U W A G I.

Rozdział I.

§§ 2, 5, 7. Twierdzenia 1, 3, 4 i 5 zostały ogłoszone w pracy: S. Banach, Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fund. Math. XVI (1930) p. 395 — 398. W przypadku, gdy przestrzeń E jest ośrodkową, twierdzenia te były znane już dawniej.

Twierdzenie 3 można uogólnić, okazując, że każdy zbiór (A) spełnia warunek Baire'a; dowód można prowadzić jak w przypadku przestrzeni euklidesowych, uwzględniając twierdzenie 1. Zob.: O. Nikodym, Sur une proprieté de l'opération A, Fund. Math. VII (1925) p. 149—154 oraz E. Szpilrajn, O mierzalności i warunku Baire'a, C. R. du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa, 1929, p. 297—303.

Rozdział II.

§ 2. Przy pomocy pewnika wyboru łatwo wynika, że w każdej przestrzeni wektorjalnej istnieje funkcjonał addytywny, jednorodny i nieznikający identycznie. Przestrzenie wektorjalne nazywamy również *linjowemi.*

Rozdział III A.

§ 1. Według twierdzenia, które udowodnił p. S. Mazur, w każdej przestrzeni typu (F) spełniony jest warunek: Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ (h_n — liczby), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \Theta$ $(x_n \subset E)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} h_n x_n = \Theta$.

§ 2. Twierdzenie 2 można uogólnić następująco: Przestrzeń wektorjalna $L \subset E$, spełniająca warunek Baire'a oraz drugiej kategorji, jest identyczna z E. Dowód jak w tekście bez zmian.

Załóżmy, że E jest przestrzenią (F) o nieskończonej liczbie wymiarów. Nie wiadomo jest, czy istnieją przestrzenie wektorjalne $L \subset E$, mierzalne (B) lecz dowolnie wysokiej klasy przy klasyfikacji Borela (będące zbiorami (A) lecz niemierzalne (B), spełniające warunek Baire'a lecz nie będące zbiorami (A)).

Wiadomo tylko, że w każdej przestrzeni E typu (B) istnieje przestrzeń wektorjalna $L \subset E$, będąca iloczynem pewnego zbioru F_σ i pewnego zbioru G_δ, lecz nie stanowiąca przytem zbioru F_σ; przestrzeń taka jest tedy jednocześnie zbiorem $F_{\sigma\delta}$ oraz $G_{\delta\sigma}$, nie będąc ani F_σ ani G_δ. Jeżeli przestrzeń wektorjalna L jest zawarta w jakiejś przestrzeni E typu (F) i jest G_δ, wówczas jest zamkniętą. Rezultaty te będą ogłoszone w pracy pp. S. Mazura i L. Sternbacha w IV tomie czasopisma Studia Mathematica.

Zauważmy jeszcze, że można skonstruować przestrzeń wektorjalną zawartą w (C), która jest zbiorem $F_{\sigma\delta\sigma}$, nie będąc zbiorem $F_{\sigma\delta}$.

§ 3. Przy dodatkowem założeniu, że przestrzeń E jest ośrodkową, twierdzenie 10 stanowi bezpośredni wniosek z twierdzenia p. F. Hausdorffa, wedle którego, obraz ciągły części mierzalnej (B) przestrzeni metrycznej zupełnej ośrodkowej jest zbiorem (A) (Zob.: F. Hausdorff, Mengenlehre, 1927, p. 269); wystarczy uwzględnić uwagi do twierdzenia 3 rozdziału I oraz twierdzenia 2 bieżącego rozdziału.

Zauważmy pozatem, że, według supozycji p. S. Mazura, zarówno twierdzenie 10 jak i wszystkie następne tego rozdziału, zachowują ważność w przypadku każdej przestrzeni wektorjalnej, metrycznej i zupełnej E, spełniającej warunek: Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = k$ (h_n, h, k_n, k — liczby) oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ $(x_n, x, y_n, y \subset E)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (h_n x_n + k_n y_n) = hx + ky$.

Prosty dowód twierdzenia 12 dla przypadku przestrzeni typu (B) zawiera praca: J. Schauder, Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen, Stud. Math. II (1930) p. 1—6.

