ROZDZIAŁ VIII A.

Funkcjonały linjowe w przestrzeniach (B).

W rozdziale tym zakładać będziemy, że rozważana przestrzeń jest typu (B) [1]).

Niechaj ϑ będzie dowolną liczbą porządkową graniczną (t. zn. nie mającą poprzedniej).

Jeżeli $\{C_\xi\}$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$ jest ciągiem ograniczonym liczb rzeczywistych typu ϑ, wówczas przez

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, C_\xi \quad \text{(limes superior)}$$

oznaczamy dolny kres liczb rzeczywistych K, spełniających nierówność

$$C_\xi \leqslant K,$$

począwszy od pewnej liczby porządkowej zależnej od K.

Określamy dalej:

$$\underline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, C_\xi = - \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}}\, (- C_\xi) \qquad \text{(limes inferior).}$$

---

[1]) Por. pracę cytowaną pod [1]) na str. 26 (p. 228—234), gdzie znajdują się wszystkie twierdzenia tego rozdziału.

Twierdzenie 1. *Jeżeli dla ciągu* $\{f_\xi(x)\}$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$ *funkcjonałów linjowych typu* ϑ *mamy*

$$|f_\xi| \leqslant M \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta),$$

wówczas istnieje funkcjonał linjowy $f(x)$, *spełniający warunki:*

$$|f| \leqslant M, \quad \underline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x) \text{ (\textit{dla każdego} } x). \quad (1)$$

Twierdzenie powyższe wynika z twierdzenia 1 rozdziału II, jeżeli przyjmiemy tam

$$p(x) = \overline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x).$$

Funkcjonał $p(x)$ spełnia warunki twierdzenia, a ponadto

$$p(x) \leqslant M|x|.$$

Uwaga. Każdy funkcjonał linjowy $f(x)$, spełniający warunki (1), nazywamy *funkcjonałem granicznym* ciągu $\{f_\xi(x)\}$.

Jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} |f_n - f| = 0$, wówczas f jest oczywiście funkcjonałem granicznym ciągu $\{f_n(x)\}$, mamy bowiem

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

dla każdego x.

Definicja. Przestrzeń L wektorjalną funkcjonałów linjowych nazywamy *słabozamkniętą*, jeżeli dla każdego ciągu funkcjonałów $\{f_\xi\}$ $(\xi < \vartheta)$ tej przestrzeni, ograniczonych według normy, istnieje zawsze funkcjonał graniczny, należący również do L.

Uwaga. Definicja słabej zamkniętości wymaga liczb pozaskończonych. Przekonamy się później, że w zbiorach ośrodkowych można ich jednak uniknąć.

Twierdzenie 2. *Jeżeli* L *jest przestrzenią wektorjalną słabozamkniętą funkcjonałów linjowych i jeżeli funkcjonał linjowy* φ *do* L *nie należy, wówczas, oznaczając przez* M *liczbę, spełniającą warunek*

$$0 < M < |f - \varphi| \quad \text{\textit{dla każdego}} \quad f \subset L,$$

możemy znaleźć element x_0 *taki, że*

$$f(x_0) = 0 \quad \textit{dla każdego} \quad f \subset L,$$

$$\varphi(x_0) = 1,$$

$$|x_0| < \frac{1}{M}.$$

D o w ó d. Obierzmy dowolny ciąg liczb $\{M_i\}$ $(M_1 = M)$ rosnący nieograniczony. Niechaj $\aleph$ oznacza największą liczbę kardynalną, spełniającą warunek: jeżeli moc dowolnego zbioru $H \subset E$ jest $< \aleph$, wówczas istnieje funkcjonał linjowy $f(x)$, taki, że

$$f \subset L, \quad |f - \varphi| \leqslant M_2, \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1 \,.\, |x| \quad (x \subset H). \quad (1)$$

Oczywiście moc zbioru E jest $\geqslant \aleph$. Gdyby bowiem istniał funkcjonał linjowy $f(x)$ taki, iż

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1 |x| \quad \text{dla} \quad x \subset E,$$

wówczas

$$|f - \varphi| \leqslant M_1 = M,$$

co jest sprzeczne z założeniem.

