"Rozmowy z Banachem" ("Conversations with Banach")
- unpublished notes of Prof. Andrzej Alexiewicz

Rozmowy z Banachem

[illegible]

1. Przestrzeń X ma bazę: x_n.
Funkcja abstrakcyjna
$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, x_n .$$
Przy jakich założeniach
$$x'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t)\, x_n \quad ?$$

2. Czy twierdzenia Saksa są prawdziwe w abstrakcyjnej przestrzeni (S).

3. Jak jest z twierdzeniem Tonelli'ego o f. ograniczonym wahaniu dla funkcji abstrakcyjnych

4. Teoria długości krzywych dla f. abstr.

5. Równania różniczkowe dla f. abstr.

Skorzystać z tw. Pettisa!
Zrobić to własności Pettis.

Tak – wynika to z mojej pracy o przestrzeniach Saksa: są prawdziwe dla przestrzeni $\mathcal{L}^S$ funkcji określonych w polu (T, Σ, μ) o wart. z przestrzeni Banacha – lecz miara musi być ośrodkowa!

(6) Definicja ortogonalności dla f. abstr.

$x(t)$ i $y(t)$ są ortogonalne gdy

$$\int \xi(x(t))\, \xi(y(t))\, dt = 0$$

dla każdego $\xi \in \boxed{F}$.

Badać rozwinięcie ortogonalne funkcyj abstrakcyjnych

(7) Totalizacja f. abstr.

(8) Teoria całki f. abstr. w pierścieniach. Tam można całkować i liczby.

Zwalione w mojej pracy

21. IX. 1944

(9) Definicja Fantappiègo w przestrzeni funkcyj analitycznych.

Dany zbiór domknięty F. Z zmienna punktu funkcyj regularnych w pewnym zbiorze otwartym $G \supset F$.

$z_n \to z_0$ znaczy że $z_n(t) \rightrightarrows z_0(t)$ w pewnym zbiorze otwartym G_0 : $G \supset G_0 \supset F$

(10) Inna definicja zbieżności w przestrzeni funkcyj ~~abstrakcyjnych~~ analitycznych

Z przestrzeni funkcyj regularnych w całej płaszczyźnie poza, być może skończoną (1) (przeliczalną, 1 kateg.) mnogością punktów.

$z_n \to z_0$ znaczy, że $z_n(t)$ ma od pewnego miejsca te same osobliwości co $z_0(t)$ i $z_n(t)$ dąży do $z_0(t)$ niemal jednostajnie w dopełnieniu zbioru punktów osobliwych

Np. w wypadku (1) dodawanie może nie być ciągłe

$x_n(t) = t^n/n^{n+1} + t$, $y_n(t) = -t -$, $x_0(t) = -y_0(t) = t$

$x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $x_n + y_n$ non$\to$ $x_0 + y_0 = 0$ bo

$x_0 + y_0$ nie posiada biegunów więc musiałoby być

$x_n + y_n \to x_0 + y_0$ jednostajnie w pt zamkniętym.

(11) Ta sama przestrzeń co pod 10 tylko z ustalonymi punktami osobliwymi

(12) Przy jakich założeniach przestrzeń typu (1) jest na sobie 2 kategorii? (ew ośrodkowe)

(13) Przy jakich założeniach da się wykazać, że funkcja 1 klasy Baire'a i addytywna w przestrzeni typu (1) jest liniowa
(Przez f. 1 klasy Baire'a można albo rozumieć granice funkcyj ciągłych, lub definiować po kuratowsku)

(14) Dla funkcyj $x(t)$ (np. ciągłych) zmiennej rzeczywistej o wartościach z przestrzeni typu (1) określić całkę.

(15) Funkcja abstr z $[0,1]$ do przestrzeni typu T. $x(t)$.
Przy [illegible] ~~prawo~~ [illegible] jest tw.: jeżeli $x'(t)=0$ to $x(t)=\text{const}$

jest fabryczne!

(16) Badać przestrzenie typu (F) w których jest prawdziwe tw. o rozszerzaniu funkcjonału liniowego.

14 XII 1944

(17) Dane 1-1 odwzorowanie koła w koło (t.z. rosnące – a więc w pewnym sensie ograniczonym w wahaniu). Niech istnieje pochodna polowa (Jacobian uogólniony). Czy da się on jakoś wyrazić przez pochodne cząstkowe (ew. aproksymatywne)?

(18) Czy odwzorowanie 1-1 koła w koło da się jednostajnie aproksymować przez odwzorowania należycie regularne (lipschitzowskie, analityczne)?

(19) Czy istnieje nietrywialne twierdzenie o przejściu do granicy w całkach Denjoy (t.z. nie sprowadzające się do całki Lebesgue'a

(20) Podać elementarny dowód tw. Hardy'ego Littlewooda o f-o ograniczonym wahaniu.

