Czytając ostatnio zgodnie szereg prac Birkhoffa[1], zauważyłem, że w pracach tych przy pomocy bardzo pomysłowej metody, udowodnione jest twierdzenie, które ~~…~~ można wypowiedzieć następujące w postaci ogólniejszej, nie wypowiedzianej jednak przez autora:

Niechaj E będzie dowolnym zbiorem mierzalnym (L), położonym w przestrzeni n $(n \geq 1)$ wymiarowej. Przypuśćmy, że dana jest transformacja T przyporządkowująca prawie każdemu punktowi $\varphi \subset E$ punkt $T(\varphi)$ i odwzorowująca w sposób jednoznaczny prawie cały zbiór E na ~~…~~ prawie cały zbiór E. Załóżmy, że $0 < |E|$[2] $< \infty$ i że transformacja T spełnia warunki następujące

I) Jeżeli $\mathcal{Q} \subset E$ jest zbiorem mierzalnym, wówczas zbiory $T(\mathcal{Q})$ i $T^{-1}(\mathcal{Q})$ są również zbiorami mierzalnemi.

II Istnieje funkcja $w(\varphi)$ określona prawie wszędzie w E nieujemna i całkowalna, spełniająca dla każdego zbioru mierzalnego $\mathcal{Q} \subset E$ warunek

$$\int_{\mathcal{Q}} w(\varphi)\, dv = \int_{T(\mathcal{Q})} w(\varphi)\, dv$$

Jeżeli teraz $1 < n \le k$, to zauważmy że zbiory $V_n, T(V_n), \dots, T^{n-1}(V_n)$ są rozłączne i mają równe miary, wynika, że

$$|V_n + T(V_n) + \dots + T^{n-1}(V_n)| = n|V_n|$$

Ponadto na mocy (5) i określenia zbioru $V_n \supset V_n$ mamy:

$$\int_{V_n+T(V_n)+\dots+T^{n-1}(V_n)} \varphi(P)\,dv = \int_{V_n} \varphi_n(P)\,dv > n\delta|V_n| = \delta|V_n+T(V_n)+\dots+T^{n-1}(V_n)|$$

~~Ostatnia nierówność wynika z określenia~~

Stąd na mocy (8)

$$\int_{U_1+U_2+\dots+U_k} \varphi(P)\,dv > \delta|U_1+U_2+\dots+U_k|$$

Jeżeli $k \to \infty$ otrzymujemy na mocy (6)

$$\int_E \varphi(P)\,dv \ge \delta|E| \quad \text{c.b.d.o.}$$

Analogicznie przeprowadzając można udowodnić ~~lemmat~~ następujący

Lemmat 2.

Niechaj $\varphi(P)$ będzie funkcją określoną prawie dla każdego punktu $P \subset E$, mierzalną i całkowalną w E; jeżeli dla pewnej liczby δ zachodzi

$$\lim\inf \frac{\varphi(P)+\varphi(T(P))+\dots+\varphi(T^{n-1}(P))}{n} < \delta$$

prawie dla każdego punktu $P \subset E$ wówczas

$$\int_E \varphi(P)\,dv \le \delta|E|$$

Na mocy bowiem określenia zbiory $V_1, V_2, \dots V_k$ są rozłączne. ~~Jest~~ Również łatwo zauważyć, że zbiory

$$V_j\,,\quad T^l(V_n) \qquad 1\le j\le k \quad 1< n\le k \quad 1\le l< n$$

są też rozłączne. Jeżeli bowiem ~~[illegible]~~ $j>n$ wówczas z uwagi na to, że $V_n\subset U_n$ mamy na mocy (8)

$$T^l(V_n)\subset U_1+U_2+\dots+U_{n-l}$$

Więc zbiór $T^l(V_n)$ nie ma nic wspólnego ze zbiorem U_j gdyż $j>n-l$, zatem nie ma również nic wspólnego ze zbiorem $V_j\subset U_j$.

Jeżeli zaś $j<n$ wówczas na mocy określenia zbiorów V_j, V_n łatwo zauważyć, że V_j nie ma nic wspólnego ze zbiorem $T^l(V_n)$.

