ROZDZIAŁ IX A.

Równania funkcjonalne linjowe.

§ 1. W rozdziale tym zajmiemy się równaniami typu

$$y = U(x),$$

gdzie operacja U jest linjowa, dziedzina x-ów tworzy przestrzeń E, przeciwdziedzina — przestrzeń E' [1]).

O przestrzeniach E i E' zakładamy, jak zwykle, że są typu (B).

Funkcjonały linjowe, określone w E oznaczać będziemy literą X, zaś określone w E' literą Y.

Jeżeli odwzorowanie określone przez operację linjową

$$y = U(x)$$

jest jedno-jednoznaczne, to oczywiście operacja odwrotna

$$x = U^{-1}(y)$$

jest addytywna. Łatwo widać, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by istniała operacja odwrotna, jest warunek

$$U(x) = \Theta \quad \text{pociąga za sobą} \quad x = \Theta.$$

[1]) Twierdzenia § 1 tego rozdziału znajdują się w pracy cytowanej na str. 26 pod [1]) (p. 234—238).

Jeżeli operacja odwrotna jest ciągła, wówczas istnieje $m>0$ takie, że

$$\| x \| \leqslant m \| y \| .$$

Jeżeli, odwrotnie, istnieje liczba $m > 0$ o tej własności, że

$$m \| x \| \leqslant \| U(x) \| ,$$

to istnieje operacja odwrotna ciągła.

Jeżeli operacja odwrotna jest ciągła, to przeciwdziedzina jest zamknięta.

Jeżeli bowiem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, to przyjmując $U(x_n) = y_n$, mamy

$$\lim_{p,q\to\infty} \| x_p - x_q \| \leqslant m \overline{\lim_{p,q\to\infty}} \| y_p - y_q \| = 0,$$

i przyjmując $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$,

mamy

$$U(x) = y.$$

Jeżeli Y_0 jest funkcjonałem granicznym ciągu $\{Y_\xi\}$ typu ϑ, wówczas funkcjonał $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ jest funkcjonałem granicznym ciągu $\{X_\xi\} = \{\overline{U}(Y_\xi)\}$ typu ϑ.

Jest to oczywiste, gdyż dla każdego x mamy

$$X_\xi(x) = Y_\xi[U(x)] \qquad (0 \leqslant \xi < \vartheta).$$

Lemmat. *Niechaj operacja $X = \overline{U}(Y)$ posiada odwrotność ciągłą. Jeżeli L' oznacza dowolną przestrzeń wektorjalną Y-ów, a $\overline{U}(L')$ odpowiedni zbiór X-ów, wówczas, jeżeli L' jest przestrzenią słabozamkniętą, to zbiór $\overline{U}(L')$ jest również słabozamknięty.*

D o w ó d. Z założenia wynika, że istnieje liczba $m > 0$ taka, że

$$\| \overline{U}(Y) \| \geqslant m \| Y \| \quad \text{dla każdego } Y.$$

Jeżeli więc dla $1 \leqslant \xi < \vartheta$ mamy

$$X_\xi \subset \overline{U}(L'), \quad \| X_\xi \| \leqslant K,$$

i jeżeli $X_\xi = \overline{U}(Y_\xi)$, wówczas dla $1 \leqslant \xi < \vartheta$ zachodzi

$$\| Y_\xi \| \leqslant \frac{1}{m} K, \qquad Y_\xi \subset L'.$$

Ciąg $\{Y_\xi\}$ posiada funkcjonał graniczny $Y_0 \subset L'$, gdyż zbiór L' jest słabozamknięty. Oczywiście $X_0 = \overline{U}(Y_0)$ należy do $\overline{U}(L')$ i jest funkcjonałem granicznym ciągu $\{X_\xi\}$.

Twierdzenie 1. 1. *Jeżeli operacja sprzężona $X = \overline{U}(Y)$ ma odwrotność ciągłą, wówczas równanie $y = U(x)$ ma dla każdego y rozwiązanie.*

2. *Jeżeli operacja $X = \overline{U}(Y)$ ma dla każdego X rozwiązanie, wówczas:*

a) *operacja $y = U(x)$ ma odwrotność ciągłą,*

b) *przeciwdziedzina jej jest zbiorem y-ów, spełniających warunek*

$$Y(y) = 0, \quad \text{jeżeli} \quad \overline{U}(Y) = 0.$$

D o w ó d. 1. Niechaj y_0 będzie dowolnym elementem zbioru E'. Niechaj L' będzie zbiorem wszystkich funkcjonałów linjowych Y, takich, że $Y(y_0) = 0$.

Oznaczmy przez L zbiór funkcjonałów

$$X = \overline{U}(Y) \quad \text{dla} \quad Y \subset L'.$$

Ponieważ L' jest zbiorem słabozamkniętym, więc na mocy lematu poprzedniego zbiór L jest również słabozamknięty. Zbiór L nie zawiera funkcjonału $X_0 = \overline{U}(Y_0)$, gdzie Y_0 jest funkcjonałem linjowym takim, że $Y_0(y_0) = 1$. Na mocy więc twierdzenia 2 rozdziału VIII A istnieje element x_0 taki, że:

$$X_0(x_0) = 1, \qquad X(x_0) = 0 \quad \text{jeżeli} \quad X \subset L.$$

Niech

$$y_1 = U(x_0).$$

Mamy

$$Y_0(y_1) = X_0(x_0) = 1, \qquad Y(y_1) = 0 \quad \text{jeżeli} \quad Y \subset L'.$$

Niechaj Y będzie dowolnym funkcjonałem linjowym i niech

$$Y' = Y - (Y(y_0)) \cdot Y_0.$$

Zatem

$$Y'(y_1) = 0, \quad \text{czyli} \quad Y(y_1) - Y(y_0) = 0, \quad \text{więc} \quad Y(y_1 - y_0) = 0.$$

Ponieważ Y jest dowolnym funkcjonałem linjowym, więc

$$y_1 - y_0 = 0, \quad \text{czyli} \quad y_0 = U(x_0).$$

2 a) Gdyby twierdzenie 2 a) było nieprawdziwe, to istniałby ciąg elementów $\{x_n\}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \| y_n \| = 0, \qquad y_n = U(x_n).$$

Niechaj X będzie dowolnym funkcjonałem, a Y funkcjonałem takim, że

$$X = \overline{U}(Y).$$

Mamy:

$$\lim_{n\to\infty} X(x_n) = \lim_{n\to\infty} Y(y_n) = 0.$$

Ponieważ X jest dowolnym funkcjonałem, przeto z ostatniej równości wynika, że ciąg $\{x_n\}$ ma normy ograniczone, co jest sprzeczne z założeniem.

