ROZDZIAŁ VII A.

Ciągi słabo zbieżne.

§ 1. *Definicja.* Ciąg elementów $\{x_n\}$ *zdąża słabo* do elementu x, jeżeli dla każdego funkcjonału linjowego f spełniony jest warunek

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Twierdzenie 1. *Na to, by ciąg $\{x_n\}$ zdążał słabo do x, konieczne jest i wystarcza, aby*

a) *ciąg $\{|x_n|\}$ był ograniczony;*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ *dla każdego funkcjonału $f \subset \overline{E}'$, gdzie $\overline{E}'$ oznacza zbiór wszędziegęsty w zbiorze $\overline{E}$ wszystkich funkcjonałów linjowych.*

Dowód. Konieczność a) wynika z twierdzenia § 3 rozdz. VIA. Konieczność b) jest oczywista.

Załóżmy, z kolei, iż warunki a), b) są spełnione i niech u będzie dowolnym funkcjonałem linjowym w E. Istnieje wówczas, dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, funkcjonał $f \subset \overline{E}'$ taki, iż

$$|f - u| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

gdzie M jest górnym kresem liczb $|x_n|$, $|x|$. Wówczas

$$|u(x-x_n)| \leqslant |f(x-x_n)| + \frac{\varepsilon}{2M}|x-x_n| \leqslant |f(x-x_n)| + \varepsilon,$$

a więc, ponieważ ε jest dowolną liczbą > 0 oraz

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

zatem również

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n) = u(x),$$

t. j. ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny do x.

Uwaga. O zbiorze $\overline{E}'$ wystarczy założyć, że kombinacje linjowe utworzone z funkcjonałów, należących do $\overline{E}'$, tworzą zbiór wszędziegęsty w $\overline{E}$.

Twierdzenie 2. *Jeżeli ciąg elementów $\{x_n\}$ zdąża słabo do x, wówczas istnieje taki ciąg kombinacyj linjowych $\{w_n\}$ elementów tego ciągu, że*

$$\lim_{n\to\infty} w_n = x.$$

Dowód wynika z twierdzenia 6 rozdziału IVA i z definicji słabej zbieżności.

§ 2. *Przestrzeń* (C). Z twierdzenia o postaci ogólnej funkcjonałów linjowych w (C) wynika, iż *ciąg funkcyj ciągłych $\{x_n(t)\}$ zdąża słabo w tej przestrzeni do pewnej funkcji $x(t) \subset (C)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej funkcji $g(t)$ o wahaniu ograniczonem*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, dg = \int_0^1 x(t)\, dg.$$

Stąd:

Na to, by ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ pola (C) był słabo zbieżny w tem polu do funkcji $x(t) \subset (C)$, konieczne jest i wystarcza, by

a) $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$;

b) *ciąg $\{x_n(t)\}$ był wspólnie ograniczony.*

Dowód. Warunek jest konieczny: a) wynika z uwagi, że, jeżeli t_0 jest dowolnym punktem przedziału $< 0,1 >$, wówczas funkcjonał $f(x) = x(t_0)$ jest linjowy, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, czyli

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t_0) = x(t_0).$$

Konieczność warunku b) wynika z twierdzenia § 3 rozdziału VI A.

Warunek jest wystarczający: Jeżeli bowiem $g(t)$ jest funkcją o wahaniu ograniczonem, a $\{x_n(t)\}$ ciągiem funkcyj ciągłych wspólnie ograniczonych, zmierzających wszędzie do funkcji ciągłej $x(t)$, wówczas (por. wstęp, § 5) mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, dg(t) = \int_0^1 x(t)\, dg(t).$$

Z twierdzenia 2 oraz powyższych uwag wynika bezpośrednio:

Twierdzenie 3. *Jeżeli ciąg funkcyj ciągłych $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ jest ograniczony i zbieżny wszędzie do funkcji ciągłej $x(t)$, wówczas istnieje ciąg wielomianów, utworzonych z wyrazów danego ciągu, zdążających jednostajnie do $x(t)$.*

Jest to ciekawa własność przestrzeni funkcyj ciągłych, której nie posiadają np. funkcje pierwszej klasy Baire'a.

