ROZDZIAŁ I

TEORIA WEKTORÓW

I. Działania na wektorach

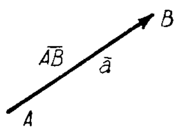
§ 1. Określenia wstępne. Wielkości, które możemy określić przy pomocy jednej liczby rzeczywistej, nazywamy *skalarami*. Skalarem jest więc masa, praca, energia kinetyczna i t. p.

Wektorem nazywamy odcinek, w którym wyróżniony jest początek i koniec. Do wektorów zaliczamy punkty i nazywamy je *wektorami zerowymi*.

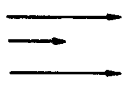
Wielkości takie jak np. prędkość, przyśpieszenie, siła, możemy przedstawić przy pomocy wektorów. Wektor oznaczamy bądź jedną literą z kreską u góry np. $\bar{a}$, bądź symbolem $\overline{AB}$, gdzie A oznacza początek, zaś B koniec (rys. 1). Na rysunku koniec wektora zaznaczamy strzałką. Początek wektora nazywamy także *punktem zaczepienia*.

Długością lub *wartością bezwzględną* wektora $\overline{AB}$ nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy ją przez $|\overline{AB}|$.

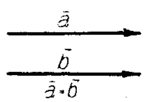
Dwa wektory mające ten sam kierunek (t. zn. równoległe) mogą mieć *zwroty* zgodne lub przeciwne (rys. 2).



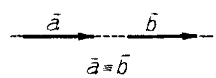
1.



2.



3.



4.

Wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ mające równe długości, kierunki i zwroty nazywamy *równymi* (rys. 3), pisząc

$$\bar{a}=\bar{b}.$$

Dwa wektory mające równe długości i kierunki, lecz zwroty przeciwne, nazywamy *przeciwnymi*. Wektor przeciwny do $\bar{a}$ oznaczamy przez $-\bar{a}$ (p. str. 4, rys. 3).

Położeniem wektora nazywamy prostą, na której wektor leży.

Wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ równe i mające to samo położenie (t. zn. leżące na jednej prostej) nazywamy wektorami *równoważnymi* (str. 1, rys. 4):

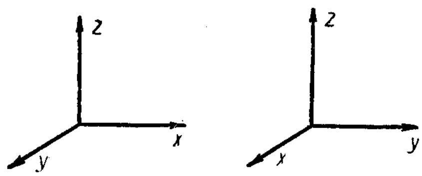
$$\bar{a} \equiv \bar{b}.$$

Dwa wektory zerowe uważamy za równe i równoważne.

Wektory równe oznaczać będziemy często jedną i tą samą literą (gdy nie będzie obawy pomyłki).

Rzutem wektora $\bar{a}$ na prostą (lub płaszczyznę) nazywamy wektor, którego początkiem jest rzut początku wektora $\bar{a}$, zaś końcem rzut jego końca.

Przypuśćmy, że mamy dany w przestrzeni układ współrzędnych $O(x, y, z)$ prostokątny lub skośnokątny. Obróćmy oś x około O w płaszczyźnie xy o kąt $<\pi$ tak, by dodatnia część osi x padła na dodatnią część osi y. Jeżeli dla widza znajdującego się po tej stronie płaszczyzny xy, po której leży dodatnia część osi z, ruch ten odbywa się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, wówczas układ $O(x, y, z)$ nazywamy *lewoskrętnym*, w przeciwnym razie *prawoskrętnym*.



1. 2.

W książce tej używać będziemy stale układu prostokątnego lewoskrętnego (t. j. jak na rys. 1, a nie 2).

Powiadamy, że *układ wektorów* $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ nie równoległych do jednej płaszczyzny ma *zwrot* lewy (wzgl. prawy), jeżeli prowadząc przez dowolny punkt O osie x, y, z równoległe do wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ i zgodnie z nimi skierowane, otrzymamy układ lewoskrętny (wzgl. prawoskrętny).

§ 2. Współrzędne wektora. Niechaj $\bar{a}$ będzie dowolnym wektorem, zaś $\bar{a}'$ rzutem jego na daną oś x.

Współrzędną wektora $\bar{a}$ *względem osi* x nazywamy liczbę, którą oznaczamy przez a_x, określoną jak następuje: $a_x = |\bar{a}'|$, jeżeli $\bar{a}'$ ma zgodny kierunek z osią x, zaś $a_x = -|\bar{a}'|$ w przypadku przeciwnym.

Mamy oczywiście

$$a_x = |\bar{a}| \cos \alpha, \tag{1}$$

gdzie α oznacza kąt między wektorem $\bar{a}$ a osią x (str. 3, rys. 2).

Przypuśćmy, że mamy dany prostokątny układ współrzędnych (x, y, z). Oznaczając współrzędne wektora $\bar{a}$ względem osi układu przez a_x, a_y, a_z, zaś kąty, jakie $\bar{a}$ tworzy z osiami przez α, β, γ (rys. 1), otrzymamy na mocy (1):

(I) $$a_x = |\bar{a}| \cos \alpha, \qquad a_y = |\bar{a}| \cos \beta, \qquad a_z = |\bar{a}| \cos \gamma.$$

A więc: *wektory równe mają równe współrzędne* względem osi układu.

Ponieważ według znanego wzoru z geometrii analitycznej jest $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, więc na mocy (I)

(II) $$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

(III) $$\cos \alpha = a_x / |\bar{a}|, \qquad \cos \beta = a_y / |\bar{a}|, \qquad \cos \gamma = a_z / |\bar{a}|.$$

Z równań (II) i (III) wynika, że współrzędne wektora określają jego długość, kierunek i zwrot.

A więc dwa *wektory* $\bar{a}$ i $\bar{b}$, *mające odpowiednio równe współrzędne* względem osi układu prostokątnego (t. zn. dla których $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$), *są równe*.

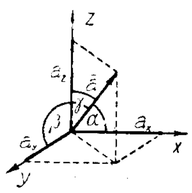
Jeżeli wektor $\bar{a}$ leży w płaszczyźnie xy (rys. 2), to

(IV) $$a_x = |\bar{a}| \cos \alpha, \qquad a_y = |\bar{a}| \sin \alpha,$$

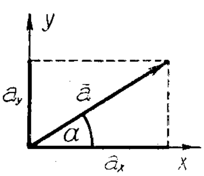
(V) $$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \qquad \cos \alpha = a_x / |\bar{a}|, \qquad \sin \alpha = a_y / |\bar{a}|.$$

Często (gdy pomyłka jest wykluczona) rzutami wektora $\bar{a}$ na osie układu nazywamy także współrzędne a_x, a_y, a_z.