2b) Niechaj element y_0 spełnia warunek

$$Y(y_0) = 0 \quad \text{jeżeli} \quad \overline{U}(Y) = 0. \tag{1}$$

Przeciwdziedzina G' operacji $U(x)$ jest zamknięta. Jeżeli zatem przypuścimy, że y_0 nie należy do G', wówczas na mocy twierdzenia 2 rozdz. IVA istnieje funkcjonał Y_0 taki, że

$$Y_0(y_0) = 1, \qquad Y_0(y) = 0 \quad \text{dla} \quad y \subset G'.$$

Jeżeli $X_0 = \overline{U}(Y_0)$, $y \subset G'$, $y = U(x)$, wówczas:

$$X_0(x) = Y_0(y) = 0, \quad \text{zatem} \quad \overline{U}(Y_0) = 0,$$

co na mocy (1) jest niemożliwe. Zatem

$$v_0 \subset G'.$$

Naodwrót, jeżeli

$$\overline{U}(Y) = X = 0,$$

wówczas dla $y \subset G'$

$$Y(y) = X(x) = 0.$$

Twierdzenie 2. 1. *Jeżeli operacja* $y = U(x)$ *ma odwrotność ciągłą, wówczas równanie* $X = \overline{U}(Y)$ *ma dla każdego* X *rozwiązanie.*

2. *Jeżeli operacja* $y = U(x)$ *ma dla każdego* y *rozwiązanie, wówczas:*

a) *operacja* $X = \overline{U}(Y)$ *ma odwrotność ciągłą,*

b) *przeciwdziedzina jej jest zbiorem* X*-ów, spełniających warunek* $X(x) = 0$, *jeżeli* $U(x) = 0$.

Dowód przeprowadza się analogicznie jak poprzedni; należy tylko litery $x, y, X, Y, U, \overline{U}$ zamienić odpowiednio na $Y, X, y, x, \overline{U}, U$.

Jeżeli w dowodzie użyto twierdzenia o elementach, należy obecnie oprzeć się na twierdzeniu analogicznem o funkcjonałach, i naodwrót.

Z twierdzeń 1, 2 wynikają łatwo twierdzenia:

Twierdzenie 3. *Jeżeli równanie* $y = U(x)$ *ma dla każdego* y *zawsze jedno jedyne rozwiązanie, wówczas równanie* $X = \overline{U}(Y)$ *ma dla każdego* X *także zawsze jedno jedyne rozwiązanie, i naodwrót.*

Twierdzenie 4. *Jeżeli operacje* $y = U(x)$ *i* $X = \overline{U}(Y)$ *mają odwrotności ciągłe, wówczas dla każdego* y *i* X *istnieje dokładnie jedno odpowiednio* x *oraz* Y *takie, że*

$$y = U(x), \qquad X = \overline{U}(Y).$$

Twierdzenie 5. *Jeżeli operacje* $y = U(x)$ *i* $X = \overline{U}(Y)$ *mają dla każdego* y *i* X *rozwiązanie, to dokładnie jedno.*

Twierdzenie 6. a) *Jeżeli przeciwdziedzina operacji linjowej* $U(x)$ *jest zamknięta, wówczas przeciwdziedzina operacji* $\overline{U}(Y)$ *jest zbiorem* X *spełniających warunek:* $X(x) = 0$, *skoro* $U(x) = 0$. b) *Jeżeli przeciwdziedzina operacji linjowej* $\overline{U}(Y)$ *jest zamknięta, to przeciwdziedzina operacji* $U(x)$ *jest zbiorem* y, *spełniających warunek:* $Y(y) = 0$, *skoro* $\overline{U}(Y) = 0$.

D o w ó d. Niech G oznacza pochodną przeciwdziedziny operacji $U(x)$; G jest przestrzenią typu (B). Oznaczmy przez Z dowolny funkcjonał linjowy określony w G, a przez $\overline{U}_1(Z)$ funkcjonał linjowy X spełniający równanie

$$Z\,U(x) = X(x) \quad \text{dla} \quad x \subset E.$$

Łatwo sprawdzamy, że przeciwdziedziny operacji $\overline{U}_1(Z)$, $\overline{U}(Y)$ są identyczne. Jeżeli bowiem Y jest funkcjonałem linjowym określonym w E_1 i takim, że

$$Z(y) = Y(y) \quad \text{dla} \quad y \subset G, \tag{1}$$

wówczas $Z\,U(x) = Y\,U(x)$ dla każdego x, a zatem

$$\overline{U}_1(Z) = \overline{U}(Y). \tag{2}$$

Jeżeli zaś Z jest funkcjonałem linjowym określonym w G, wówczas na mocy twierdzenia 2 rozdziału IVA istnieje w E_1 funkcjonał linjowy Y, spełniający warunek (1), a zatem i (2). Twierdzenie a) dostajemy z twierdzenia 2. Co do b), to zauważmy przedewszystkiem, że, gdy $\overline{U}_1(Z) = \Theta$, to $Z(y) = 0$ dla $y \subset G$, a zatem $Z = \Theta$. Ponieważ zbiory Z-ów i X-ów są przestrzeniami typu (B), więc na mocy twierdzenia 12 rozdziału IIIA operacja $X = \overline{U}_1(Z)$ ma odwrotność ciągłą. Zatem na mocy twierdzenia 1 równanie $y = U(x)$ ma dla każdego $y \subset G$ rozwiązanie i przeciwdziedzina operacji $U(x)$ jest temsamem zamknięta.