Z twierdzenia 6 wynika oczywiście, że gdy G jest przestrzenią wektorjalną zamkniętą zawartą w E, to każda operacja addytywna oraz mierzalna (B), określona w G, o wartościach należących do E^*, jest linjową. Istnieją funkcjonały addytywne mierzalne (B) nieciągłe, jednak określone w zbiorach wektorjalnych niezamkniętych mierzalnych (B).

Niewiadomo jednak, czy w przypadku gdy zbiór wektorjalny nie jest zamknięty, mogą istnieć w niem operacje addytywne dowolnie wysokiej klasy przy klasyfikacji Baire'a.

Gdy operacja linjowa $U(x)$ odwzorowuje E na część Z przestrzeni E^* wzajemnie jednoznacznie, to operacja odwrotna $U^{-1}(y)$ jest linjową o ile tylko zbiór Z jest zamknięty; wynika to z twierdzenia 12. W przypadku gdy zbiór Z nie jest zamknięty, operacja $U^{-1}(y)$ nie jest linjową; o ile jednak przestrzeń E jest ośrodkowa, to operacja ta jest mierzalną (B). W przypadku n. p., gdy każda z przestrzeni E, E^* jest przestrzenią $(L^{(2)})$, operacja $U^{-1}(y)$ jest pierwszej klasy przy klasyfikacji Baire'a.

Rozdział III B.

§ 1. Opierając się na wyniku tego §, można okazać, że gdy operacja linjowa $U(x)$ odwzorowuje przestrzeń ośrodkową typu (F) na część jakiejś przestrzeni typu (F), to przeciwdziedzina jej jest zbiorem mierzalnym (B); wystarczy skorzystać z twierdzenia p. F. Hausdorffa, na mocy którego obraz ciągły i jedno-jednoznaczny części mierzalnej (B) przestrzeni metrycznej zupełnej ośrodkowej jest zbiorem mierzalnym (B). Por. uwagę do twierdzenia 10 rozdziału III A.

§ 2. Zob.: S. Banach. Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Stud. Math. III (1931); L. Auerbach und S. Banach, Über die Hölder'sche Bedingung, Stud. Math. III (1931) oraz S. Mazurkiewicz, Sur les fonctions non dérivables, Stud. Math. III (1931).

§ 7. Gdy $p, q \geqslant 1$, to przestrzenie $(l^{(p)})$, $(l^{(q)})$ a podobnie $(L^{(p)})$, $(L^{(q)})$ nie są równoważne, o ile tylko $p \neq q$; przestrzenie $(l^{(p)})$, $(L^{(q)})$ są równoważne jedynie w tym przypadku, gdy $p = q = 2$.

Według uwagi p. S. Mazura, przy dowolnych $p, q \geqslant 1$ przestrzenie $(l^{(p)})$, $(L^{(q)})$, są homeomorficzne; zob.: S. Mazur, Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels, Stud. Math. I (1929) p. 83—85.

Zagadnienie kiedy dwie przestrzenie rozpatrywanej tu klasy są izomorficzne (względnie izometryczne), nie jest rozwiązane; w każdym razie przestrzenie n. p. (l), $(l^{(p)})$ przy $p > 1$ nie są izomorficzne.

Ciekawym przykładem dwóch przestrzeni typu (F), izomorficznych lecz nierównoważnych, są przestrzenie (C) oraz (C') (zob. § 2 tego rozdziału). Przestrzenie te są izomorficzne, jak to okazał p. K. Borsuk, to zaś, że nie są one równoważne wynika z następującego ogólnego twierdzenia. Gdy E jest dowolną przestrzenią metryczną, to niech E^* oznacza zbiór wszystkich funkcyj rzeczywistych, jednostajnie ciągłych i ograniczonych, określonych w E; E^* stanowi widocznie przy zwykłych definicjach działań przestrzeń typu (B), gdy przez odległość dwóch funkcyj $x(t)$, $y(t)$ tego zbioru rozumiemy $\max\limits_{t \subset E} |x(t) - y(t)|$. Twierdzenie o które chodzi brzmi: Gdy E, E_1 są przestrzeniami metrycznemi, to na to by przestrzenie E^*, E_1^* były równoważne, potrzeba i wystarcza, by przestrzenie E i E_1 były homeomorficzne. Omawiane tu rezultaty będą opublikowane w tomie IV-ym czasopisma Studia Mathematica.