Łatwo można okazać, że jeżeli punkty A i A' mają współrzędne odpowiednio x, y, z i x', y', z', to wektor $\bar{a} = \overline{AA'}$ ma współrzędne: $a_x = x' - x$, $a_y = y' - y$ i $a_z = z' - z$.



1.



2.

§ 3. **Suma i różnica wektorów.** *Sumą* wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nazywamy każdy wektor, który daje się otrzymać w sposób następujący:

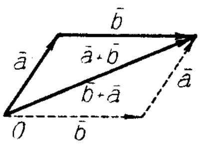
Z dowolnego punktu O kreślimy wektor równy wektorowi $\bar{a}$, z końca tego wektora drugi wektor równy wektorowi $\bar{b}$; wektor, którego początkiem jest O, końcem zaś koniec drugiego wektora, nazywamy *sumą wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$* (str. 4, rys. 1) i oznaczamy przez

$$\bar{a} + \bar{b}.$$

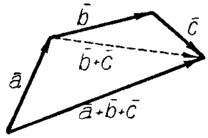
Dla wektorów przeciwnych (rys. 3) otrzymamy więc w szczególności

$$\bar{a}+(-\bar{a})=0.$$

Sumę kilku wektorów np. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ otrzymujemy, tworząc sumę $\bar{b}+\bar{c}$, a następnie dodając otrzymaną sumę do wektora $\bar{a}$ (rys. 2).



1.



2.

Do sumy wektorów stosuje się prawa przemienności i łączności. A więc:

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a},$$

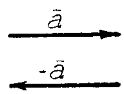
$$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}).$$

Z praw tych wynika, że suma ilukolwiek wektorów nie zmieni się, jeżeli zmienimy porządek składników lub jeżeli kilka z nich zastąpimy ich sumą. Np.:

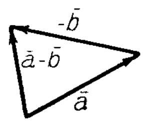
$$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}=\bar{a}+\bar{c}+\bar{e}+\bar{b}+\bar{d}=(\bar{a}+\bar{c})+\bar{e}+(\bar{b}+\bar{d}).$$

Różnicę $\bar{a}-\bar{b}$ określamy jako sumę $\bar{a}+(-\bar{b})$. Zatem wedle definicji

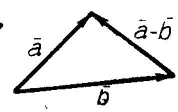
$$\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b}).$$



3.



4.



5.

Rys. 4 i 5 przedstawiają, jak wyznacza się różnicę. Ponieważ

$$(\bar{a}-\bar{b})+\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})+\bar{b}=\bar{a},$$

więc *różnica dodana do odjemnika daje w wyniku odjemną.*

§ 4. Iloczyn wektora przez liczbę. *Iloczynem wektora* $\bar{a}$ *przez liczbę* m nazywamy wektor, który ma ten sam kierunek co $\bar{a}$, długość $|m|$ razy większą, a zwrot zgodny z $\bar{a}$ lub przeciwny, zależnie od tego czy $m>0$, czy $m<0$. Iloczyn $\bar{a}$ przez m oznaczamy przez

$$m\bar{a}.$$

Jeżeli $m=0$ lub $\bar{a}=0$, to $m\bar{a}=0$.

Mamy oczywiście (p. str. 5, rys. 1 dla $m=2$):

$$(-m)\bar{a}=-m\bar{a}.$$

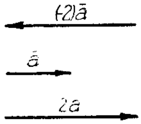
Wynika stąd, że

$$(-1)\bar{a}=-\bar{a}.$$

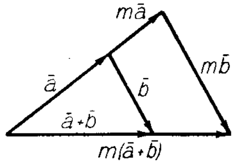
Dla iloczynu łatwo dowieść prawa rozdzielności sumy względem iloczynu i prawa łączności:

$$m(\bar{a}+\bar{b})=m\bar{a}+m\bar{b}, \qquad (m+p)\,\bar{a}=m\bar{a}+p\bar{a}, \qquad m(p\bar{a})=(mp)\bar{a},$$

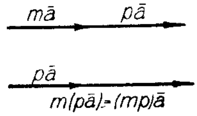
gdzie m i p oznaczają liczby (rys. 2 i 3). Z powyższych praw wynikają zwykłe reguły algebraiczne dodawania i mnożenia.



1.



2.



3.

Dzielenie wektora przez liczbę (różną od zera) określamy jako mnożenie przez odwrotność tej liczby. A więc:

$$\frac{\bar{a}}{m}=\frac{1}{m}\,\bar{a}.$$

§ 5. Współrzędne sumy i iloczynu. Łatwo można okazać, że *rzut* (na prostą lub płaszczyznę) *sumy* wektorów równa się *sumie rzutów* tych wektorów (rys. 4). A więc:

$$\text{Rzut}\,(\bar{a}+\bar{b}) = \text{Rzut}\ \bar{a} + \text{Rzut}\ \bar{b}.$$

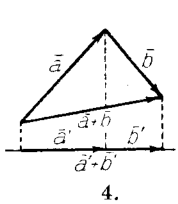
Podobnie *rzut iloczynu* wektora przez liczbę równa się *iloczynowi rzutu* wektora przez tę liczbę (rys. 5). A więc:

$$\text{Rzut}\,(m\bar{a})=m\ \text{Rzut}\ \bar{a}.$$

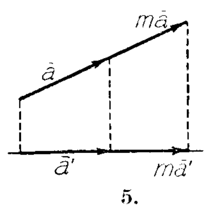
Jeżeli wektor $\bar{a}$ ma współrzędne a_x, a_y, a_z, a wektor $\bar{b}$ ma współrzędne b_x, b_y, b_z, wówczas wektor $\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}$ ma współrzędne

$$s_x=a_x+b_x, \quad s_y=a_y+b_y, \quad s_z=a_z+b_z.$$

Wynika to z twierdzenia o rzucie sumy.



4.



5.

Podobnie z twierdzenia o rzucie iloczynu wektora przez liczbę wynika, że wektor $\bar{c}=m\bar{a}$ ma współrzędne $c_x=ma_x$, $c_y=ma_y$, $c_z=ma_z$.