§ 2. Zajmiemy się teraz równaniami typu

$$y = x - U(x),$$

gdzie U jest operacją linjową pełnociągłą, której przeciwdziedzina mieści się w dziedzinie [1]).

Lemmat. *Jeżeli operacja $U(x)$ jest pełnociągła, wówczas operacja $T(x) \equiv x - U(x)$ przeprowadza zbiór zamknięty ograniczony w zbiór zamknięty.*

Dowód. Niechaj G będzie zbiorem ograniczonym. Przypuśćmy, że

$$x_n \subset G \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \lim_{n \to \infty} T(x_n) = y_0. \tag{1}$$

Ponieważ ciąg $\{U(x_n)\}$ jest zbiorem zwartym, zatem istnieje ciąg częściowy $\{U(x_{n_i})\}$ zbieżny do pewnego elementu x_0.

Ponieważ

$$U(x_{n_i}) = x_{n_i} - T(x_{n_i}),$$

zatem, na mocy (1), mamy

$$\lim_{i \to \infty} x_{n_i} = y_0 + x_0,$$

skąd

$$T(y_0 + x_0) = y_0.$$

Twierdzenie 7. *Jeżeli operacja linjowa $U(x)$ iest pełnociągła, wówczas przeciwdziedziny operacyj*

$$T(x) = x - U(x) \quad \text{i} \quad \overline{T}(X) = X - \overline{U}(X)$$

są zamknięte.

Dowód. Niechaj G oznacza zbiór rozwiązań równania

$$T(x) = 0.$$

---

[1]) Twierdzenia tego § z wyjątkiem tych, w których występuje pojęcie operacji sprzężonej, zostały dowiedzione po raz pierwszy przez p. F. Riesza. Zob.: F. Riesz, Uber lineare Funktionalgleichungen, Acta Math. 41 (1918) p. 71—98.

Przypuśćmy, że $y_0 \neq \Theta$ jest elementem skupienia przeciwdziedziny. Istnieje zatem ciąg elementów $\{x_n\}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y_0 .$$

Gdyby ciąg $\{|x_n|\}$ był ograniczony, wówczas, na mocy lemmatu powyżej dowiedzionego, element y_0 należałby do przeciwdziedziny. Oznaczmy przez d_n odległość elementu x_n od zbioru G. Istnieje zatem element $w_n \subset G$ taki, że

$$d_n \leqslant |x_n - w_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n . \tag{1}$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n - w_n) = y_0 . \tag{2}$$

Gdyby ciąg $\{|x_n - w_n|\}$ był ograniczony, wówczas w myśl lemmatu twierdzenie byłoby udowodnione.

Przyjmijmy więc, że

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - w_n| = +\infty .$$

Przyjmując

$$z_n = \frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|},$$

mamy na mocy (2)

$$\lim_{n\to\infty} T(z_n) = \Theta \quad \text{i} \quad |z_n| = 1.$$

Na mocy więc lemmatu z ciągu $\{z_n\}$ da się wyrwać ciąg $\{z_{k_i}\}$ zbieżny do elementu w_0, dla którego zachodzi

$$T(w_0) = 0,$$

a więc

$$w_0 \subset G.$$

Niech $z_n - w_0 = \varepsilon_n$. Mamy

$$\lim_{i\to\infty} |\varepsilon_{k_i}| = 0 . \tag{3}$$

Zatem

$$\frac{x_n - w_n}{|x_n - w_n|} - w_0 = \varepsilon_n,$$

czyli

$$x_n - w_n - w_0\,|x_n - w_n| = \varepsilon_n\,|x_n - w_n|.$$

Stąd, na mocy (1),

$$\left|\,x_{n_i} - w_{n_i} - w_0\,|x_{n_i} - w_{n_i}|\,\right| \leqslant |\varepsilon_{ni}| \cdot \left(1 + \frac{1}{n_i}\right) d_{n_i}. \tag{4}$$

Na mocy (3) i (4) istnieje takie n_i, że

$$\left|\,x_{n_i} - w_{n_i} - w_0\,|x_{n_i} - w_{n_i}|\,\right| \leqslant \frac{d_{n_i}}{2},$$

co jest niemożliwe, gdyż

$$w_{n_i} + w_0\,|x_{n_i} - w_{n_i}| \subset G,$$

zaś d_{n_i} jest odległością x_{n_i} od G. Stąd wynika bezpośrednio, że przeciwdziedzina operacji T jest również zamknięta.

Lemmat. *Jeżeli zbiór linjowy G_1 zamknięty jest częścią właściwą zbioru linjowego G, wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $x_0 \subset G$ takie, że*

$$|x_0| = 1, \qquad |x_0 - x| \geqslant 1 - \varepsilon \quad \textit{dla} \quad x \subset G.$$

D o w ó d. Niechaj $x' \subset G - G_1$. Jeżeli d oznacza odległość x' od G_1, a η dowolną liczbę dodatnią, wówczas istnieje element $y' \subset G_1$ taki, że

$$d \leqslant |x' - y'| \leqslant d + \eta.$$

Przyjmijmy

$$x_0 = \frac{x' - y'}{|x' - y'|}.$$

Jeżeli $y \subset G_1$, wówczas

$$|x_0 - y| = \frac{1}{|x' - y'|}\,\left|\,x' - y' - |x' - y'|\,.\,y\,\right|.$$

Ponieważ

$$y' + |x' - y'| y \subset G_1, \quad \text{gdyż} \quad y' \subset G_1 \quad \text{i} \quad y \subset G_1,$$

zatem

$$|x_0 - y| \geqslant \frac{1}{|x' - y'|} d \geqslant \frac{d}{d + \eta}.$$

Obierając odpowiednie $\eta > 0$, otrzymamy

$$|x_0 - y| \geqslant 1 - \varepsilon, \qquad y \subset G_1.$$

Oczywiście

$$|x_0| = \frac{|x' - y'|}{|x' - y'|} = 1,$$

$$x_0 \subset G, \quad \text{gdyż} \quad x' \subset G \quad \text{i} \quad y' \subset G_1 \subset G.$$

Twierdzenie 8. *Jeżeli $U(x)$ jest operacją linjową pełnociągłą, wówczas równania $x - U(x) = \Theta$, jakoteż $X - \overline{U}(X) = \Theta$ mają conajwyżej skończoną liczbę rozwiązań linjowo niezależnych.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że istnieje ciąg $\{x_n\}$ elementów linjowo niezależnych i spełniających równania

$$x_n - U(x_n) = \Theta \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Oznaczmy przez E_n zbiór elementów kształtu

$$\sum_{i=1}^{n} h_i x_i,$$

gdzie h_i są dowolnemi liczbami rzeczywistemi.

