ROZDZIAŁ X.

Przestrzenie typu *(G)*.

§ 1. Niechaj E będzie przestrzenią (D) zupełną.

Przypuśćmy, że każdej uporządkowanej parze elementów x, y przestrzeni E przypisany jest jednoznacznie element z tej przestrzeni; oznaczmy go przez xy, nazywając iloczynem elementów x, y.

Załóżmy, że E jest grupą ze względu na powyższy iloczyn, t. zn.:

I_1. $(xy)z = x(yz)$;

I_2. Istnieje element jednostkowy 1, taki, że

$$1 . x = x . 1 = x \quad \text{dla każdego } x;$$

I_3. Każdemu elementowi x odpowiada element odwrotny x^{-1}, spełniający równanie

$$x . x^{-1} = 1.$$

Z aksjomatów, powyższych wynika łatwo, że:

a) Istnieje dokładnie jeden element jednostkowy;

b) Elementem odwrotnym względem x^{-1} jest x;

c) $xy = xz$ pociąga za sobą $y = z$.

Załóżmy ponadto, że spełnione są aksjomaty następujące:

II_1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

pociągają za sobą

$$\lim_{n \to \infty} x_n y_n = x y;$$

II_2. $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$ pociąga $\lim\limits_{n \to \infty} y_n^{-1} = y^{-1}$.

Przestrzenie, spełniające powyższe aksjomaty, nazywać będziemy *przestrzeniami typu* (G).

Przypuśćmy, że E jest przestrzenią typu (G).

Jeżeli $x \subset E$, a H jest zbiorem zawartym w E, wówczas przez

$$x H \quad (\text{wzgl. } H x)$$

oznaczać będziemy zbiór wszystkich elementów y kształtu

$$y = x z, \qquad z \subset H \qquad (\text{wzgl. } y = z x, \ z \subset H).$$

Oczywiście, że stale

$$x (H_1 + H_2) \equiv x H_1 + x H_2,$$

$$x (H_1 - H_2) \equiv x H_1 - x H_2 \quad \text{dla} \quad H_2 \subset H_1,$$

$$x (H_1 \,.\, H_2) \equiv (x H_1) \,.\, (x H_2).$$

Łatwo można pokazać, że jeżeli H jest zbiorem zamkniętym (wzgl. otwartym, nigdziegęstym, pierwszej lub drugiej kategorji, mierzalnym (B)), wówczas zbiór $x H$ jest również zamknięty (wzgl. otwarty, nigdziegęsty i t. d.).

Jeżeli y jest punktem wewnętrznym zbioru H, wówczas $x y$ jest punktem wewnętrznym zbioru $x H$.

Zbiór niepusty $H \subset E$ nazywa się *podgrupą*, jeżeli warunki $x \subset H$ i $y \subset H$ pociągają $x y \subset H$ i $x^{-1} \subset H$.

Oczywiście, że wówczas $1 \subset H$.

§ 2. Przypuśćmy, że E i E_1 są przestrzeniami typu (G).

Operacja $U(x)$, określona w E, której przeciwdziedzina mieści się w E_1, nazywa się *multyplikatywną*, jeżeli

$$U(x y) = U(x) \,.\, U(y).$$

Mamy $U(x) = U(x \,.\, 1) = U(x) \,.\, U(1)$, a zatem $U(1) = 1$.

Mamy również

$$1 = U(1) = U(x\,.\,x^{-1}) = U(x)\,.\,U(x^{-1}),$$

i tem samem

$$U(x^{-1}) = \{U(x)\}^{-1}.$$

Operacja multyplikatywna ciągła nosi nazwę *potęgowej.*

Twierdzenie 1. *Jeżeli operacja $y = U(x)$ multyplikatywna jest ciągła w jednym punkcie, wówczas jest potęgową.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że x_0 jest punktem ciągłości operacji $y = U(x)$. Niechaj $x \subset E$.

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, wówczas

$$\lim_{n\to\infty} x_n x^{-1} x_0 = x_0$$

i tem samem

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n x^{-1} x_0) = U(x_0).$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} [U(x_n)\, U(x^{-1})\, U(x_0)] = U(x_0),$$

czyli

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n)\, U(x^{-1}) = 1,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n)\, U(x^{-1})\, U(x) = U(x).$$

Ponieważ

$$U(x^{-1})\, U(x) = U(1) = 1,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(x).$$

Twierdzenie 2. *Operacja multyplikatywna mierzalna (B) jest potęgową.*

D o w ó d. Na mocy twierdzenia 4 rozdziału I, operacja $U(x)$ jest ciągłą w zbiorze H, przyczem $E - H$ jest zbiorem pierwszej kategorji. Przypuśćmy, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Zbiór $x_n H$ jest zbiorem drugiej kategorji, przyczem

$$E - x_n H \equiv x_n (E - H)$$

jest zbiorem pierwszej kategorji. Zatem zbiór

$$(E-H) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n (E-H)$$

nie wyczerpuje przestrzeni E.