Jeżeli np. $\bar{d}=5\bar{a}-3\bar{b}-2\bar{c}$, to:

$$d_x=5a_x-3b_x-2c_x, \qquad d_y=5a_y-3b_y-2c_y, \qquad d_z=5a_z-3b_z-2c_z.$$

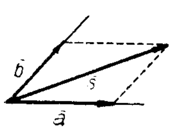
§ 6. Rozkład wektora. Sumę wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ o wspólnym początku, lecz różnym położeniu (tj. nie leżących na jednej prostej), przedstawia przekątna równoległoboku zbudowanego na tych wektorach. Podobnie sumę trzech wektorów $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, o wspólnym początku, lecz nie leżących na jednej płaszczyźnie, przedstawia przekątna równoległościanu zbudowanego na tych wektorach.

Na powyższych twierdzeniach opiera się rozkład danego wektora na sumę dwóch lub trzech wektorów o danych kierunkach.

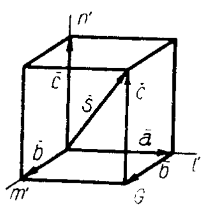
Przypuśćmy, że mamy dany wektor $\bar{s}$ i dwie proste l i m nie równoległe, leżące w pewnej płaszczyźnie równoległej do $\bar{s}$. Jeżeli chcemy przedstawić wektor $\bar{s}$ jako sumę dwóch wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ równoległych do l i m, to tworzymy równoległobok o bokach równoległych do l i m, którego przekątną jest $\bar{s}$. W tym celu kreślimy z początku i końca wektora $\bar{s}$ proste równoległe do l i m. Boki otrzymanego równoległoboku wyznaczą wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ (rys. 1).

Łatwo zauważyć, że taki rozkład jest możliwy w jeden tylko sposób.

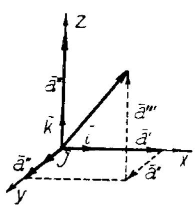
Podobnie, jeżeli dany jest wektor $\bar{s}$ i trzy proste l, m, n nie równoległe do jednej płaszczyzny i chcemy przedstawić wektor $\bar{s}$ jako sumę trzech wektorów $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ równoległych do l, m, n, to budujemy równoległościan o krawędziach równoległych do l, m, n, którego przekątną jest $\bar{s}$. Kreślimy zatem z początku O wektora $\bar{s}$ proste l', m', n' równoległe do l, m, n; następnie z końca wektora $\bar{s}$ prostą równoległą do n aż do punktu G przecięcia tej prostej z płaszczyzną prostych l', m'; wreszcie z punktu G kreślimy proste równoległe do l i m. Punkty przecięcia tych prostych z prostymi l' i m' są końcami wektorów a i b, których początkiem jest O. Wektor $\bar{c}$ jest równy wektorowi łączącemu punkt G z końcem wektora $\bar{s}$ (rys. 2).



1.



2.



3.

Jeden tylko taki rozkład jest możliwy, ponieważ istnieje jeden tylko równoległościan o krawędziach równoległych do l, m, n i o przekątnej $\bar{s}$.

Szczególnym przypadkiem takiego rozkładu jest **przedstawienie wektora przy pomocy wektorów jednostkowych.** Oznaczamy rzuty wektora $\bar{a}$ na osie układu (x, y, z) przez $\bar{a}', \bar{a}'', \bar{a}'''$. Mamy oczywiście (str. 6, rys. 3):

$$\bar{a}=\bar{a}'+\bar{a}''+\bar{a}'''.$$

Obierzmy na osiach układu wektory $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ o długości 1, skierowane zgodnie z odpowiednimi osiami. Z określenia współrzędnych a_x, a_y, a_z (§ 2, str. 2) wynika, że

$$\bar{a}'=a_x\bar{i}, \qquad \bar{a}''=a_y\bar{j}, \qquad \bar{a}'''=a_z\bar{k}.$$

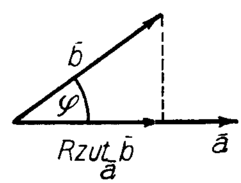
Zatem

(I) $$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}.$$

Wektory $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ nazywamy wektorami *jednostkowymi*. Wzór (I) wyraża wektor $\bar{a}$ przy pomocy współrzędnych i wektorów jednostkowych.

§ 7. Iloczyn skalarowy. *Iloczynem skalarowym* wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ tworzących kąt φ (p. rys. obok), nazywamy liczbę $|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi$.

Iloczyn skalarowy oznaczamy przez $\bar{a}\cdot\bar{b}$ lub $\bar{a}\bar{b}$. Zatem



(I) $$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi.$$

Iloczyn skalarowy jest zerem nie tylko w przypadku gdy $\bar{a}=0$ lub $\bar{b}=0$, lecz także gdy $\bar{a}\perp\bar{b}$, wtedy bowiem $\varphi=\pi/2$, więc $\cos\varphi=0$. Jeżeli zaś $\bar{a}\neq 0$ i $\bar{b}\neq 0$, to iloczyn skalarowy może być dodatni lub ujemny zależnie od tego, czy φ jest kątem ostrym czy rozwartym.

Iloczyn nie zależy od porządku czynników. Mamy bowiem

$$\bar{b}\bar{a}=|\bar{b}|\,|\bar{a}|\cos\varphi=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi=\bar{a}\bar{b}.$$

Wyrażenie $|\bar{b}|\cos\varphi$ przedstawia rzut wektora $\bar{b}$ na oś wyznaczoną przez wektor $\bar{a}$ i zgodnie z nim skierowaną. Rzut ten nazywamy *rzutem $\bar{b}$ na kierunek $\bar{a}$* i oznaczamy przez $\mathrm{Rzut}_{\bar{a}}\bar{b}$. Zatem:

$$\mathrm{Rzut}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cos\varphi, \qquad \mathrm{Rzut}_{\bar{b}}\bar{a}=|\bar{a}|\cos\varphi.$$

Na mocy więc (I):

(1) $$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}|\,\mathrm{Rzut}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\,\mathrm{Rzut}_{\bar{b}}\bar{a}.$$

Zatem *iloczyn skalarowy równa się iloczynowi długości jednego wektora przez rzut drugiego na kierunek pierwszego.*

Prawo rozdzielności. Na mocy określenia iloczynu mamy

$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=|\bar{c}|\,\mathrm{Rzut}_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b}).$$

Ponieważ $\mathrm{Rzut}_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b})=\mathrm{Rzut}_{\bar{c}}\bar{a}+\mathrm{Rzut}_{\bar{c}}\bar{b}$, więc

$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=|\bar{c}|\,\mathrm{Rzut}_{\bar{c}}\bar{a}+|\bar{c}|\,\mathrm{Rzut}_{\bar{c}}\bar{b}.$$

Lecz $|\bar{c}|\,\mathrm{Rzut}_{\bar{c}}\bar{a}=\bar{a}\bar{c}$ i $|\bar{c}|\,\mathrm{Rzut}_{\bar{c}}\bar{b}=\bar{b}\bar{c}$; zatem

$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}. \tag{II}$$

Podobnie postępując, otrzymamy

$$(\bar{a}-\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}-\bar{b}\bar{c}. \tag{III}$$

A więc dla sumy i różnicy zachodzi prawo rozdzielności względem iloczynu. Wynikają stąd zwyczajne prawa mnożenia sumy przez sumę.