Pokażemy teraz, że $\aleph$ jest liczbą skończoną.

Przypuśćmy bowiem, że $\aleph$ nie jest liczbą skończoną.

Niechaj G będzie dowolnym zbiorem elementów mocy $\aleph$. Uporządkujemy elementy zbioru G w ciąg pozaskończony

$$\{x_\xi\} \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta),$$

gdzie ϑ jest najmniejszą liczbą porządkową mocy $\aleph$. Oczywiście ϑ jest liczbą graniczną.

Jeżeli $\eta < \vartheta$, wówczas moc zbioru wyrazów ciągu

$$\{x_\xi\} \qquad (1 \leqslant \xi < \eta)$$

jest mniejsza od $\aleph$; istnieje zatem funkcjonał linjowy f_η, spełniający związki

$$f_\eta \subset L, \quad |f_\eta - \varphi| \leqslant M_2, \quad |f_\eta(x_\xi) - \varphi(x_\xi)| \leqslant M_1 |x_\xi| \quad \text{dla} \quad \xi < \eta. \quad (2)$$

Ponieważ zbiór L jest słabo zamknięty, istnieje zatem funkcjonał linjowy f, należący do L i będący funkcjonałem granicznym ciągu

$$\{f_\eta\} \qquad (1 \leqslant \eta < \vartheta).$$

Na mocy (2) mamy

$$|f-\varphi| \leqslant M_2, \qquad |f(x_\xi) - \varphi(x_\xi)| \leqslant M_1 |x_\xi| \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta).$$

Wynika stąd, że dla każdego zbioru G mocy $\aleph$ istnieje funkcjonał linjowy f, spełniający warunki (1).

A zatem $\aleph$ nie jest liczbą kardynalną nieskończoną.

Istnieje zatem zbiór K_1, zawierający skończoną liczbę elementów, taki, że żaden funkcjonał f, spełniający warunki

$$|f-\varphi| \leqslant M_2 \quad \text{i} \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_1 |x| \quad \text{dla} \quad x \subset K_1$$

nie należy do L.

Postępując podobnie przy pomocy indukcji z n na $n+1$, łatwo pokazać, że istnieje ciąg zbiorów skończonych $\{K_i\}$ taki, że, dla każdej liczby n naturalnej, jeśli

$$|f-\varphi| \leqslant M_n, \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_i |x| \quad \text{dla} \quad x \subset K_i \qquad (i<n),$$

wówczas f nie należy do L.

Jeśli tedy

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_i |x| \quad \text{dla} \quad x \subset K_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

wówczas f nie należy napewno do L.

Możemy przyjąć, że elementy zbiorów $\{K_i\}$ mają normy równe $\dfrac{M_1}{M_i}$, wystarczy w tym celu elementy zbiorów $\{K_i\}$ pomnożyć tylko przez odpowiednie liczby.

Porządkując wówczas elementy zbiorów K_i w ciąg $\{x_n\}$ i wypisując najpierw elementy zbioru K_1, następnie elementy zbioru K_2 i t. d., mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \Theta, \qquad |x_n| \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

i jeśli

$$|f(x_n) - \varphi(x_n)| \leqslant M_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

wówczas f nie należy napewno do L.

Oznaczmy przez $\overline{L}$ zbiór wszystkich ciągów $\{f(x_n)\}$ dla $f \subset L$. Oczywiście $\overline{L} \subset (c)$ [zbiór ciągów zbieżnych] i $\{\varphi(x_n)\} \subset (c)$.