Oczywiście gdy $x \subset E_n$, wówczas

$$x - U(x) = \Theta.$$

Łatwo widać, że zbiór E_n jest zbiorem linjowym zamkniętym, nie zawierającym elementu x_{n+1}, zatem będącym częścią właściwą zbioru E_{n+1}. Na mocy lemmatu istnieje ciąg elementów $\{y_n\}$, spełniających związki

$$|y_n| = 1, \qquad y_n \subset E_n, \qquad |y_n - y| > \tfrac{1}{2} \quad \text{jeżeli} \quad y \subset E_{n-1}. \quad (1)$$

Lecz

$$y_n - U(y_n) = \Theta \quad \text{czyli} \quad y_n = U(y_n).$$

Ciąg $\{y_n\}$ powinien więc być zwartym, co się sprzeciwia nierówności (1).

Dowód dla równania $X - \overline{U}(X) = \Theta$ przedstawia się analogicznie; uważać możemy zbiór X-ów za przestrzeń typu (B).

Twierdzenie 9. *Jeżeli równanie $y = x - U(x)$, gdzie $U(x)$ jest operacją pełnociągłą, ma dla każdego y rozwiązanie, wówczas równanie $x - U(x) = \Theta$ nie ma rozwiązania po za $x = \Theta$.*

Dowód. Połóżmy

$$T^{(1)}(x) = x - U(x) = T(x), \qquad T^{(n)}(x) = T(T^{(n-1)}(x)).$$

Oznaczmy przez E_n zbiór x-ów, spełniających równanie

$$T^{(n)}(x) = \Theta.$$

Przypuśćmy, że istnieje element $x_1 \neq \Theta$ dla którego zachodzi

$$T(x_1) = \Theta.$$

Oznaczmy przez x_n element, spełniający równanie

$$x_{n-1} = T(x_n) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ponieważ

$$T^{(n)}(x_{n+1}) = x_1 \neq \Theta, \qquad T^{(n+1)}(x_{n+1}) = T(x_1) = \Theta,$$

więc

$$x_{n+1} \subset E - E_n, \qquad x_{n+1} \subset E_{n+1}.$$

Oczywiście E_n jest zbiorem zamkniętym linjowym, będącym częścią właściwą zbioru E_{n+1}.

Na mocy więc lemmatu, istnieje ciąg elementów $\{y_n\}$, spełniających związki

$$|y_n| = 1, \qquad y_n \subset E_n, \qquad |y_n - x| > \tfrac{1}{2} \ \text{dla} \ x \subset E_{n-1}. \qquad (1)$$

Mamy

$$T(y_n) = y_n - U(y_n),$$

zatem

$$U(y_p) - U(y_q) = y_p - [y_q + T(y_p) - T(y_q)] = y_p - x.$$

Jeżeli $p > q$, wówczas z uwagi, że $y_n \subset E_n$, wynika

$$T^{(p-1)}(x) = T^{(p-1)}(y_q) + T^{(p)}(y_p) - T^{(p)}(y_q) = \Theta,$$

zatem $x \subset E_{p-1}$, więc na mocy (1)

$$|y_p - x| > \tfrac{1}{2},$$

czyli

$$|U(y_p) - U(y_q)| > \tfrac{1}{2} \qquad (p > q),$$

co jest niemożliwe, gdyż z ciągu $\{U(y_n)\}$ da się wyrwać ciąg zbieżny.

Analogicznie otrzymujemy

Twierdzenie 10. *Jeżeli równanie $Y = X - \overline{U}(X)$ ($U(x)$ operacja pełnociągła) ma dla każdego Y rozwiązanie, wówczas równanie*

$$X - U(X) = \Theta$$

nie ma rozwiązania po za $X = \Theta$.

Dowód prowadzi się analogicznie, uważać możemy bowiem zbiór X-ów za przestrzeń typu (B).

Twierdzenie 11. *Jeżeli równanie $x - U(x) = \Theta$ ($U(x)$ operacja linjowa pełnociągła) ma jedyne rozwiązanie $x = \Theta$, wówczas równanie*

$$y = x - U(x)$$

ma dla każdego y rozwiązanie.

Dowód. Ponieważ przeciwdziedzina operacji $x - U(x)$ jest zamknięta, zatem na mocy twierdzenia 2 i założenia wynika, że równanie

$$Y = X - \overline{U}(X)$$

ma dla każdego Y rozwiązanie.

Na mocy więc twierdzenia 10, $X - U(X) = \Theta$ ma jedyne rozwiązanie $X = \Theta$. Na mocy więc twierdzenia 1, równanie

$$y = x - U(x)$$

ma dla każdego y rozwiązanie.

Analogicznie udowadnia się

Twierdzenie 12. *Jeżeli równanie $X - \overline{U}(X) = \Theta$ ($U(x)$ operacja pełnociągła) ma jedyne rozwiązanie $X = \Theta$, wówczas równanie*

$$Y = X - \overline{U}(X)$$

ma rozwiązanie dla każdego Y.

Twierdzenie 13. *Jeżeli $U(x)$ jest operacją pełnociągłą wówczas równania*

$$x - U(x) = \Theta \quad \text{i} \quad X - \overline{U}(X) = \Theta,$$

mają równą liczbę rozwiązań linjowo niezależnych.