Np. $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{c}+\bar{d})=(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}+(\bar{a}+\bar{b})\bar{d}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}+\bar{a}\bar{d}+\bar{b}\bar{d}.$

Prawo łączności. Niechaj m oznacza jakąkolwiek liczbę. Zatem

$$(m\bar{a})\bar{b}=|\bar{b}|\,\mathrm{Rzut}_{\bar{b}}(m\bar{a})=m\bar{b}\,\mathrm{Rzut}_{\bar{b}}\bar{a}, \qquad \text{skąd } (m\bar{a})\bar{b}=m(\bar{a}\bar{b}).$$

Niechaj teraz m, n oznaczają liczby. Na mocy poprzedniego wzoru jest $(m\bar{a})(n\bar{b})=m\{\bar{a}\cdot(n\bar{b})\}=m\{n(\bar{a}\bar{b})\}$, więc

$$(m\bar{a})(n\bar{b})=(mn)(\bar{a}\bar{b}). \tag{IV}$$

Wynikają stąd zwykłe prawa mnożenia wielomianu przez wielomian.

Np. $(2\bar{a}-3\bar{b})\,5\bar{c}=10\bar{a}\bar{c}-15\bar{b}\bar{c}$, $(4\bar{a}-2\bar{b})(3\bar{c}+\bar{d})=12\bar{a}\bar{c}-6\bar{b}\bar{c}+4\bar{a}\bar{d}-2\bar{b}\bar{d}$.

Kwadrat wektora. Kwadrat skalarowy $\bar{a}^2$ określamy jako iloczyn $\bar{a}\cdot\bar{a}$. Zatem $\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\,|\bar{a}|\cos 0$, więc, $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$, stąd $|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}$.

Otrzymujemy stąd:

$$\begin{aligned}(\bar{a}+\bar{b})^2&=(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{b})=\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2,\\ (\bar{a}-\bar{b})^2&=(\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2,\\ (\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})&=\bar{a}^2-\bar{b}^2.\end{aligned} \tag{V}$$

Dwa pierwsze wzory możemy napisać w postaci:

$$\begin{aligned}|\bar{a}+\bar{b}|^2&=|\bar{a}|^2+2|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi+|\bar{b}|^2,\\ |\bar{a}-\bar{b}|^2&=|\bar{a}|^2-2|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi+|\bar{b}|^2.\end{aligned} \tag{VI}$$

Wzory te wyrażają t. zw. *twierdzenie Carnota*, znane z trygonometrii.

Przedstawienie analityczne iloczynu skalarowego. Niech $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ oznaczają wektory jednostkowe (str. 7). Z określenia iloczynu skalarowego otrzymujemy:

(2) $$\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1, \qquad \bar{i}\bar{j}=\bar{i}\bar{k}=\bar{j}\bar{k}=0.$$

Przedstawiając wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ w postaci $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, $b_x=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$ (p. str. 7), możemy iloczyn $\bar{a}\bar{b}$ napisać w postaci

$$\bar{a}\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}).$$

Wymnażając w myśl reguł mnożenia i opierając się na wzorach (2), dostajemy

(VII) $$\bar{a}\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Wzór powyższy pozwala obliczyć iloczyn skalarowy dwóch wektorów, gdy znane są ich współrzędne.

Jeżeli wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są do siebie prostopadłe, to $\bar{a}\bar{b}=0$, zatem

(VIII) $$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

Naodwrót, jeżeli $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, to wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są do siebie prostopadłe, o ile są różne od zera. Zatem wzór (VIII) przedstawia *warunek prostopadłości* wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ (różnych od zera).

§ 8. Iloczyn wektorowy. *Iloczynem wektorowym* wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nazywamy wektor $\bar{c}$ spełniający warunki następujące:

1) Długość. Jeżeli φ oznacza kąt, jaki tworzą wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$, to

(I) $$|\bar{c}|=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\varphi.$$

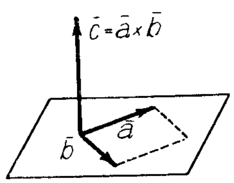
2) Kierunek. Wektor $\bar{c}$ jest prostopadły do wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$.

Jeżeli więc np. wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ wychodzą z jednego punktu, to wektor $\bar{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\bar{a}$ i b (p. rysunek).

3) Zwrot. Zwrot układu wektorów $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ jest zgodny z przyjętym układem współrzędnych, t. zn. lewy.

Iloczyn wektorowy oznaczamy przez

$$\bar{a}\times\bar{b}.$$



Ze wzoru (I) wynika, że $|\bar{c}|$ jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{a}=0$ lub $\bar{b}=0$ lub $\varphi=0$ lub $\varphi=\pi$.

Zatem: *iloczyn wektorowy jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z czynników jest zerem, lub gdy czynniki są do siebie równoległe.*

Jeżeli iloczyn jest zerem, to odpadają oczywiście warunki 2) i 3). W szczególności mamy

(II) $$\bar{a}\times\bar{a}=0.$$

Uwaga. Wartość bezwzględna iloczynu wektorowego wynosi $|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\varphi$ (p. wzór (I)). Wyrażenie to przedstawia pole równoległoboku zbudowanego na wektorach odpowiednio równych wektorom $\bar{a}$ i $\bar{b}$ i wychodzących z jednego punktu (p. rys. na str. 9).