Na mocy (6) odległość ciągu $\{\varphi(x_n)\}$ od zbioru linjowego $\overline{L}$ jest $\geqslant M_1$. Istnieje zatem, na mocy lemmatu do twierdzenia 6 rozdziału IVA, ciąg liczb $\{C_n\}$ i liczba $\{C\}$ taka, że

$$C \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f(x_n) = 0 \quad \text{dla} \quad f \subset L,$$

$$C \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi(x_n) = 1, \tag{7}$$

$$|C| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| \leqslant \frac{1}{M_1}.$$

Jeżeli teraz przyjmiemy

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n,$$

wówczas na mocy (7)

$$f(x_0) = 0 \quad \text{dla} \quad f \subset L,$$

$$\varphi(x) = 1,$$

$$|x_0| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|\,|x_n| \leqslant \frac{1}{M_1} = \frac{1}{M}.$$

Definicja. Jeżeli l jest przestrzenią wektorjalną zamkniętą, wówczas zbiór L wszystkich funkcjonałów linjowych, spełniających warunek

$$f(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \subset l,$$

nazywamy zbiorem *regularnie zamkniętym*.

Definicja. Ciąg $\{f_n\}$ funkcjonałów linjowych *zdąża słabo* do funkcjonału f (piszemy wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$), jeżeli dla każdego x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Funkcjonał $f(x)$ nazywamy *słabą granicą* ciągu $\{f_n\}$ (mówimy często wprost zbieżny w sensie słabo zbieżnym).

Funkcjonał $f(x)$ jest funkcjonałem addytywnym Baire'a, jest zatem linjowy.

Na mocy twierdzenia 5 rozdziału VA, ciąg norm $\{|f_n|\}$ jest ograniczony.

Jeśli

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

wówczas

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)|,$$

zatem

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} |f_n|\,|x| \geqslant |f(x)|,$$

czyli

$$|f| \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} |f_n|.$$

Z tego, cośmy wyżej powiedzieli, wynika łatwo

Twierdzenie 3. *Na to, aby ciąg funkcjonałów linjowych $\{f_n(x)\}$ był słabo zbieżny do funkcjonału $f(x)$, konieczne jest i wystarcza, aby*

1) *ciąg $\{|f_n|\}$ był ograniczony,*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *dla elementów x pewnego zbioru wszędziegęstego (lub podstawowego).*

Twierdzenie 4. *Jeżeli zbiór E jest ośrodkowy, wówczas z każdego ciągu $\{f_n\}$ funkcjonałów, których normy są wspólnie ograniczone, da się wyrwać ciąg słabo zbieżny.*

Dowód. Wystarczy w tym celu z ciągu $\{f_n\}$ wyrwać ciąg częściowy, zbieżny w pewnym zbiorze przeliczalnym wszędziegęstym. Uczynić to można łatwo przy pomocy metody przekątni.

Twierdzenie 5. *Jeżeli E jest przestrzenią ośrodkową, wówczas każdy zbiór L funkcjonałów linjowych zawiera podzbiór przeliczalny R wszędziegęsty słabo w L (t. zn. dla każdego $f \subset L$ istnieje ciąg $\{f_n\} \subset R$ zdążający słabo do f).*

Dowód. Twierdzenie powyższe wystarczy udowodnić przy założeniu, że funkcjonały L mają normy wspólnie ograniczone. Każdy bowiem zbiór jest sumą przeliczalnej liczby zbiorów, mających powyższą własność. Niechaj $\{x_n\}$ będzie zbiorem wszędziegęstym w E.

Niechaj Z_n oznacza zbiór punktów przestrzeni n-wymiarowej o współrzędnych

$$(f(x_1),\quad f(x_2), \ldots, \quad f(x_n)) \text{ dla } f \subset L.$$

Istnieje oczywiście zbiór przeliczalny $K_n \subset L$ taki, że punkty

$$(f(x_1),\quad f(x_2), \ldots, \quad f(x_n)) \text{ dla } f \subset K_n,$$

tworzą zbiór wszędziegęsty w Z_n. Niechaj $R = \sum_{n=1}^{\infty} K_n$. R jest zbiorem przeliczalnym. Jeżeli $f \subset L$, wówczas istnieje ciąg $\{f_n\}$, spełniający warunki:

$$1)\ f_n \subset K_n, \qquad 2)\ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Ciąg $\{f_n\}$ zdąża więc słabo do f, gdyż normy funkcjonałów $\{f_n\}$, jako należących do L, są w myśl założenia wspólnie ograniczone.