15. XII. 1944

(21) Pole powierzchni abstrakcyjnej

Niech naprzód funkcje $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ będą ciągłe.

Def. ograniczonego wahania (2, różne?)

(1) gdy każda z par (x,y), (y,z), (z,x) jest o ogr. wahaniu

tz.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(r)\,dr < \infty$$

(2) dla każdego ciągu zbiorów rozłącznych E_n

$$\sum |(x,y)E_n| < \infty.$$

Twierdzenie. Jeżeli a_{ik} jest tablicą nieosobliwą i x, y, z są o ograniczonym wahaniu to funkcje

$$(a_{ik})(x,y,z)$$

są też o ograniczonym wahaniu.

Def. F. abstr. x, y, z są najogólniej o ograniczonym wahaniu, gdy dla dowolnych $\xi, \eta, \zeta \in \boxed{4}$ funkcje

$\xi(x(u,v)),\ \eta(y(u,v)),\ \zeta(z(u,v))$

Np. o ograniczonym wahaniu.

definicję absolutnej ciągłości?

Przy założeniu dużej regularności można tak zrobić: bierze układ ortogonalny x_n w X (baza) i mam

$$x = \sum a_n(u,v)\, x_n \quad , \text{itd.}$$

i formalnie

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sum \frac{\partial a_n(u,v)}{\partial u}\, x_n \quad , \text{itd.}$$

Pole ma być równe

$$\iint \sqrt{\left[\frac{\partial(f_i,f_j)}{\partial(u_i,u_j)}\right]^2}\, du\, dv = \text{stosujemy identyczność}$$

Lagrange'a

$$= \iint \sqrt{\left\|\frac{\partial x}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial x}{\partial v}\right\|^2 - \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\, \frac{\partial x}{\partial v}\right)}_{\text{iloczyn skalarny wektorów}}^2}\; du\, dv$$

$$= \iint \left\|\frac{\partial x}{\partial u}\right\| \left\|\frac{\partial x}{\partial v}\right\| \sin\gamma\, du\, dv$$

definicję

$$\cos\gamma = \left(\iint \frac{\partial x}{\partial u}\, \frac{\partial x}{\partial v}\, du\, dv\right) \Big/ \left\|\frac{\partial x}{\partial u}\right\| \left\|\frac{\partial x}{\partial v}\right\| .$$

30 IX 44

(22) Jeżeli X, Y są typu F to czy w $[X, Y]$ da się wprowadzić przyzwoite pojęcie granicy

(23) nie rozumie Dany ciąg ξ_n określonych w przestrzeni liniowej $X_1 \subset X$, $\xi_n(x) \to \xi(x)$ w X_1. Czy dodając nowe rozszerzyć tak by rozwinięcia były ciągłe.

(24) Czy tw I jest prawdziwe dla ~~przestrzeni~~ operacji (M_f^0) liniowych

15 XII 1944

(25) Ciągłość za pomocą relacji: w X dana relacja xRy.

$x_n \to x_0$ znaczy że

$$\prod_{x} \sum_{N_x} \text{że} \left(\prod_{n \geq N_x} x_n R x_0 \right) \to x R x_0$$

Zwykłej ciągłości odpowiada takiej relacji

$$xRy \equiv |x-y| < 1.$$

(26) Funkcje niezależne

def 1: $\xi(x_1(t)), \xi(x_2(t))$ są niezależne dla $\prod \xi \in L^1$

def 2 $\xi(x_1(t)), \eta(x_2(t))$ " $\prod \xi, \eta \in L^2$

Są one równoważne.

Czy takie twierdzenie jest prawdziwe

Jeżeli x_n niezależne, $x_n(\cdot) \in L^2$ [jakie L^2]

$\int x_n\, dt$ są ogr jedn (w jakim sensie $\int$) i $\sum a_n^2 < \infty$

to szereg $\sum a_n x_n$ jest zbieżny prawie pewnie

29 XII 1944.

(27) Jakie są twierdzenia o przejściu do granicy w całkach Bochnera, Pettisa, Gelfanda itp.

(28) Kiedy funkcja absolutnie ciągła jest całką

(29) Twierdzenie Riesza-Fischera (silne? słabe?)

(31) Równania całkowe

$$y(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t)\, y(t)\, dt$$

można badać gdy (i) $y(t)$ f. abstrakcyjna a jądro niesymetryczne, (ii) $K(s,t)$ abstrakcyjne

(32) Równania różniczkowe f. abstrakc.: r. Laplace'a (słabe i mocne), wzór Poissona dla kuli

(33) R. całkowe w pierścieniach typu B (związane z całkowaniem)

(34) Istnieje nietrywialny przykład mnożenia 3-kowego, które nie jest generowane przez mnożenie dwójkowe (Banach). Czy każdy zbiór skończony z mnożeniem trójkowym komutatywnym da się tak rozszerzyć, by mnożenie było generowane przez mnożenie dwójkowe