ROZDZIAŁ III

DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

I. Dynamika punktu swobodnego

§ 1. Podstawowe pojęcia dynamiki. Przedmiotem badań dynamiki jest ruch ciał pod wpływem sił, które ruch ten wywołują.

W kinematyce wszystkie układy odniesienia są, jak już wiemy, równouprawnione; jest rzeczą obojętną, jak mierzymy czas (t. j. jakie przedziały czasu uważamy za równe). Prawa dynamiki natomiast, wypowiedziane przez Newtona, ważne są nie dla każdego układu odniesienia i nie dla każdego pomiaru czasu.

Układ inercjalny, czas bezwzględny. Układ odniesienia, dla którego przy pewnym pomiarze czasu zachodzą prawa dynamiki newtonowskiej, nazywamy *układem inercjalnym*, odpowiedni zaś pomiar czasu — pomiarem *czasu absolutnego*, a ruch ciała względem układu inercjalnego — *ruchem absolutnym.*

Ściśle biorąc, nie znamy dotychczas przykładu ani układu inercjalnego ani czasu absolutnego. W wielkiej liczbie zagadnień możemy jednak obrać takie układy odniesienia i takie metody mierzenia czasu, że stosowanie praw dynamiki doprowadza do wyników dość mało różniących się od doświadczenia, aby błędy można było praktycznie pominąć.

Jeżeli np. badamy ruch drobnych ciał w pobliżu ziemi w krótkim przeciągu czasu, to wyniki będą naogół wystarczająco dokładne, gdy za układ inercjalny przyjmiemy układ odniesienia związany z ziemią, zaś mierzenie czasu absolutnego oprzemy na założeniu, że ziemia względem gwiazd stałych obraca się około swej osi w równych czasach o równe kąty.

W innych jednak zagadnieniach (jak np. wahadło Foucaulta, giroskop, ruch planet) stosowanie praw dynamiki do układu odniesienia związanego z ziemią nie prowadzi już do równie dobrych wyników. Znacznie lepsze wyniki otrzymamy tu, przyjmując za układ inercjalny układ odniesienia, którego początek znajduje się w słońcu, osie zaś skierowane są ku gwiazdom stałym.

Prócz poprzednio wspomnianego mierzenia czasu, opartego na jednostajności ruchu obrotowego ziemi około swej osi, istnieją jeszcze inne metody mierzenia czasu, które podaje astronomia.

W dynamice zakładamy, że *dany mamy układ inercjalny i czas absolutny.*

Masa i siła. W dynamice występują nowe pojęcia, jak np. masa i siła. Przyjmujemy, że są one czytelnikowi znane z fizyki i nie będziemy bliżej wchodzili w ich określenia. Podamy tylko te ich własności, jakie zakładamy o nich w dynamice.

Masa ciała wyraża się liczbą dodatnią, zależną od obioru jednostki masy t. j. od obioru dowolnego ciała, którego masę oznaczamy liczbą 1.

Stosunek mas dwóch ciał nie zależy od obioru jednostki.

Jeżeli więc przez m_1 i m_2 oznaczymy masy dwóch ciał przy pewnej jednostce, zaś przez m_1' i m_2' masy tych ciał przy innej jednostce, to

$$m_1/m_2 = m_1'/m_2'.$$

Niech np. masa pewnego ciała A wynosi m, jeżeli za jednostkę obierzemy masę ciała B. Przyjmijmy ponadto, że masa ciała A wynosi m', ciała zaś B wynosi m'', jeżeli za jednostkę obierzemy masę innego ciała C. Stosunek mas ciał A i B wynosi zatem $m/1$, gdy jednostką jest masa ciała B, zaś m'/m'', gdy jednostką jest masa ciała C. Jest więc na mocy założenia $m/1 = m'/m''$, skąd

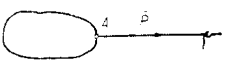
$$m' = mm''.$$

Możemy zatem, znając masy ciał przy pewnej jednostce, obliczyć je przy innej jednostce.

Masa ciała jest niezależna od czasu, t. zn. że dane ciało ma w każdej chwili tę samą masę.

Siłę uważamy za wyznaczoną, jeżeli podana jest jej *wielkość* (wartość bezwzględna), *kierunek*, *zwrot i punkt zaczepienia*. Siłę, działającą na ciało, może nam uzmysłowić nitka napięta lub sprężyna rozciągnięta, przyczepiona do ciała (p. rysunek).

Siły, których wielkość wyraża się liczbą 0, nazywamy *siłami zerowymi*. Przy siłach zerowych nie rozróżniamy kierunku ani zwrotu.



Wielkość siły niezerowej wyraża się liczbą dodatnią, zależną od jednostki siły, t. j. od obioru dowolnej siły (niezerowej), której wielkość oznaczamy liczbą 1.

Stosunek wielkości dwóch sił (niezerowych) *nie zależy od obioru jednostki.*

Opierając się na tym, możemy z wielkości siły przy pewnej jednostce wyznaczyć jej wielkość przy innej jednostce.

Siłę, działającą na ciało, przedstawiamy jako *wektor*. Obieramy w tym celu dowolną jednostkę długości i dowolną jednostkę siły. Siłę daną przedstawia wektor, którego długość wyraża się tą samą liczbą co wielkość siły, zaś początek, kierunek i zwrot są te same, co początek, kierunek i zwrot siły. Wektor mający np. 5 jednostek długości przedstawia siłę mającą 5 jednostek siły. Siłę zerową przedstawia wektor zerowy.

Działania na siłach określamy jako działania na wektorach, które przedstawiają te siły. Jeżeli np. wektory $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ przedstawiają pewne siły, wówczas sumą tych sił nazywamy siłę, którą przedstawia wektor $\overline{P}=\overline{P}_1+\overline{P}_2+\ldots+\overline{P}_n$.

Momentem siły (przedstawionej przez wektor $\overline{P}$) względem punktu O nazywamy moment wektora $\overline{P}$ względem O.

Punkt materialny. W dynamice zajmiemy się najpierw ruchem punktów, a następnie ruchem ciał. Podobnie jak w kinematyce, punkt będziemy niekiedy uważali za model ciała (np. w przypadku, gdy rozmiary ciała są drobne w stosunku do toru).

Masą punktu nazywamy masę ciała, które dany punkt przedstawia; sam punkt nazywamy wówczas *punktem materialnym*.

Jeżeli siła działa na ciało, którego obrazem jest punkt materialny A, wówczas siłę tę przedstawiamy w postaci wektora o początku w A.

Siła, działająca na punkt materialny, może się zmieniać w czasie zarówno co do wielkości, jak co do kierunku i zwrotu.

§ 2. Prawa dynamiki Newtona. Prawa dynamiki, wypowiedziane przez Newtona, podają związki, jakie zachodzą w ruchu absolutnym między masą, przyśpieszeniem i siłami, działającymi na punkt materialny.

Prawa ruchu. Niech układ odniesienia (x, y, z) będzie układem inercjalnym, zaś t niech oznacza czas absolutny. Przy tych założeniach prawa ruchu możemy wypowiedzieć jak następuje:

I. *Jeżeli m oznacza masę punktu materialnego, $\overline{p}$ przyśpieszenie w chwili t, $\overline{P}$ sumę sił działających na punkt materialny w chwili t, to*

$$m\,\overline{p}=K\,\overline{P}, \tag{1}$$

gdzie K oznacza pewną liczbę (dodatnią), zależną *tylko od obioru jednostek* długości, czasu, masy i siły (a więc niezależną od czasu, masy i siły).

Z równości (1) wynika, że

$$m\,|\overline{p}| = K\,|\overline{P}|. \tag{2}$$

Jeżeli więc ze wspomnianych jednostek trzy obierzemy dowolnie, to czwartą możemy zawsze tak dobrać, by $K=1$. Obierzmy np. dowolnie jednostki czasu, długości i masy, a za jednostkę siły obierzmy taką siłę, która punktowi o masie 1 nadaje przyśpieszenie 1. Przy tych jednostkach dla $m=1$ i $|\overline{P}|=1$ mamy $|\overline{p}|=1$, zatem ze wzoru (2) otrzymamy $K=1$. Związek (1) przyjmie wtedy postać

$$m\,\overline{p} = \overline{P}. \tag{I}$$

Na przyszłość będziemy stale zakładać, że jednostki są tak dobrane, by $K=1$. Prawo Newtona będziemy więc zawsze przyjmowali w postaci (I).

Tworząc rzuty na osie układu otrzymamy na mocy (I):

$$mp_x = P_x, \qquad mp_y = P_y, \qquad mp_z = P_z. \tag{II}$$

Równości (I) i (II) są oczywiście równoważne.

Ponieważ $\overline{p}=d\overline{v}/dt$, zaś m jest liczbą stałą, więc $m\overline{p} = d(m\overline{v})/dt$. Zatem związek (I) możemy napisać również w postaci

$$d(m\overline{v})/dt = \overline{P}. \tag{III}$$

Wektor $m\overline{v}$ nazywamy *pędem* (*ilością ruchu*).

A więc: *pochodna pędu* (względem czasu) *równa się sumie sił działających na punkt materialny.*

Niech na punkt materialny o masie m działają siły, których suma $\overline{P}$ w pewnym okresie czasu stale jest zerem. Wtedy $m\overline{p}=0$, więc przyśpieszenie $\overline{p}=0$, i punkt porusza się wówczas ruchem jednostajnym prostolinijnym (lub jest w spoczynku). Mamy więc następujące prawo, zwane *prawem bezwładności Newtona*:

II. *Jeżeli na punkt materialny w pewnym okresie czasu działają siły o sumie* 0, *to punkt jest w spoczynku albo w ruchu jednostajnym prostolinijnym.*

Na odwrót, jeżeli punkt jest w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostolinijnym, to przyśpieszenie $\overline{p}=0$, a ponieważ na mocy prawa (I) jest $m\overline{p}=\overline{P}$, więc suma sił działających $\overline{P}$ jest zerem.

Siły działające na punkt materialny pochodzą zazwyczaj z działania innych punktów materialnych na dany punkt. Dla sił tych Newton podał prawo następujące, zwane *prawem akcji i reakcji*:

III. *Jeżeli punkt materialny A działa na punkt materialny B z pewną siłą, to również punkt B działa wówczas na punkt A z siłą równą co do wielkości i kierunku, ale o zwrocie przeciwnym; siły z jakimi punkty A i B działają na siebie są zawsze skierowane wzdłuż prostej AB, łączącej te punkty.*

Jeżeli siła z jaką punkt A działa na punkt B ma zwrot ku A (a więc siła, z jaką punkt B działa na A, ma zwrot ku B), to mówimy, że punkty A i B *przyciągają się*; w przypadku przeciwnym mówimy, że punkty te *się odpychają*.

Równowaga punktu i sił. Jeżeli punkt materialny jest w spoczynku, to powiadamy, że jest *w równowadze*. O siłach $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ mówimy, że są *w równowadze* lub że *się równoważą*, jeżeli ich suma jest zerem, t. zn. jeżeli $\overline{P}_1+\overline{P}_2+\ldots+\overline{P}_n=0$.

Jeżeli więc punkt materialny jest w równowadze, to siły działające na ten punkt również są w równowadze. Jeżeli natomiast siły działające na punkt materialny w pewnym okresie czasu są w równowadze, to w tym okresie czasu przyśpieszenie $\overline{p}=0$, zatem punkt jest bądź w równowadze, bądź w ruchu jednostajnym prostolinijnym.

Siła bezwładności. Zasada d'Alemberta. Prawo (I) możemy napisać również w postaci

$$\overline{P}+(-m\overline{p})=0. \tag{IV}$$

Wektor $-m\overline{p}$ o początku w punkcie m nazywamy *siłą bezwładności.*

Nie należy sądzić, że wektor $-m\overline{p}$ przedstawia siłę działającą na punkt materialny m. Tylko dla wygody nazywamy ten wektor siłą (bezwładności). Na punkt m działają tylko siły, których suma wynosi $\overline{P}$.

Związek (IV) możemy wypowiedzieć jak następuje:

Siły działające na punkt materialny są w równowadze z siłą bezwładności.

Powyższe sformułowanie jest równoważne I prawu Newtona i nosi nazwę *zasady d'Alemberta.* Zasada ta daje duże usługi przy badaniu ruchu punktów t. zw. nieswobodnych.

§ 3. Układy jednostek dynamicznych. Zasadniczymi jednostkami, jakie przyjmujemy w dynamice, są jednostki długości czasu i masy. Przy pomocy tych jednostek określamy jednostkę siły. Za jednostkę siły obieramy mianowicie siłę, która masie 1 nadaje przyśpieszenie 1.

Układ fizyczny *cgs*. Otóż za jednostkę długości przyjmuje się *centymetr* (cm), masy *gram* (g), za jednostkę czasu *sekundę* (sek) i siły *dynę* (dyn).

Pierwotnie metr (m=100 cm) miał przedstawiać jedną czterdziestomilionową część południka ziemskiego. Przy obliczeniach jednak popełniono pewien niewielki błąd. Dzisiaj metr określamy przy pomocy długości wzorca przechowywanego w Paryżu. Podobnie jednostka masy 1 g miała być pierwotnie masą 1 cm^3 wody chemicznie czystej przy 4^0 C pod ciśnieniem 760 mm rtęci. Obecnie jednak przyjmujemy za 1 kilogram (kg=1000 g) masę wzorca platynowego, przechowywanego w Paryżu.

Jednostkę czasu 1 sek określamy z pomocą t. zw. średniej doby słonecznej, której wyznaczeniem zajmuje się astronomia. Średnia doba słoneczna = 24 godzin (godz), godzina = 60 minut (min), minuta = 60 sek.

Jednostką siły 1 dyn jest siła, która masie 1 g nadaje przyśpieszenie 1 cm · sek^{-2}.

Układ zasadniczych jednostek (centymetr, gram, sekunda) nazywamy krótko *układem fizycznym cgs*.

Mierzenie mas i sił. Drobne ciała w pobliżu ziemi, puszczone swobodnie, spadają ku ziemi pionowo ruchem jednostajnie przyśpieszonym (jeżeli pominiemy opór powietrza). Przyśpieszenie to (zwane *ziemskim*) jest w danym miejscu na ziemi dla wszystkich ciał jednakowe, zmienia się jednak wraz z szerokością geograficzną. Oznacza się je przez g. U nas przyśpieszenie ziemskie wynosi w przybliżeniu $g=981$ cm · sek^{-2}.