Twierdzenie 6. *Jeżeli E jest przestrzenią ośrodkową, wówczas na to, by przestrzeń L wektorjalna funkcjonałów linjowych była słabozamknięta, konieczne jest i wystarcza, by granica każdego ciągu słabo zbieżnego funkcjonałów, należących do L, należała również do L.*

Dowód. Konieczność warunku jest oczywista. Pokażemy, że warunek jest wystarczający.

Niechaj $\{f_\xi\}$ $(1 < \xi \leqslant \vartheta)$ będzie ciągiem typu ϑ, przyczem niech

$$f_\xi \subset L, \qquad \|f_\xi\| \leqslant M \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta).$$

Niechaj $\{x_n\}$ będzie zbiorem wszędziegęstym w E.

Dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba ξ_n, spełniająca warunki

$$\liminf_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x_i) - \frac{1}{n} \leqslant f_{\xi_n}(x_i) \leqslant \limsup_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x_i) + \frac{1}{n} \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \quad (1)$$

Z ciągu $\{f_{\xi_n}\}$ wyrwać można ciąg częściowy słabo zbieżny do f, który oczywiście będzie funkcjonałem granicznym ciągu $\{f_\xi\}$ i w myśl założenia należeć będzie do L.

ROZDZIAŁ VIII B.

Funkcjonały linjowe w przestrzeniach *(B)*.

(Ciąg dalszy)

§ **1.** Przestrzeniami typu (B) ośrodkowemi są przestrzenie $(L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, (C), $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, (c).

W przestrzeniach $(L^{(p)})$, (C) wielomiany o spółczynnikach wymiernych tworzą zbiór przeliczalny wszędziegęsty.

W przestrzeniach $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ zbiór przeliczalny wszędziegęsty tworzą ciągi o wyrazach wymiernych, posiadające tylko skończoną liczbę wyrazów różnych od zera.

W przestrzeni (c) należy do poprzedniego zbioru dołączyć ciągi, z których każdy ma, począwszy od pewnego miejsca, wszystkie wyrazy równe jakiejś liczbie wymiernej.

§ **2.** *Słaba zbieżność funkcjonałów w niektórych przestrzeniach ośrodkowych.*

a) *Przestrzeń* $(L^{(p)})$ $(p > 1)$. Ponieważ każdy funkcjonał linjowy $f(x)$ określony w $(L^{(p)})$ jest kształtu

$$\int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt, \quad \text{gdzie} \quad \alpha(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}),$$

zatem ciąg funkcjonałów

$$\{f_n(x)\} \equiv \left\{\int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt\right\}, \text{ gdzie } \alpha_n(t) \subset (L^{\left(\frac{p}{p-1}\right)}),$$

zdąża słabo do funkcjonału

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$$

wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla każdego $x(t) \subset (L^{(p)})$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt.$$

Widzimy stąd, że słaba zbieżność funkcjonałów linjowych w $(L^{(p)})$ sprowadza się do słabej zbieżności elementów w $(L^{(\frac{p}{p-1})})$.

b) Analogiczne uwagi stosują się do słabej zbieżności w $(l^{(p)})$ $(p > 1)$.

c) *Przestrzeń* (L). W przestrzeni (L) każdy funkcjonał linjowy $f(x)$ jest postaci

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt, \quad \text{gdzie} \quad \alpha(t) \subset (M).$$

Ciąg funkcjonałów linjowych

$$\{f_n(x)\} \equiv \left\{ \int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt \right\}$$

zdąża zatem słabo do funkcjonału linjowego

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt,$$

jeżeli dla każdego $x(t) \subset (L)$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t)\,\alpha_n(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt. \tag{1}$$