Gdyby wreszcie zbiory

$$T^l(V_n)\,,\quad T^{l'}(V_{n'}) \qquad 1\le l<n\le k \quad 1\le l'<n'\le k$$

miały jakiś punkt wspólny, wówczas miałyby również punkt wspólny zbiory:

$T^{l-l'}(V_n),\ V_{n'}$ jeżeli $l>l'$

$V_n,\ T^{l'-l}(V_{n'})$ " $l<l'$

$V_n,\ V_{n'}$ " $l=l'$

Na mocy tego cośmy wyżej powiedzieli wypadek pierwszy i drugi jest niemożliwy. Zaś w wypadku trzecim musiałoby być $n=n'$. i $l=l'$.

~~Mamy nierówność~~ (3) Dla każdego ~~punktu~~ przedziału ~~Jeżeli~~ $\rho \subset U_n$ ~~oraz~~ $(1 \leq l < n)$ ~~warunku~~ zachodzi: $\mathcal{S}_n(\rho) > n\delta$ $\mathcal{S}_l(\rho) \leq l\delta$ ~~zatem~~ więc

stąd na mocy (1)

$$\mathcal{S}_n(\rho) - \mathcal{S}_l(\rho) > (n-l)\delta$$

~~zatem~~

$$\mathcal{S}_{n-l}(T^l(\rho)) > (n-l)\delta$$

zatem ~~zatem~~ stąd

$$T^l(\rho) \subset U_1 + U_2 + \dots U_{n-l} \quad 1<n \quad 1 \leq l < n \quad \dots (7)$$

$$T^l(U_n) \subset U_1 + U_2 + \dots U_{n-l}$$

Obierzmy teraz dowolną liczbę naturalną $k > 1$.

Połóżmy $v_k = u_k$

$$v_{k-1} = u_{k-1} - [v_k + T(v_k) + \dots T^{k-1}(v_k)]$$

$$v_{k-2} = u_{k-2} - [v_k + T(v_k) + \dots T^{k-1}(v_k)] - [v_{k-1} + T(v_{k-1}) + \dots T^{k-2}(v_{k-1})]$$

— — — — — — —

$$v_1 = u_1 - [v_k + \dots + T^{k-1}(v_k)] - [v_{k-1} + \dots + T^{k-2}(v_{k-1})] - \dots - [v_2 + T(v_2)]$$

Mamy oczywiście

$$\cancel{\sum_{i=1}^{k} U_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} T^j(v_i)}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = [v_k + T(v_k) + \dots T^{k-1}(v_k)] + [v_{k-1} + T(v_{k-1}) + \dots T^{k-2}(v_{k-1})] + \dots [v_2 + T(v_2)] + v_1. \quad — — — (8)$$

[Wykażemy teraz, że zbiory występujące po prawej stronie wzoru (8) są rozłączne.

Jeżeli teraz $\varphi(P)$ jest dowolną funkcją ~~od~~ mierzalną prawie wszędzie w E i taką, że ~~funkcja~~ iloczyn funkcyj $\varphi(P).\omega(P)$ jest (sca)lkowalną w E, wówczas prawie dla każdego punktu $P \subset E$ istnieje granica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(P)+\varphi(T(P))+\cdots\,\varphi(T^{n-1}(P))}{n} = F(\varphi, P) \quad \ldots (1)$$

Dowód powyższego twierdzenia, można bez trudu otrzymać, przez odpowiednią modyfikację dowodu podanego w wyżej cytowanych pracach.

Szczególnie prostem staje się to twierdzenie jeżeli ~~zamiast~~ w warunku II zażądamy, że $\omega(P) \equiv 1$, co jest równoważne temu, że $|\mathcal{G}| = |T(\mathcal{G})|$ dla każdego zbioru mierzalnego $\mathcal{G} \subset E$. O funkcji $\varphi(P)$ wystarcza w tym wypadku założyć, że jest całkowalną.

Ze względu na ważność powyższego twierdzenia podaję jego dowód, który jest pewnem uproszczeniem dowodu Birkhofa.

439: MAV - XIV - 10/6

[438]

Lemmat 1.

Niechaj $\varphi(P)$ będzie funkcją określoną (dla prawie każdego punktu $P \subset E$, mierzalną i całkowalną w E; jeżeli dla pewnej liczby δ zachodzi[3]

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(P)+\varphi(T(P))+\varphi(T^2(P))+\dots\varphi(T^{n-1}(P))}{n} > \delta$$

prawie dla każdego punktu $P \subset E$ wówczas[4]

$$\int_E \varphi(P)\,dv \geqslant \delta |E|$$

Dowód.