Niechaj m oznacza masę drobnego ciała. Siłę skierowaną pionowo w dół, o wielkości $Q=mg$, nazywamy *ciężarem* tego ciała.

Ciężar jest więc proporcjonalny do masy ciała; ciała mające równe ciężary (w tym samym miejscu na ziemi) mają równe masy i na odwrót.

Przy pomocy przyrządu zwanego *wagą* (którego zasadę poznamy w rozdz. VI), możemy porównywać ciężary dwóch ciał. Ponieważ z równości ciężarów wynika równość mas, więc przy pomocy wagi możemy pośrednio porównywać masy ciał. Wynika stąd, że przy pomocy wagi możemy *mierzyć*, t. j. wyznaczać *masy* ciał.

Siły mierzymy sposobem *dynamicznym* lub *statycznym*.

Sposób dynamiczny opiera się na I prawie Newtona ($\overline{P}=m\overline{p}$). Ze wzoru tego możemy wyznaczyć siłę $\overline{P}$, gdy znamy masę ciała m i przyśpieszenie $\overline{p}$, jakie mu siła $\overline{P}$ nadaje.

Sposób statyczny opiera się na tym, że pod działaniem sił ciała zmieniają swój kształt (odkształcają się). Ze znajomości odkształceń możemy w pewnych przypadkach wnioskować o wielkości sił, wywołujących te odkształcenia. Jeżeli np. na sprężynkę, zawieszoną pionowo, działa w dolnym jej końcu siła skierowana pionowo w dół, wówczas sprężynka się wydłuża. Wydłużenie jest (przy małych siłach) proporcjonalne do wielkości siły działającej. Przyrządy służące do statycznego mierzenia sił nazywamy *dynamometrami*.

Układ techniczny jednostek. W technice rozpowszechniony jest t. zw. *układ techniczny* jednostek. W układzie technicznym przyjmuje się za jednostki zasadnicze jednostki długości, czasu i siły. Jednostkę długości jest 1 m, czasu 1 sek, a siły 1 *kilogram* (kg). Jest to ciężar 1 dcm^3 wody (w normalnych warunkach) pod 45^0 szerokości geograficznej północnej (gdzie przyśpieszenie ziemskie $g=981\ cm \cdot sek^{-2}=9{,}81\ m \cdot sek^{-2}$).

Jeżeli we wzorze $|\overline{P}|=m|\overline{p}|$ położymy $|\overline{P}|=1$ i $|\overline{p}|=1$, dostaniemy $m=1$. A zatem jednostką masy będzie masa, której siła 1 kg nadaje przyśpieszenie $1\ m \cdot sek^{-2}$.

Niech m będzie masą ciała, Q jego ciężarem (pod 45^0 szer. geogr. płn.) i połóżmy $g=9{,}81\ m \cdot sek^{-2}$. Zatem $Q=mg$, więc

$$(1) \qquad m=Q/g=Q/9{,}81.$$

Ze wzoru powyższego możemy wyznaczyć masę ciała w jednostkach układu technicznego, gdy znamy ciężar ciała. Ponieważ ciężar 9,81 dcm^3 wody (pod 45^0 szer. geogr. płn.) wynosi 9,81 kg, więc jednostkę masy w układzie technicznym przedstawia masa 9,81 dcm^3 wody.

W układzie *cgs* masa 9,81 dcm^3 wody wynosi 9,81 kg (masy) = = 9810 g (masy). Zatem:

(2) Jedn. masy w ukł. techn. = 9,81 kg (masy) = 9810 g (masy).

Aby znaleźć związek między jednostką siły (kg) w układzie technicznym a jednostką siły (dyną) w układzie *cgs*, zauważmy, że

1 dcm^3 wody (t. j. masa 1000 g) spada na ziemię pod wpływem swego ciężaru 1 kg z przyśpieszeniem 981 cm·sek^{-2}. Zatem 1 kg (siły) $=$ $= 1000 \cdot 981$ dyn, skąd

$$1 \text{ kg (siły)} = 981.000 \text{ dyn.} \tag{3}$$

W y m i a r y w i e l k o ś c i d y n a m i c z n y c h. W dynamice występują jeszcze inne wielkości (np. praca, energia kinetyczna i t. p.), których jednostki określamy, podobnie jak jednostkę siły, przy pomocy jednostek zasadniczych, t. j. długości, masy i czasu. Podobnie jak dla wielkości kinematycznych (por. Rozdz. II, § 11), można wprowadzić dla wielkości dynamicznych pojęcie wymiaru. Znajomość wymiaru danej wielkości pozwala w łatwy sposób wyznaczyć miarę tej wielkości przy zmianie zasadniczych jednostek.

Przypuśćmy, że obraliśmy dwa układy jednostek długości, masy i czasu, które oznaczymy odpowiednio przez L, M, T i L', M', T' i że między tymi jednostkami zachodzą związki

$$L = \lambda L', \qquad M = \mu M', \qquad T = \tau T'. \tag{4}$$

Niechaj miara jakiejś wielkości dynamicznej A wynosi a przy jednostkach L, M, T, zaś a' przy jednostkach L', M', T'.

Jeżeli można dobrać takie liczby α, β, γ, żeby dla każdych dwóch układów jednostek L, M, T i L', M', T' spełniających związki (4) zachodził związek

$$a' = a \lambda^{\alpha} \mu^{\beta} \tau^{\gamma}, \tag{5}$$

to *wymiarem* wielkości A nazywamy wyrażenie

$$L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}. \tag{6}$$

Wymiar wielkości A oznaczamy przez $[A]$, a jednostkę wielkości A przy jednostkach L, M, T przedstawiamy symbolem $L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$.

Wielkość A wynosi zatem $a L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$ przy jednostkach L, M, T, zaś $a' L'^{\alpha} M'^{\beta} T'^{\gamma}$ przy jednostkach L', M', T', skąd

$$a L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} = a' L'^{\alpha} M'^{\beta} T'^{\gamma}. \tag{7}$$

Opierając się na wzorach (4) i rachując formalnie, dostaniemy $a L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} = a (\lambda L')^{\alpha} (\mu M')^{\beta} (\tau T')^{\gamma}$, skąd

$$a L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} = (a \lambda^{\alpha} \mu^{\beta} \tau^{\gamma}) L'^{\alpha} M'^{\beta} T'^{\gamma}. \tag{8}$$

Ze wzorów (7) i (8) otrzymujemy przez przyrównanie wzór (5). W ten sposób przy pomocy rachunku formalnego możemy, znając wymiar wielkości A, otrzymać jej miarę przy zmianie jednostek długości, masy i czasu.

Czytelnik łatwo uogólni twierdzenie podane na str. 51, które daje duże usługi przy wyznaczaniu wymiaru.

Przykład 1. Siła o wielkości (wartości bezwzględnej) P, działając na punkt materialny o masie m, nadaje mu przyśpieszenie o wielkości p. Zatem $P=mp$, skąd $[P]=[m]\cdot[p]$. Ponieważ $[m]=M$ i $[p]=LT^{-2}$, więc

$$\text{(I)} \qquad [\text{siła}]=L\,M\,T^{-2}.$$

Jednostką siły w układzie *cgs* jest dyna. Zatem

$$\text{(II)} \qquad \text{dyn}=\text{cm}\cdot\text{g}\cdot\text{sek}^{-2}.$$

Przykład 2. Siłę o wielkości 6 m kg min^{-2} przedstawić w układzie *cgs*.

Mamy

$$6\ \text{m}\cdot\text{kg}\cdot\text{min}^{-2}=6\,(100\ \text{cm})\cdot(1000\ \text{g})\cdot(60\ \text{sek})^{-2}=$$
$$=(6\cdot100\cdot1000\cdot60^{-2})\cdot(\text{cm}\,\text{g}\,\text{sek}^{-2})=166^2/_3\ \text{dyn}.$$

§ 4. Równania ruchu. Jednym z głównych zagadnień dynamiki jest wyznaczenie ruchu punktu materialnego, gdy dana jest masa m tego punktu i siła $\overline{P}$, działająca na ten punkt. W najprostszym przypadku siła $\overline{P}$ może być podana, jako funkcja czasu, t. zn. że dane są funkcje:

$$\text{(1)} \qquad P_x=F(t), \qquad P_y=\Phi(t), \qquad P_z=\Psi(t),$$

określające w każdej chwili t (pewnego okresu czasu) rzuty siły $\overline{P}$ na osie układu.

Spotykamy się jednak z przypadkami bardziej skomplikowanymi. Zdarzyć się może, że jakiś obszar D ma tę własność, że na dany punkt materialny, umieszczony gdziekolwiek w obszarze D, działa pewna siła $\overline{P}$.

Jeżeli siła $\overline{P}$ zależy tylko od położenia punktu, a nie zależy od niczego więcej (np. prędkości), to obszar D nazywamy *polem sił*.

Przykładem pola sił jest pole grawitacyjne ziemskie: na dany bowiem punkt materialny umieszczony w pobliżu ziemi, działa siła ciężkości zależna tylko od położenia tego punktu (a niezależna od prędkości).

W polu sił jest więc siła $\overline{P}$ funkcją współrzędnych x, y, z danego punktu. Pole jest określone, jeżeli są dane funkcje:

$$(2) \qquad P_x = F(x, y, z), \qquad P_y = \Phi(x, y, z), \qquad P_z = \Psi(x, y, z),$$

wyznaczające w każdym punkcie pola rzuty siły $\overline{P}$. Jeżeli więc badamy ruch punktu w polu sił, to mamy do czynienia z siłą, która zależy od położenia punktu.

Jeżeli punkt materialny porusza się w pewnym ośrodku (np. w powietrzu), wówczas na punkt materialny oprócz innych sił działa również siła oporu, jaki ośrodek przeciwstawia ruchowi. Siła ta zależy między innymi od prędkości punktu materialnego. W tym przypadku mamy więc siłę zależną również od prędkości punktu.

W najogólniejszym przypadku przyjmować będziemy, że siła $\overline{P}$ zależy od czasu, położenia i prędkości punktu. Zakładać więc będziemy, że siła $\overline{P}$ działająca na punkt materialny określona jest funkcjami:

$$(3) \quad P_x = F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad P_y = \Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad P_z = \Psi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

których wartościami są rzuty tej siły, zależne od współrzędnych położenia punktu (x, y, z) i jego prędkości $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, oraz od czasu t.

O funkcjach (3) *zakładamy zazwyczaj, że są ciągłe i mają pochodne cząstkowe ciągłe w pewnym obszarze zmiennych* $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$.

Oczywiście, że w poszczególnych zagadnieniach siła $\overline{P}$ nie musi zależeć od wszystkich zmiennych $x, y, \ldots, t$, lecz od niektórych może być niezależna.

Teoretycznie jest do pomyślenia, że siła $\overline{P}$ może zależeć od wyższych pochodnych (np. od drugich, trzecich, i t. d.) zmiennych x, y, z. Z przypadkami takimi nie spotykamy się jednak w zagadnieniach praktycznych i nie będziemy ich tu rozważać.

Niechaj ruch punktu materialnego dany będzie przez funkcje:

$$(4) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Na mocy równości (II), str. 73, otrzymujemy:

$$(\mathrm{I}) \qquad m\ddot{x} = P_x, \qquad m\ddot{y} = P_y, \qquad m\ddot{z} = P_z.$$

Jeżeli założymy, że P_x, P_y, P_z są funkcjami kształtu (3), równania (I) przyjmą postać

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{aligned} m\ddot{x} &= F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} &= \Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{z} &= \Psi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned}$$

Powyższe równania przedstawiają układ równań różniczkowych rzędu drugiego, przyczem szukanymi funkcjami są funkcje (4).

Przypuśćmy, że badamy ruch w otoczeniu pewnej chwili t_0. Załóżmy, że w chwili t_0 punkt miał współrzędne x_0, y_0, z_0, zaś prędkość jego miała rzuty $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Załóżmy nadto, że funkcje (3) są funkcjami ciągłymi, posiadającymi ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu wartości $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0$.

Z teorii równań różniczkowych wiadomo, że przy powyższych założeniach istnieje jeden i tylko jeden układ funkcyj (4) ciągłych wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi w otoczeniu chwili t_0, spełniających równania (II) oraz związki:

$$(5)\quad f(t_0)=x_0,\quad \varphi(t_0)=y_0,\quad \psi(t_0)=z_0;\quad f'(t_0)=\dot{x}_0,\quad \varphi'(t_0)=\dot{y}_0,\quad \psi'(t_0)=\dot{z}_0.$$

Układ ten, jako jedyny układ funkcyj (4) czyniący zadość wszystkim żądanym warunkom, wyznacza więc ruch punktu materialnego, mającego w chwili t_0 współrzędne x_0, y_0, z_0 i prędkość o rzutach $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

Widzimy stąd, że *ruch punktu jest w zupełności wyznaczony przez podanie masy punktu, sił działających na niego i t. zw. warunków początkowych* (t. j. jego położenia i prędkości w chwili początkowej t_0).

Równania (II) noszą nazwę *równań ruchu Newtona.*

Przykład. Siła zależna tylko od czasu. Niech siła $\overline{P}$ zależy tylko od czasu i dana będzie przez funkcje (1). Równania ruchu (II) będą więc miały postać:

$$m\ddot{x}=F(t),\qquad m\ddot{y}=\Phi(t),\qquad m\ddot{z}=\Psi(t).$$

Dzieląc przez m i całkując obustronnie, otrzymamy dla $t_0=0$:

$$\dot{x}=\frac{1}{m}\int_0^t F(t)\,dt+c_1,\qquad \dot{y}=\frac{1}{m}\int_0^t \Phi(t)\,dt+c_2,\qquad \dot{z}=\frac{1}{m}\int_0^t \Psi(t)\,dt+c_3.$$

Przyjmijmy, że dla $t=0$ mamy $\dot{x}=\dot{x}_0$, $\dot{y}=\dot{y}_0$, $\dot{z}=\dot{z}_0$ (warunki początkowe). Podstawiając w powyższych równaniach $t=0$, dostaniemy $c_1=\dot{x}_0$, $c_2=\dot{y}_0$, $c_3=\dot{z}_0$. Zatem:

$$(6)\qquad \dot{x}=F_1(t)+\dot{x}_0,\qquad \dot{y}=\Phi_1(t)+\dot{y}_0,\qquad \dot{z}=\Psi_1(t)+\dot{z}_0,$$

gdzie $F_1(t)=\frac{1}{m}\int_0^t F(t)\,dt$ i t. d. Całkując równania (6), otrzymamy:

$$(7) \quad x = \int_0^t F_1(t)\,dt + \dot{x}_0 t + c_1', \quad y = \int_0^t \Phi_1(t)\,dt + \dot{y}_0 t + c_2', \quad z = \int_0^t \Psi_1(t)\,dt + \dot{z}_0 t + c_3'.$$

Przyjmijmy teraz, że dla $t=0$ jest $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Zatem z równań (7), kładąc $t=0$, dostaniemy $c_1'=x_0$, $c_2'=y_0$, $c_3'=z_0$. A więc

$$(8) \quad x = F_2(t) + \dot{x}_0 t + x_0, \quad y = \Phi_2(t) + \dot{y}_0 t + y_0, \quad z = \Psi_2(t) + \dot{z}_0 t + z_0,$$

gdzie $F_2(t) = \int_0^t F_1(t)\,dt$ i t. d. Z równań (8) wynika, że ruch będzie określony, jeżeli w chwili początkowej $t=0$ podamy położenie punktu (t. j. x_0, y_0, z_0) i prędkość początkową (t. j. $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$).