Zmiana porządku czynników. Jeżeli zmienimy porządek czynników, to otrzymamy iloczyn

$$\bar{b}\times\bar{a}.$$

Iloczyn $\bar{a}\times\bar{b}$ ma (na mocy określenia iloczynu) długość i kierunek te same, co iloczyn $\bar{b}\times\bar{a}$, lecz zwrot przeciwny. Zatem

(III) $$\bar{b}\times\bar{a}=-(\bar{a}\times\bar{b}).$$

A więc: *wraz ze zmianą porządku czynników zmienia się znak iloczynu wektorowego.*

Prawo łączności. Opierając się na określeniu iloczynu wektorowego, łatwo można wykazać następujące związki (gdzie m i n oznaczają liczby):

(IV) $$m(\bar{a}\times\bar{b})=(m\bar{a})\times\bar{b}=\bar{a}\times(m\bar{b}),$$

(V) $$(m\bar{a})\times(n\bar{b})=(mn)(\bar{a}\times\bar{b}).$$

Np. $\bar{a}\times\bar{b}=3(\bar{a}\times\bar{b})$; $\quad 2\bar{a}\times 3\bar{b}=6(\bar{a}\times\bar{b})$.

Prawo rozdzielności względem sumy. Dla iloczynu wektorowego zachodzą wzory:

(VI) $$\bar{c}\times(\bar{a}+\bar{b})=\bar{c}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{b};\qquad (\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}.$$

Wyprowadzimy najpierw wzór pierwszy. Możemy oczywiście przyjąć, że $\bar{a}$, $\bar{b}$ i $\bar{c}$ mają wspólny początek O.

Załóżmy na razie, że $|\bar{c}|=1$. Poprowadźmy przez O płaszczyznę $\Pi\perp\bar{c}$. Połóżmy

(1) $$\bar{s}=\bar{a}+\bar{b}$$

i oznaczmy przez $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{s}'$ rzuty wektorów $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{s}$ na płaszczyznę Π (p. rys. na str. 11). Mamy oczywiście

(2) $$\bar{s}'=\bar{a}'+\bar{b}'.$$

Niechaj φ będzie kątem zawartym między $\bar{c}$ i $\bar{a}$. Zatem $|\bar{a}'|=|\bar{a}|\sin\varphi=|\bar{a}|\,|\bar{c}|\sin\varphi$, gdyż założyliśmy, że $|\bar{c}|=1$. A więc

(3) $|\bar{a}'|=|\bar{c}\times\bar{a}|$ i podobnie $|\bar{b}'|=|\bar{c}\times\bar{b}|$, $|\bar{s}'|=|\bar{c}\times\bar{s}|$.

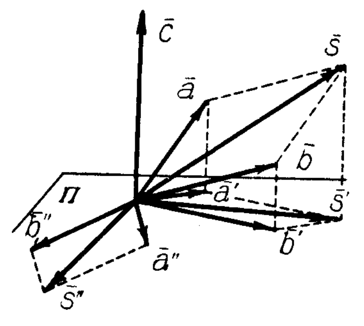
Obróćmy teraz wektory $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{s}'$ o 90^0 w płaszczyźnie Π około O od ręki lewej ku prawej, względem człowieka mającego stopy w początku, zaś głowę w końcu wektora $\bar{c}$. Otrzymamy wektory $\bar{a}''$, $\bar{b}''$, $\bar{s}''$. Będzie na mocy (2)

(4) $$\bar{s}''=\bar{a}''+\bar{b}'',$$

(5) $$|\bar{a}''|=|\bar{a}'|, \qquad |\bar{b}''|=|\bar{b}'|, \qquad |\bar{s}''|=|\bar{s}'|.$$

Wektor $\bar{a}''$ jest prostopadły do $\bar{a}$ i $\bar{c}$; zwrot układu wektorów $(\bar{c}, \bar{a}, \bar{a}'')$ jest lewy. Ponieważ nadto na mocy (3) i (5) mamy $|\bar{a}''|=|\bar{c}\times\bar{a}|$, więc $\bar{a}''=\bar{c}\times\bar{a}$ i podobnie $\bar{b}''=\bar{c}\times\bar{b}$, $\bar{s}''=\bar{c}\times\bar{s}$. Na mocy więc (4) i (1) otrzymujemy

$$\bar{c}\times(\bar{a}+\bar{b})=\bar{c}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{b}.$$



Wzór powyższy udowodniliśmy przy założeniu, że $|\bar{c}|=1$. Udowodnimy go teraz w przypadku ogólnym. Niechaj $\bar{h}$ będzie wektorem o długości 1, zgodnie skierowanym z wektorem $\bar{c}$. Zatem

(6) $$|\bar{h}|=1 \quad \text{i} \quad \bar{c}=|\bar{c}|\,\bar{h},$$

skąd na mocy prawa łączności

(7) $$\bar{c}\times(\bar{a}+\bar{b})=|\bar{c}|\bar{h}\times(\bar{a}+\bar{b})=|\bar{c}|\,\{\bar{h}\times(\bar{a}+\bar{b})\}.$$

Ale na mocy wzoru udowodnionego dla przypadku $|\bar{c}|=1$ i na mocy prawa łączności jest kolejno:

$$|\bar{c}|\{\bar{h}\times\bar{a}+\bar{h}\times\bar{b}\}=|\bar{c}|(\bar{h}\times\bar{a})+|\bar{c}|(\bar{h}\times\bar{b})=(|\bar{c}|\bar{h})\times\bar{a}+(|\bar{c}|\bar{h})\times\bar{b},$$

skąd na mocy (6) i (7) otrzymujemy już w całej ogólności:

$$\bar{c}\times(\bar{a}+\bar{b})=\bar{c}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{b}.$$

Drugi ze wzorów (VI) możemy otrzymać z pierwszego, stosując wzór (III):

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=-\{\bar{c}\times(\bar{a}+\bar{b})\}=-\{\bar{c}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{b}\}=-(\bar{c}\times\bar{a})-(\bar{c}\times\bar{b})=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}.$$

Ze wzoru (VI) wynika łatwo wzór

(VII) $$(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{c}+\bar{d})=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{d}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{d}.$$

Np. $(2\bar{a}-3\bar{b})\times(5\bar{c}+2\bar{d})=10\bar{a}\times\bar{c}+4\bar{a}\times\bar{d}-15\bar{b}\times\bar{c}-6\bar{b}\times\bar{d}$.
$(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{b}=-2\bar{a}\times\bar{b}$.
$(3\bar{a}+2\bar{b})\times(5\bar{a}-2\bar{b})=-16\bar{a}\times\bar{b}$.

