\, x(t)\, dt = \int_0^1 y_i(t)\, y(t)\, dt,$$

wówczas zbieżność jednostajna szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i x_i(t)$$

pociąga za sobą zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i y_i(t).$$

Analogiczne twierdzenie można otrzymać w innych przestrzeniach funkcyjnych [1]).

---

[1]) Zob.: S. Banach, Sur une proprieté caractéristique des fonctions orthogonales, Comptes Rendus, t. 180 (1925), p. 1637 — 1640. Por.: H. Steinhaus, Sur quelques applications du calcul fonctionnel à la théorie des séries orthogonales, Stud. Math. I (1929), p. 191 — 200.

§ 6. Niechaj $\{x_i\}$, $\{f_i\}$ będzie układem biortogonalnym, przyczem $\{f_i\}$ niechaj będzie ciągiem pełnym.

Jeżeli ciąg $\{h_i\}$ *ma tę własność, że, skoro* $\{\alpha_i\}$ *są spółczynnikami pewnego elementu* x *(t. zn.* $\alpha_i = f_i(x)$*), to* $\{h_i \alpha_i\}$ *są również spółczynnikami pewnego elementu* y*, wówczas, jeżeli* β_i *są spółczynnikami pewnego funkcjonału linjowego* f *(t. zn.* $\beta_i = f(x_i)$*),* $h_i \beta_i$ *są również spółczynnikami pewnego funkcjonału linjowego* φ.

Dowód. Z założenia wynika, że układ równań

$$f_i(x) = h_i f_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

ma dla każdego x dokładnie jedno rozwiązanie, które oznaczymy przez $y = U(x)$.

Związki $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, $y_n = U(x_n)$ pociągają za sobą oczywiście $y_0 = U(x_0)$; na mocy tedy twierdzenia 14 rozdziału IIIA, operacja $U(x)$ jest ciągła.

W szczególności, łatwo sprawdzamy, iż, dla każdego i,

$$U(x_i) = h_i x_i. \tag{1}$$

Niech teraz β_i $(i = 1, 2, \ldots)$ będą spółczynnikami pewnego funkcjonału f, t. j. niech

$$f(x_i) = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Mamy wówczas, w myśl (1),

$$f\,U(x_i) = h_i f(x_i) = h_i \beta_i,$$

t. zn. iż liczby $h_i \beta_i$ są spółczynnikami operacji $f\,U$.

Uwaga. Ponieważ, w myśl (1), $U(x_i) = h_i x_i$, zatem, jeżeli x jest granicą ciągu $\{x_i\}$, wówczas $U(x)$ jest granicą kombinacyj linjowych wyrazów ciągu $\{x_i\}$.

Jako zastosowanie tej uwagi otrzymujemy łatwo twierdzenie następujące:

Twierdzenie 3. *Niechaj* $\{x_i(t)\}$ *będzie ciągiem ortogonalnym, unormowanym funkcyj ciągłych, zamkniętym w przestrzeni funkcyj ciągłych.*

Jeżeli ciąg czynników $\{h_i\}$ *przeprowadza zawsze dowolny ciąg spółczynników* α_i *funkcji ograniczonej w ciąg spółczynników* $\{h_i \alpha_i\}$ *funkcji ograniczonej, wówczas przeprowadza zarazem ciąg spółczynników* β_i *dowolnej funkcji ciągłej w ciąg* $\{h_i \beta_i\}$ *spółczynników funkcji również ciągłej.*

Twierdzenie odwrotne jest także prawdziwe.

Mamy wreszcie:

Twierdzenie 4. *Niechaj* $\{x_i(t)\}$ *będzie ciągiem ortogonalnym, unormowanym i zupełnym w* $(L^{(\frac{p}{p-1})})$.

Jeżeli ciąg czynników $\{h_i\}$ *przeprowadza ciąg spółczynników* $\{\alpha_i\}$ *dowolnej funkcji* $x(t) \subset (L^{(p)})$ *w ciąg spółczynników* $\{h_i \alpha_i\}$ *pewnej funkcji* $y(t) \subset (L^{(p)})$, *wówczas ciąg* $\{h_i\}$ *przeprowadza dowolny ciąg spółczynników* $\{\alpha_i\}$ *funkcji* $x(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$ *w ciąg spółczynników* $\{h_i \alpha_i\}$ *funkcji* $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$. *Jeżeli* $p = \infty$, *wówczas* $(L^{(p)}) = (M)$ [1].

---

[1]) Zob.: W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, Stud. Math. I (1929), p. 1—39 oraz tegoż Autora, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II. Stud. Math. I, (1929) p. 241 — 255.