§ 5. Ruch pod wpływem siły ciężkości. Niech na punkt materialny o masie m działa siła $\bar{P}$ stała co do wielkości, kierunku i zwrotu.

Z tym przypadkiem mamy do czynienia, badając ruch drobnych ciał w pobliżu ziemi i przyjmując za układ inercjalny układ związany z ziemią. Jeżeli pominiemy opór powietrza, to na ciało wyrzucone działać będzie tylko siła ciężkości, którą na małej przestrzeni uważać możemy za stałą.

Niech $\bar{P}$ oznacza siłę ciężkości. Zatem $|\bar{P}| = mg$ (g przyśpieszenie ziemskie). Obierzmy układ (x, y, z) w ten sposób, by oś z była zwrócona pionowo ku górze. Zatem:

$$P_x = 0, \qquad P_y = 0, \qquad P_z = -mg.$$

Równania ruchu Newtona (str. 79, wzory (II)) przyjmą więc postać: $m\ddot{x}=0$, $m\ddot{y}=0$, $m\ddot{z}=-mg$ czyli:

$$(1) \qquad \ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0, \qquad \ddot{z} = -g.$$

Całkując powyższe równania, otrzymamy:

$$(2) \qquad \dot{x} = c_1, \qquad \dot{y} = c_2, \qquad \dot{z} = -gt + c_3.$$

Całkując jeszcze raz, dostaniemy:

$$(3) \qquad x = c_1 t + c_1', \qquad y = c_2 t + c_2', \qquad z = -\tfrac{1}{2} g t^2 + c_3 t + c_3'.$$

Liczby $c_1, c_2, c_3, c_1', c_2', c_3'$ oznaczają stałe całkowania, które wyznaczymy, znając warunki początkowe, t. j. współrzędne x_0, y_0, z_0 i rzuty $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ prędkości $\bar{v}_0$ punktu ruchomego w chwili początkowej t_0. Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że $t_0=0$; ponadto (dobierając odpowiednio układ współrzędnych) możemy przyjąć, że w chwili $t_0=0$ punkt znajdował się w początku układu, zaś prędkość $\bar{v}_0$ leżała w płaszczyźnie pionowej zx.

Zakładamy więc, że dla $t=0$ *jest* $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$ i $\dot{y}_0=0$.

Wstawiając $t=0$ w równania (2) i (3), otrzymamy:

$$c_1=\dot{x}_0,\quad c_2=\dot{y}_0=0,\quad c_3=\dot{z}_0;\quad c_1'=x_0=0,\quad c_2'=y_0=0,\quad c_3'=z_0=0.$$

Równania (2) i (3) przyjmują więc postać:

$$(2')\qquad \dot{x}=\dot{x}_0,\quad \dot{y}=0,\quad \dot{z}=-gt+\dot{z}_0,$$

$$(3')\qquad x=\dot{x}_0 t,\quad y=0,\quad z=-\tfrac{1}{2}gt^2+\dot{z}_0 t.$$

Ponieważ jest stale $y=0$, więc ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej zx.

Rozpatrzymy dwa przypadki: t. zw. rzut pionowy i rzut ukośny.

R z u t p i o n o w y. Załóżmy, że w chwili $t=0$ prędkość $\bar{v}_0$ miała kierunek pionowy (lub była zerem), a więc że $\dot{x}_0=0$. Kładąc $\dot{z}=v$ i $\dot{z}_0=v_0$, otrzymamy z (2′) i (3′):

$$(4)\qquad \dot{x}=0,\quad \dot{y}=0,\qquad x=0,\quad y=0,$$

$$(5)\qquad v=-gt+v_0,\qquad z=-\tfrac{1}{2}gt^2+v_0 t.$$

Ponieważ jest stale $x=0$ i $y=0$, więc punkt porusza się po osi z t. j. po pionie. Mamy nadto $\dot{v}=p=-g$.

A więc: *jeżeli prędkość początkowa ma kierunek pionowy (lub jest zerem), wówczas punkt pod wpływem siły ciężkości porusza się ruchem jednostajnie przyśpieszonym po pionie.*

Przyjmijmy, że $v_0>0$, t. j. że w chwili początkowej prędkość miała zwrot ku górze (np. że wyrzuciliśmy punkt pionowo w górę z prędkością v_0). Oznaczmy przez h wysokość rzutu, t. j. wzniesienie maksymalne, jakie punkt osiągnie. Aby otrzymać h, należy obliczyć maksimum funkcji $z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t$. Dostaniemy

$$(6)\qquad h=v_0^2/2g\qquad \text{w chwili}\qquad t=v_0/g.$$

R z u t u k o ś n y. Załóżmy, że prędkość $\bar{v}_0\,(\neq 0)$ tworzy z osią x kąt $\alpha\neq\pm\pi/2$. Kładąc $|\bar{v}_0|=v_0$, dostaniemy $\dot{x}_0=v_0\cos\alpha$, $\dot{z}_0=v_0\sin\alpha$. Na mocy więc (2′) i (3′):

$$(7)\qquad \dot{x}=v_0\cos\alpha,\qquad \dot{y}=0,\qquad \dot{z}=-gt+v_0\sin\alpha$$

$$(8)\qquad x=v_0 t\cos\alpha,\qquad y=0,\qquad z=-\tfrac{1}{2}gt^2+v_0 t\sin\alpha.$$

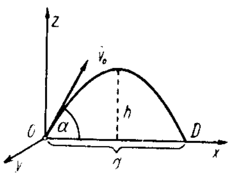
Ponieważ $\cos\alpha\neq 0$ i $v_0\neq 0$, więc na mocy pierwszego z równań (8) $t=x/v_0\cos\alpha$, skąd

$$(9)\qquad z=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Równanie powyższe jest równaniem paraboli.

A więc: *punkt w rzucie ukośnym porusza się po paraboli.*

Parabola ta przecina oś x w punktach O i D. Długość odcinka $OD=d$ nazywamy *odległością rzutu.*



Aby wyliczyć d, podstawiamy $z=0$ w (9). Otrzymamy

$$d=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha. \tag{10}$$

A więc: *maksymalna odległość rzutu przy danej prędkości początkowej* v_0 *wypada dla kąta* $\alpha=\pi/4=45^0$.

Aby otrzymać wysokość rzutu h, należy obliczyć maximum funkcji (9). Dostaniemy

$$h=v_0^2\sin^2\alpha/2g \quad \text{dla} \quad x=v_0^2\sin 2\alpha/2g. \tag{11}$$

§ 6. Ruch w ośrodku stawiającym opór. Punkt materialny, poruszający się w ośrodku takim jak np. powietrze, napotyka na opór. Doświadczenie okazuje, że opór powietrza daje się wyrazić przez siłę zależną tylko od prędkości punktu (przy ciałach opór zależy jeszcze od kształtu ciała). Opór ma kierunek prędkości, ale zwrot przeciwny. Wielkość oporu zależy od wielkości prędkości, a nie zależy od jej kierunku. Oznaczmy wielkość oporu przez Γ, a wielkość prędkości przez v. Możemy więc napisać

$$\Gamma=f(v).$$

Funkcja f jest rosnącą, przyczem $f(0)=0$. Dla prędkości mniejszych od prędkości głosu (wynoszącej w powietrzu 333 m/sek) możemy z dużą dokładnością przyjąć, że

$$\Gamma=\lambda v^2, \tag{1}$$

gdzie λ jest współczynnikiem zależnym od temperatury i gęstości powietrza.

Rzut pionowy. Rozpatrzymy przypadek spadania punktu. Załóżmy, że punkt spada po osi z, której nadajmy zwrot pionowo w dół. Zatem współrzędna prędkości $\dot z=v>0$. Opór jest skierowany ku górze, więc rzut jego na oś z jest ujemny. Przyjmując, że wielkość oporu wyraża się wzorem (1), otrzymujemy, kładąc $\lambda=km$:

$$m\ddot z=m\frac{dv}{dt}=mg-kmv^2. \tag{2}$$

Stąd $\dfrac{dv}{g-kv^2}=dt$, a więc

$$\int\frac{dv}{g-kv^2}=\int dt=t. \tag{3}$$

Kładąc $v_\infty = \sqrt{\frac{g}{k}}$, dostaniemy

$$\int \frac{dv}{g - kv^2} = \frac{1}{k} \int \frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{1}{2kv_\infty} \log \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} + c,$$

gdzie c jest stałą całkowania. Na mocy więc (3)

$$\frac{1}{2\,kv_\infty} \log \frac{v_\infty + v}{v_\infty - v} + c = t. \tag{4}$$

Załóżmy, że w chwili początkowej $t=0$ prędkość wynosiła $v=0$. Podstawiając $v=0$ i $t=0$ we wzorze (4), dostaniemy $c=0$. Zatem

$$v = \frac{e^{2kv_\infty t} - 1}{e^{2kv_\infty t} + 1} v_\infty = \left(1 - \frac{2}{e^{2kv_\infty t} + 1}\right) v_\infty. \tag{5}$$

Ze wzoru (5) wynika, że stale $v < v_\infty$.

A więc: *prędkość punktu spadającego pionowo w ośrodku stawiającym opór nie wzrasta nieograniczenie, lecz jest stale mniejsza od prędkości granicznej* v_∞.

Po pewnym czasie prędkość v mało się różni od v_∞ i punkt spada ruchem prawie jednostajnym. Zaobserwować to możemy na kroplach deszczu.

Rzut ukośny. Załóżmy obecnie, że punkt porusza się w płaszczyźnie pionowej xz. Przyjmijmy ogólnie, że wielkość oporu wynosi $\Gamma = f(v)$. Oznaczając opór przez $\overline{\Gamma}$, otrzymamy więc $\overline{\Gamma} = -\frac{f(v)}{v}\overline{v}$, skąd $\Gamma_x = -\frac{f(v)}{v} v_x$ i $\Gamma_z = -\frac{f(v)}{v} v_z$. Zatem:

$$\Gamma_x = -\frac{f(v)}{v}\dot{x}, \qquad \Gamma_z = -\frac{f(v)}{v}\dot{z}.$$

Równania ruchu będą więc miały postać

$$m\ddot{x} = -\frac{f(v)}{v}\dot{x}, \qquad m\ddot{z} = mg - \frac{f(v)}{v}\dot{z}, \qquad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}.$$

Rozwiązaniem powyższych równań zajmuje się t. zw. balistyka zewnętrzna. Zadanie to jest bardzo trudne, gdyż wartości funkcji $f(v)$ znamy tylko z pomiarów.

§ 7. Moment ilości ruchu. Niech punkt materialny A o masie m porusza się z prędkością $\bar{v}$. Wektor $m\bar{v}$ o początku w A nazwaliśmy *pędem* albo *ilością ruchu* (str. 73). Jeżeli x, y, z są współrzędnymi punktu A, to rzuty pędu na osie układu wynoszą odpowiednio $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$.

Oznaczmy przez $\bar{K}$ moment ilości ruchu $m\bar{v}$ względem początku układu. Zatem (str. 18, wzór (II)):

$$(1) \qquad K_x = m(\dot{y}z - \dot{z}y), \quad K_y = m(\dot{z}x - \dot{x}z), \quad K_z = m(\dot{x}y - \dot{y}x).$$

Utwórzmy pochodną (względem czasu) momentu ilości ruchu. Otrzymamy:

$$(2) \qquad \dot{K}_x = m(\ddot{y}z - \ddot{z}y), \quad \dot{K}_y = m(\ddot{z}x - \ddot{x}z), \quad \dot{K}_z = m(\ddot{x}y - \ddot{y}x).$$

Załóżmy, że układ odniesienia jest układem inercjalnym, a na punkt A działa siła $\bar{P}$. Wówczas $m\ddot{x} = P_x$, $m\ddot{y} = P_y$, $m\ddot{z} = P_z$, skąd na mocy (2)

$$(3) \qquad \dot{K}_x = P_y z - P_z y, \quad \dot{K}_y = P_z x - P_x z, \quad \dot{K}_z = P_x y - P_y x.$$

Wyrażenia, stojące po prawych stronach równań (3), przedstawiają momenty siły $\bar{P}$ względem osi układu. Oznaczając więc przez $\bar{M}$ moment siły $\bar{P}$ względem początku układu, mamy na mocy (3):

$$(4) \qquad \dot{K}_x = M_x, \qquad \dot{K}_y = M_y, \qquad \dot{K}_z = M_z.$$

Równania powyższe możemy napisać w postaci jednego równania wektorowego:

$$(5) \qquad \dot{\bar{K}} = \bar{M}.$$

Za początek układu mogliśmy obrać punkt dowolny.

A więc: *pochodna momentu ilości ruchu względem dowolnego punktu stałego równa się momentowi siły działającej względem tego punktu.*

Z równań (4) wynika również, że *pochodna momentu ilości ruchu względem dowolnej osi stałej równa się momentowi siły względem tej osi.*

Zasada zachowania pól. Przypuśćmy, że moment siły $\bar{P}$ względem pewnej osi l jest stale zerem; albo więc kierunek siły $\bar{P}$ przecina oś l, albo siła $\bar{P}$ jest do osi l równoległa. Obierzmy oś l za oś z. Mamy zatem $M_z = 0$. Na mocy (4) jest więc $\dot{K}_z = 0$, czyli $K_z = \text{const.}$ Stąd na mocy (1) otrzymujemy

$$(6) \qquad m(\dot{x}y - \dot{y}x) = \text{const.} \quad \text{czyli} \quad \dot{x}y - \dot{y}x = \text{const.}$$

Niechaj A' będzie rzutem punktu A na płaszczyznę xy. Punkt A' ma współrzędne x, y. Zatem prędkość polowa (str. 47) punktu A' wynosi $-\frac{1}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x)$. Ze wzoru (6) wynika, że prędkość polowa punktu A' jest stała.