Współrzędne iloczynu wektorowego. Oznaczając przez $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ wektory jednostkowe (str. 7), mamy:

(8) $$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0,$$

(9) $$\bar{i}\times\bar{j}=-(\bar{j}\times\bar{i})=\bar{k},\qquad \bar{j}\times\bar{k}=-(\bar{k}\times\bar{j})=\bar{i},\qquad \bar{k}\times\bar{i}=-(\bar{i}\times\bar{k})=\bar{j}.$$

Kładąc

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k},\qquad \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k},$$

otrzymamy

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}).$$

Wykonując mnożenie, dostajemy na mocy (8) i (9):

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\bar{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\bar{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\bar{k}.$$

Dla $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ jest więc

(VIII) $$c_x=a_yb_z-a_zb_y,\qquad c_y=a_zb_x-a_xb_z,\qquad c_z=a_xb_y-a_yb_x.$$

§ 9. Iloczyn kilku wektorów. 1° Weźmy najpierw pod uwagę iloczyn $\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})$. Kładąc $\bar{r}=\bar{b}\times\bar{c}$, otrzymamy

$$\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{a}\bar{r}=a_xr_x+a_yr_y+a_zr_z.$$

Ponieważ $r_x=b_yc_z-b_zc_y$ i. t. d., więc

$$\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=a_x(b_yc_z-b_zc_y)+a_y(b_zc_x-b_xc_z)+a_z(b_xc_y-c_yb_x).$$

Wzór powyższy możemy napisać w postaci

(I) $$\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=\begin{vmatrix} a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \\ c_x, & c_y, & c_z \end{vmatrix}.$$

Ze znanych własności wyznaczników wynika łatwo wzór

(II) $$\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=\bar{b}(\bar{c}\times\bar{a})=\bar{c}(\bar{a}\times\bar{b}).$$

Przypuśćmy, że wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ mają początek w początku układu. Z geometrii analitycznej wiadomo, że objętość V czworościanu o krawędziach $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ wynosi $\frac{1}{6}$ wartości wyznacznika (I). A więc $V=\frac{1}{6}\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})$.

Zatem: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wektory* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *(o wspólnym początku) leżały w jednej płaszczyźnie, jest, by* $V=0$, *czyli by* $\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=0$.

Jeżeli zaś nie zakładamy, że $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ mają wspólny początek, to — jak łatwo widzieć — warunek $\bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})=0$ *jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by wektory* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *były równoległe do jednej płaszczyzny.*

2^0 Weźmy teraz pod uwagę iloczyn $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$. Oznaczmy ten iloczyn przez $\bar{u}$ i połóżmy $\bar{r}=\bar{b}\times\bar{c}$. Zatem

$$u_x = a_y r_z - a_z r_y = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z).$$

Dodając i odejmując składnik $a_x b_x c_x$, otrzymamy

$$u_x = b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z b_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z),$$

skąd $u_x = b_x(\bar{a}\bar{c}) - c_x(\bar{a}\bar{b})$ i podobnie $u_y = b_y(\bar{a}\bar{c}) - c_y(\bar{a}\bar{b})$, $u_z = b_z(\bar{a}\bar{c}) - c_z(\bar{a}\bar{b})$. Zatem

$$\text{(III)} \qquad \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}).$$

3^0 Ze wzorów (I), (II) i (III) wynikają wzory następujące:

$$\text{(IV)} \qquad (\bar{a}\times\bar{b})(\bar{c}\times\bar{d}) = (\bar{a}\bar{c})(\bar{b}\bar{d}) - (\bar{a}\bar{d})(\bar{b}\bar{c}),$$

$$\text{(V)} \qquad (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) = \bar{b}[\bar{a}(\bar{c}\times\bar{d})] - \bar{a}[\bar{b}(\bar{c}\times\bar{d})].$$

§ 10. Funkcje wektorowe. Jeżeli każdej liczbie t przedziału (t', t'') przypisany jest wektor $\bar{w}$, wówczas powiadamy, że w przedziale (t', t'') określoną mamy *funkcję wektorową* i piszemy

$$\text{(1)} \qquad \bar{w} = \bar{F}(t),$$

Współrzędne w_x, w_y, w_z są również funkcjami (już w zwykłym sensie czyli *liczbowymi*) zmiennej t. Zatem:

$$\text{(2)} \qquad w_x = f(t), \qquad w_y = \varphi(t), \qquad w_z = \psi(t).$$

Powyższe trzy funkcje określają dokładnie funkcję wektorową (1).

Granica. Powiadamy, że funkcja wektorowa (1) ma *granicę* $\bar{w}_0$ *dla* t *dążącego do* t_0, co piszemy

$$\lim_{t\to t_0} \bar{F}(t) = \bar{w}_0,$$

gdy

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = w_{0,x}, \quad \lim_{t\to t_0} \varphi(t) = w_{0,y} \quad \text{i} \quad \lim_{t\to t_0} \psi(t) = w_{0,z}.$$

Ciągłość. Funkcja wektorowa (1) jest *ciągła dla* t_0, jeżeli $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{F}(t) = \overline{w}_0$, gdzie $\overline{w}_0 = \overline{F}(t_0)$.

Oczywiście zachodzą wówczas związki:

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0), \qquad \lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0), \qquad \lim_{t\to t_0} \psi(t) = \psi(t_0).$$

Funkcje f, φ, ψ są więc wtedy ciągłe dla $t = t_0$. Na odwrót, jeżeli f, φ, ψ są ciągłe dla t_0, to funkcja wektorowa $\overline{w} = \overline{F}(t)$ jest również ciągła dla t_0.

Pochodna. Oznaczamy przez Δt przyrost zmiennej t, a przez $\Delta\overline{w}$ odpowiedni przyrost wektora $\overline{w}$. Więc $\overline{w} + \Delta\overline{w} = \overline{F}(t + \Delta t)$, zatem $\Delta\overline{w} = \overline{F}(t + \Delta t) - \overline{F}(t)$, skąd

$$\frac{\Delta\overline{w}}{\Delta t} = \frac{\overline{F}(t+\Delta t) - \overline{F}(t)}{\Delta t}.$$

Granicę $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\overline{w}}{\Delta t}$ nazywamy *pochodną* funkcji $\overline{F}(t)$ w punkcie t.

Pochodną oznaczamy przez $\dfrac{d\overline{w}}{dt}$, $\overline{w}'$ lub $\overline{F}'(t)$.