Połóżmy: $\varphi_n(P) = \varphi(P)+\varphi(T(P))+\dots\varphi(T^{n-1}(P)) \quad \dots n>1$

$\varphi_1(P) = \varphi(P)$

Mamy oczywiście:

$$\varphi_{n+1}(P) = \varphi_n(P) + \varphi(T^n(P)) \quad \dots \quad (2)$$

$$\varphi_n(P) - \varphi_l(P) = \varphi_{n-l}(T^l(P)) \quad \dots \text{ dla } n>l\geqslant 1 \dots (3)$$

Na mocy (T) mamy dla każdego zbioru $U \subset E$

$$\int_U \varphi(T(P))\,dv = \int_{T(U)} \varphi(P)\,dv \quad \dots \quad (4)$$

Stąd dla $r \geq 1$

$$\int_{T^r(U)} \varphi(P)\,dv = \int_U \varphi(T^r(P))\,dv$$

Zatem na mocy (1) .... $r \geq 1$

$$\int_{T^r(U)} \varphi(P)\,dv = \int_U \left[\varphi_{r+1}(P) - \varphi_r(P)\right] dv \quad \text{----} \quad (5)$$

~~Niechaj k+1 będzie dowolną liczbą naturalną.~~

Określimy zbiory $U_1, U_2 \ldots U_k$ w następujący sposób:

1) U_1 niechaj ~~oznacza~~ będzie zbiorem ~~tych~~ punktów $P \subset E$ spełniających nierówność

$$\varphi(P) = \varphi_1(P) > \delta$$

2) U_n ~~niech~~ niechaj będzie zbiorem punktów nienależących do $U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1}$ i spełniających nierówność

$$\varphi_n(P) > n\delta \qquad \frac{\varphi_n(P)}{n} > \delta$$

Ponieważ według założenia prawie dla każdego punktu $P \subset E$ zachodzi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup \frac{\varphi_n(P)}{n} > \delta$$

więc $E = U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots \quad \text{--} \quad (6)$

1) Tw. ergodyczne. przy innej metodzie $f(T^n(x))$ [illegible] wyjaś niepełna.

2) Metoda f. ort. do prawie rzecz. liczb

3) Spr. funkcji niezależnych do miary produktu.

4) Grupy przekształceń odcinka zachowujących miarę

$$\rho(T, S) = \sum \frac{1}{2^n} \frac{S(\text{odst. odcinka wym.})}{1 + S||}$$

~~Dow.~~

Odwzor. zach. miarę jest jednoznaczne dla do Lebesg. czy ~~ma~~ transf. przek. " (L^2) jest pref.

5) Miara ~~set~~ ciągu zwrotu

6) Miara pierścieni. ze wzgl. na

Bogoliuboff. Annals. 1937.

Funkcje niezależne.

Niech $f(x), \varphi(x)$ $0 \le x \le 1$ będą funkcjami nie-niezależnymi. Oznaczmy przez $g(u), h(u)$ ich dystrybuanty $[g(u) = m E\{f(x) \le u\}]$. ~~Niech~~ funkcje $g(u)$, $h(u)$ ciągłe przyjmują każdą wartość z ew]. [t. zn. że f i φ przyjmują z zerową miarą każdej wartości z osobna]

1. Przy przekształceniach
$$u = g[f(x)] = \alpha(x), \quad v = h[\varphi(x)] = \beta(x) \qquad (1)$$
odcinka $(0 \le x \le 1)$ określają odwzorowanie odcinka na kwadrat $[0 \le u, v \le 1]$ z zachowaniem miary.

2. Oznaczając przez $g^{-1}(u) = F(u)$, $h^{-1}(u) = \Phi(u)$ odwrotne funkcje g, h [w przypadku gdy wartości funkcji g, h odpowiada nieskończenie wiele wartości u_0, np. $u_0 = g(x)$, wówczas za $g^{-1}(u_0)$ można wziąć dowolną np. najmniejszą] otrzymamy
$$\Phi[\beta(x)] = \varphi(x) \qquad (2)$$
mamy
$$F[\alpha(x)] = f(x),$$

3. Dla funkcji $f(x) = \text{const.}$ $\varphi(x) = x$ niemniej całkowicie niezależnych ... odwzorowania zachowującego miary $[0 \le u, v \le 1]$ na $[0 \le x \le 1]$ z $u = \alpha(x)$, $v = \beta(x)$

funkcji $F(x)$, $\Phi(\omega)$ takich by

$$F(\alpha(\omega)) = f(x), \quad \Phi(\beta(x)) = \varphi(x)$$

4 Jeżeli funkcje $f(x), \varphi(x)$ przyjmują tylko przeliczalną [wymierną] liczbę wartości [po za zbiorem miary zero] wówczas istnieją funkcje $\alpha(x), \beta(x)$ $F(x)$ $\Phi(\omega)$ o podanej własności.