Przestrzeń $(L^{(r)})$ $(r > 1)$. Ciąg $\{x_n(t)\}$ zdąża słabo do $x(t)$ $(x_n(t) \subset (L^{(r)}),\ x(t) \subset (L^{(r)}))$, jeżeli dla każdej funkcji $\alpha(t) \subset (L^{(s)}$ $[s = \frac{p}{p-1}]$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt.$$

Stąd:

Na to, aby ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ pola $(L^{(r)})$ zdążał słabo do funkcji $x(t) \subset (L^{(r)})$, konieczne jest i wystarcza, by

a) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n(u)\, du = \int_0^t x(u)\, du \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1);$$

b) *ciąg* $\left\{\int_0^1 |x_n(t)|^r dt\right\}$ *był ograniczony* [1]).

Warunki są konieczne. Określmy funkcję $\alpha(u, t)$

$$\alpha(u,t) = \begin{cases} 1 \text{ dla } u \leqslant t, & 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \\ 0 \quad \text{„} \quad u > t. \end{cases}$$

Dla każdego t, $\alpha(u,t) \subset (L^{(s)})$, zatem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(u,t)\, du = \int_0^1 x(t)\, \alpha(u,t)\, du,$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n(u)\, du = \int_0^t x(u)\, du.$$

Konieczność warunku b) wynika bezpośrednio z twierdzenia § 3 rozdz. VI A.

Warunki są wystarczające. Zauważmy, że każda funkcja schodkowa $\alpha(u)$ da się przedstawić w postaci

$$\alpha(u) = \sum_{i=1}^{n} h_i \,.\, [\alpha(u, t_i') - \alpha(u, t_i'')].$$

Ponieważ wedle a)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(u)\, \alpha(u, t_i)\, du = \int_0^1 x(u)\, \alpha(u, t_i)\, du,$$

przeto dla każdej funkcji schodkowej $\alpha(u)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(u)\, \alpha(u)\, du = \int_0^1 x(u)\, \alpha(u)\, du.$$

---

[1]) Twierdzenie to udowodnił p. F. Riesz. Zob. pracę cytowaną na str. 71 pod [1]) (p. 465—466).

Niechaj teraz $\alpha(t)$ będzie dowolną funkcją klasy $(L^{(\frac{p}{p-1})})$. Istnieje ciąg funkcyj schodkowych $\{\alpha_n(t)\}$, dążących przeciętnie w potędze $\frac{p}{p-1}$ do $\alpha(t)$.

Zbiór funkcyj schodkowych jest zatem wszędziegęsty w $(L^{(s)})$, skąd na mocy warunku b) otrzymujemy słabą zbieżność ciągu $\{x_n(t)\}$ do $x(t)$.

Przestrzeń (c). *Na to, aby ciąg* $\{x_n\}$ *zdążał słabo do elementu* x $[x_n = \{\xi_i^n\} \subset (c),\ \ x = \{\xi_i\} \subset (c)]$ *konieczne jest i wystarcza, by*

1) *ciąg* $\{|x_n|\}$ *był ograniczony*;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \{\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i^{(n)}\} = \lim\limits_{i\to\infty} \xi_i.$

Dowód jest natychmiastowy, jeżeli oprzemy się na twierdzeniu, że każdy funkcjonał linjowy w (c) ma kształt:

$$f(x) = C \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \xi_i,$$

gdzie

$$x = \{\xi_i\}, \qquad |C| + \sum_{i=1}^{\infty} |C_i| = |f|,$$

i zauważymy, że przyjmując

$$f_0(x) = \lim_{i\to\infty} \xi_i, \qquad f_i(x) = \xi_i,$$

możemy powiedzieć, że kombinacje linjowe utworzone z funkcjonałów $f_n(x)$ $(n = 0, 1 \ldots)$ tworzą zbiór wszędziegęsty w zbiorze funkcjonałów.