Nie wiemy dotąd, czy odwzorowanie izometryczne dwóch przestrzeni (B) jest odwzorowaniem równoważnem, a nawet czy każde dwie przestrzenie (B) izometryczne są równoważne (izomorficzne)[1]. Nie znamy również przykładu

---

[1] Zagadnienie to zostało ostatnio rozwiązane przez pp. S. Mazura i S. Ulama, którzy okazali, że odwzorowanie izometryczne dwóch przestrzeni (B) jest zawsze linjowe.

dwóch przestrzeni (F) ośrodkowych o nieskończonej liczbie wymiarów, nie homeomorficznych między sobą.

Przestrzeń (m) posiada tę własność, że każda przestrzeń (B) ośrodkowa jest równoważna z jej częścią; w tym sensie stanowi przestrzeń uniwersalną dla wszystkich przestrzeni (B) ośrodkowych. Zagadnienie, czy istnieje przestrzeń ośrodkowa (B) uniwersalna dla wszystkich przestrzeni (B) ośrodkowych, pozostaje otwarte [1]).

Rozdział IV A.

§ 1. Przestrzeń (s) nie tylko nie jest przestrzenią typu (B), lecz nie jest nawet izomorficzna z żadną przestrzenią tego typu.

§§ 2, 3. Twierdzenia 2—5 oraz lemmat zawiera praca: H. Hahn, Über lineare Gleichungen in linearen Räumen, Journ f. r. u. a. Math. 157 (1927) p. 214—229.

Niech E będzie przestrzenią typu (B), zaś G przestrzenią wektorjalną zawartą w E; przypuśćmy, że w G określoną jest operacja linjowa $f(x)$, o wartościach należących do pewnej przestrzeni E^* typu (B). Nie wiadomo, czy istnieje wtedy w E operacja linjowa $F(x)$ o wartościach należących do E^*, taka, że $F(x) = f(x)$ dla $x \subset G$.

Zauważmy wkońcu, że gdy E jest przestrzenią typu (F) i w przestrzeni wektorjalnej $G \subset E$ określony jest funkcjonał linjowy $f(x)$, to może nie istnieć w E funkcjonał linjowy $F(x)$, o tej własności, że $F(x) = f(x)$ dla $x \subset G$. Wynika to prosto stąd, że w przestrzeni (S) nie istnieje wogóle funkcjonał linjowy nie znikający identycznie.

§ 4. P. S. Mazur dowiódł, że gdy E jest przestrzenią wektorjalną ośrodkową zawartą w (m), zaś $f(x)$ funkcjonałem linjowym w E, to istnieje tablica liczb

$$(A) \qquad \begin{array}{l} a_{1,1},\ a_{1,2},\ \dots \\ a_{2,1},\ a_{2,2},\ \dots \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

o tej własności, że przy każdym ciągu $x = \{\xi_n\} \subset E$ mamy $f(x) = \lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\,\xi_k$ a ponadto $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}| \leqslant |f|$ $(i = 1, 2, \dots)$. Twierdzenie to wyznacza postać funkcjonałów linjowych w przestrzeniach E uważanego rodzaju.

Rozdział V A.

§ 2. Gdy $x_n(t)$, $x(t)$ są funkcjami określonemi w $\langle 0,1 \rangle$, to przez $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{as}\, x_n(t) = x(t)$ rozumiemy, że ciąg $\{x_n(t)\}$ jest zbieżny asymptotycznie do $x(t)$ w $\langle 0,1 \rangle$; por. Wstęp, § 3.

---

[1]) Zagadnienie to zostało ostatnio rozwiązane pozytywnie przez p. S. Mazura.

Rozdział V B.

§ 4. Metodę A odpowiadającą tablicy (A) nazywa się normalną, gdy $a_{i,k} = 0$ dla $i < k$, $\neq 0$ dla $i = k$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$. Do metod tego typu należą zarówno metody Cesàro C_k jak i Eulera E_k $(k > 0)$. Ostatnie metody są według twierdzenia p. S. Mazura doskonałe (zob. pracę cytowaną w związku z twierdzeniem 3).