5. Zagadnienie. Podać warunki na to, by do funkcji $f(x), \varphi(x)$ niezależnych można było znaleźć istnienie zależnych do danych funkcji F, Φ, α, β o własności tych.

6. Punkty 1-5, 7 są ważne dla przeliczalnej liczby funkcji niezależnych.

7. Jeżeli $f(x), \varphi(x)$ są funkcjami niezależnymi, $H(u,v)$ funkcją ~~dowolną~~ Baire'a dla funkcji ~~funkcji~~ zmiennych, wówczas funkcje $H[f(x), \varphi(x)]$, $H[f(x), \varphi(y)]$

$$\text{miara } \underset{xy}{E}\{H[f(x), \varphi(y)] < a\} = \text{mierze } \underset{x}{E}[f(x), \varphi(x) < a]$$

dla każdego a.

Wykażemy teraz następujące ~~tw~~

Twierdzenie

Jeżeli $\varphi(P)$ jest funkcją mierzalną i całkowalną w E, wówczas prawie dla każdego punktu $P \subset E$ istnieje granica:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(P)+\varphi(T(P))+\cdots\varphi(T^{n-1}(P))}{n}$$

Dowód.

Połóżmy
$$g(P) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\varphi(P)+\varphi(T(P))+\cdots\varphi(T^{n-1}(P))}{n}$$
oraz
$$h(P) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\varphi(P)+\varphi(T(P))+\cdots+\varphi\, T^{n-1}(P)}{n}$$

Niechaj $\psi(P) = g(P) - h(P)$ . . . (1)

Zauważmy że $g(P) = g\,T(P)$, $h(P) = h(T(P))$ zatem

$$\psi(P) = \psi(T(P)) \quad \text{— — — —} \quad (2)$$

Gdyby funkcja $\psi(P)$ nie była prawie wszędzie zerem, wówczas istniałaby liczba $\varepsilon > 0$ taka że zbiór U tych punktów P dla których $\psi(P) > \varepsilon$ byłby miary dodatniej. Oznaczmy przez U_n $(n=1,2\ldots)$ zbiór tych punktów P dla których

$$n\varepsilon \le \psi(P) < (n+1)\varepsilon \qquad P \subset U \quad \ldots (3)$$

Mamy oczywiście $U = U_1 + U_2 + \cdots U_n + \cdots$

lim 438

1) Dolny kres wyrr. jednow.
lim inf lim sup

—

I) $\liminf u_n = g_1$
$\liminf v_n = g_2$
istnieje $\{r_n\}, \{s_n\} \to \infty$ taki że
$\liminf (u_{r_n} + v_{s_n}) = g_1 + g_2$

~~II) W każdym ciągu istnieje~~
~~ciąg podciągów, o tym samym~~
~~dolnym limicie~~

III Istnieje mniejsza z dwóch
$\min(u, v)$

Funkcje mierzalne

Pierścienie

Teoria miary

Grupy Pontriagina

Schreier-Sperner An. Geom.

Ostatnie tomy Fundamentów

Algebra

Mar-XIV-10/13

[438]

Niechaj E będzie zbiorem punktów n wymiarowej przestrzeni $(n \geq 1)$, ~~ograniczonym~~ mierzalnym wedle Lebesgua. Przyjmijmy, że[1]

$$|E| \neq 0 \quad \ldots \quad (1)$$

~~Niechaj ty~~
Załóżmy, że daną mamy transformację T, odwzorowującą cały zbiór E, w sposób jedno-jednoznaczny, na cały zbiór E i spełniającą warunki:

Jeżeli $\mathcal{G}$ jest zbiorem mierzalnym $\subset E$ wówczas

I) $T(\mathcal{G})$[1] i $T^{-1}(\mathcal{G})$ są zbiorami mierzalnymi ~~to~~

II) $|\mathcal{G}| = |T(\mathcal{G})|$

Przypuśćmy teraz, że w E mamy określoną prawie wszędzie funkcję $\varphi(P)$ mierzalną i całkowalną. Połóżmy

$$\varphi_n(P) = \varphi(P) + \varphi(T(P)) + \ldots \varphi(T^{n-1}(P)) \qquad n = 2, 3, \ldots$$

$$\varphi_1(P) = \varphi(P)$$

Łatwo sprawdzić $\varphi_n(P) - \varphi_k(P) = \varphi_{n-k}(T^k(P)) \qquad n > k \geq 1 \ldots (1)$

~~Niechaj~~
Niechaj $g(P) = \limsup \frac{\varphi_n(P)}{n}$, zaś $h(P) = \liminf \frac{\varphi_n(P)}{n}$

Funkcje $g(P)$ i $h(P)$ są określone i mierzalne prawie wszędzie w E. ~~Ma~~ Mamy oczywiście $g(P) = g(T(P))$, $h(P) = h(T(P)) \ldots (2)$

Wykażemy następujący

Lemmat

Jeżeli $g(P) > \delta$ (wzgl. $h(P) < \delta$) prawie wszędzie w E wówczas

$$\int_E \varphi(P)\,dv > \delta |E| \qquad \left(\text{wzgl. } \int_E \varphi(P)\,dv < \delta |E|\right)$$

Dowód.

Mamy na mocy (II) dla każdego zbioru mierzalnego $U \subset E$

$$\int_U \varphi(T(P))\,dv = \int_{T(U)} \varphi(P)\,dv \quad \ldots (3)$$

② Grupy i pierścienie metryczne

Twierdzenie 1. Jeżeli w grupie E istnieje metryka spełniająca własności

1) E jest przestrzenią zupełną

2) $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ pociąga $\lim x_n y_n = xy$.

wówczas $\lim x_n = x$ pociąga $\lim x_n^{-1} = x^{-1}$

Dowód Jeżeli $H \subset E$, $x \in E$ wówczas xH zbiór elementów postaci xz gdzie $z \in H$.

Wynika stąd $x(H_1 H_2) = (xH_1)(xH_2)$;

$x(H_1 + H_2) = xH_1 + xH_2$;

$x(H_1 - H_2) = xH_1 - xH_2$

I Jeżeli H jest zbiorem zamkniętym, otwartym, mierzalnym (B), I kat., II kat., nigdzie gęstym, wówczas xH jest również zamkniętym etc.

Dowód wynika stąd (H' pochodna, $-H$ dopełn.), zbiór H jest nig[dzie] gęsty, jeżeli $(xH)' = xH'$, $-(xH) = x(-H)$, $[-(H')]' = E$.

Hp. E jest separabel.

II Założmy Oznaczmy Niech $\rho(x,y)$ oznacza odległość w E. przez K zbiór par (x,y) przy odległości
$\rho[(x,y),(u,v)] = \rho(x,u) + \rho(y,v)$

Wynika
(a) E_1 jest przestrzenią, separabel, zupełną.

(b) Przestrzeń E_1 złożona z par (x, x^{-1}) jest również separabel, i zupełna.
Jeśli bowiem $(x_n, x_n^{-1}) \to (u, v)$ równości $x_n \to u$, $x_n^{-1} \to v$ zatem $x_n x_n^{-1} \to u v$ – więc $u v = 1$ skąd $v = u^{-1}$ więc $(u, v) \in E_1$.
Niech $x \in E$, $y = (x, x^{-1}) \in E_1$. Operacja $y = F(x)$ jest odwrotnością operacji ciągłej $x = F^{-1}(y)$, więc operacja $y = F(x)$ spełnia warunek Baire'a.
Istnieje więc zbiór $H \subset E$, którego dopełnienie jest I kat, na którym $F(x)$ jest ciągła.
Niech $\{x_n\}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do x. Zbiory elementów E dążących do x. mają dopełnienia $x^{-1}H$, $x_n^{-1}H$, $n = 1, 2$ ... zatem istnieje element z I kategorii, należący do tych wszystkich zbiorów, że ~~$u \in H$, $u_n \in H$~~
Istnieją więc elementy u, $z = x_n^{-1} u_n$, $n = 1, 2$ ...
takie że $z = x^{-1}u$, $\lim u_n = u$.
~~zatem~~ $xz = u$, $x_n z = u_n$, więc $\lim_{n\to\infty}$ wynika stąd, że
z ciągłości operacji $F(x)$ w H $\lim u_n^{-1} = x u^{-1}$ skąd
$\lim u_n^{-1} = u^{-1}$ więc
$\lim x_n^{-1} = x^{-1}$.