Przestrzeń $(l^{(p)})$ $(p > 1)$. *Na to, aby ciąg* $\{x_n\}$ *zdążał słabo do* x $[x_n = \{\xi_i^{(n)}\} \subset (l^{(p)}),\ \ x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})]$, *konieczne jest i wystarcza, by*

1) *ciąg liczb* $\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p\right\}$ *był ograniczony;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \qquad (i = 1, 2 \ldots).$

Dowód. Konieczność warunków wynika z twierdzenia § 3 rozdz. VI A, ponieważ dla $x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$, mamy

$$|x| = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, \quad —$$

oraz z uwagi, iż funkcjonały

$$f_i(x) = \xi_i \quad \text{dla} \quad x = \{\xi_i\} \subset (l^{(p)})$$

są linjowe w przestrzeni $(l^{(p)})$ $(p > 1)$.

Dostateczność jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 1, oraz uwagi do tego twierdzenia (str. 146); wystarczy zauważyć, iż kombinacje linjowe określonych wyżej funkcjonałów $f_i(x)$ stanowią zbiór wszędziegęsty w przestrzeni wszystkich funkcjonałów w polu $(l^{(p)})$.

Przestrzeń (l). *Na to, aby ciąg* $\{x_n\}$ *zdążał słabo do* x $[x_n = \xi_i^{(n)} \subset (l),\ \ x = \{\xi_i\} \subset (l)]$, *konieczne jest i wystarcza, by*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0, \quad \text{t. zn.} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| = 0\,.$$

W przestrzeni (l) *słaba zbieżność jest tedy równoważna zbieżności wedle normy.*

Dowód. Przyjmijmy $\eta_i^{(n)} = \xi_i^{(n)} - \xi_i$. Załóżmy, że ciąg $\{x_n\}$ zdąża słabo do x. Oczywiście ciąg $\{y_n\}$ $[y_n = \xi_i^{(n)} - \xi_i]$ zdąża słabo do Θ. Zatem dla każdego ciągu ograniczonego $\{c_i\}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} c_i\,\eta_i^{(n)} = 0; \tag{1}$$

przyjmując $c_i = 0$ dla $i \neq r$, $c_r = 1$, otrzymamy:

$$\lim_{n\to\infty} \eta_r^{(n)} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Przypuśćmy, że

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n)}\,| > \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Określamy przy pomocy indukcji ciąg liczb naturalnych $\{n_k\}$ i $\{r_k\}$ w sposób następujący:

1) n_1 jest najmniejszą liczbą n, dla której

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n)}\,| > \varepsilon;$$

2) r_1 jest najmniejszą liczbą, spełniającą związki

$$\sum_{i=1}^{r_1} |\,\eta_i^{(n_1)}\,| > \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_{i=r_1+1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n_1)}\,| < \frac{\varepsilon}{5};$$

3) n_k jest najmniejszą liczbą większą od n_{k-1}, spełniającą warunki

a) $$\sum_{i=1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n_k)}\,| > \varepsilon,$$

b) $$\sum_{i=1}^{r_{k-1}} |\,\eta_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon}{5};$$

4) r_k jest najmniejszą liczbą $> r_{k-1}$, spełniającą nierówności

$$\sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\,\eta_i^{(n_k)}| > \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \sum_{i=r_k+1}^{\infty} |\,\eta_i^{(n_k)}| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Istnienie ciągów $\{n_k\}$ i $\{r_k\}$ wynika ze związków (2) i (3). Niech teraz

$$c_i = \begin{cases} \operatorname{sign} \eta_i^{(n_{k+1})} & \text{dla } r_k < i \leqslant r_{k+1}, \\ \operatorname{sign} \eta_i^{(n_1)} & \text{"} \quad 1 \leqslant i \leqslant r_1, \end{cases} \tag{4}$$

Mamy $|c_j| = 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Zatem, na mocy (1),