Twierdzenie 7. *Na to, by związek* (1) *zachodził dla każdej funkcji* $x(t)$ *całkowalnej w* $<0,1>$, *konieczne jest i wystarcza:*

1) *by funkcje* $\{\alpha_n(t)\}$ *i* $\alpha(t)$ *były wspólnie ograniczone poza zbiorem miary zero,*

2) *by* $$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \alpha_n(u)\,du = \int_0^t \alpha(u)\,du \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

D o w ó d. Konieczność warunku 1) wynika z twierdzenia 3 rozdziału VIIIA; mamy bowiem

$$\|f_n\| = \text{istotny } \underset{0\leqslant t\leqslant 1}{\text{kres}} \text{ górny } |\alpha_n(t)|;$$

przyjmując zaś

$$x_t(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 \leqslant t < u \leqslant 1, \\ 1 & \quad \text{„} \quad\ 1 \geqslant t \geqslant u \geqslant 0, \end{cases}$$

mamy

$$\int_0^1 x_t(u)\,\alpha_n(u)\,du = \int_0^t \alpha_n(u)\,du.$$

Dostateczność warunków wynika z uwagi, że zbiór funkcyj

$$\{x_t(u)\} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

jest zbiorem pełnym w (L), gdyż

$$\int_0^1 x_t(u)\,\alpha(u)\,du = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

pociąga za sobą $\alpha(u) = 0$ prawie wszędzie.

d) Analogiczne warunki odnoszą się do przestrzeni (l).

Łatwo można udowodnić następujące twierdzenie:

Na to, aby dla każdego ciągu $\{\xi_i\} \subset (l)$ *zachodził związek*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ik}\,\xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\,\xi_i,$$

konieczne jest i wystarcza,

1) *by istniała liczba* $M > 0$, *spełniająca warunek*

$$|\alpha_{ik}| < M, \qquad |\alpha_i| < M \qquad (i, k = 1, 2, \ldots),$$

oraz

2) *by* $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{ik} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots).$

§ 3. a) Z każdego ciągu funkcyj $\{x_n(t)\} \subset (L^{(p)})$ $(p > 1)$, spełniających warunek

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p\, dt < M \qquad (M \text{ — niezależne od } n),$$

da się wyrwać ciąg słabo zbieżny do pewnej funkcji $x_0(t) \subset (L^{(p)})$; inn. słowy, istnieje taki ciąg wskaźników $\{n_i\}$ dążących do $+\infty$, że

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 x_{n_i}(t)\, y(t)\, dt = \int_0^1 x_0(t)\, y(t)\, dt \quad \text{dla} \quad y \subset (L^{(\frac{p}{p-1})}).$$

Dowód wynika z twierdzenia 4 rozdziału VIII A, i z uwagi, że elementy przestrzeni $(L^{(p)})$ $(p > 1)$ można uważać za reprezentanty funkcjonałów linjowych określonych w $(L^{(\frac{p}{p-1})})$ [1].

b) Z każdego ciągu funkcyj $x_n(t)$ wspólnie ograniczonych (poza zbiorem miary zero) da się wyrwać ciąg słabo zbieżny do pewnej funkcji $x_0(t)$ ograniczonej (poza zbiorem miary zero), t. zn. istnieje taki ciąg wskaźników $\{n_i\}$ dążących do $+\infty$, że

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^1 x_{n_i}(t)\, y(t)\, dt = \int_0^1 x_0(t)\, y(t)\, dt \quad \text{dla} \quad y \subset (L).$$

Dowód wynika znowu z twierdzenia 4 rozdziału VIII A, i uwagi, że funkcje ograniczone uważać możemy za reprezentanty funkcjonałów linjowych w (L).

---

[1]) Twierdzenie to udowodnił pierwszy p. F. Riesz. Zob. pracę cytowaną na str. 71 pod [1]) (p. 466 — 467).