Ponieważ wektor $\Delta\overline{w}$ ma współrzędne

$$\Delta w_x = f(t+\Delta t) - f(t), \qquad \Delta w_y = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t), \qquad \Delta w_z = \psi(t+\Delta t) - \psi(t),$$

więc

$$w'_x = f'(t), \qquad w'_y = \varphi'(t), \qquad w'_z = \psi'(t).$$

Pochodne wyższych rzędów określamy w zwykły sposób: a więc drugą pochodną jako pochodną pierwszej pochodnej, trzecią pochodną jako pochodną drugiej pochodnej i t. d. Wyższe pochodne oznaczamy przez

$$\frac{d^2\overline{w}}{dt^2}, \quad \frac{d^3\overline{w}}{dt^3}, \quad \dots \quad \text{lub} \quad \overline{w}'', \overline{w}''', \quad \dots \quad \text{i t. d.}$$

Łatwo wykazać, że

$$w''_x = f''(t), \qquad w''_y = \varphi''(t), \qquad w''_z = \psi''(t) \quad \text{i t. d.}$$

Jeżeli funkcje $\overline{w} = \overline{F}(t)$ i $\overline{v} = \overline{\Phi}(t)$ mają pochodne, to zachodzą wzory:

(I) $$\frac{d(\overline{w}\pm\overline{v})}{dt}=\frac{d\overline{w}}{dt}\pm\frac{d\overline{v}}{dt},$$

(II) $$\frac{d(m\overline{w})}{dt}=m\frac{d\overline{w}}{dt}\qquad\text{(gdzie } m \text{ jest liczbą),}$$

(III) $$\frac{d(\overline{w}\overline{v})}{dt}=\frac{d\overline{w}}{dt}\overline{v}+\overline{w}\frac{d\overline{v}}{dt},$$

(IV) $$\frac{d(\overline{w}\times\overline{v})}{dt}=\frac{d\overline{w}}{dt}\times\overline{v}+\overline{w}\times\frac{d\overline{v}}{dt}.$$

Wyprowadzimy wzór (III). Mamy $\Delta(\overline{w}\overline{v})=(\overline{w}+\Delta\overline{w})(\overline{v}+\Delta\overline{v})-\overline{w}\overline{v}$, więc

$$\frac{\Delta(\overline{w}\overline{v})}{\Delta t}=\frac{\Delta\overline{w}}{\Delta t}\overline{v}+\overline{w}\frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t}+\Delta\overline{w}\frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t},$$

skąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy (III).

Funkcje wektorowe wielu zmiennych. Możemy również rozpatrywać funkcje wektorowe wielu zmiennych. Np. funkcja wektorowa

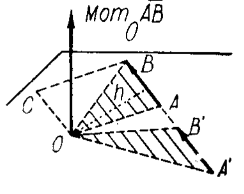
$$\overline{w}=\overline{F}(\xi,\eta,\zeta)$$

jest funkcją trzech zmiennych ξ, η, ζ. Rzuty wektora $\overline{w}$ są wówczas określone pewnemi funkcjami

$$w_x=f(\xi,\eta,\zeta),\qquad w_y=\varphi(\xi,\eta,\zeta),\qquad w_z=\psi(\xi,\eta,\zeta).$$

Granicę, ciągłość i pochodne cząstkowe funkcyj wektorowych kilku zmiennych łatwo już podać, wzorując się na przypadku jednej zmiennej.

§ 11. Moment wektora. Moment wektora względem punktu. Przypuśćmy, że mamy dany wektor $\overline{AB}$ i punkt O. *Momentem wektora* $\overline{AB}$ *względem punktu* O nazywamy wektor $\overline{M}$, spełniający warunki następujące:



(1) $|\overline{M}|$ równa się podwójnemu polu trójkąta OAB czyli

$$|\overline{M}|=|\overline{AB}|\cdot h,$$

gdzie h oznacza odległość punktu O od $\overline{AB}$.

(2) Kierunek wektora $\overline{M}$ jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez O i $\overline{AB}$.

(3) Układ wektorów $(\overline{AB}, \overline{OA}, \overline{M})$ ma zwrot zgodny z układem współrzędnych, t. j. zwrot lewy.

Moment wektora $\overline{AB}$ względem punktu O oznaczać będziemy symbolem

$$\mathrm{Mom}_O \overline{AB}.$$

Moment jest zerem tylko w przypadkach, gdy $\overline{AB}=0$ lub gdy przedłużenie wektora $\overline{AB}$ przechodzi przez O. Jeżeli moment jest zerem, wówczas warunki (2) i (3) odpadają.

Dla wektorów równoważnych (str. 2) zachodzi następujące

Twierdzenie 1. *Wektory równoważne mają względem tego samego punktu momenty równe.*

Dowód. Przyjmijmy, że $\overline{AB}\equiv\overline{A'B'}$. Zatem wektory $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ są równe i leżą na tej samej prostej. Łatwo stwierdzić, że momenty obu wektorów względem O mają ten sam kierunek i zwrot. Mają również tę samą długość, gdyż trójkąty OAB i $OA'B'$ mają równe powierzchnie (równe podstawy i wspólną wysokość). A więc $\mathrm{Mom}_O \overline{AB} = \mathrm{Mom}_O \overline{A'B'}$, c. b. d. d.

Moment jako iloczyn wektorowy. Weźmy pod uwagę iloczyn wektorowy $\overline{AB}\times\overline{OA}$. Zauważmy, że iloczyn powyższy ma ten sam kierunek i zwrot, co $\mathrm{Mom}_O \overline{AB}$. Mamy również $|\overline{AB}\times\overline{OA}|=|\mathrm{Mom}_O \overline{AB}|$. Bezwzględna bowiem wartość iloczynu równa się polu równoległoboku $OABC$ (p. rys. na str. 15), zatem podwójnemu polu trójkąta OAB. A więc

$$\mathrm{Mom}_O \overline{AB}=\overline{AB}\times\overline{OA}.$$

Gdybyśmy zamiast wektora $\overline{AB}$ wzięli wektor równoważny $\overline{A'B'}$, wówczas mielibyśmy

$$\mathrm{Mom}_O \overline{A'B'}=\overline{A'B'}\times\overline{OA'}.$$

Na mocy więc poprzedniego twierdzenia

$$\mathrm{Mom}_O \overline{AB}=\overline{A'B'}\times\overline{OA'}=\overline{AB}\times\overline{OA'}.$$

A więc: *jeżeli A' jest dowolnym punktem na prostej, na której leży wektor $\overline{AB}$, wówczas*

$$\mathrm{Mom}_O \overline{AB}=\overline{AB}\times\overline{OA'}.$$

Twierdzenie 2. *Jeżeli dwa wektory równe mają względem pewnego punktu równe momenty, to są równoważne.*