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n)} = 0. \tag{5}$$

Lecz, w myśl (4),

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n_k)}\right| \geqslant \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} |\eta_i^{(n_k)}| - \sum_{i=1}^{r_{k-1}} |\eta_i^{(n_k)}| - \sum_{i=r_k+1}^{\infty} |\eta_i^{(n_k)}|.$$

Zatem, na mocy warunków (3) i (4), określających ciągi $\{n_k\}$ i $\{r_k\}$, mamy:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i \eta_i^{(n_k)}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{10} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

co jednak sprzeczne jest z (5) i z warunkiem 3), na mocy którego $n_k > n_{k-1}$, więc $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

Przestrzeń (L). *Ciąg* $\{x_n(t)\}$ *zdąża słabo do* $x_0(t)$ $[x_n \subset L, x_0 \subset L, 0 \leqslant t \leqslant 1]$, *jeżeli dla każdej funkcji ograniczonej* $\alpha(t)$ *zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x_0(t)\,\alpha(t)\,dt. \tag{1}$$

Stąd:

Na to, aby ciąg funkcyj $\{x_n(t)\}$ *pola* (L) *był słabo zbieżny do funkcji* $x(t) \subset (L)$, *konieczne jest i wystarcza, by*

1) *ciąg* $\int_0^1 |x_n(t)|\,dt$ *był ograniczony;*

2) *dla każdej liczby* $\varepsilon > 0$, *istniała odpowiednia liczba* η *taka, że dla każdego zbioru* H, *zawartego w* $<0, 1>$, *o mierze* $<\eta$, *zachodziła nierówność*

$$\left|\int_H x_n(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n(u)\,du = \int_0^t x_0(u)\,du \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)\ ^{1}).$$

D o w ó d. Konieczność warunku 1) wynika z twierdzenia § 3 rozdz. VI A. Udowodnimy teraz lemmat następujący:

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt = 0$ dla każdego $\alpha(t) \subset (M)$ $[x_n(t) \subset L]$, wówczas warunek 2) jest spełniony.

Przypuśćmy bowiem, że warunek 2) nie jest spełniony.

Istnieje zatem $\varepsilon > 0$ takie, że do każdego $\eta > 0$ istnieje zbiór $H(\eta)$ o mierze $<\eta$ i liczba naturalna $n(\eta)$ taka, że

$$\left|\int_{H(\eta)} x_{n(\eta)}(t)\,dt\right| > \varepsilon. \tag{1}$$

Niechaj $\{\alpha_n\}$ oznacza ciąg liczb, spełniających warunek:

$$\left|\int_H x_n(t)\,dt\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ dla każdego zbioru } H \text{ o mierze } <\alpha_n. \tag{2}$$

Określamy ciąg zbiorów $\{G_i\}$, liczb $\{\eta_i\}$ przy pomocy indukcji w następujący sposób:

---

[1]) Warunek 1) jest zresztą konsekwencją warunku 2).

$$\left\{\begin{array}{lll} G_1 = H(1), & n_1 = n(1), & N_1 = 0, \\ G_i = H\left(\dfrac{1}{2^{N_i}}\right), & & n_i = n\left(\dfrac{1}{2^{N_i}}\right), \end{array}\right. \tag{3}$$

gdzie N_i jest dowolną liczbą naturalną, spełniającą warunek

$$\frac{1}{2^{N_i}} < \frac{1}{2}\,\alpha_{n_{i-1}}, \qquad N_i < N_{i+1}.$$

A więc miara zbioru $\sum_{j=1}^{\infty} G_{j+1}$ jest mniejsza niż

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^{N_{j+1}}} \leqslant \frac{2}{2^{N_{i+1}}} < \alpha_{n_i}.$$

Niech

$$H_i = G_i - R_i, \text{ gdzie } R_i = G_i \sum_{j=i}^{\infty} G_{j+1}.$$

Mamy oczywiście $H_r H_k = 0$ przy $r \neq k$, oraz

$$\int_{H_i} x_{n_i}(t)\,dt = \int_{G_i} x_{n_i}(t) - \int_{R_i} x_{n_i}(t)\,dt.$$

Ponieważ miara R_i jest $< \alpha_{n_i}$, zatem na mocy (1), (2), (3)

$$\left|\int_{H_i} x_{n_i}(t)\,dt\right| \geqslant \varepsilon - \frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{1}{2}\,\varepsilon. \tag{4}$$

Niech

$$\xi_i^{(n)} = \int_{H_i} x_n(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

i niechaj $\{d_i\}$ będzie dowolnym ciągiem ograniczonym.