Analogiczne twierdzenia i dowody występują w przestrzeniach $(l^{(p)})$ $(p > 1)$ i (m).

§ 4. Jeżeli przestrzeń funkcjonałów uważać będziemy za przestrzeń elementów typu (B), wówczas słaba zbieżność elementów tej przestrzeni może nie być równoważna słabej zbieżności funkcjonałów.

Przestrzeń np. (l) uważać możemy jako przestrzeń funkcjonałów linjowych określonych w (c_0) (t. j. przestrzeni ciągów zbieżnych do zera).

W przypadku tym ciąg $\{\xi_i^{(n)}\} \subset (l)$ dąży słabo do $\{\xi_i\} \subset (l)$, jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| < M \quad (\text{gdzie } M \text{ jest niezależne od } n).$$

Na str. 150 zaś udowodniliśmy, że jeżeli przestrzeń (l) uważamy jako przestrzeń elementów, wówczas na to, by ciąg $\{\xi_i^{(n)}\}$ zdążał słabo do $\{\xi_i\}$ konieczne jest i wystarcza, by

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i| = 0.$$

Widzimy więc, że pojęcie słabej zbieżności zależy od tego, czy elementy danej przestrzeni uważamy za reprezentanty funkcjonałów linjowych, czy nie.

§ 5. Jeżeli E jest przestrzenią typu (B), wówczas przestrzeń funkcjonałów linjowych określonych w E nazywamy przestrzenią *sprzężoną* do E. Przestrzeń sprzężoną z E oznaczać będziemy przez $\overline{E}$.

Oczywiście $\overline{E}$ jest również typu (B).

a) *Jeżeli przestrzenie E i E_1 typu (B) są izomorficzne (wzgl. równoważne), wówczas przestrzenie sprzężone $\overline{E}$ i $\overline{E}_1$ są izomorficzne (wzgl. równoważne).*

D o w ó d. Jeżeli bowiem istnieje operacja linjowa $y = U(x)$, odwzorowująca w sposób jedno - jednoznaczny i obustronnie ciągły E na E_1, wówczas każdemu funkcjonałowi linjowemu Y, określonemu w E_1, przypisać możemy funkcjonał linjowy

$$X(x) = Y U(x),$$

określony w E. Ponieważ operacja odwrotna $x = U^{-1}(y)$ jest linjowa, więc każdemu funkcjonałowi linjowemu X, określonemu w E, odpowiada funkcjonał

$$Y(y) = X U^{-1}(y),$$

określony w E_1. Zatem przestrzenie $\overline{E}_1$ i $\overline{E}$ są izomorficzne.

Gdyby pola E i E_1 były równoważne, wówczas dla odpowiednich funkcjonałów linjowych X oraz Y mielibyśmy $|X| = |Y|$, gdyż

$$|X| = \underset{|x| \leqslant 1}{\text{górny kres}}\ X(x) =$$

$$= \underset{|x| \leqslant 1}{\text{górny kres}}\ Y U(x) = \underset{|y| \leqslant 1}{\text{górny kres}}\ Y(y) = |Y|.$$

b) *Jeżeli przestrzeń E typu (B) jest ośrodkowa i jeżeli z każdego ciągu elementów $\{x_i\}$ o normach wspólnie ograniczonych da się wyrwać ciąg słabozbieżny do pewnego elementu x, wówczas przestrzeń E jest równoważna z przestrzenią sprzężoną do $\overline{\overline{E}}$.*

D o w ó d. Oznaczmy przez H zbiór funkcjonałów linjowych $F(X)$, określonych w $\overline{E}$, postaci

$$F(X) = X(x_0), \quad \text{dla każdego} \quad X \subset \overline{E},$$

gdzie x_0 jest pewnym elementem E zależnym tylko od F.

Mamy oczywiście $|F(X)| \leqslant |X| . |x_0|$, a zatem $|F| \leqslant |x_0|$.