Dowód [1]. Połóżmy

$$T(x) = x - U(x), \qquad \overline{T}(X) = X - \overline{U}(X).$$

Niechaj

$$T(x_i) = \Theta \quad (i = 1, 2, \ldots n), \qquad \overline{T}(X_i) = \Theta \quad (i = 1, 2, \ldots \nu), \tag{1}$$

przyczem zakładamy, że elementy $\{x_i\}$ względnie funkcjonały $\{X_i\}$ są linjowo niezależne, liczby zaś n i ν oznaczają największą liczbę rozwiązań linjowo niezależnych równania

$$T(x) = \Theta \quad \text{względnie} \quad \overline{T}(X) = \Theta.$$

Niechaj η_i $(1 \leqslant i \leqslant \nu)$ oznacza dowolny element, taki, że

$$X_i(\eta_i) = 1, \qquad X_j(\eta_i) = 0 \qquad \text{dla} \qquad j \neq i, \tag{2}$$

Istnienie takiego elementu jest widoczne, gdyż zbiór linjowy typu

---

[1]) W pewnych przypadkach specjalnych twierdzenie to udowodnił p. F. Riesz w pracy cytowanej na str. 190, p. 96—98. Dowód tego twierdzenia w tej ogólności przy innem jego sformułowaniu podał p. T. H. Hildebrandt; zob.: T. H. Hildebrandt, Über vollstetige lineare Transformationen, Acta Math. 51 (1928) p. 311—318. W sformułowaniu przez nas podanem twierdzenie to znajduje się w pracy p. J. Schaudera, cytowanej w uwagach do rozdziału VI A.

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j X_j + \sum_{j=i+1}^{\nu} \beta_j X_j$$

jest słabo zamknięty i nie zawiera X_i.

Analogicznie oznaczmy przez Z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ funkcjonał linjowy, taki, że

$$Z_i(x_i) = 1, \qquad Z_i(x_j) = 0 \qquad \text{dla} \qquad i \neq j. \tag{3}$$

Funkcjonał Z_i istnieje, gdyż x_i nie należy do zbioru linjowego zamkniętego kształtu

$$\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j x_j + \sum_{j=i+1}^{n} \beta_j x_j.$$

Przypuśćmy, że $\nu > n$. Połóżmy

$$R(x) = U(x) + \sum_{i=1}^{n} Z_i(x)\, \eta_i.$$

Jak łatwo widać, operacja $R(x)$ jest pełnociągła.

Zauważmy, że równanie

$$w(x) \equiv x - R(x) = \Theta$$

ma jedyne rozwiązanie $x = \Theta$. Przypuśćmy bowiem, że

$$W(x_0) \equiv x_0 - R(x_0) = T(x_0) - \sum_{i=1}^{n} Z_i(x_0)\, \eta_i = \Theta. \tag{4}$$

Zauważmy, że na mocy (1) mamy $(1 \leqslant i \leqslant \nu)$

$$X_i\, T(x) = \Theta \quad \text{dla każdego } x, \tag{5}$$

zatem na mocy (4) i (2) mamy

$$X_i\, W(x_0) = Z_i(x_0) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{6}$$

A więc $T(x_0) = \Theta$, skąd na mocy (1) i znaczenia liczby n

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i ;$$

α_i są odpowiednie liczby rzeczywiste.

Na mocy (6) i (3) mamy stale

$$Z_i(x_0) = \alpha_i = 0 \quad \text{a więc} \quad x_0 = \Theta .$$

Na mocy więc twierdzenia 11 równanie

$$x - R(x) \equiv T(x) - \sum_{i=1}^{n} Z_i(x)\,\eta_i = \eta_{n+1}$$

miałoby rozwiązanie, lecz jak łatwo widać na mocy (2) i (5) mamy

$$X_{n+1}(x - R(x)) = 0,$$

zaś na mocy (2)

$$X_{n+1}(\eta_{n+1}) = 1.$$

Zatem nie może zachodzić nierówność $\nu > n$.

Gdybyśmy przypuścili, że $\nu < n$, wówczas kładąc

$$R(x) = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(x)\,\eta_i,$$

mamy

$$\overline{R}(X) = \sum_{i=1}^{\nu} X(\eta_i)\,Z_i .$$

Postępując jak poprzednio, wykażemy, że równanie

$$\overline{T}(X) - \sum_{i=1}^{\nu} X(\eta_i) Z_i = \Theta,$$

sprzężone do równania $T(x) - \sum_{i=1}^{\nu} Z_i(x)\,\eta_i = \Theta$ ma jedyne rozwiązanie $X = \Theta$. Na mocy więc twierdzenia 12 równanie

$$\overline{T}(X) - \sum_{i=1}^{\nu} X(\eta_i)\, Z_i = Z_{\nu+1}$$

powinno mieć rozwiązanie, lecz to jest niemożliwe, gdyż

$$\overline{T}(X)\, x_{\nu+1} = X\, T(x_{\nu+1}) = 0 \quad \text{dla każdego } X,$$

$$Z_i(x_{\nu+1}) = 0 \quad \text{dla} \quad i \leqslant n \quad \text{zaś} \quad Z_{\nu+1}(x_{\nu+1}) = 1.$$

A więc $n = \nu$, o co chodziło.

§ 3. Załóżmy, że operacja linjowa $U(x)$ ma przeciwdziedzinę mieszczącą się w E. Wówczas dla każdego h rzeczywistego, operacja $x - h\,U(x)$ jest operacją linjową.

Sprzężona do niej ma kształt

$$X - h\,\overline{U}(X),$$

gdzie $\overline{U}$ jest sprzężoną do U. Zajmiemy się teraz badaniem równań

$$\left.\begin{aligned} x - h\,U(x) &= y, \qquad \text{(a)} \\ X - h\,\overline{U}(X) &= Y. \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Jeżeli dla pewnego h_0 równanie (a) ma dla każdego y jedno jedyne rozwiązanie, wówczas powiadamy, że h_0 jest wartością *regularną* równania (a), w przeciwnym wypadku h_0 nazywa się wartością *właściwą*. Zbiór wartości właściwych tworzy tak zwane *spektrum*.

Na mocy twierdzenia 3 wynika, że równania (a) i (b) mają ten sam zbiór wartości regularnych, zatem i właściwych.