A więc: *jeżeli moment siły względem pewnej osi jest stale zerem, to moment ilości ruchu względem tej osi jest stały i prędkość polowa rzutu ruchu na płaszczyznę prostopadłą do tej osi jest stała.*

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania momentu ilości ruchu* lub *zasady zachowania pól.*

§ 8. Ruch środkowy. Jeżeli punkt materialny porusza się w ten sposób, że jego przyśpieszenie w każdej chwili ma kierunek przechodzący przez pewien stały punkt O, to ruch punktu nazywamy *ruchem środkowym*, punkt zaś O *środkiem ruchu.*

Np. ruch jednostajny punktu po okręgu koła jest ruchem środkowym, gdyż przyśpieszenie jest stale skierowane ku środkowi koła, będącemu w tym przypadku środkiem ruchu (str. 43).

Ponieważ przyśpieszenie ma kierunek siły działającej na punkt materialny, więc w ruchu środkowym kierunek siły przechodzi przez środek ruchu.

Pole sił w którym kierunki sił przechodzą przez pewien stały punkt O nazywamy *polem środkowym*, a punkt O *środkiem pola.*

Punkt o masie M umieszczony nieruchomo w stałym punkcie O i przyciągający inny punkt o masie m z siłą, która zależy tylko od wzajemnej odległości tych punktów, wytwarza pole sił. Pole to jest polem środkowym, gdyż siła działająca na punkt m ma — wedle prawa akcji i reakcji (str. 74, III) — kierunek przechodzący przez punkt M.

Punkt materialny porusza się w polu środkowym ruchem środkowym; środek ruchu leży oczywiście w środku pola.

Obierzmy początek układu współrzędnych w środku pola. Ponieważ kierunek siły przechodzi stale przez początek układu, więc jej moment względem każdej osi jest zerem. Na mocy zasady zachowania pól ruch rzutu punktu na każdą płaszczyznę układu ma wówczas prędkość polową stałą, zatem:

$$\dot{y}z - \dot{z}y = a, \qquad \dot{z}x - \dot{x}z = b, \qquad \dot{x}y - \dot{y}x = c, \tag{1}$$

gdzie a, b, c są pewnymi stałymi. Mnożąc równanie pierwsze obustronnie przez x, drugie przez y, trzecie przez z i dodając stronami, otrzymamy

$$ax + by + cz = 0. \tag{2}$$

Widzimy więc, że współrzędne punktu spełniają stale równanie (2). Jest ono równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez początek układu (t. j. przez środek pola). Zatem punkt porusza się w płaszczyźnie, przechodzącej przez początek układu.

Jeżeli na tej płaszczyźnie obierzemy osie x, y, wówczas z (1) wynika, że prędkość polowa w płaszczyźnie ruchu jest stała; promienie wodzące zakreślają więc w równych czasach równe pola.

A zatem: *tor ruchu środkowego jest torem płaskim, leżącym w płaszczyźnie przechodzącej przez środek; promienie wodzące, wychodzące ze środka, zakreślają w równych czasach równe pola.*

Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne:

Jeżeli tor punktu jest płaski, a promienie wodzące, wychodzące z pewnego stałego punktu O (leżącego w płaszczyźnie toru), zakreślają w równych czasach równe pola, wówczas kierunek siły działającej przechodzi stale przez punkt O.

Dowód. Obierzmy początek układu w O, zaś osie x, y w płaszczyźnie ruchu. Punkt porusza się więc w płaszczyźnie xy. Ponieważ prędkość polowa jest stała, więc $\dot{x}y - \dot{y}x = \text{const}$. Różniczkując obustronnie, dostaniemy $\ddot{x}y - \ddot{y}x = 0$, więc $(m\ddot{x})y - (m\ddot{y})x = 0$, skąd

$$P_x y - P_y x = 0. \tag{3}$$

Ponieważ $\ddot{z} = 0$, więc $P_z = m\ddot{z} = 0$. Siła $\overline{P}$ leży zatem w płaszczyźnie xy; na mocy (3) moment siły $\overline{P}$ względem O jest zerem, więc kierunek siły $\overline{P}$ przechodzi przez O, c. b. d. d.

Uwaga. Załóżmy, że prędkość polowa w ruchu środkowym jest zerem. Wtedy $\dot{x}y - \dot{y}x = 0$ lub (we współrzędnych biegunowych) $r^2\dot{\varphi} = 0$. Wynika stąd, że albo jest stale $r = 0$, t. zn. że punkt jest w spoczynku, albo jest stale $\dot{\varphi} = 0$ czyli $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, t. zn., że punkt porusza się po prostej przechodzącej przez środek (i nachylonej do osi x pod kątem φ_0).

A więc: *jeżeli w ruchu środkowym prędkość polowa jest zerem, to punkt porusza się po prostej przechodzącej przez środek.*

Jeżeli zaś założymy, że prędkość polowa jest różną od zera, to $r^2\dot{\varphi} \neq 0$, czyli $r \neq 0$.

A więc: *jeżeli w ruchu środkowym prędkość polowa jest różna od zera, to punkt nigdy nie przechodzi przez środek.*

Wzór Bineta. Punkt A o masie m porusza się w środkowym polu sił w płaszczyźnie xy z prędkością polową różną od zera. Wprowadźmy współrzędne biegunowe r, φ. Oznaczmy przez P rzut siły $\overline{P}$ na promień wodzący $\overline{OA}$. Zatem $P_x = P\cos\varphi$ i $P_y = P\sin\varphi$, więc $P_x\cos\varphi + P_y\sin\varphi = P$, skąd

$$P = m(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi). \tag{4}$$

Ponieważ $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin y$, więc (por. str. 47, wzór (2))

$$\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$

skąd na mocy (4)

$$P = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2). \tag{5}$$

Oznaczmy prędkość polową przez $\frac{1}{2}c$. Z założenia jest $\frac{1}{2}c \neq 0$. Ponieważ we współrzędnych biegunowych prędkość polowa wynosi $\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ (str. 47), więc

$$r^2\dot{\varphi} = c \qquad \text{czyli} \qquad \dot{\varphi} = c/r^2. \tag{6}$$

Przypuśćmy, że tor ma równanie $r = f(\varphi)$. Zatem

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2} = -c\frac{d(1/r)}{d\varphi}, \tag{7}$$

więc

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -c^2\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2}\frac{1}{r^2}. \tag{8}$$

Ze wzoru (5) na mocy (6) i (8) otrzymujemy:

$$P = m\left(-\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} - \frac{c^2}{r^3}\right),$$

zatem

$$P = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right). \tag{I}$$

Wzór powyższy nosi nazwę *wzoru Bineta.*

Wzór ten z kształtu toru pozwala wyznaczyć siłę, działającą w ruchu środkowym. Na odwrót, znając siłę P jako funkcję zmiennych r i φ, możemy wyznaczyć tor.

§ 9. Ruchy planet. Prawa Keplera. Opierając się na obserwacjach, podał Kepler następujące trzy prawa odnoszące się do ruchów planet:

1) Planety krążą po elipsach, w których ognisku znajduje się słońce.

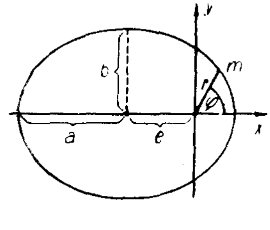
2) Promienie wodzące, wychodzące ze słońca zakreślają w równych czasach równe pola.

3) Kwadraty czasów obiegu dwóch planet są do siebie w stosunku takim, jak trzecie potęgi ich średnich odległości od słońca (przyczem przez średnią odległość rozumie się połowę wielkiej osi elipsy, po której krąży planeta).

Trzecie prawo nie jest zupełnie ścisłe. Przyczynę tego poznamy później. Zauważmy jeszcze, że prawa Keplera mają charakter ściśle kinematyczny.

Wnioski z praw Keplera. Z praw Keplera wyprowadził Newton (przy pomocy dynamiki) prawo, określające siły, które wywołują ruch planet. Z pierwszych dwóch praw Keplera wynika mianowicie, że planety krążą po torach płaskich z prędkością polową stałą. Na mocy więc twierdzenia odwrotnego ze str. 87, siły działające na planety są siłami środkowymi, których kierunki przechodzą przez słońce.

Obierzmy w płaszczyźnie ruchu planety osie x, y, umieszczając początek układu w słońcu jako ognisku elipsy, po której planeta krąży. Za kierunek osi x obierzmy kierunek wielkiej osi elipsy i nadajmy osi x taki zwrot, by środek elipsy leżał w części ujemnej osi x. Oznaczmy oś wielką elipsy przez $2a$, oś małą przez $2b$, a mimośród przez $2e$. Równanie elipsy we współrzędnych biegunowych będzie wówczas miało postać



(1) $$r=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

gdzie

(2) $$\varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Ze wzoru Bineta (str. 88, (I)) możemy otrzymać siłę, działającą na planetę. Mamy mianowicie na mocy (1) $\frac{1}{r}=\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{a(1-\varepsilon^2)}$, skąd $\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2}=-\frac{\varepsilon\cos\varphi}{a(1-\varepsilon^2)}$, a więc na mocy (2) i wzoru Bineta

(3) $$P=-\frac{mc^2a}{b^2r^2}.$$

Pole elipsy wynosi $ab\pi$; oznaczając przez T czas obiegu planety, otrzymamy z uwagi na to, że $\frac{1}{2}c$ jest prędkością polową, $\frac{1}{2}c = ab\pi/T$, czyli $c = 2ab\pi/T$. Na mocy zatem (3) dostaniemy

$$P = -\frac{4\pi^2 m a^3}{r^2 T^2}. \tag{4}$$

Ponieważ $P < 0$, więc siła jest skierowana ku słońcu.

Na mocy trzeciego prawa Keplera mamy dla dwóch planet $T^2/T_1^2 = a^3/a_1^3$, czyli $a^3/T^2 = a_1^3/T_1^2$. Iloraz a^3/T_2^2 ma zatem stałą wartość dla wszystkich planet. Kładąc

$$\mu = a^3/T^2, \tag{5}$$

otrzymamy z (4)

$$P = -\frac{4\pi^2 \mu m}{r^2}. \tag{6}$$

A więc: *siła, pod której wpływem planeta się porusza, jest skierowana ku słońcu i wprost proporcjonalna (co do wielkości) do masy planety, a odwrotnie do kwadratu odległości od słońca.*

Prawo ogólnego ciążenia. Wynik powyższy, wyprowadzony z praw Keplera, nasunął Newtonowi przypuszczenie, że siła działająca na planetę pochodzi ze wzajemnego przyciągania się planety i słońca. Myśl tę uogólnił Newton w postaci prawa *powszechnej grawitacji* czyli *ogólnego ciążenia*:

Dwa jakiekolwiek punkty materialne przyciągają się z siłami, których wielkość jest wprost proporcjonalna do mas, a odwrotnie do kwadratu odległości tych punktów.

Według prawa akcji i reakcji, siły, z jakimi się punkty materialne przyciągają, są co do wielkości równe, przeciwnie skierowane i działają wzdłuż prostej łączącej te punkty. Oznaczając przez m_1 i m_2 masy punktów, przez r ich odległość, a przez P wielkość siły, z jaką się przyciągają, otrzymamy więc

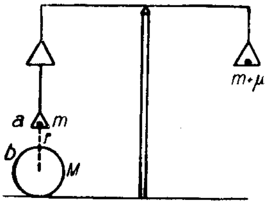
$$P = K\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{I}$$

gdzie K jest pewną stałą, t. zw. *stałą ciążenia*, zależną tylko od jednostek długości, masy i czasu.

Z równania (I) mamy $K = Pr^2/m_1 m_2$, zatem $[K] = [P][r]^2/[m_1][m_2]$, więc $[K] = L^3 M^{-1} T^{-2}$. Pomiary okazały, że w układzie *cgs*:

$$K = 6{,}6.10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{sek}^{-2}.$$

Stałą ciążenia można zmierzyć przy pomocy t.zw. *wagi Jolly'ego*. Jest to waga, która po jednej stronie ma dwie szalki, górną i dolną, a po drugiej jedną. Ciało a o masie m kładziemy na szalce górnej i równoważymy je na szali przeciwnej ciężarkiem o masie m. Ciało a przenosimy następnie na szalkę dolną; równowaga nie zostanie przez to zachwiana. Jeżeli jednak pod szalkę dolną podstawimy ciało b o masie M, waga się przechyli. Żeby równowagę przywrócić, musimy do ciężarka m dołożyć ciężarek o masie μ.



W doświadczeniu ciało b było kulą ołowianą. Ponieważ, jak można okazać, kula jednorodna przyciąga punkt materialny położony zewnątrz tak, jak gdyby jej całkowita masa była skupiona w środku, więc oznaczając przez r odległość środka kuli od ciała a, mamy $KmM/r^2 = \mu g$ czyli

$$K = \mu g r^2 / mM.$$

Masa ziemi. Można okazać, że kula złożona z warstw współśrodkowych o gęstości stałej przyciąga punkt położony zewnątrz tak, jak gdyby cała jej masa skupiona była w środku kuli. Przyjmując, że ziemia spełnia powyższe założenie, i oznaczając przez M masę ziemi, przez R jej promień, a przez Q ciężar ciała o masie m (na powierzchni ziemi), otrzymamy $Q = KmM/R^2$. Ponieważ $Q = mg$, więc $mg = KmM/R^2$, czyli

$$M = gR^2/K. \tag{7}$$

Przyjmując $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot sek^{-2}}$, $R = 6300\,\mathrm{km}$, $K = 6{,}6.10^{-8}\,\mathrm{cm^3 g^{-1} sek^{-2}}$, otrzymamy (po zamianie m i km na cm)

$$M = 6.10^{27}\,\mathrm{g}.$$

Gęstość ziemi otrzymujemy ze wzoru

$$\varrho = M / \tfrac{4}{3} R^3 \pi = 3g/4KR\pi = 5{,}6\ \mathrm{g\ cm^{-3}}.$$

Równanie Keplera. Zajmiemy się teraz wyznaczaniem położenia planety w danej chwili czasu. Obierzmy układ współrzędnych w płaszczyźnie ruchu planety, jak na str. 89. Elipsa, po której krąży planeta, ma we współrzędnych prostokątnych równanie

$$(x+e)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Wprowadźmy kąt pomocniczy u, określony przez równania:

(II) $$(x+e)/a = \cos u, \qquad y/b = \sin u.$$

Kąt u nazywamy *anomalią mimośrodową*.