Określamy funkcję $\alpha(t)$ w sposób następujący

$$\alpha(t) = \left\{\begin{array}{ll} d_i & \text{dla } t \subset H_i, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{array}\right.$$

Mamy

$$\int_0^1 \alpha(t)\, x_n(t)\, dt = \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, \xi_i^{(n)}.$$

Widzimy zatem, że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_i\, \xi_i^{(n)} = 0 \quad \text{dla} \quad \{d_i\} \subset (m).$$

Uważając więc ciągi $\{\xi_i^{(n)}\}$ jako elementy przestrzeni (l), widzimy, że $\{\xi_i^{(n)}\}$ dąży słabo do Θ. Zatem

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\, \xi_i^{(n)} \,| = 0.$$

A więc $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i^{(n_i)} = 0$, co jest sprzeczne z (4), gdyż

$$|\, \xi_i^{(n_i)} \,| = \left| \int_{H_i} x_{n_i}(t)\, dt \right| \geqslant \frac{1}{2}\, \varepsilon.$$

Opierając się na powyższym lemmacie, z uwagi, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [x_n(t) - x_0(t)]\, \alpha(t)\, dt = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha(t) \subset (M),$$

mamy

$$\int_H |\, x_n(t) - x_0(t) \,|\, dt < \varepsilon$$

dla każdego zbioru H o mierze mniejszej niż η.

Obierając η dość małe, mamy

$$\int_H |\, x_0(t) \,|\, dt < \tfrac{1}{2}\, \varepsilon,$$

o ile tylko miara zbioru H jest mniejsza od η.

Zatem

$$\int\limits_H |x_n(t)|\,dt < \frac{3}{2}\varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Widzimy zatem, że ciąg $\{x_n(t)\}$ spełnia warunek 2).

Warunek 3) jest oczywiście konieczny.

Przyjmując bowiem

$$\alpha(u) = 1 \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant u \leqslant t,$$

$$\alpha(u) = 0 \quad \text{dla} \quad t < u \leqslant 1,$$

mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x_n(u)\,\alpha(u)\,du = \int\limits_0^1 x_0(u)\,\alpha(u)\,du.$$

Przejdziemy teraz do dowodu, że warunki podane są wystarczające.

Niechaj $\alpha(t)$ będzie dowolną funkcją mierzalną mniejszą bezwzględnie od M w przedziale $<0, 1>$. Niechaj ε będzie dowolną liczbą, a $\eta > 0$ odpowiednią liczbą, wynikającą z warunku 2).

Istnieje funkcja schodkowa $\beta(t)$, ograniczona bezwzględnie przez M i spełniającą warunek: zbiór H wszystkich punktów, spełniających nierówność

$$|\alpha(t) - \beta(t)| > \varepsilon,$$

ma miarę mniejszą od η. Na mocy warunku 3), mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x_n(t)\,\beta(t)\,dt = \int\limits_0^1 x_0(t)\,\beta(t)\,dt. \tag{6}$$

Zauważmy, że

$$\left|\int\limits_0^1 [\alpha(t) - \beta(t)]\,x_n(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{H'} [\alpha(t) - \beta(t)]\,x_n(t)\,dt\right| +$$

$$+\left|\int\limits_H [\alpha(t)-\beta(t)]\, x_n(t)\, dt\right|,$$

gdzie H' oznacza dopełnienie zbioru H do przedziału $< 0, 1 >$.