Twierdzenia 1 — 6 łatwo czytelnik wypowie dla równań typu (I).

Twierdzenia powyższe pozwalają z zachowania się równania (a) wnioskować o równaniu (b) i naodwrót.

Twierdzenie 14. *Zbiór wartości regularnych jest zbiorem otwartym.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że h_0 jest wartością regularną. Istnieje zatem liczba $m > 0$ spełniająca związki

$$|x - h_0 U(x)| \geqslant m |x|,$$

$$|X - h_0 \overline{U}(X)| \geqslant m |X|,$$

Dla dowolnego ε mamy

$$|x - (h_0 + \varepsilon) U(x)| \geqslant |x - h_0 U(x)| - |\varepsilon| \, |U(x)| \geqslant (m - |\varepsilon| \, |U|) |x|,$$

analogicznie

$$|X - (h_0 + \varepsilon) \overline{U}(X)| \geqslant (m - |\varepsilon| \, |\overline{U}|) |X|.$$

Wynika stąd, że dla ε dość małych co do modułu, operacje

$$x - (h_0 + \varepsilon) U(x),$$

$$X - (h_0 + \varepsilon) \overline{U}(X)$$

mają odwrotność ciągłą, co na mocy twierdzenia 4 pociąga, że $h_0 + \varepsilon$ jest wartością regularną.

Twierdzenie 15. *Jeżeli* $|h| < \dfrac{1}{|U|}$, *wówczas* h *jest wartością regularną.*

D o w ó d [1]. Jeżeli $|h| < \dfrac{1}{|U|}$, wówczas rozwiązania możemy przedstawić w postaci

$$x = y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n)}(y), \qquad X = Y + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \overline{U}^{(n)}(Y) \tag{1}$$

$$[U^{(1)}(y) = U(y), \qquad U^{(n)}(y) = U\, U^{(n-1)}(y),$$

$$\overline{U}^{(1)}(Y) = \overline{U}(Y), \qquad \overline{U}^{(n)}(Y) = \overline{U}\, \overline{U}^{(n-1)}(Y)]$$

Szeregi powyższe są zbieżne, gdyż

---

[1]) Zob. pracę cytowaną na str. 38, p. 161, Théorème 7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} | h^n U^{(n)}(y) | \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \{ | h | . | U | \} \; | y |,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} | h^n \overline{U}^{(n)}(Y) | \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \{ | h | . | U | \}^n \, | Y |.$$

Z (1) wynika

$$U(x) = U(y) + \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n+1)}(y) = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} h^n U^{(n)}(y) = \frac{1}{h} [x - y],$$

zatem $x - h\,U(x) = y$, analogicznie $X - h\,\overline{U}(X) = Y$.

Ponieważ równania (I) mają dla każdego y i Y rozwiązania, zatem na mocy twierdzenia 5 jedyne, więc h jest wartością regularną.

Jeżeli x względnie X spełnia równania

$$\left.\begin{aligned} x + h\,U(x) &= \Theta, \\ \overline{X} + h\,U(X) &= \Theta, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

wówczas x względnie X nazywa się *elementem* wzgl. *funkcjonałem właściwym*.

Twierdzenie 16. *Jeżeli*

$$\left.\begin{aligned} x - h\,U(x) &= \Theta, \\ X - h'\,\overline{U}(X) &= \Theta, \end{aligned}\right\} \qquad (h \neq h')$$

wówczas $X(x) = 0$.

(Innemi słowy: Element właściwy wartości h jest ortogonalny do każdego funkcjonału właściwego wartości h', jeżeli $h \neq h'$).

D o w ó d. Mamy

$$X(x) = h\,X\,U(x) = h\,\overline{U}(X)\,x.$$

Ponieważ

$$\overline{U}(X) = \frac{1}{h'} X$$

zatem

$$X(x) = \frac{h}{h'} X(x).$$

Z uwagi na to, że $h \neq h'$, otrzymujemy

$$X(x) = 0.$$

§ 4. Jeżeli $U(x)$ jest operacją pełnociągłą, wówczas dla równań (II) można wypowiedzieć następujące twierdzenia, które są uogólnieniem twierdzeń Fredholma dla równań całkowych.

Twierdzenie 17. a) *Równania* (II) *mają tę samą skończoną liczbę $d(h)$ rozwiązań niezależnych;*

b) *Jeżeli $d(h) = 0$, wówczas h jest wartością regularną;*

c) *Jeżeli $d(h) > 0$, zaś*

$$\{x_i\}, \quad \{X_i\} \qquad (i = 1, 2, \ldots d(h))$$

są niezależnemi rozwiązaniami równań (II), *wówczas równanie* (Ia) *ma rozwiązanie dla każdego y, spełniającego warunki*

$$X_i(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots d(h)),$$

równanie zaś (Ib) *ma rozwiązanie dla każdego Y spełniającego warunki*

$$Y(x_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots d(h)).$$

Dowód. [1]) a) jest to inna wypowiedź twierdzenia 13,

b) wynika z twierdzenia 11 i z a),

c) wynika z twierdzenia 6 i twierdzenia 7.

Twierdzenie 18. *Jeżeli $U(x)$ jest operacją pełnociągłą, wówczas zbiór wartości właściwych równania* (Ia) *jest zbiorem izolowanym.*

Dowód [2]). Przypuśćmy, że

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h, \qquad (h_i \neq h_k \quad \text{dla} \quad i \neq k)$$

---

[1]) Zob. pracę p. J. Schaudera cytowaną w uwagach do rozdziału VI A.

[2]) Zob. pracę cytowaną na str. 190, p. 90, Satz 12.

i że h_n są wartościami właściwemi równania (Ia). Niechaj

$$x_n = h_n\, U(x_n), \qquad x_n \neq \Theta. \tag{1}$$

Zauważmy, że elementy x_n są linjowo niezależne.