Równania (II) określają kąt u jednoznacznie. Z (II) dostajemy:

$$x = a(\cos u - e/a), \qquad y = b \sin u.$$

Podstawiając $\varepsilon = e/a$, $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, otrzymujemy stąd:

(8) $$x = a(\cos u - \varepsilon), \qquad y = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin u.$$

Promień r otrzymujemy z równania

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2(1-\varepsilon \cos u)^2.$$

Zatem

(III) $$r = a(1-\varepsilon \cos u).$$

Kąt φ, jaki r tworzy z osią x, nazywamy *anomalią prawdziwą*.

Z równania elipsy we współrzędnych biegunowych (str. 89, (1)) dostaniemy $r\varepsilon \cos\varphi = a(1-\varepsilon^2) - r$, więc

$$r\varepsilon(1+\cos\varphi) = (1-\varepsilon)[a(1+\varepsilon) - r],$$

skąd na mocy (III), $r(1+\cos\varphi) = a(1-\varepsilon)(1+\cos u)$. Ponieważ $1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ i $1+\cos u = 2\cos^2\frac{u}{2}$, więc

(IV) $\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{a(1-\varepsilon)}\cos\frac{u}{2}$ i podobnie $\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{a(1+\varepsilon)}\sin\frac{u}{2}$;

stąd

(V) $$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

Wzory (IV) i (V) wyznaczają jednoznacznie φ przy pomocy u.

Przypuśćmy, że w chwili $t=0$ jest $u=0$, a więc $\varphi=0$. Pole elipsy wynosi $ab\pi$. Jeżeli T oznacza czas obiegu planety, wówczas prędkość polowa wynosi $ab\pi/T$. Promień wodzący zakreśli więc w czasie od 0 do t pole $\frac{ab\pi}{T}t$. Pole to możemy również przedstawić w postaci całki

(9) $$\frac{ab\pi}{T}t = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2\, d\varphi.$$

Różniczkując (V), otrzymamy $\dfrac{d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\dfrac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}$. Na mocy więc (IV) $d\varphi = \sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cdot\dfrac{a(1-\varepsilon)}{r}\,du = \dfrac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{r}\,du$. Podstawiając w (9) otrzymamy $\dfrac{ab\pi}{T}\,t = \dfrac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}\displaystyle\int_0^u r\,du$, skąd na mocy (III), $\dfrac{ab\pi}{T}\,t = \dfrac{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2}(u-\varepsilon\sin u)$. Stąd z uwagi na to, że $a^2\sqrt{1-\varepsilon^2} = ab$, dostaniemy

(VI) $$u - \varepsilon\sin u = 2\pi t/T.$$

Wyrażenie $2\pi t/T$ nazywamy *anomalią średnią*.

Równanie (VI) nosi nazwę *równania Keplera*.

Przy pomocy równania Keplera możemy dla każdej chwili t wyznaczyć u, a następnie przy pomocy równań (III), (IV), (V) promień r i kąt φ. Astronomia podaje liczne metody rozwiązywania równania Keplera.

W astronomii anomalię mimośrodową u oznacza się zazwyczaj literą E, anomalię prawdziwą φ literą V, a anomalię średnią $2\pi t/T$ literą M.

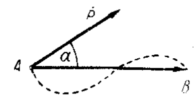
§ 10. Praca. Przypuśćmy, że punkt materialny przesunął się z punktu A do B i że podczas tego przesunięcia działała nań (oprócz być może innych sił) siła $\overline{P}$.

Siła stała. Załóżmy, że siła $\overline{P}$, działająca na punkt materialny podczas jego ruchu od A do B, była stała co do wielkości, kierunku i zwrotu (choć ruch mógł się odbywać po linii krzywej).

Pracą siły $\overline{P}$ na przesunięciu $\overline{AB}$ nazywamy iloczyn skalarowy

$$\overline{P}\cdot\overline{AB}.$$

Jeżeli więc pracę oznaczymy przez L, to



(I) $$L = \overline{P}\cdot\overline{AB}.$$

Niechaj α będzie kątem zawartym między $\overline{P}$ i $\overline{AB}$. Zatem

(II) $$L = |\overline{P}|\cdot|\overline{AB}|\cos\alpha.$$

Praca może być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem. Praca siły $\overline{P}$ jest zerem, jeżeli $\overline{P}=0$ lub $\overline{AB}=0$ (t. zn. gdy nie ma przesunięcia) lub jeżeli $\alpha=\pi/2$ (t. zn. gdy siła jest prostopadła do przesunięcia). Jeżeli $\overline{P}\neq 0$, $\overline{AB}\neq 0$ i $\cos\alpha\neq 0$ to praca jest liczbą dodatnią lub ujemną, zależnie od tego czy α jest kątem ostrym czy rozwartym.

Jeżeli $\alpha=0$ lub $\alpha=\pi$ (t. zn. jeżeli siła ma kierunek przesunięcia), mamy

$$L=\pm|\overline{P}|\cdot|\overline{AB}|,$$

przyczem znak zależy od tego, czy siła i przesunięcie mają zwroty zgodne czy przeciwne.

Z twierdzeń o iloczynie skalarowym (rozdz. I, str. 7) wynika, że praca siły $\overline{P}$ na przesunięciu $\overline{AB}$ równa się iloczynowi przesunięcia i rzutu siły na kierunek przesunięcia lub iloczynowi siły i rzutu przesunięcia na kierunek siły.

Należy zwrócić uwagę, że — według określenia — *praca nie zależy od czasu, w jakim punkt materialny przesunął się od A do B.*

Oznaczmy rzuty przesunięcia $\overline{AB}$ na osie układu przez Δx, Δy, Δz. Na mocy więc (I)

$$L=P_x\Delta x+P_y\Delta y+P_z\Delta z. \tag{1}$$

Jeżeli punkt A ma współrzędne x_0, y_0, z_0, zaś B x_1, y_1, z_1, to $\Delta x=x_1-x_0$ i t. d. Zatem

$$L=P_x(x_1-x_0)+P_y(y_1-y_0)+P_z(z_1-z_0). \tag{2}$$

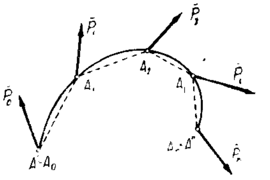
Siła zmienna. Załóżmy teraz, że punkt porusza się po krzywej C określonej parametrycznie przez funkcje:

$$x=f(\sigma),\qquad y=\varphi(\sigma),\qquad z=\psi(\sigma)\qquad (\sigma'\leqslant\sigma\leqslant\sigma''). \tag{3}$$

Przypuśćmy przytem, że jeżeli $\sigma_1<\sigma_2$, to położenie punktu odpowiadające wartości σ_1 jest wcześniejsze od położenia odpowiadającego wartości σ_2.

Załóżmy dalej, że na punkt działa siła zmienna $\overline{P}$, której rzuty w dowolnym punkcie toru o współrzędnych x, y, z dane są przez funkcje:

$$P_x=F(x,y,z),\qquad P_y=\Phi(x,y,z),\qquad P_z=\Psi(x,y,z). \tag{4}$$



O funkcjach F, Φ, Ψ zakładamy oczywiście, że są określone w każdym punkcie toru. Utwórzmy dowolny podział δ odcinka $\sigma'\sigma''$ przy pomocy punktów $\sigma'=\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n=\sigma''$. Niechaj tym wartościom parametru σ odpowiadają na krzywej C punkty:

$$A'=A_0(x_0, y_0, z_0), \quad A_1(x_1, y_1, z_1), \quad \ldots, \quad A_n(x_n, y_n, z_n)=A''.$$

Na mocy (3) jest:

(5) $$x_i=f(\sigma_i), \qquad y_i=\varphi(\sigma_i), \qquad z_i=\psi(\sigma_i) \qquad \text{dla } i=0, 1, \ldots, n.$$

Połóżmy:

(6) $$\Delta x_i = x_{i+1}-x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1}-y_i, \quad \Delta z_i = z_{i+1}-z_i \quad (i=0,1,\ldots,n-1).$$

Oznaczmy wreszcie przez $\overline{P}_0, \overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ siły działające w punktach $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Na mocy (4) jest:

(7) $$P_{ix}=F(x_i, y_i, z_i), \qquad P_{iy}=\Phi(x_i, y_i, z_i), \qquad P_{iz}=\Psi(x_i, y_i, z_i).$$

Gdyby siła $\overline{P}$ na przesunięciach $\overline{A_0A_1}, \overline{A_1A_2}, \ldots$ była stała i odpowiednio równa $\overline{P}_0, \overline{P}_1, \ldots$, to prace na poszczególnych przesunięciach wyrażałyby się wzorami:

$$L_0=P_{0x}\Delta x_0+P_{0y}\Delta y_0+P_{0z}\Delta z_0,$$
$$L_1=P_{1x}\Delta x_1+P_{1y}\Delta y_1+P_{1z}\Delta z_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Kładąc $L'=L_0+L_1+\ldots$, otrzymamy więc

(8) $$L'=\sum_{i=0}^{n-1}(P_{ix}\Delta x_i+P_{iy}\Delta y_i+P_{iz}\Delta z_i).$$

Wyrażenie stojące po prawej stronie powyższej równości zależy oczywiście od podziału δ odcinka $\sigma'\sigma''$.

Jeżeli L' dąży do pewnej granicy dla każdego ciągu normalnego[1]) podziałów $\{\delta_k\}$ odcinka $\sigma'\sigma''$, to granicę tę nazywamy *pracą siły $\overline{P}$ po krzywej C* (albo *wzdłuż krzywej C*).

Wyrażenie (8) możemy więc uważać za wartość przybliżoną pracy L siły $\overline{P}$.

Granicą wyrażenia (8) jest tak zwana całka krzywolinijna[2]) po krzywej C:

(III) $$L=\int_C (P_x\,dx+P_y\,dy+P_z\,dz).$$

---

[1]) t. j. takiego, w którym długość największego odcinka podziału dąży do zera. Por. S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, T. II, Lwów, str. 69.

[2]) tamże, str. 187 i 196.

Całkę krzywolinijną możemy zamienić na zwyczajną całkę oznaczoną, wyrażając zmienne x, y, z funkcjami (3) przy pomocy parametru σ. Otrzymamy wówczas

$$L = \int_{\sigma'}^{\sigma''} [P_x f'(\sigma) + P_y \varphi'(\sigma) + P_z \psi'(\sigma)]\, d\sigma,$$

gdzie $P_x = F(f(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma))$, $P_y = \Phi(f(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma))$ i t. d. Jeżeli w szczególności σ oznacza czas t, wówczas $f'(\sigma) = \dot{x}$, $\varphi'(\sigma) = \dot{y}$, $\psi'(\sigma) = \dot{z}$. Zatem

$$\text{(IV)} \qquad L = \int_{t'}^{t''} [P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z}]\, dt.$$

Ponieważ $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ są rzutami prędkości $\bar{v}$, więc $P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z} = \bar{P}\bar{v}$. Zatem

$$\text{(V)} \qquad L = \int_{t'}^{t''} (\bar{P}\bar{v})\, dt.$$

Uwaga. Wzór (III) jest słuszny, gdy położenia punktu ruchomego na krzywej następują po sobie w porządku, który odpowiada wzrostowi parametru σ. Jeżeli jednak jest przeciwnie, t. zn. jeżeli $\sigma_1 > \sigma_2$, to położenie odpowiadające σ_1 jest późniejsze od położenia odpowiadającego σ_2 i wówczas należy we wzorze (III) zamiast dx, dy, dz podstawić $-dx$, $-dy$, $-dz$. Otrzymamy wtedy

$$L = -\int_C (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Jeżeli więc punkt materialny poruszał się po krzywej C od A' do A'' i siła $\bar{P}$ wykonała pracę L, to gdy punkt poruszać się będzie po krzywej C od A'' do A' (przyczem położenia będą następowały po sobie w porządku odwrotnym niż poprzednio), ta sama siła $\bar{P}$ wykona pracę $-L$.

Praca sumy sił. Przypuśćmy, że punkt materialny, poruszając się po krzywej C, był pod działaniem dwóch sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$. Połóżmy $\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$. Oznaczmy przez L pracę siły $\bar{R}$, przez L' pracę siły $\bar{P}$ i przez L'' pracę siły $\bar{Q}$. Wówczas $L = \int_C (R_x dx + R_y dy + R_z dz) =$

$$= \int_C [(P_x + Q_x) dx + (P_y + Q_y) dy + (P_z + Q_z) dz] = \int_C (P_x dx + P_y dy + P_z dz) +$$

$$+ \int_C (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) = L' + L'', \text{ a więc}$$

$$\text{(VI)} \qquad L = L' + L''.$$

Możemy zatem powiedzieć, że *praca sumy dwóch (lub kilku) sił na pewnej krzywej równa się sumie prac poszczególnych sił na tej krzywej*.

Wymiar i jednostki pracy. Na mocy (II), str. 93, mamy
[praca] = [siła]·[droga] $= LMT^{-2}L$, a więc

$$[\text{praca}] = L^2 M\, T^{-2}.$$

Jednostką pracy w układzie *cgs* jest *erg*. Jest to praca, jaką wykona siła 1 dyn na drodze 1 cm. Zatem

$$\text{erg} = \text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sek}^{-2}.$$

Większą jednostką jest *Joule* (J) $= 10^7$ erg. W układzie technicznym jednostką pracy jest *kilogramometr* (kgm). Jest to praca siły 1kg na drodze 1m. Ponieważ 1 kg (siły) = 981000 dyn, a 1m = 100cm, więc

$$\text{kgm} = 9{,}81 \cdot 10^7\ \text{erg} = 9{,}81\ \text{J}.$$

§ 11. Pole sił potencjalne. Obszar D nazwaliśmy (str. 78) *polem sił*, jeżeli na punkt materialny, gdziekolwiek w obszarze D umieszczony, działa siła zależna tylko od położenia tego punktu.

Pole sił jest określone przez podanie funkcyj:

(1) $\quad P_x = F(x, y, z), \qquad P_y = \Phi(x, y, z), \qquad P_z = \Psi(x, y, z),$

które wyznaczają rzuty siły działającej $\overline{P}$ w punkcie o współrzędnych x, y, z.