Twierdzenie 3 uzupełnia uwaga: Jeżeli metoda zachowawcza i odwracalna A posiada tę własność, że gdy B jest dowolną metodą zachowawczą niesłabszą od A, to każdy ciąg sumowalny metodą A jest sumowalny metodą B do tej samej liczby, w takim razie metoda A jest doskonałą.

Rozdział VI A.

§ 3. Zob.: J. Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, Stud. Math. II (1930) p. 183—196.

Rozdział VI B.

§ 4. Twierdzenie, że w przestrzeniach $(L^{(p)})$ $(p \geqslant 1)$ bazę tworzy układ ortogonalny Haara zawarte jest w pracy: J. Schauder, Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems, Math. Zeitschr. 28 (1928) p. 317—320.

Niech E oznacza zbiór wszystkich funkcyj zespolonych $f(z)$ zmiennej zespolonej z, określonych w kole jednostkowem $|z| \leqslant 1$, regularnych w jego wnętrzu i ciągłych na brzegu. Przy zwykłych definicjach działań E stanowi przestrzeń (B), gdy przez normę funkcji $f(z)$ rozumiemy maximum jej modułu w uważanym kole. Nie wiadomo czy w tej przestrzeni istnieje baza.

Podobnie nie wiemy czy istnieje baza w przestrzeni E typu (B) tak określonej. E jest zbiorem wszystkich funkcyj rzeczywistych $f(x, y)$ zmiennych rzeczywistych x, y, określonych w kwadracie $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, posiadających pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe; działania zwykłe a pozatem

$$\|f(x,y)\| = \underset{0 \leqslant x,y \leqslant 1}{\mathrm{Max}} |f(x,y)| + \underset{0 \leqslant x,y \leqslant 1}{\mathrm{Max}} |f_x'(x,y)| + \underset{0 \leqslant x,y \leqslant 1}{\mathrm{Max}} |f_y'(x,y)|.$$

Nie potrafimy wkońcu rozstrzygnąć pytania, czy z tego, że w jakiejś przestrzeni E typu (B) istnieje baza wynika, że w każdej przestrzeni wektorjalnej zamkniętej $G \subset E$ istnieje również baza. Zagadnienie to nie jest rozwiązane nawet w przypadku gdy E jest n. p. przestrzenią $(L^{(p)})$ przy $p \geqslant 1$, $\neq 2$.

Rozdział VII A.

§ 2. Twierdzenie 3 można zaostrzyć a mianowicie, jak to okazał p. Z. Zalcwasser, przy założeniach tego twierdzenia istnieje ciąg wielomianów

$\{\sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} x_m(t)\}$, taki, że stale $\lambda_{n,m} \geqslant 0$, $\sum_{m=1}^{n} \lambda_{n,m} = 1$, zbieżny jednostajnie do $x(t)$; zob.: Z. Zalcwasser, Sur une propriété du champ des fonctions continues, Stud. Math. II (1930) p. 63—67. P. J. Schreier udowodnił przytem, że gdy spełnione są założenia twierdzenia 3, to ciąg $\{x_n(t)\}$ może nie zawierać ciągu częściowego sumowalnego metodą pierwszych średnich jednostajnie do $x(t)$; zob.: J. Schreier, Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konwergenz, Stud. Math. II (1930) p. 58—62.

W przestrzeniach jednak $(l^{(p)})$, $(L^{(p)})$ przy $p > 1$, a podobnie w przestrzeniach (c), (c_0), z każdego ciągu elementów $\{x_n\}$ słabo zbieżnego do x można wyrwać ciąg, którego pierwsze średnie zdążają wedle normy do x; w przestrzeni (L), nietylko to twierdzenie jest łałszywe, ale niezachodzi nawet twierdzenie analogiczne do twierdzenia p. Zalcwassera. Zob.: S. Banach et S. Saks, Sur la corvercence forte dans les champs L^p,Stud. Math. II (1930) p. 51—57.

Rozdział VII B.

§ 2. Dany ciąg elementów $\{x_n\}$ przestrzeni E typu (B), nazywamy *słabo zbieżnym*, gdy przy każdym funkcjonale linjowym $f(x)$ w E, ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny; przestrzeń E nazywa się *słabo zupełną*, gdy każdy ciąg $\{x_n\}$ elementów uważanej przestrzeni słabo zbieżny jest słabo zbieżny do pewnego elementu x tej przestrzeni.