Dowód. Zakładamy, że

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \quad \text{i} \quad \mathrm{Mom}_O \overline{AB} = \mathrm{Mom}_O \overline{A'B'}.$$

Zatem $\overline{AB} \times \overline{OA} = \overline{A'B'} \times \overline{OA'}$, skąd $\overline{AB} \times \overline{OA} = \overline{AB} \times \overline{OA'}$, więc $\overline{AB} \times (\overline{OA} - \overline{OA'}) = 0$. Ponieważ zaś $\overline{OA} - \overline{OA'} = \overline{A'A}$, więc

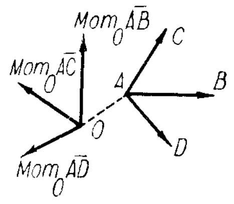
$$\overline{AB} \times \overline{A'A} = 0.$$

Lecz $\overline{AB} \times \overline{A'A} = \mathrm{Mom}_{A'} \overline{AB}$, więc

$$\mathrm{Mom}_{A'} \overline{AB} = 0.$$

Wynika stąd, że punkt A' leży na przedłużeniu wektora $\overline{AB}$. Ponieważ nadto $\overline{AB}$ jest równoległy do $\overline{A'B'}$, więc $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ leżą na tej samej prostej.

Moment sumy wektorów o wspólnym początku. Załóżmy, że dane są wektory $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ (t. j. oba o początku w punkcie A). Niechaj $\overline{AD}$ będzie ich sumą. Mamy



$$\mathrm{Mom}_O \overline{AD} = \overline{AD} \times \overline{OA} = (\overline{AB} + \overline{AC}) \times \overline{OA},$$

zatem $\mathrm{Mom}_O \overline{AD} = \overline{AB} \times \overline{OA} + \overline{AC} \times \overline{OA}$, więc

$$\mathrm{Mom}_O \overline{AD} = \mathrm{Mom}_O \overline{AB} + \mathrm{Mom}_O \overline{AC}.$$

Podobny wzór otrzymamy dla sumy kilku wektorów. A więc: *suma momentów kilku wektorów o wspólnym początku równa się momentowi ich sumy o tym samym początku.*

Współrzędne momentu. Położenie wektora $\bar{a}$ jest określone, jeśli dane są jego rzuty i współrzędne x, y, z dowolnego punktu A prostej l, na której wektor $\bar{a}$ leży. Niechaj x_0, y_0, z_0 będą współrzędnymi punktu O. Mamy

$$\mathrm{Mom}_O \bar{a} = \bar{a} \times \overline{OA}.$$

Rzuty wektora $\overline{OA}$ wynoszą $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Zatem, oznaczając przez $\overline{M}$ moment względem O, otrzymamy:

$$\text{(I)} \quad M_x = a_y(z - z_0) - a_z(y - y_0), \quad M_y = a_z(x - x_0) - a_x(z - z_0),$$
$$M_z = a_x(y - y_0) - a_y(x - x_0).$$

Jeżeli w szczególności punkt O jest początkiem układu, to $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$, a więc

(II) $\quad M_x=a_y z-a_z y, \qquad M_y=a_z x-a_x z, \qquad M_z=a_x y-a_y x.$

Przypuśćmy, że $\bar{a}\equiv\bar{a}'$. Zatem, oznaczając przez $\bar{M}$ i $\bar{M}'$ momenty wektorów względem dowolnego punktu, mamy $\bar{a}=\bar{a}'$, $\bar{M}=\bar{M}'$ czyli

$$a_x=a'_x,\ a_y=a'_y,\ a_z=a'_z, \qquad M_x=M'_x,\ M_y=M'_y,\ M_z=M'_z.$$

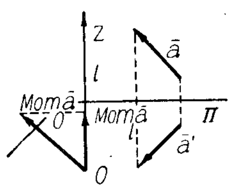
Na odwrót, jeżeli zachodzą powyższe równości, to $\bar{a}=\bar{a}'$ i $\bar{M}=\bar{M}'$, zatem na mocy twierdzenia 2, str. 17, wektory $\bar{a}$ i $\bar{a}'$ są równoważne.

A więc: *rzuty wektora $\bar{a}$ i rzuty momentu $\bar{M}$ względem dowolnego punktu wyznaczają długość, kierunek, zwrot i położenie wektora $\bar{a}$.*

Moment wektora względem prostej. Niech dane będą wektor $\bar{a}$ i prosta l. Poprowadźmy przez dowolny punkt O prostej l płaszczyznę Π prostopadłą do l. Utwórzmy rzut $\bar{a}'$ wektora $\bar{a}$ na płaszczyznę Π.

Moment wektora $\bar{a}'$ względem O nazywamy *momentem wektora $\bar{a}$ względem prostej l* i oznaczamy symbolem $\mathrm{Mom}_l\bar{a}$.

$\mathrm{Mom}_l\bar{a}$ nie zależy oczywiście od obioru punktu O.



$\mathrm{Mom}_l\bar{a}$ jest zerem tylko w następujących przypadkach:

1⁰ gdy $\bar{a}=0$,

2⁰ gdy $\bar{a}\parallel l$, gdyż wtedy $\bar{a}'=0$,

3⁰ gdy przedłużenie $\bar{a}$ przecina l, gdyż wtedy przedłużenie $\bar{a}'$ przechodzi przez O.

Jeżeli d oznacza odległość $\bar{a}$ od l, zaś φ kąt między $\bar{a}$ i l, to łatwo można okazać, że

(III) $$|\mathrm{Mom}_l\bar{a}|=d\,|\bar{a}|\sin\varphi.$$

Obierzmy prostą l za oś z, płaszczyznę Π za płaszczyznę xy. Połóżmy $\bar{M}=\mathrm{Mom}_O\bar{a}$ i $\bar{L}=\mathrm{Mom}_l\bar{a}$. Ponieważ $\bar{a}'$ ma rzuty $a'_x=a_x$, $a'_y=a_y$, $a'_z=0$, więc $L_x=0$, $L_y=0$ i $L_z=a_x y-a_y x$, gdzie x, y, z są współrzędnymi początku wektora $\bar{a}$. Widzimy więc, że $M_z=L_z$.

A zatem: $\mathrm{Mom}_l\bar{a}$ *jest rzutem na prostą l momentu wektora $\bar{a}$ względem dowolnego punktu tej prostej.*