Natężenie pola. Może się zdarzyć, że siła $\overline{P}$ jest proporcjonalna do masy m punktu materialnego. Wówczas siłę działającą na jednostkę masy (t. j. siłę $\overline{P}/m$) w pewnym punkcie pola nazywamy *natężeniem pola* w tym punkcie.

Przykładem takiego pola jest pole grawitacyjne ziemskie. Ciężar ciała jest proporcjonalny do masy ciała. Na powierzchni ziemi natężenie pola jest co do wielkości równe g (przyśpieszeniu ziemskiemu).

Linie sił. Na specjalną uwagę zasługują pewne krzywe w polu sił, zwane *liniami sił*. Są to krzywe o tej własności, że styczna w dowolnym punkcie ma kierunek siły działającej w tym punkcie. Np. w polu grawitacyjnym ziemskim liniami sił są linie pionowe. Linie sił są określone układem równań różniczkowych:

(2) $$dx/P_x = dy/P_y = dz/P_z.$$

Określenie pola potencjalnego. Gdy w polu sił punkt materialny przesunie się od punktu A do punktu B po jakimś łuku AB, wówczas praca siły działającej $\overline{P}$ (str. 95, (III)) wynosi

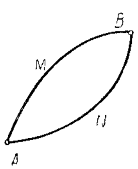
$$(\mathrm{I}) \qquad L = \int_{AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Praca zależeć będzie na ogół nie tylko od punktów A i B, lecz także od przebytej drogi, t. j. od łuku AB. W mechanice ważną rolę odgrywają pola, w których praca zależy tylko od punktów A i B, a nie zależy od łuku AB. Jeżeli więc w takim polu punkt materialny przesuwać się będzie od A do B po rozmaitych torach, to siła $\overline{P}$ wykona zawsze tę samą pracę. Pola takie nazywamy *polami potencjalnymi lub zachowawczymi (konserwatywnymi)*.

A więc: *polem potencjalnym jest takie pole sił, w którym praca nie zależy od drogi przejścia, lecz tylko od punktu początkowego i końcowego.*

Jeżeli w polu potencjalnym punkt odbył drogę zamkniętą (czyli wyszedł z punktu A i powrócił do A), to praca wykonana wzdłuż tej drogi jest zerem. Praca bowiem w polu potencjalnym zależy tylko od punktu początkowego i końcowego, więc jeśli się one pokrywają, to praca jest taka, jak gdyby punkt wogóle się nie poruszył.

Na odwrót, jeżeli pole sił ma tę własność, że praca po każdej drodze zamkniętej jest zerem, to pole jest polem potencjalnym. Obierzmy bowiem dwa dowolne punkty A, B i łuki AMB, ANB. Oznaczmy przez L' pracę na łuku AMB, a przez L'' na łuku ANB. Praca po linii zamkniętej $AMBNA$ jest wedle założenia zerem. Pracę tą można przedstawić jako sumę prac: od A do B po łuku AMB i od B do A po łuku BNA. Ponieważ praca po łuku BNA równa się $-L''$ więc $L' + (-L'') = 0$, skąd $L' = L''$. Zatem praca po obu łukach jest ta sama.

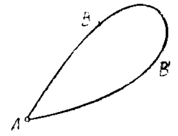


Możemy więc powiedzieć, że *na to aby pole sił było polem potencjalnym, potrzeba i wystarcza, by praca po wszelkiej linii zamkniętej była w nim zerem.*

Potencjał. Obierzmy dowolny układ współrzędnych (x, y, z) i punkt A w polu potencjalnym. Jeżeli będziemy uważać punkt A za stały, to praca L_{AB}, gdzie B jest dowolnym punktem pola, będzie zależeć tylko od współrzędnych x, y, z punktu B. Zatem praca L_{AB} będzie funkcją współrzędnych x, y, z. Oznaczając tę funkcję przez $V(x, y, z)$, otrzymamy

$$L_{AB} = V(x, y, z). \tag{3}$$

Funkcję $V(x, y, z)$ nazywamy *funkcją sił* albo *potencjałem.*



Weźmy pod uwagę jakiś punkt B' o współrzędnych x', y', z'. Praca po dowolnej linii $ABB'A$ jest zerem. Zatem $L_{AB} + L_{BB'} + L_{B'A} = 0$. Lecz $L_{B'A} = -L_{AB'} = -V(x', y', z')$. Więc na mocy (3) $V(x, y, z) + L_{BB'} - V(x', y', z') = 0$, skąd

$$L_{BB'} = V(x', y', z') - V(x, y, z). \tag{II}$$

Wzór (II) możemy wypowiedzieć, jak następuje:

Przy przejściu od jednego punktu do drugiego praca równa się różnicy potencjałów w tych punktach.

Potencjał określiliśmy w zależności od obioru punktu A. Gdybyśmy obrali inny punkt $A'(x', y', z')$, to potencjał wyraziłby się inną funkcją $V'(x, y, z)$. Ponieważ na mocy określenia potencjału mamy dla dowolnego punktu $B(x, y, z)$

$$V'(x, y, z) = L_{A'B} = V(x, y, z) - V(x', y', z'),$$

więc

$$V(x, y, z) - V'(x, y, z) = V(x', y', z') = \text{const.}$$

A więc różnica obu funkcyj V i V' jest stała. Widzimy stąd, że w polu sił potencjał jest funkcją określoną tylko po za pewną stałą (podobnie jak całka nieoznaczona). Stała ta jednak, jak wskazuje wzór (II), nie gra roli, ponieważ na wielkość pracy wpływa jedynie różnica potencjałów w dwóch punktach.

Wymiar potencjału. Ponieważ na mocy określenia potencjał równa się pracy, więc wymiar potencjału jest taki, jak wymiar pracy. Zatem

$$[\text{potencjał}] = L^2 M T^{-2}.$$

Jednostki pracy są również jednostkami potencjału.

Związek między siłą a potencjałem. Przesuńmy punkt materialny z punktu $A(x_0, y, z)$ do punktu $B(x, y, z)$ po prostej równoległej do osi x. Praca wynosi więc na mocy (I) i (II):

$$L_{AB} = V(x, y, z) - V(x_0, y, z) \quad \text{lub} \quad L_{AB} = \int_{AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Ponieważ punkt przesunął się po prostej równoległej do osi x, więc $dy = 0$ i $dz = 0$. Zatem $L_{AB} = \int_{AB} P_x dx = \int_{x_0}^{x} P_x dx$, skąd

$$V(x, y, z) - V(x_0, y, z) = \int_{x_0}^{x} P_x dx.$$

Tworząc pochodną cząstkową względem x, dostaniemy $\partial V / \partial x = P_x$; analogiczne wzory otrzymamy dla pozostałych pochodnych cząstkowych.

A więc: *pochodne cząstkowe potencjału równają się odpowiednio rzutom siły na osie układu*, t. j.

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = P_x, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = P_y, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = P_z.$$

Na odwrót, jeżeli założymy, że w danym polu sił istnieje funkcja V spełniająca związki (III), wówczas pole jest polem potencjalnym. Niech bowiem pewna funkcja V spełnia związki (III). Zatem, praca od punktu $A(x_1, y_1, z_1)$ do punktu $B(x_2, y_2, z_2)$ po dowolnym łuku AB wynosi:

$$L_{AB} = \int_{AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = \int_{AB} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right).$$

Ponieważ wyrażenie zawarte w nawiasie ostatniej całki jest różniczką zupełną dV, więc otrzymujemy wzór

$$\text{(4)} \qquad L_{AB} = \int_{AB} dV = V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1),$$

wyrażający, że praca nie zależy od drogi, lecz tylko od punktu początkowego i końcowego. Na mocy (4) funkcja V jest tedy potencjałem.

A więc: *jeżeli dla pola sił istnieje funkcja V spełniająca równania* (III), *wówczas to pole sił jest polem potencjalnym, zaś funkcja V jest potencjałem.*

Powierzchnie potencjalne. Gdy c jest dowolną stałą, powierzchnię określoną równaniem

$$V(x, y, z) = c \tag{5}$$

nazywamy *powierzchnią potencjalną*.

A więc: *powierzchnia potencjalna jest to taka powierzchnia, na której potencjał ma wartość stałą.*

W geometrii różniczkowej dowodzi się, że dostawy kierunkowe $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ normalnej do powierzchni (5) w punkcie (x, y, z) spełniają warunki:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z},$$

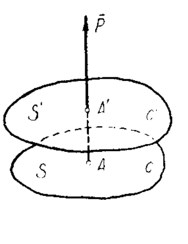
skąd na mocy (III) str. 100,

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = P_x : P_y : P_z.$$

Ponieważ dostawy kierunkowe $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ siły $\overline{P}$ spełniają podobne warunki: $\cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma' = P_x : P_y : P_z$, więc siła $\overline{P}$ ma kierunek normalny do powierzchni potencjalnej.

A zatem: *w każdym punkcie powierzchni potencjalnej siła działająca jest prostopadła do tej powierzchni.* Wynika stąd, że *linie sił są prostopadłe do powierzchni potencjalnych.*

Obierzmy dwie powierzchnie potencjalne S i S', dość bliskie, o potencjałach c i c', gdzie $c' > c$. Z dowolnego punktu A powierzchni S wykreślmy normalną do tej powierzchni aż do przecięcia A' z powierzchnią S'.



Praca przy przesunięciu od A do A' wynosi $L_{AA'} = c' - c > 0$. Ponieważ praca jest dodatnia, więc siła $\overline{P}$ ma zwrot przesunięcia $\overline{AA'}$.

A więc: *siła zwrócona jest względem powierzchni potencjalnej w stronę wzrostu potencjału.*

W przybliżeniu mamy $L_{AA'} = |\overline{P}|\,AA' = c' - c$ czyli $|\overline{P}| = (c' - c)/AA'$.

A więc: *na jednej i tej samej powierzchni potencjalnej siła jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do odcinka normalnej, zawartego między tą powierzchnią a powierzchnią potencjalną dość bliską.*

§ 12. Przykłady pól potencjalnych. Rozpatrzymy obecnie kilka rodzajów pól potencjalnych, z którymi często mamy do czynienia w praktyce.

Pole stałe. Jeżeli siła $\bar{P}$ jest w pewnym polu stała co do wielkości, kierunku i zwrotu, to pole takie nazywamy *polem stałym.*

Pole grawitacyjne ziemskie w małym otoczeniu danego punktu na ziemi jest polem stałym.

Obierzmy układ współrzędnych (x, y, z), nadając osi z kierunek siły $\bar{P}$, zwrot zaś przeciwny. Kładąc $|\bar{P}| = mg$, otrzymamy

$$P_x = 0, \qquad P_y = 0, \qquad P_z = -mg.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja

$$V = -mgz$$

jest potencjałem. Mamy bowiem

$$\partial V/\partial x = 0 = P_x, \qquad \partial V/\partial y = 0 = P_y, \qquad \partial V/\partial z = -mg = P_z.$$

A więc: *pole stałe jest polem potencjalnym.*

Praca od punktu $A(x_1, y_1, z_1)$ do punktu $B(x_2, y_2, z_2)$ po dowolnej drodze wynosi $L_{AB} = -mgz_2 - (-mgz_1)$, więc

$$L_{AB} = mg(z_1 - z_2). \tag{1}$$

Przy założeniu, że siła $\bar{P}$ jest siłą ciężkości, jasnym jest, że $z_1 - z_2 = h$ jest różnicą poziomów, na których znajdują się punkty A i B. Kładąc więc $|\bar{P}| = Q = mg$, otrzymamy

$$L_{AB} = Qh.$$

Powierzchnia potencjalna ma równanie $V = \text{const.}$, zatem $-mgz = \text{const.}$ czyli $z = \text{const.}$ A więc powierzchniami potencjalnymi są płaszczyzny poziome (t. j. prostopadłe do kierunku siły). Ponieważ linie sił są prostopadłe do powierzchni potencjalnych, więc liniami sił są proste równoległe do osi z, t. j. linie pionowe.

Pole środkowe czyli centralne. Jeżeli w polu sił kierunek siły przechodzi zawsze przez pewien stały punkt O, to pole nazywa się *środkowym* lub *centralnym*, a sam punkt O *środkiem pola* (str. 86).

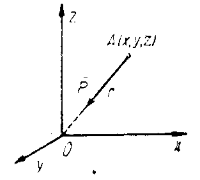
Załóżmy, że w danym polu środkowym wielkość siły w dowolnym punkcie A zależy tylko od odległości r punktu A od środka O. Oznaczmy przez P rzut siły $\bar{P}$ działającej w A na kierunek $\overline{OA}$. Zatem P jest funkcją r. Połóżmy

$$P = f(r).$$

Obierzmy początek układu współrzędnych w O. Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu A, a przez α kąt, jaki $\overline{OA}$ tworzy z osią x, otrzymamy $\cos\alpha = x/r$. Zatem

$$(2) \qquad P_x = P\cos\alpha = P\frac{x}{r} \quad \text{i podobnie} \quad P_y = P\frac{y}{r}, \quad P_z = P\frac{z}{r}.$$

Połóżmy $V = \int P dr = \int f(r)dr$. Ponieważ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, więc $\partial r/\partial x = x/r$, $\partial r/\partial y = y/r$ i $\partial r/\partial z = z/r$. Zatem



$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = f(r)\frac{x}{r} = P\frac{x}{r} = P_x$$

i analogicznie $\dfrac{\partial V}{\partial y} = P_y$, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = P_z$. Pole nasze jest więc polem potencjalnym i funkcja V jest potencjałem.

A więc: *pole środkowe, w którym siła zależy tylko od odległości punktu od środka, jest polem potencjalnym i potencjał wyraża się wzorem*

$$(3) \qquad V = \int P\, dr.$$

Ponieważ potencjał w punkcie A jest funkcją odległości r punktu A od środka O, więc na kulach o środku O potencjał ma wartość stałą. Powierzchniami potencjalnymi będą więc tutaj kule o środku O. Liniami sił są oczywiście proste przechodzące przez punkt O.

P o l e g r a w i t a c y j n e N e w t o n o w s k i e. Przypuśćmy, że punkt o masie m jest przyciągany z siłą $\overline{P}$ przez stały punkt o masie M według prawa ciążenia Newtona (str. 90, (I)), t. zn. że

$$|\overline{P}| = KmM/r^2.$$

Ponieważ siła skierowana jest ku punktowi M, więc pole jest polem środkowym, którego środkiem jest punkt M. Zatem, wedle określenia liczby P, $P = -KmM/r^2$.