Na mocy twierdzenia 3 rozdziału IVA istnieje taki funkcjonał $X_0 \subset \overline{E}$, iż

$$|X_0| = 1 \quad \text{i} \quad X_0(x_0) = |x_0|,$$

a zatem

$$F(X_0) = |x_0|, \quad \text{czyli} \quad |x_0| \leqslant |F|,$$

i wobec poprzedniego $|F| = |x_0|$.

Zbiór H jest zbiorem pełnym w $\overline{\overline{E}}$ ($\overline{\overline{E}}$ oznacza przestrzeń funkcjonałów linjowych określonych w $\overline{E}$). Jeżeli bowiem mamy, dla pewnego $X_0 \subset \overline{E}$,

$$F(X_0) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad F \subset H,$$

wówczas $X_0(x) = 0$ dla każdego $x \subset E$, a więc $X_0 = 0$.

Pokażemy teraz, że H jest zbiorem słabozamkniętym.

Niechaj ϑ będzie dowolną liczbą graniczną pozaskończoną, i niech $\{F_\xi\}$ $(1 \leqslant \xi < \vartheta)$ oznacza ciąg funkcjonałów zbioru H o normach wspólnie ograniczonych; istnieje zatem liczba $M > 0$ taka, że

$$|F_\xi| < M \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta).$$

Każdy funkcjonał F_ξ jest kształtu

$$F_\xi(x) = X(x_\xi) \qquad (1 \leqslant \xi \leqslant \vartheta).$$

Zbiór E jest ośrodkowy, istnieje zatem ciąg $\{x_i\}$ wszędziegęsty w E. Niechaj n oznacza liczbę naturalną dowolną. Oznaczmy przez $x_\xi^{(n)}$ dowolny element ciągu $\{x_i\}$, spełniający nierówność

$$|x_\xi^{(n)} - x_\xi| < \frac{1}{n} \qquad (1 \leqslant \xi < \vartheta). \tag{1}$$

Niechaj

$$F_\xi^{(n)}(X) = X(x_\xi^{(n)}) \quad \text{dla} \quad X \subset \overline{E}.$$

Przypuśćmy, że ϑ jest liczbą porządkową spółkońcową z ω. Istnieje zatem ciąg przeliczalny $\{\xi_i\}$ liczb porządkowych, mniejszych od ϑ i zdążających do ϑ. Z ciągu $\{x_{\xi_i}^{(n)}\}$ da się wyrwać ciąg słabozbieżny do pewnego elementu $x^{(n)}$.

Oczywiście mamy dla każdego X

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) \geqslant \overline{\lim_{i \to \infty}} F_{\xi_i}^{(n)}(X) = \overline{\lim_{i \to \infty}} X(x_{\xi_i}^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)})$$

i funkcjonał $F^{(n)}(X) = X(x^{(n)})$ jest przeto funkcjonałem granicznym ciągu $\{F_{\xi_n}^{(n)}\}$.

Jeżeli ϑ nie jest liczbą spółkońcową z ω, wówczas z uwagi, że ciąg $\{x_\xi^{(n)}\}$ zawiera tylko przeliczalną liczbę różnych elementów, wynika istnienie takiego elementu $x^{(n)}$, że do każdej liczby porządkowej $\eta < \vartheta$ istnieje liczba porządkowa $\xi < \eta$ i $\xi < \vartheta$, taka, że

$$x_\xi^{(n)} = x^{(n)}.$$

Oczywiście

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) = \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} X(x_\xi^{(n)}) \geqslant X(x^{(n)}) = F^{(n)}(X).$$

$F^{(n)}$ jest więc funkcjonałem granicznym ciągu $\{F_\xi^{(n)}\}$.

Z ciągu $\{x^{(n)}\}$ da się wyjąć ciąg słabozbieżny do pewnego elementu x_0. Niech $X(x_0) = F_0(x)$.