Przypuśćmy bowiem, że elementy $x_1\ x_2 \ldots x_{n-1}$ są linjowo niezależne, zaś

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\, x_i ;$$

mamy

$$x_n = h_n\, U(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} h_n\, \alpha_i\, U(x_i),$$

zatem

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} h_n \frac{\alpha_i}{h_i}\, x_i ,$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{h_n}{h_i}\right) x_i = 0,$$

a ponieważ $\dfrac{h_n}{h_i} \neq 1$ $(n > i)$, zatem elementy x_i $(i = 1, 2, \ldots n-1)$ byłyby linjowo zależne.

Oznaczmy przez G_n zbiór linjowy elementów y kształtu

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i ;$$

oczywiście G_n jest zbiorem zamkniętym i jest częścią właściwą zbioru G_{n+1}. Jeżeli $y \subset G_n$ wówczas

$$y - h_n\, U(y) \subset G_{n-1} .$$

Mamy bowiem, na mocy (1),

$$y - h_n\, U(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i - \sum_{i=1}^{n} h_n\, \alpha_i \frac{x_i}{h_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(1 - \frac{h_n}{h_i}\right) x_i.$$

Na mocy lemmatu § 2, istnieje ciąg elementów $\{y_n\}$, spełniający związki

$$|y_n| = 1, \quad y_n \subset G_n, \quad |y_n - y| > \tfrac{1}{2} \text{ jeżeli } y \subset G_{n-1}. \tag{2}$$

Ponieważ $\{h_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, zatem ciąg

$$\{U(h_n y_n)\}$$

jest ciągiem zwartym. Lecz dla $p > q$ mamy

$$|U(h_p y_p) - U(h_q y_q)| = |y_p - (y_p - h_p U(y_p) + U(h_q y_q))|.$$

Ponieważ

$$y_p \subset G_p, \qquad y_p - h_p U(y_p) \subset G_{p-1}, \qquad h_q U(y_q) \subset G_q \subset G_{p-1},$$

zatem na mocy (2)

$$|U(h_p y_p) - U(h_q y_q)| > \tfrac{1}{2} \quad \text{dla} \quad p > q.$$

A więc ciąg $U(h_n y_n)$ nie jest ciągiem zwartym.

Wynika stąd, że wartości właściwe nie mają punktu skupienia w skończoności.

ROZDZIAŁ IX B.

Równania funkcjonalne linjowe.

(Ciąg dalszy).

§ 1. Do równań typu $x - h\,U(x) = y$ w przestrzeniach $(L^{(p)})$ sprowadzają się t. zw. równania całkowe Fredholma, kształtu

$$x(s) - h \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt = y(s), \tag{1}$$

gdzie $K(s,t)$ spełnia odpowiednie warunki.

Równanie

$$X - h\,\overline{U}(X) = Y$$

przedstawia się w postaci

$$X(t) - h \int_0^1 K(s,t)\, X(s)\, ds = Y(t). \tag{2}$$

Czytelnik z łatwością zinterpretuje twierdzenia rozdziału IX A w odpowiedni sposób dla równań całkowych.

Jeżeli $K(s\,t)$ spełniają odpowiednie warunki, wówczas operacja linjowa

$$\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

jest pełnociągłą i stosują się do równań (1), (2) twierdzenia § 2 i § 4 rozdziału IX A.

W szczególności twierdzenia 17 przyjmują postać t. zw. twierdzeń Fredholma.

Oczywiście twierdzenia te pozostają prawdziwe nietylko dla równań całkowych.

§ 2. Równania typu

$$x(s) - \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt = y(s), \tag{1}$$

gdzie $K(s, t)$ jest funkcją ciągłą, noszą nazwę równań Volterry.

Operacja

$$\int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt$$

jest pełnociągłą w przestrzeniach $(L^{(p)})$ $(p > 1)$ i (C).

Wykażemy, że równanie

$$x(s) - \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt = 0 \tag{2}$$

ma tylko jedno rozwiązanie $x(s) \equiv 0$.

Przypuśćmy, że $x(s)$ spełnia powyższe równanie.

Oczywiście $x(s)$ jest funkcją ciągłą. Niechaj

$$m = \max_{o \leqslant t \leqslant 1} |\, x(s) \,|, \qquad M = \max_{o \leqslant s,\, t \leqslant 1} |\, K(s, t) \,|.$$

Na mocy (2)

$$|\, x(s) \,| \leqslant M \int_0^s |\, x(t) \,|\, dt, \tag{3}$$

zatem

$$|\, x(s) \,| \leqslant M m s \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1).$$

Stąd na mocy (3), wstawiając Mms zamiast $x(t)$, otrzymamy

$$|\, x(s) \,| \leqslant M^2 m \frac{s^2}{2}.$$

Postępując tak dalej dostajemy

$$|x(s)| \leqslant \frac{(Ms)^n}{n} m \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Oczywiście więc $x(s) \equiv 0$.

Ponieważ równanie (2) ma tylko jedno rozwiązanie $x(s) \equiv 0$, a operacja

$$Y(s) = \int_0^s K(s, t)\, x(t)\, dt$$

jest pełnociągłą dla

$$x \subset (L^{(p)}),\ y \subset (L^{(p)}) \text{ oraz } x \subset (C),\ y \subset (C),$$

zatem równanie (1) ma dla każdego $y \subset (L^{(p)})$ rozwiązanie jedno jedyne $x \subset (L^{(p)})$.

§ 3. Jeżeli $y = U(x)$ jest operacją linjową dla $x \subset (L^{(2)})$, $y \subset (L^{(2)})$, wówczas operacja sprzężona

$$X = \overline{U}(Y)$$

uważaną być może za operację linjową dla $Y \subset (L^{(2)})$, $X \subset (L^{(2)})$.

Wynika to stąd, że wszelki funkcjonał linjowy w $(L^{(2)})$ jest kształtu

$$\int_0^1 Y(t)\, x(t)\, dt, \quad \text{gdzie} \quad Y(t) \subset (L^{(2)}).$$

Możemy zatem funkcję $Y(t)$ uważać za reprezentanta powyższego funkcjonału.

Jeżeli

$$\int_0^1 y\, U(x) = \int_0^1 x\, U(y) \quad \text{dla } x \subset (L^{(2)}),\quad y \subset (L^{(2)}), \tag{1}$$

wówczas operację linjową $U(x)$ nazywamy *symetryczną*.