Zatem

$$\left|\int\limits_0^1 [\alpha(t)-\beta(t)]\, x_n(t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon \int\limits_0^1 |x_n(t)|\, dt + 2M \int\limits_H |x_n(t)|\, dt.$$

Jeżeli przez H_n oznaczymy zbiór tych punktów zbioru H, gdzie $x_n(t) \geqslant 0$, wówczas, na mocy warunku 2),

$$\int\limits_H |x_n(t)|\, dt = \left|\int\limits_{H-H_n} x_n(t)\, dt\right| + \left|\int\limits_{H_n} x_n(t)\, dt\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

a więc

$$\left|\int\limits_0^1 [\alpha(t)-\beta(t)]\, x_n(t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon \left[\int\limits_0^1 |x_n(t)|\, dt + 4M\right]. \tag{7}$$

Mamy na mocy (6) i (7)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\left\{\int\limits_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt - \int\limits_0^1 x_0(t)\, \alpha(t)\, dt\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\int\limits_0^1 x_n(t)\, [\alpha(t)-\beta(t)]\, dt\right| + \left|\int\limits_0^1 x_0(t)\, [\alpha(t)-\beta(t)]\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varepsilon \left[\int\limits_0^1 |x_n(t)|\, dt + 4M\right] + \varepsilon \int\limits_0^1 |x_0(t)|\, dt + 2M \int\limits_H |x_0(t)|\, dt.$$

Na mocy warunku 1) ciąg $\int_0^1 | x_n(t) | \, dt$ jest ograniczony, $\int_H | x_0(t) | \, dt$ zmierza do zera wraz z miarą zbioru H, a zatem

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t) \, \alpha(t) \, dt = \int_0^1 x_0(t) \, \alpha(t) \, dt .$$

ROZDZIAŁ VII B.

Ciągi słabo zbieżne.

(Ciąg dalszy)

§ 1. *Jeżeli ciąg* $\{x_n(t)\}$ *zdąża słabo do* $x(t)$ *w przestrzeni* $(L^{(p)})$ $(p > 1)$ $[x_n(t), x(t) \subset (L^{(p)}), \ p > 1]$ *i jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt = \int_0^1 |x(t)|^p \, dt,$$

wówczas ciąg $\{x_n(t)\}$ *zdąża wedle normy do* $x(t)$, *t. zn.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p \, dt = 0 \text{ [1]}.$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla przestrzeni $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, mianowicie:

Jeżeli ciąg $\{x_n\} \equiv \{\xi_i^{(n)}\}$ *zdąża słabo do* $x \equiv \{\xi_i\}$ *w* $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ $[x_n, x \subset (l^{(p)})]$ *i jeżeli*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p,$$

---

[1]) Twierdzenie to udowodnione zostało po raz pierwszy przez Radona (Sitzgsb. Ak. Wiss. Wien, t. 122 (1913), Abt. IIa, pp. 1295 — 1438). Również: F. Riesz, Acta Litt. ac Scient. Szeged, t. 4, (1929), pp. 58—64, oraz 182—185.

wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p = 0 .$$

D o w ó d. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \tag{1}$$

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{N-1} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p}, \tag{2}$$

gdzie N jest dowolną liczbą naturalną.

Lecz

$$\sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i^{(n)} |^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i |^p},$$

skąd, na mocy założenia i związków (1), (2), otrzymujemy:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p \leqslant \left\{ 2 \sqrt[p]{\sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i |^p} \right\}^p = 2^p \sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i |^p .$$

Ponieważ N jest dowolną liczbą naturalną i ponieważ

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=N}^{\infty} | \xi_i |^p = 0,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p = 0 .$$

§ 2. Jeżeli ciąg elementów $\{x_n\}$ pewnej przestrzeni typu (B) ma tę własność, że dla każdego funkcjonału linjowego $f(x)$ istnieje

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

to nie koniecznie istnieć musi element x_0, do którego ciąg $\{x_n\}$ jest słabo zbieżny, t. j. taki, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

dla każdego funkcjonału linjowego.

Przykład taki można podać w przestrzeni (C).