Mamy $V = \int P\, dr = -\int KmM\, dr/r^2$. Zatem

$$(4) \qquad V = KmM/r.$$

A więc praca po dowolnym łuku $A'A$ wynosi $L_{A'A} = KmM(1/r - 1/r')$, gdzie r i r' oznaczają odległości punktów A i A' od środka. Jeżeli w szczególności punkt A' obierzemy w nieskończoności czyli położymy $r' = \infty$, to otrzymamy

$$(5) \qquad L_{\infty A} = KmM/r = V.$$

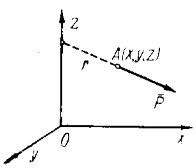
A więc: *w polu grawitacyjnym Newtonowskim potencjał w punkcie A równa się pracy, jaką wykonałaby siła $\bar{P}$, sprowadzając punkt materialny z nieskończoności do A.*

Pole osiowe. Pole sił o tej własności, że w każdym punkcie pola kierunek siły przecina pod kątem prostym pewną stałą prostą l, nazywamy *polem osiowym*, a prostą l nazywamy *osią pola.*

Załóżmy, że wielkość siły $\bar{P}$, działającej w dowolnym punkcie A, zależy tylko od odległości r punktu A od osi pola. Położmy $P=-|\bar{P}|$ lub $P=|\bar{P}|$ zależnie od tego, czy siła $\bar{P}$ ma zwrot ku osi l czy przeciwnie. Ponieważ wielkość siły $\bar{P}$ jest funkcją r (t. j. odległości punktu A od osi l), więc możemy napisać

$$P=f(r).$$

Obierzmy układ współrzędnych, przyjmując oś pola za oś z. Łatwo zauważyć, że rzuty siły $\bar{P}$ działającej w punkcie $A(x,y,z)$



wynoszą $P_x=P\frac{x}{r}$, $P_y=P\frac{y}{r}$ i $P_z=0$, gdzie $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Położmy

$$V=\int Pdr=\int f(r)\,dr.$$

Zatem $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{dV}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=P\frac{x}{r}=P_x$. Podobnie $\frac{\partial V}{\partial y}=P_y$. Ponieważ V nie zależy od z (gdyż r nie zależy od z), więc $\frac{\partial V}{\partial z}=0=P_z$.

Wynika stąd, że pole dane jest polem potencjalnym, zaś V jest potencjałem.

A więc: *pole osiowe, w którym wielkość siły zależy tylko od odległości punktu od osi, jest polem potencjalnym i potencjał wynosi*

$$V=\int Pdr. \tag{6}$$

Łatwo zauważyć, że powierzchniami potencjalnymi są tutaj walce, których wspólną osią jest oś pola. Liniami sił są proste przecinające oś pola pod kątem prostym.

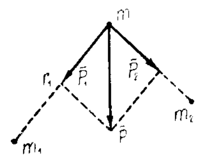
Jeżeli np. $P=m\omega^2 r$ (ω stałe) wówczas $V=\int Pdr=\int m\omega^2 r\,dr$, więc $V=\frac{1}{2}m\omega^2r^2=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$. Powierzchnie potencjalne otrzymamy, kładąc $V=\text{const.}$, zatem $\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)=\text{const.}$, więc $x^2+y^2=\text{const.}$; jest to równanie walca o osi z.

Suma pól potencjalnych. Niechaj w pewnym obszarze D danych będzie kilka pól o siłach $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$. Pole w obszarze D o sile $\overline{P}=\overline{P}_1+\overline{P}_2+\dots$ nazywa się *sumą pól sił* $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \dots$.

Jeżeli pola sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ *są potencjalne, to* — jak łatwo okazać — *suma pól jest również polem potencjalnym, którego potencjał* V *równa się sumie potencjałów* $V_1, V_2 \dots$ *poszczególnych pól.*

Połóżmy bowiem $V=V_1+V_2+\dots$. Mamy $\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial x}+\dots=$ $=P_{1_x}+P_{2_x}+\dots=P_x$ i analogicznie $\frac{\partial V}{\partial y}=P_y$, $\frac{\partial V}{\partial z}=P_z$. A więc V jest potencjałem sumy danych pól.

Przypuśćmy np., że punkt o masie m przyciągany jest wedle prawa Newtona przez dwa stałe punkty o masach m_1 i m_2 z siłami $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$. Siła więc wypadkowa będzie $\overline{P}=\overline{P}_1+\overline{P}_2$. Na str. 103 wykazaliśmy, że siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ mają potencjał. Zatem wedle (4), str. 103, oznaczając przez r_1, r_2 odległości punktu m od m_1 i m_2, otrzymamy:



$$V_1=K\frac{mm_1}{r_1} \quad \text{i} \quad V_2=K\frac{mm_2}{r_2}.$$

Siła $\overline{P}$ ma więc potencjał $V=V_1+V_2$. Zatem $V=Km\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right)$.

Podobnie, jeżeli punkt o masie m przyciągany jest wedle prawa Newtona przez n punktów stałych o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$, wówczas

$$V=Km\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\dots+\frac{m_n}{r_n}\right), \tag{7}$$

gdzie $r_1, r_2, \dots, r_n$ oznaczają odpowiednio odległości punktu m od punktów $m_1, m_2, \dots, m_n$.

§ 13. Energia kinetyczna i potencjalna. Niech na punkt materialny $A(x, y, z)$ o masie m działa siła $\overline{P}$. Zatem (str. 79, (I)):

$$m\ddot{x}=P_x, \qquad m\ddot{y}=P_y, \qquad m\ddot{z}=P_z.$$

Pomnóżmy obie strony pierwszego równania przez $\dot{x}$, drugiego przez $\dot{y}$, trzeciego przez $\dot{z}$ i dodajmy następnie równania stronami. Otrzymamy

$$m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})=P_x\dot{x}+P_y\dot{y}+P_z\dot{z}. \tag{1}$$

Oznaczmy przez v wartość bezwzględną prędkości punktu A. Zatem $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$, skąd $d(v^2)/dt=2(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})$, a więc

$d(\frac{1}{2}mv^2)/dt = m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})$. Wstawiając to w równanie (1), otrzymamy

$$d(\tfrac{1}{2}mv^2)/dt = P_x\dot{x}+P_y\dot{y}+P_z\dot{z}.$$

Całkując obustronnie (względem t) od chwili początkowej t_0 do chwili t, dostaniemy

$$(2)\qquad \int_{t_0}^{t} \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t} [P_x\dot{x}+P_y\dot{y}+P_z\dot{z}]\,dt.$$

Niechaj v_0 będzie wartością bezwzględną prędkości w chwili początkowej t_0; lewa strona równania (2) wynosi więc $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ a prawa strona równa się (str. 96, (IV)) pracy, jaką wykonała siła $\overline{P}$ w czasie od t_0 do t. Oznaczmy tę pracę przez L_{t_0t}. Równanie (2) możemy więc napisać w postaci

$$(3)\qquad \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = L_{t_0t}.$$

Wyrażenie $\frac{1}{2}mv^2$ nazywamy *energią kinetyczną* punktu.

Kładąc

$$(4)\qquad E=\tfrac{1}{2}mv^2, \qquad E_0=\tfrac{1}{2}mv_0^2,$$

otrzymamy:

$$(\mathrm{I})\qquad E-E_0=L_{t_0t}.$$

A więc: *przyrost energii kinetycznej w pewnym czasie równa się pracy siły działającej w tym czasie.*

Twierdzenie to nosi nazwę *zasady równowartości pracy i energii kinetycznej.*

W szczególności, jeżeli praca siły $\overline{P}$ jest stale zerem, to $E-E_0=0$ czyli $E=E_0$, więc na mocy (4) $v=v_0$. Punkt ma zatem wówczas prędkość stałą co do wielkości. Jeżeli więc siła jest np. stale prostopadła do toru, to punkt porusza się ruchem jednostajnym. Przykładem jest ruch jednostajny punktu po kole pod wpływem siły stałej co do wielkości i skierowanej ku środkowi koła.

Niech teraz punkt porusza się w polu potencjalnym. Oznaczmy przez V i V_0 potencjały jakie punkt posiada odpowiednio w chwilach t i t_0. Zatem $L_{t_0t}=V-V_0$, skąd na mocy (I) $E-E_0=V-V_0$ czyli

$$(5)\qquad E-V=E_0-V_0.$$

Wyrażenie $-V$ nazywamy *energią potencjalną.*

Kładąc $-V=U$ i $-V_0=U_0$, otrzymamy

(II) $$E+U=E_0+V_0=\text{const}.$$

Sumę energii kinetycznej i potencjalnej t. j. wyrażenie $E+U$ nazywamy *energią całkowitą*.

A więc: *jeżeli punkt porusza się w polu potencjalnym, wówczas jego energia całkowita jest stała.*

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania energii całkowitej*.

Wymiar energii kinetycznej i potencjalnej Na mocy (4) jest $[E]=[m][v^2]$, więc

$$[\text{energia kinetyczna}]=L^2MT^{-2}.$$

A zatem energia kinetyczna ma wymiar pracy. Jednostki pracy są więc również jednostkami energii kinetycznej.

Energia potencjalna ma na mocy określenia wymiar potencjału, zatem ma również wymiar pracy (str. 99).

§ 14. Ruch punktu przyciąganego przez masę nieruchomą. Ruch po krzywej rzędu drugiego. Niech punkt materialny A o masie m przyciągany będzie przez punkt nieruchomy o masie M z siłą $\overline{P}$, działającą według prawa Newtona. Umieśćmy w punkcie M początek O układu współrzędnych. Oznaczając (jak na str. 103) przez P rzut siły na kierunek $\overline{OA}$, otrzymamy

(1) $$P=-K\frac{mM}{r^2}.$$

Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu A, otrzymamy (str. 103): $P_x=P\frac{x}{r}=-K\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$ i t. d. Równania ruchu punktu A są więc

(I) $$m\ddot{x}=-K\frac{mM}{r^2}\frac{x}{r},\qquad m\ddot{y}=-K\frac{mM}{r^2}\frac{y}{r},\qquad m\ddot{z}=-K\frac{mM}{r^2}\frac{z}{r}.$$

W naszym przypadku siła $\overline{P}$ ma potencjał $V=KmM/r$ (str. 103), zatem energia potencjalna $U=-KmM/r$. Na mocy zasady zachowania energii całkowitej $\frac{1}{2}mv^2-KmM/r=\text{const.}$, skąd kładąc $\mu=KM$,

(2) $$v^2=\frac{2\mu}{r}+h,\qquad \text{gdzie } h=\text{const}.$$

Ponieważ w rozważanym przypadku ruch jest ruchem środkowym (str. 86), więc tor jest płaski. Przyjmijmy więc, że ruch odbywa się w płaszczyźnie xy i że prędkość polowa jest różna od zera.

Ze wzoru Bineta (str. 88, (I)) otrzymamy na mocy (1)

$$(3) \qquad -\frac{KmM}{r^2} = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right],$$

a ponieważ $KM = \mu$, więc

$$(4) \qquad \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2}.$$

Podstawmy $u = 1/r$. Otrzymujemy

$$(5) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}.$$

Rozwiązaniem szczególnym powyższego równania jest $u = \mu/c^2$. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$ jest — jak łatwo stwierdzić — postaci $u = a\cos\varphi + b\sin\varphi$. Ogólnym więc rozwiązaniem równania (5) będzie

$$u = \mu/c^2 + a\cos\varphi + b\sin\varphi,$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi. Kładąc $a = \varrho\cos\varphi_0$, $b = \varrho\sin\varphi_0$ (gdzie ϱ i φ_0 są dowolnymi stałymi) i podstawiając z powrotem $1/r = u$, otrzymamy rozwiązanie ogólne równania (4)

$$(6) \qquad 1/r = \mu/c^2 + \varrho\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Otóż ogólne równanie krzywej rzędu drugiego, gdy biegun jest w ognisku, ma kształt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\varphi - \varphi_0),$$

gdzie p jest parametrem, ε mimośrodem, zaś φ_0 kątem, jaki oś krzywej tworzy z osią układu. Równanie więc (6) jest równaniem krzywej rzędu drugiego. Z przyrównania dostajemy

$$(7) \qquad p = c^2/\mu \quad \text{i} \quad \varepsilon = \varrho c^2/\mu.$$

Krzywa taka jest elipsą, hyperbolą lub parabolą, zależnie od tego czy $\varepsilon < 1$, $\varepsilon > 1$ lub $\varepsilon = 1$. Aby rozpoznać rodzaj krzywej, musimy obliczyć stałą ϱ. Wyznaczymy ją ze wzoru (2). Mamy

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Ponieważ $\frac{1}{2}c$ jest prędkością polową, więc $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ czyli $\dot{\varphi} = c/r^2$; zatem (str. 88, wzór (7)) $v^2 = c^2\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}\cdot$ Na mocy (6) otrzymujemy tedy

(8) $$v^2 = \frac{\mu^2}{c^2} + 2\mu\varrho\cos(\varphi - \varphi_0) + c^2\varrho^2.$$

Wyrażając r przez φ przy pomocy wzoru (6) i wstawiając we wzór (2), otrzymujemy $v^2 = 2\mu^2/c^2 + 2\mu\varrho\cos(\varphi - \varphi_0) + h$, skąd przez przyrównanie ze wzorem (8)

(9) $$\varrho = \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}},$$

a więc na mocy (7)

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{hc^2}{\mu^2}}.$$

Zatem $\varepsilon \lesseqgtr 1$ zależnie od tego czy $h \lesseqgtr 0$. Kładąc $t = t_0$, $v = v_0$, $r = r_0$, otrzymujemy ze wzoru (2) $h = v_0^2 - 2\mu/r_0$; zatem:

$$h \lesseqgtr 0 \textit{ zależnie od tego czy } v_0^2 \lesseqgtr 2\mu/r_0.$$

Wynika stąd, że *rodzaj krzywej nie zależy od kierunku prędkości, lecz tylko od jej wielkości.*

Rodzaj krzywej możemy więc wyznaczyć, znając jedno położenie punktu i szybkość jego w tym położeniu.

Komety np. poruszają się w obrębie układu słonecznego pod wpływem przyciągania przez słońce, krążą więc (względem słońca) po krzywych rzędu drugiego.