Ponieważ

$$\int_0^1 y\, U(x) = \int_0^1 x\, \overline{U}(y),$$

zatem operacja symetryczna równa jest swojej sprzężonej.

Jeżeli $K(s, t)$ jest funkcją symetryczną [t. zn. $K(s, t) = K(t, s)$] i ponadto

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, y(s)\, ds\, dt$$

istnieje dla każdego $x \subset (L^{(2)})$ i $y \subset (L^{(2)})$, wówczas operacje

$$U(x) = \int_0^1 K(s\, t)\, x(t)\, dt = y(s),$$

$$V(x) = x(s) - h \int_0^1 K(s\, t)\, x(t)\, dt = y(s), \tag{2}$$

są operacjami linjowemi symetrycznemi, gdyż spełniają warunek (1).

Równania typu (2) noszą nazwę *równań całkowych symetrycznych.*

Jeżeli $U(x)$ jest operacją symetryczną, wówczas do równań typu

$$x - h\, U(x) = y \qquad \text{(I)}$$

odnoszą się następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Wartość parametru h jest regularną jeżeli, albo równanie* (I) *ma odwrotność ciągłą, albo jeżeli równanie* (I) *ma dla każdego y rozwiązanie.*

Dowód wynika z uwagi, że równanie sprzężone jest identyczne z danem.

Twierdzenie 2. *Równanie* (I) *posiada zawsze przynajmniej jedną wartość właściwą. Najmniejszą wartością właściwą jest jedna z liczb:*

$$\frac{1}{\| U \|}, \qquad -\frac{1}{\| U \|}.$$

($\| U \|$, jak łatwo widać, jest najmniejszą liczbą, spełniającą nierówność

$$\int_0^1 U^2(x) \leqslant \| U \|^2 \int_0^1 x^2 \quad \text{dla każdego} \quad x \subset (L^{(2)})).$$

Dowód opiera się na następującej uwadze.
Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n y_n = 1, \qquad \int_0^1 x_n^2 \leqslant 1, \qquad \int_0^1 y_n^2 \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x_n - y_n)^2 = 0.$$

Mamy bowiem

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x_n - y_n)^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n^2 + \lim_{n\to\infty} \int_0^1 y_n^2 - 2 \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n y_n \leqslant 0.$$

Niechaj k^2 oznacza najmniejszą liczbę, spełniającą nierówność

$$\int_0^1 [U(x)]^2 \, dt \leqslant k^2 \int_0^1 x^2, \tag{3}$$

to znaczy

$$k^2 = \| U \|^2.$$

Istnieje zatem, taki ciąg $\{x_n\}$, że

$$\int_0^1 x_n^2(t) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 [U(x_n)]^2 = k^2. \tag{4}$$

Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{k^2}[U(x_n)]^2 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{k^2} U(x_n)\, U(x_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n \left[\frac{1}{k^2} U\,U(x_n)\right] = 1. \tag{5}$$

Ponieważ, na mocy (3) i (4),

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{k^2} U\,U(x_n)\right]^2 \leqslant \frac{1}{k^4} k^2 \int_0^1 U^2(x_n) \leqslant \frac{1}{k^4} k^2 . k^2 \int_0^1 x_n^2 = 1,$$

zatem, na mocy uwagi uczynionej poprzednio, mamy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left[x_n - \frac{1}{k^2} UU(x_n)\right]^2 = 0, \tag{6}$$

skąd, kładąc

$$x_n - \frac{1}{k} U(x_n) = y_n, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (y_n + \frac{1}{k} U(y_n))^2 = 0. \tag{8}$$

Wynika stąd, że albo $h = \frac{1}{k}$, albo $h = -\frac{1}{k}$ jest wartością właściwą. Przypuśćmy bowiem, że $h = -\frac{1}{k}$ i $h = \frac{1}{k}$ są wartościami regularnemi. Wówczas równanie (I) posiada odwrotność ciągłą dla $h = \pm\frac{1}{k}$. Zatem istnieje liczba $M > 0$, taka, że

$$\| x \pm \frac{1}{k} U(x) \|^2 \geqslant M^2 \| x \|^2 = M^2 \int_0^1 x^2.$$

Stąd, na mocy (7), $\int_0^1 y_n^2 \geqslant M^2$, a więc

$$\int_0^1 \left(y_n + \frac{1}{k} U(y_n)\right)^2 \geqslant M^2 \int_0^1 y_n^2 \geqslant M^4,$$

to zaś sprzeciwia się (8).

Na mocy twierdzenia 15 rozdziału IX widzimy, że jeżeli

$$|h| < \frac{1}{\|U\|},$$

wówczas h jest wartością regularną.

Przypuśćmy, że h_0 jest wartością właściwą i że

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (x_n - h_0 U(x_n))^2 = 0, \qquad \int_0^1 x_n^2 = 1. \tag{1}$$

Kładąc $y_n = x_n - h_0 U(x_n)$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \int y_n^2 = 0, \tag{2}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n U(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 [y_n + h_0 U(x_n)]\, U(x_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^1 y_n U(x_n) + h_0 \int_0^1 (U(x_n))^2 \right]. \tag{3}$$

Na mocy (2),

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 y_n U(x_n) = 0,$$

na mocy (1),

$$\lim_{n\to\infty} h_0^2 \int_0^1 [U(x_n)]^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n^2 = 1,$$

stąd na mocy (3)

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n U(x_n) = \frac{1}{h_0}. \tag{4}$$

Zauważmy, że jeżeli $\int x^2 = 1$, to

$$\left| \int_0^1 x U(x) \right| \leqslant \sqrt{\int x^2} \,.\, \| U \| \sqrt{\int x^2} = \| U \| .$$

Stąd, na mocy (4), widzimy, że:

Górny kres wyrażenia

$$\left| \int_0^1 x U(x) \right|, \quad \left(\int x^2 \leqslant 1 \right)$$

jest równy bezwzględnej wartości najmniejszej co do modułu wartości właściwej.