Niechaj $\{x_n(t)\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ oznacza ciąg funkcyj ciągłych wspólnie ograniczonych i zdążających wszędzie do funkcji $z(t)$ nieciągłej.

Wynika wówczas z twierdzenia § 2 rozdziału VIIA istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, dg$$

dla każdej funkcji g o wahaniu ograniczonem.

Ciąg $\{x_n(t)\}$ nie jest jednak słabo zbieżny do żadnej funkcji ciągłej.

W przestrzeniach $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, *jeśli, dla pewnego ciągu* $\{x_n\}$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ *istnieje dla każdego funkcjonału f linjowego, wówczas ciąg* $\{x_n\}$ *zdąża słabo do pewnego elementu* x_0.

D o w ó d dla (L). Niechaj ciąg $\{x_n(t)\} \subset (L)$ ma powyższą własność, t. zn. niech

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt$$

istnieje dla każdej funkcji $\alpha(t) \subset (M)$.

Mamy oczywiście

$$\lim_{p,q\to\infty} \int_0^1 [x_p(t) - x_q(t)]\, \alpha(t)\, dt = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha(t) \subset (M).$$

Łatwo zauważyć, że dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka para liczb $\eta > 0$ i $N > 0$, że

$$\int_H |x_N(t) - x_h(t)|\, dt < \varepsilon \tag{1}$$

dla $h \geqslant N$ i dla każdego zbioru H o mierze mniejszej niż η.

W przeciwnym bowiem przypadku istniałby ciąg liczb $\{p_n\}$ i $\{h_n\}$, dążących do ∞ i ciąg zbiorów $\{H_n\}$ o miarach dążących do zera, takich, że

$$\int_{H_n} |x_{p_n}(t) - x_{h_n}(t)|\, dt \geqslant \varepsilon,$$

co sprzeciwiałoby się lemmatowi § 2 rozdziału VIIA (str. 153), gdyż

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [x_{p_n}(t) - x_{q_n}(t)]\, \alpha(t)\, dt = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha(t) \subset (M).$$

W szczególności, dla η dość małego, mamy

$$\int_H |x_i(t)|\, dt < \tfrac{1}{2}\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots N),$$

o ile miara zbioru H jest mniejsza od η.

Zatem na mocy (1)

$$\int_H |x_n(t)|\, dt < \frac{3}{2}\varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dla każdego zbioru H o mierze $< \eta$.

Niech

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n(u)\, du = \beta(t).$$

Pokażemy, że funkcja $\beta(t)$ jest funkcją absolutnie ciągłą. Jeżeli bowiem ε jest dowolną liczbą dodatnią, wówczas istnieje $\eta > 0$ takie, że

$$\int_H |x_n(t)|\, dt < \varepsilon \ (n = 1, 2, \ldots) \text{ dla każdego zbioru } H \text{ o mierze } < \eta.$$

W szczególności, jeżeli zbiór H składa się ze skończonej liczby odcinków $\{\delta_i\}$, niezachodzących na siebie, o krańcach t_i, t_i', wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\int_H x_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_i \int_{t_i}^{t_i'} x_n(t)\,dt = \sum_i [\beta(t_i') - \beta(t_i)],$$

a więc

$$\left|\sum_i [\beta(t_i') - \beta(t_i)]\right| \leqslant \varepsilon,$$

co oznacza ciągłość bezwzględną funkcji $\beta(t)$.

Przyjmując $\beta'(t) = x_0(t)$, widzimy, że ciąg $x_n(t)$ zdąża słabo do $x_0(t)$.