Oczywiście mamy

$$E - H \prod_{n=1}^{\infty} (x_n H) \subset E - H + \sum_{n=1}^{\infty} (E - x_n H);$$

Istnieje zatem punkt x', taki, że

$$x' \subset H, \qquad x' \subset x_n H \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

a więc stale

$$x_n^{-1} x' \subset H.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} x_n^{-1} x' = x'.$$

zatem

$$\lim_{n \to \infty} U(x_n^{-1} x') = U(x'),$$

skąd

$$\lim_{n \to \infty} U(x_n^{-1}) U(x') = U(x'),$$

i tem samem

$$\lim_{n \to \infty} U(x_n^{-1}) = 1,$$

czyli

$$\lim_{n \to \infty} U(x_n) = 1.$$

A więc punkt 1 jest punktem ciągłości, zatem operacja $U(x)$ jest ciągłą.

§ 3. W ustępie tym zakładać będziemy, że E jest przestrzenią typu (G) spójną t. zn., że E nie jest sumą dwóch zbiorów zamkniętych rozłącznych.

Przestrzenie typu (G) spójne nazywać będziemy przestrzeniami *typu* (G^*).

Jeżeli $H \subset E$ jest równocześnie zbiorem otwartym i zamkniętym, wówczas $H \equiv E$. W tym wypadku bowiem $E - H$ jest również zbiorem zamkniętym.

Twierdzenie 3. *Jeżeli podgrupa* $L \subset E$ *mierzalna* (B) *jest drugiej kategorji, wówczas* $L \equiv E$.

Dowód. Wobec założenia, istnieje kula otwarta K (której środek $y_0 \subset L$, jak oczywiście możemy przyjąć), w której L jest wszędzie drugiej kategorji. Ponieważ L jest zbiorem mierzalnym (B), więc $K - KL$ jest zbiorem pierwszej kategorji.

Weźmy pod uwagę zbiór $y_0^{-1} K$.

Ponieważ y_0 jest punktem zbioru K, zatem punkt $y_0^{-1} . y_0 = 1$ jest punktem zbioru $y_0^{-1} K$.

Istnieje zatem kula otwarta K_1 o środku 1, należąca do zbioru $y_0^{-1} K$.

Mamy widocznie

$$y_0^{-1} L \equiv L,$$

$$y_0^{-1} [K - KL] = (y_0^{-1} K) - (y_0^{-1} K) . L \supset K_1 - K_1 L .$$

Ponieważ $K - KL$ jest zbiorem pierwszej kategorji, więc zbiór

$$K_1 - K_1 L \text{ jest zbiorem pierwszej kategorji.} \tag{1}$$

Wykażemy, że kula K_1 należy do L.

Niechaj x będzie punktem kuli K_1.

Oczywiście punkt $x . 1 = x$ będzie punktem zbioru $x K_1$, gdyż 1 jest środkiem kuli K_1.

Ponieważ zbiory otwarte K_1 i $x K_1$ mają punkt x wspólny, zatem istnieje kula otwarta K_2 (o środku x), taka, że

$$K_2 \subset (x K_1) . K_1 \tag{2}$$

Na mocy (1) i (2) zbiór

$$K_2 - K_2 L \text{ jest zbiorem pierwszej kategorji.} \tag{3}$$

Ponieważ $x^{-1} K_2 \subset K_2 \subset K_1$ (na mocy (2), więc na mocy (1)

$$(x^{-1} K_2) - (x^{-1} K_2) L \text{ jest pierwszej kategorji.} \tag{4}$$

A więc zbiór

$$x[(x^{-1} K_2) - (x^{-1} K_2) L] \equiv K_2 - K_2 (x L) \tag{5}$$

jest zbiorem pierwszej kategorji.

Na mocy (3) i (5) iloczyn

$$[K_2 . (x L)] . [K_2 L]$$

nie jest pusty.

Istnieje zatem punkt $y \subset L$ taki, że $x y \subset L$.

A więc punkt

$$(x y) y^{-1} = x \subset L.$$

Wykazaliśmy więc, że 1 jest punktem wewnętrznym zbioru L. Ponieważ $y L \equiv L$ jeżeli $y \subset L$, więc punkt $y = y . 1$ jest punktem wewnętrznym zbioru L.

Zbiór L jest więc otwarty.

Przypuśćmy teraz, że stale

$$y_n \subset L \quad \text{i} \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to \infty} y y_n^{-1} = y\, y^{-1} = 1,$$

więc istnieje takie n, że $y y_n^{-1} \subset L$.

Z uwagi na to, że $y_n \subset L$ otrzymujemy

$$y = (y y_n^{-1}) y_n \subset L.$$

Zbiór L jest więc równocześnie zbiorem zamkniętym i otwartym, więc $L \equiv E$.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $\{U_n(x)\}$ jest ciągiem operacyj potęgowych, wówczas zbiór x-ów, dla których*

$$\lim_{n \to \infty} U_n(x) \textit{ istnieje,}$$

jest zbiorem pierwszej kategorji albo zbiorem E.

Twierdzenie 5. *Niechaj* $\{U_{pq}(x)\}$ *będzie ciągiem podwójnym operacyj potęgowych. Jeżeli istnieje ciąg* $\{x_p\}$ *taki, że*

$$\lim_{q\to\infty} U_{pq}(x_p) \quad \textit{nie istnieje dla} \quad p = 1, 2, \ldots,$$

wówczas istnieje element x' (*niezależny od* p), *dla którego*

$$\lim_{q\to\infty} U_{pq}(x') \ \textit{nie istnieje} \ (p = 1, 2, \ldots).$$

Dowody powyższych twierdzeń są analogiczne do dowodów odpowiednich twierdzeń rozdziału III A (twierdzenia 7 i 8).