Oczywiście $F_0 \subset H$ oraz

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} F^{(n)}(x) \geqslant F_0(x). \tag{2}$$

Na mocy (1) mamy:

$$X(x_\xi) \geqslant X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n} |X|,$$

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi(x) = \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} X(x_\xi) \geqslant \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} X(x_\xi^{(n)}) - \frac{1}{n} |X| =$$

$$= \overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi^{(n)}(X) - \frac{1}{n} |X| \geqslant F^{(n)}(X) - \frac{1}{n} |X|.$$

A więc, na mocy (2),

$$\overline{\lim_{\xi \to \vartheta}} F_\xi(x) \geqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} F^{(n)}(X) \geqslant F_0(x).$$

Funkcjonał F_0 jest więc funkcjonałem granicznym ciągu $\{F_\xi\}$ i należy do zbioru H, który jest tedy zbiorem słabozamkniętym.

Ponieważ H jest jednak również zbiorem pełnym, więc na mocy twierdzenia 2 rozdziału VIII A zawiera wszystkie funkcjonały linjowe określone w $\overline{E}$.

Każdemu tedy funkcjonałowi F linjowemu określonemu w $\overline{E}$ odpowiada element x spełniający warunek

$$F(x) = X(x) \text{ dla } X \subset \overline{E},$$

$$|F| = |x|.$$

Jeżeli więc przyjmiemy

$$F = U(x),$$

to operacja $U(x)$ jest operacją linjową, odwzorowującą E na $\overline{\overline{E}}$ w sposób jedno-jednoznaczny, przyczem

$$|U(x)| = |x|.$$

Przestrzenie E i $\overline{\overline{E}}$ są zatem równoważne.

Uwaga. $(L^{(p)})$ i $(l^{(p)})$ $(p > 1)$ są przestrzeniami równoważnemi z przestrzeniami sprzężonemi do przestrzeni swoich funkcjonałów linjowych.

§ **6.** Własność A pewnej przestrzeni nazywamy *izomorficzną*, jeżeli każda przestrzeń izomorficzna z pewną przestrzenią, posiadającą własność A, posiada również własność A.

1. *Moc* zbioru jak i własność, że *zbiór jest ośrodkowy*, są własnościami izomorficznemi.

2. Własność: *z każdego ciągu elementów* $\{x_n\}$ *o normach ograniczonych da się wyjąć ciąg słabozbieżny*, jest własnością izomorficzną.

Własność powyższą mają $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p > 1)$; własności tej nie posiadają (L), (C), (l), (c).

3. Własność: *jeżeli dla pewnego ciągu* $\{x_n\}$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

istnieje dla każdego funkcjonału linjowego, wówczas istnieje element x_0, *do którego ciąg* $\{x_n\}$ *jest słabozbieżny*, jest własnością izomorficzną.

Powyższą własność posiadają $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$; (C) i (c) nie posiadają tej własności.

4. Własność: *jeżeli ciąg* $\{x_n\}$ *jest słabozbieżny do elementu* x_0, *wówczas jest mocnozbieżny* (*t. zn. wedle normy*) jest własnością izomorficzną.

Własność powyższą posiada przestrzeń (l), nie posiadają jej przestrzenie $(L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, $(l^{(p)})$ $(p > 1)$.

5. Własność: *przestrzeń posiada bazę* jest własnością izomorficzną.

Przestrzenie $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$, (C), (c) posiadają bazę.

6. Własność: *przestrzeń sprzężona jest ośrodkowa* jest własnością izomorficzną.

Własność powyższą posiadają przestrzenie $(L^{(p)})$, $(l^{(p)})$ $(p > 1)$, (c); nie posiadają tej własności przestrzenie (L), (l), (C).

7. Własność: *przestrzeń jest izomorficzna z przestrzenią sprzężoną* jest własnością izomorficzną.

Własność powyższą posiada przestrzeń $(L^{(2)})$ i $(l^{(2)})$, nie posiadają jej (c), (l), (L).