Czytelnik łatwo udowodni analogiczną własność dla przestrzeni (l), t. zn.:

Jeżeli ciąg $\{\xi_i^{(n)}\}$ ma tę własność, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| < +\infty \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

i $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i\,\xi_i^{(n)}$ istnieje dla każdego ciągu $\{d_i\}$ ograniczonego, wówczas istnieje ciąg $\{\xi_i\}$ taki, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} d_i\,\xi_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} d_i\,\xi_i.$$

Udowodnimy teraz dla przestrzeni $(L^{(p)})$ $(p > 1)$ własność podaną na początku tego ustępu, mianowicie następujące twierdzenie:

Jeżeli $\{x_n(t)\} \subset (L^{(p)})$ $(p > 1)$ i jeżeli

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt$$

istnieje dla każdego $y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$, wówczas istnieje $x_0(t) \subset (L^{(p)})$

takie, że

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt = \int_0^1 x_0(t)\,y(t)\,dt \quad \text{dla} \quad y(t) \subset (L^{(\frac{p}{p-1})}).$$

D o w ó d. Niech dla $y \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$

$$f_n(y) = \int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt.$$

Funkcjonał $f_n(y)$ jest funkcjonałem linjowym określonym w $(L^{(\frac{p}{p-1})})$.

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)$ istnieje dla każdego $y \subset (L^{(\frac{p}{p-1})})$, zatem funkcjonał $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)$, jako granica funkcjonałów linjowych, jest również linjowy. Z twierdzenia o przedstawieniu funkcjonałów w przestrzeniach $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ (rozdz. IVA, § 4) wynika istnienie takiej funkcji $x_0(t) \subset (L^{(p)})$, że

$$f(y) = \int_0^1 x_0(t)\,y(t)\,dt \quad \text{dla} \quad y \subset (L^{(\frac{p}{p-1})}).$$

Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)\,y(t)\,dt = \int_0^1 x_0(t)\,y(t)\,dt \quad \text{dla} \quad y \subset (L^{(\frac{p}{p-1})}).$$

Uwaga. Analogiczne twierdzenie i dowód można podać dla przestrzeni $(l^{(p)})$ $(p > 1)$.

§ 3. *Niechaj $y = U(x)$ będzie operacją linjową, określoną w przestrzeni E typu (B), której przeciwdziedzina mieści się w przestrzeni E_1 również typu (B).*

Jeżeli ciąg $\{x_n\}$ zdąża słabo do x_0, wówczas ciąg $\{U(x_n)\}$ zdąża słabo do $U(x_0)$.

D o w ó d. Niech Y będzie dowolnym funkcjonałem linjowym określonym w E_1. Wyrażenie

$$YU(x) = X(x)$$

jest oczywiście funkcjonałem addytywnym w E i, jak łatwo widać, ciągłym.

Mamy bowiem:

$$|X(x)| = |YU(x)| \leqslant |Y| \; |U(x)| \leqslant |Y| \; |U| \; |x|.$$

Ponieważ $\{x_n\}$ zdąża słabo do x_0 więc

$$\lim_{n \to \infty} YU(x_n) = \lim_{n \to \infty} X(x_n) = X(x_0) = YU(x_0).$$

Zatem ciąg $\{U(x_n)\}$ zdąża słabo do $U(x_0)$.

Jeżeli założymy, że operacja $y = U(x)$ jest pełnociągła, wówczas, skoro ciąg $\{x_n\}$ zdąża słabo do $\{x_0\}$, to ciąg $\{U(x_n)\}$ zdąża wedle normy do $U(x_0)$, t. j.

$$\lim_{n \to \infty} |U(x_n) - U(x_0)| = 0.$$

Przypuśćmy, że ciąg $U(x_n)$ nie zdąża (wedle normy) do $U(x_0)$. Istnieje zatem $\varepsilon > 0$ i ciąg częściowy $\{x_{n_i}\}$ taki, że

$$|U(x_{n_i}) - U(x_0)| > \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

przyczem ciąg $\{U(x_{n_i})\}$ jest zbieżny wedle normy do pewnego elementu y'. Ponieważ ciąg $\{x_{n_i}\}$ jest słabo zbieżny do x_0, więc ciąg $\{U(x_{n_i})\}$ jest słabo zbieżny do $U(x_0)$, co jest niemożliwe, gdyż ciąg $\{U(x_{n_i})\}$ dąży do y', a na mocy (1) $y' \neq U(x_0)$.