Przestrzeń (c_0), i tem samem (c), (m), nie jest słabo zupełną. Słaba zupełność przestrzeni (L) została wykazana przez p. H. Steinhausa, w pracy cytowanej na str. 83; słabą zupełność przestrzeni $(L^{(p)})$ przy $p > 1$, stwierdził p. F. Riesz w pracy cytowanej na str. 71. W przestrzeni (l) dany ciąg elementów jest słabo zbieżny, wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny wedle normy; słaba zupełność tej przestrzeni jest więc oczywista.

Rozdział VIII A.

§ 1. Gdy R jest zbiorem funkcjonałów linjowych określonych w danej przestrzeni ośrodkowej E typu (B), to określony w tej przestrzeni funkcjonał linjowy $f(x)$ nazywamy *słabem skupieniem* zbioru R, gdy istnieje ciąg funkcjonałów linjowych $\{f_n(x)\}$ należących do R, $\neq f$ oraz słabo zbieżny do $f(x)$. Zbiór R' wszystkich słabych skupień zbioru R nosi nazwę jego *słabej pochodnej*; analogicznie można określić słabe pochodne wyższych rzędów.

Łatwo dowodzi się, że przy każdym zbiorze R, pewna jego słaba pochodna przeliczalnego rzędu jest już słabo zamknięta. P. S. Mazurkiewicz okazał, że nawet w przypadku, gdy zbiór R stanowi przestrzeń wektorjalną, jego słaba pochodna (pierwszego rzędu) nie musi być zbiorem słabo zamkniętym; zob.: S. Mazurkiewicz. Sur la dérivée faible d'un ensemble de fonctionnelles linéaires, Stud. Math. II (1931) p: 68—71. Dotąd nie znamy jednak przykładu zbioru R wektorjalnego, o tej własności, że jego słaba pochodna drugiego rzędu nie jest słabo zamknięta.

Rozdział VIII B.

§ 2. Twierdzenie 7 zostało udowodnione przez p. H. Lebesgue'a.

§ 3. Dany zbiór J elementów przestrzeni typu (B) nazywamo *słabo zwartym*, gdy z każdego ciągu elementów tego zbioru można wyrwać ciąg słabo zbieżny. W przestrzeniach $(l^{(p)})$ i $(L^{(p)})$ przy $p>1$, każdy zbiór ograniczony jest słabo zwarty; dowód dla przypadku przestrzeni $(L^{(p)})$ zawiera praca p. F. Riesza cytowana na str. 71. Podobną własność mają n. p. przestrzenie (c_0), (c); nie posiadają jej przestrzenie (l), (L), (C), (m).

§ 5. Wyszczególnimy tu kilka własności izomorficznych.

1⁰ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ elementów danej przestrzeni typu (B) nazywamy *bezwarunkowo zbieżnym*, gdy jest zbieżny przy każdem uporządkowaniu wyrazów (do tego samego elementu). Własnosć: Dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ elementów jest bez warunkowo zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy przy każdym funkcjonale linjowym $f(x)$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|$ jest zbieżny, jest własnością izomorficzną. Własność tę posiadają, wedle twierdzenia p. W. Orlicza, wszystkie przestrzenie typu (B) słabozupełne; zob drugą z prac cytowanych na str. 144.

2⁰ Własność: Gdy $\{x_n\}$ jest ciągiem elementów o normie 1, to istnieje ciąg liczb $\{t_n\}$ taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ jest rozbieżny i ma sumy częściowe wedle normy ograniczone, jest własnością izomorficzną. P. S. Mazur okazał, że własność tę posiada przestrzeń (c), nie posiadają jej przestrzenie $(l^{(p)})$, $(L^{(p)})$ przy $p \geqslant 1$, (m), (M), (C).

3⁰. Własność: Zbiór wypukły zamknięty jest słabo zamknięty (t. j. zawiera każdy element, do którego można dobrać ciąg elementów uważanego zbioru słabo zbieżny do niego), jest własnością izomorficzną. Zgodnie z uwagami do § 2 Rozdziału VII A, własność tę posiadają przestrzenie (c), $(l^{(p)})$, $(L^{(p)})$, przy $p>1$, (l), (c), $c_0)$ i nie posiada jej przestrzeń (L).