(iii) Jeśli E nie jest separabel, ~~to~~ i $\lim x_n = x$ to przez E^* oznaczmy najmniejszą grupę zawierającą elementy $x, x_n, n=1,2\ldots$ Grupa E^* jest separabel, zatem $\lim x_n^{-1} = x^{-1}$.

Uwaga.

Zamiast założenia 2) ~~wystarczy~~ ~~postać~~ wystarczy

2*) $\lim x_n = u$ i $\lim x_n^{-1} = v$ wówczas $u = v^{-1}$

2**) $\lim x_n = x$ wówczas dla każdego y jest $\lim x_n y = xy$

Niech E będzie zbiorem w którym określone jest mnożenie i jedność. Tzn. jest mnożenie associatywne i

(α) $(xy)z = x(yz)$

(β) Istnieje 1 taki, że $x.1 = 1.x = x$

Odwrotnością elementu x nazywamy element, który oznaczamy przez x^{-1} taki, że $x x^{-1} = x^{-1} x = 1$. Nie zakładamy, że każdy element posiada odwrotność.

Niech E będzie zbiorem metrycznym, w którym mnożenie jest operacją ciągłą t.zn. w którym $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ pociąga $\lim x_n y_n = xy$.

Niech E^* będzie zbiorem wszystkich elementów zbioru E mających odwrotność.

Twierdzenie 2.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by operacja $f(x) = x^{-1}$ była w E^* ciągła jest to by E^* było zbiorem G_δ.

<u>Dowód</u> <u>konieczności</u>. Zbiór H tych punktów zbioru E w których oscylacja operacji x^{-1} jest równa zeru jest G_δ. Załóżmy, że operacja x^{-1} jest ciągła w E^*. Zatem $E^* \subset H$. Z drugiej strony jeżeli $x \in H$ to wówczas dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ $\subset E^*$ zbieżnego do x ciąg x_n^{-1} jest również zbieżny do pewnego elementu y. Mamy zatem $\lim x_n \cdot x_n^{-1} = xy$ czyli $1 = xy$, $y = x^{-1}$. Stąd i z poprzedniego $x \in E^*$, ~~czyli~~ więc $E^* \supset H$. $E^* = H$, zatem E^* jest G_δ.

<u>Dostateczność</u>. Załóżmy, że E^* jest G_δ. Istnieje zatem metryka $(x', x'')^*$, $x', x'' \in E^*$, przy której E^* jest ~~także~~ w zbiorze E^*, przy której $\lim (x_n, x) = 0$, [stara metryka] przestrzenią zupełną i $\lim (x_n, x)^* = 0$. $x_n, x \in E^*$ jest równoważne. Ponieważ zbiór E^* jest ~~oczywiście~~ grupą, dla $x_n, y_n, x, y \in E^*$ $\lim (x_n, x) = 0$, $\lim (y_n, y) = 0$ pociąga ~~$\lim (x_n y_n, xy) = 0$~~, więc $\lim (x_n, x)^* = 0$, $\lim (y_n, y)^* = 0$ pociąga ~~$\lim$~~ $\lim (x_n y_n, xy)^* = 0$. ~~Oznaczmy~~ dla $x_n, x \in E^*$ Stąd na mocy Tw. 1, $\lim (x_n, x)^* = 0$ pociąga $\lim (x_n^{-1}, x^{-1})^* = 0$

A więc $\lim (x_n, x) = 0$ pociąga $\lim (x_n^{-1}, x^{-1}) = 0$ dla $x_n, x \in E^*$. c.b.d.d.

<u>Uwaga</u>. Jeżeli E jest ciałem przy pewnej metryce wypukłej i działanie mnożenia jest ciągłe, wówczas $\lim x_n = x$, $x_n \neq 0$, $x \neq 0$ pociąga $\lim x_n^{-1} = x^{-1}$.

W tym bowiem przypadku jedynie element $x = 0$ nie ma odwrotności.