Przestrzeń $(L^{(2)})$ (a podobnie $(l^{(2)})$) jest równoważna z przestrzenią z nią sprzężoną. Niewiadomo czy własność ta jest dla przestrzeni $(L^{(2)})$ charakterystyczną w tym sensie, że na to by dana przestrzeń typu (B) ośrodkowa o nieskończonej liczbie wymiarów była równoważna z $(L^{(2)})$, potrzeba i wystarcza by była równoważna z przestrzenią do niej sprzężoną.

P. S. Mazur postawił pozatem pytanie, czy każda przestrzeń typu (B) ośrodkowa o nieskończonej liczbie wymiarów, równoważna z każdą przestrzenią w niej zawartą wektorjalną zamkniętą o nieskończonej liczbie wymiarów, jest równoważna z przestrzenią $(L^{(2)})$.

Rozdział IX A.

§ 2. Gdy operacja linjowa $U(x)$ odwzorowuje przestrzeń (E) typu (B) na jej część, to równania $x - U(x) = \Theta$, $X - \overline{U}(X) = \Theta$, mogą nie posiadać równej liczby linjowo niezależnych rozwiązań. Można okazać jednak, że gdy $|U| = 1$ i p, q oznaczają odpowiednio liczby linjowo niezależnych rozwiązań tych równań, to $p \leqslant q$; przytem, gdy przestrzeń E jest słabo zupełną i każdy zbiór ograniczony w niej jest słabo zwarty, to $p = q$. Zob.: S. Mazur, Über die Nullstellen linearer Operationen, Stud. Math. II (1930) p. 11—20.

Rozdział IX B.

§ 1, 2, 3. Zob. artykuł: E. Hellinger und O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Enzykl. d. math. Wiss., 1928.

Rozdział X.

§ 1, 2, 3. Twierdzenia 1—5 zawiera praca: S. Banach, Über die Räume vom Typus (G), Stud. Math. III (1931).

Załóżmy, że E, E^* są przestrzeniami (G) i przytem przestrzeń E jest ośrodkową; $U(x)$ niech oznacza operację multyplikatywną odwzorowującą E na część E^*. Przy tych założeniach zachodzi twierdzenie:

1. Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} U(x_n) = y_0$ pociąga zawsze $y_0 = U(x_0)$, to operacja $U(x)$ jest potęgową.

Zakładając dalej, że operacja $U(x)$ jest potęgową, mamy twierdzenia:

2. Przeciwdziedzina operacji $U(x)$ jest albo pierwszej kategorji albo identyczna z E^*;

3. Jeżeli przeciwdziedzina operacji $U(x)$ jest identyczna z E, to do każdego ciągu punktów $\{y_n\}$ zbieżnego do $y_0 = U(x_0)$, istnieje ciąg punktów $\{x_n\}$ zbieżny do x_0, taki, że stale $U(x_n) = y_n$;

4. Jeżeli operacja $U(x)$ odwzorowuje E na E^* wzajemnie jednoznacznie, to odwzorowanie to jest obustronnie ciągłe.

W końcu zachodzi jeszcze twierdzenie:

5. Jeżeli grupa E jest przestrzenią (G) ośrodkową zarówno przy pewnej definicji odległości (x, y), jak i przy pewnej innej definicji odległości $(x, y)_1$ i jeżeli $\lim_{n \to \infty} (x_n, x) = 0$ pociąga zawsze $\lim_{n \to \infty} (x_n, x)_1 = 0$, to i naodwrót $\lim_{n \to \infty} (x_n, x)_1 = 0$ pociąga zawsze $\lim_{n \to \infty} (x_n, x) = 0$; pojęcie granicy w obu przypadkach jest tedy to samo.

Twierdzenia 1, 2, 3, 4, 5 są oczywiście analogiczne odpowiednio do twierdzeń 14, 10, 11, 12, 13 rozdziału III A; założenie, że przestrzeń E jest ośrodkową jest istotne. Dowody tych twierdzeń znajdują się w pracy cytowanej powyżej.

Zob. również: F. Leja, Sur la notion du groupe abstrait topologique, Fund. Math. IX (1927) p. 37—44.