Załóżmy obecnie, że punkt porusza się po elipsie o równaniu $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos(\varphi - \varphi_0)$. Ze wzoru Bineta (3) dostaniemy $-\frac{KMm}{r^2} = -\frac{c^2}{p}\frac{m}{r^2}$ czyli $KM = \frac{c^2}{p}\cdot$ Niech a i b będą osiami elipsy, zaś T czasem obiegu. Prędkość polowa będzie wówczas $\frac{1}{2}c = ab\pi/T$. Ponieważ $p = b^2/a$, więc $KM = 4\pi^2a^3/T^2$, skąd

(10) $$a^3/T^2 = KM/4\pi^2.$$

Wynika stąd, że *stosunek a^3/T^2 zależy tylko od masy ciała przyciągającego, a nie od masy poruszającego się punktu.*

Gdyby słońce było w spoczynku, to stosunek a^3/T^2 byłby dla planet wielkością stałą (tak jak tego wymaga trzecie prawo Keplera). Słońce nie jest jednak w spoczynku, ponieważ jest przyciągane przez planety. Stąd pochodzą odchylenia od prawa Keplera.

Sprawą tą zajmiemy się później przy t. zw. *zagadnieniu dwóch ciał* (rozdz. V).

Ruch po linii prostej. Zbadajmy jeszcze przypadek szczególny, gdy prędkość polowa jest zerem. Ruch wtedy odbywa się po prostej przechodzącej przez środek pola, t. j. przez punkt M (str. 87). Ponieważ v oznacza wartość bezwzględną prędkości, więc

(11) $$v = |\dot{r}|.$$

Przypuśćmy, że dla $t=0$ jest $r=r_0$, $v=v_0$. Z równości (2), str. 107, wynika

(12) $$v^2 = 2\mu r^{-1} + h,$$

skąd

(13) $$h = v_0^2 - 2\mu r_0^{-1}.$$

Załóżmy, że w chwili początkowej $t=0$ prędkość poruszającego się punktu zwrócona była od punktu M, czyli że punkt się oddalał. Dla $t=0$ jest więc $\dot{r} > 0$.

Rozpatrzymy dwa przypadki zależnie od tego, czy $h \geqslant 0$, czy $h < 0$.

1^0. $h \geqslant 0$. Na mocy (12) jest stale $v^2 \geqslant 2\mu r^{-1}$, więc $v^2 > 0$; zatem stale $v > 0$. Wynika stąd, że punkt nigdy się nie zatrzyma i ciągle będzie oddalał się od M. Będzie więc stale $\dot{r}>0$, skąd na mocy (11) $v=\dot{r}$ przez cały czas ruchu. Z (12) otrzymujemy

(14) $$\dot{r} = v = \sqrt{2\mu r^{-1} + h} \quad \text{czyli} \quad dr/\sqrt{2\mu r^{-1} + h} = dt.$$

Zatem

(15) $$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\mu r^{-1} + h}} = t.$$

Z równości powyższej wynika, że gdy t dąży do ∞, r także dąży do ∞, a więc punkt oddala się do nieskończoności.

2^0. $h<0$. W tym przypadku istnieje takie $r=r_1$, dla którego $v=0$. Wartość r_1 otrzymamy z (12), kładąc $v=0$ i $r=r_1$. Dostaniemy

(16) $$r_1 = -2\mu/h.$$

Łatwo okazać, że $r_1 > r_0$. Mamy bowiem $2\mu > 2\mu - r_0 v_0^2 = r_0(2\mu r_0^{-1} - v_0^2) = r_0(-h)$. Ponieważ $h<0$, więc $-2\mu/h > r_0$, zatem na mocy (16) jest $r_1 > r_0$.

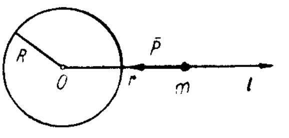
Na początku ruchu, dopóki $r<r_1$, punkt będzie się więc oddalał od M. W tym okresie będzie więc stale $\dot{r}>0$, zatem na mocy (11) $\dot{r}=v$ i wskutek tego będą zachodziły wzory (14) i (15).

Podstawiając we wzorze (15) zamiast górnej granicy całkowania r wartość r_1, otrzymamy chwilę t_1, dla której $r=r_1$. Zatem

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{2\mu r^{-1}+h}} = t_1.$$

Dla $t=t_1$ będziemy mieli $v=0$, a dla $t>t_1$ punkt będzie się z powrotem zbliżał do M.

Przyjmując, że ziemia jest kulą złożoną z warstw jednorodnych (t. j. o stałej gęstości), współśrodkowych, można okazać, że ziemia przyciąga punkt materialny zewnętrzny tak, jak gdyby cała masa ziemi skupiona była w jej środku O. Otrzymane wyniki możemy więc stosować do ruchu ciał przyciąganych przez ziemię, oznaczając przez M masę ziemi (skupioną w jej środku O) i zakładając, że początek układu znajduje się w punkcie O, zaś poruszający się punkt materialny nad powierzchnią ziemi, t. zn. że $r \geqslant R$, gdzie R jest promieniem ziemi.



Przykład. Załóżmy, że punkt materialny został wyrzucony z powierzchni ziemi pionowo do góry z prędkością v_0. Zatem $r_0=R$ i na mocy (13) $h=v_0^2-2\mu R^{-1}$. Ze wzoru (7) str. 91, wynika, że $\mu=KM=gR^2$, gdzie g oznacza przyśpieszenie ziemskie. Zatem

$$h=v_0^2-2gR.$$

Jeżeli $v_0<\sqrt{2gR}$, to $h<0$, a więc punkt spadnie z powrotem na ziemię. Jeżeli natomiast $v_0 \geqslant \sqrt{2gR}$, to $h \geqslant 0$, a więc punkt nie powróci więcej na ziemię.

Przyjmując $R=6300$ km, $g=9{,}81$ m·sek^{-2}, otrzymamy $\sqrt{2gR}=12$ km·sek^{-1}. Zatem, jeżeli ciało wyrzucimy w górę z prędkością $v_0 \geqslant 12$ km·sek^{-1}, to nie spadnie nigdy z powrotem na ziemię. Wynik ten nie uwzględnia jednak oporu powietrza.

§ 15. Ruch harmoniczny. Ruch harmoniczny prosty. Niech w polu środkowym na punkt materialny o masie m działa siła $\bar{P}$, skierowana stale ku środkowi O i której wielkość jest proporcjonalna do odległości punktu od O.

Siłę $\bar{P}$ nazywamy wówczas *siłą sprężystą.*

Załóżmy na razie, że punkt porusza się po osi x, której O jest początkiem. Oznaczając przez x współrzędną punktu m, zaś przez P współrzędną siły, będziemy więc mieli

(1) $$P = -\lambda^2 x,$$

gdzie λ^2 jest współczynnikiem proporcjonalności. Zatem $m\ddot{x} = -\lambda^2 x$. Kładąc $k^2 = \lambda^2/m$, otrzymamy $\ddot{x} = -k^2 x$ czyli

(2) $$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Z równania (2) wynika, że przyśpieszenie punktu ma wielkość proporcjonalną do odległości punktu od początku O i zwrot stale ku O.

Ruch, mający tę własność nazywamy ruchem *harmonicznym* (lub *drgającym*) *prostym*.

Równanie różniczkowe (2) jest równaniem liniowym drugiego rzędu o współczynnikach stałych. Pierwiastki równania charakterystycznego $r^2 + k^2 = 0$ są $r_{1,2} = \pm ki$. Ogólnym więc rozwiązaniem równania (2) jest

(3) $$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt.$$

Pisząc stałe c_1, c_2 w postaci $c_1 = a \cos kt_0$, $c_2 = -a \sin kt_0$, (gdzie a i t_0 są dowolnymi stałymi, przyczem $a \geqslant 0$), otrzymamy

(4) $$x = a \sin k(t - t_0),$$

skąd, zaczynając rachubę czasu od chwili t_0,

(I) $$x = a \sin kt.$$

Stałą a nazywamy *amplitudą*.

Ponieważ $|\sin kt| \leqslant 1$, więc amplituda a wyraża największe odchylenie punktu od O. Dla $t = \pm \pi/2k$ dostajemy $x = \pm a$. Torem punktu jest więc odcinek od $-a$ do a. Połóżmy

(5) $$T = 2\pi/k.$$

Wówczas $a \sin k(t + T) = a \sin(kt + 2\pi) = a \sin kt$. Na mocy więc (I) punkt zajmie to samo położenie w czasie t i $t + T$. Ruch jest zatem *okresowy* (czyli *periodyczny*) o *okresie* T.

Wstawiając w (I) zamiast k wartość wyznaczoną z (5), otrzymamy

(II) $$x = a \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Jeżeli n oznacza ilość okresów na 1 sek, to $n = 1/T$. Na mocy więc (II)

(III) $$x = a \sin 2n\pi t.$$

Różniczkując (II), otrzymamy:

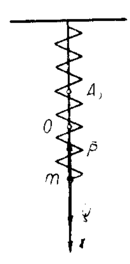
$$(6) \qquad \dot{x} = v = \frac{2a\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t, \qquad \ddot{x} = p = -\frac{4a\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t.$$

Na mocy (II) i (6) możemy ułożyć następującą tabelkę, podającą położenie, prędkość i przyśpieszenie punktu dla $t=0$, $\frac{1}{4}T$, $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{4}T$ i T:

t	0	$\frac{1}{4}T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{3}{4}T$	T
x	0	a	0	$-a$	0
v	$2a\pi/T$	0	$-2a\pi/T$	0	$2a\pi/T$
p	0	$-4a\pi^2/T^2$	0	$4a\pi^2/T^2$	0

Z tabelki tej widzimy, że w ciągu okresu T punkt porusza się od początku układu O do punktu $x=a$, następnie wraca przez punkt O i dochodzi do punktu $x=-a$, następnie powraca do O i t. d. Największa prędkość jest w O, natomiast na krańcach toru (t. j. w punktach $x=\pm a$) prędkość jest zerem. Przyśpieszenie zaś jest największe na krańcach, t. j. dla $x=\pm a$; w O przyśpieszenie jest zerem.

Przykład. W dolnym końcu sprężyny zawieszonej pionowo przyczepiona jest kulka o masie m. Niech O oznacza punkt w którym jest ona w spoczynku (w równowadze). Jeżeli kulkę odchylimy wzdłuż linii pionowej od położenia równowagi, to kulka zacznie się wahać pionowo. Jeżeli masa sprężyny jest mała, to możemy w przybliżeniu przyjąć, że sprężyna działa na kulkę z siłą $\bar{P}$ proporcjonalną do wydłużenia (wzgl. skrócenia) i skierowaną stale ku punktowi A_0, w którym znajdował się koniec sprężyny nierozciągniętej przed zawieszeniem kulki.



Obierzmy w punkcie O początek osi x, skierowanej pionowo w dół. Kładąc $A_0O = d$, otrzymamy

$$P = -\lambda^2(x+d),$$

gdzie λ jest liczbą stałą, zależną od sprężyny. Ponieważ w O kulka jest w równowadze i $P=-\lambda^2 d$ (bo $x=0$), zatem $-\lambda^2 d + mg = 0$, skąd $\lambda^2 = mg/d$. Podczas ruchu jest $m\ddot{x} = P + mg = -\lambda^2(x+d) + mg$, więc $m\ddot{x} + \lambda^2 x = 0$ czyli $\ddot{x} + k^2 x = 0$, gdzie

$$k^2 = \lambda^2/m = g/d.$$

Na mocy (I), str. 112, rozwiązaniem powyższego równania jest $x = a \sin kt$, zatem

$$x = a \sin \sqrt{\frac{g}{d}}\, t.$$

Kulka będzie więc odbywała ruch harmoniczny prosty około punktu O. Na mocy (5) okres ruchu wynosi

$$T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{d/g} = 2\pi\sqrt{m}/\lambda.$$

Okres ruchu zależy więc od masy punktu.

Ruch harmoniczny płaski. Niechaj punkt porusza się w polu sił środkowym, w którym siła $\overline{P}$ ma zwrot ku środkowi pola i jest (co do wielkości) proporcjonalna do odległości punktu od środka.

Obierzmy w środku pola początek O układu współrzędnych. Ponieważ ruch środkowy jest ruchem płaskim, więc możemy przyjąć, że odbywa się w płaszczyźnie xy.

Według prawa Newtona jest $m\overline{p} = \overline{P}$, gdzie $\overline{p}$ oznacza przyśpieszenie punktu. Przyśpieszenie ma więc zwrot ku środkowi pola i jest (co do wielkości) proporcjonalne do odległości punktu od środka.

Ruch mający tę własność nazywamy ruchem *harmonicznym płaskim*, a siłę $\overline{P}$ siłą *sprężystą* (por. str. 111).

Na mocy założenia mamy

$$P_x = -\lambda^2 x \qquad \text{i} \qquad P_y = -\lambda^2 y,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Równania ruchu będą miały postać

$$m\ddot{x} = -\lambda^2 x, \qquad m\ddot{y} = -\lambda^2 y.$$

Kładąc, jak poprzednio $k^2 = \lambda^2/m$, otrzymamy

(7) $$\ddot{x} = -k^2 x, \qquad \ddot{y} = -k^2 y.$$

Na str. 112, wzór (4), wykazaliśmy, że rozwiązaniem powyższych równań jest:

(8) $$x = a' \sin k(t - t_0'), \qquad y = a'' \sin k(t - t_0''),$$

gdzie a', a'', t_0', t_0'' są dowolnymi stałymi.

Jak łatwo sprawdzić, ruch ten jest również ruchem okresowym w okresie $T = 2\pi/k$.

Z równań (8) otrzymujemy:

$$a''x \cos kt_0'' - a'y \cos kt_0' = a'a'' \cos kt \sin k(t_0'' - t_0'),$$
$$a''x \sin kt_0'' - a'y \sin kt_0' = a'a'' \sin kt \sin k(t_0'' - t_0').$$

Podnosząc do kwadratu i dodając stronami, otrzymamy

(9) $$a''^2x^2 + a'^2y^2 - 2\,a'a''xy \cos k(t_0'' - t_0') = [a'a'' \sin k(t_0'' - t_0')]^2.$$

Jeżeli $a'=0$, lub $a''=0$, lub $t_0''-t_0'=n\pi/k$ (gdzie n całkowite), to równanie (9) jest równaniem linii prostej. W pozostałych przypadkach (9) jest równaniem elipsy, której środek leży w początku układu.

A więc: *ruch harmoniczny płaski odbywa się po prostej, przechodzącej przez środek pola, lub po elipsie, której środek leży w środku pola.*

Ruch harmoniczny płaski, odbywający się po prostej, jest oczywiście ruchem harmonicznym prostym.

Ruch harmoniczny tłumiony. Niech na punkt materialny, poruszający się po osi x, działa oprócz siły sprężystej $\bar{P}$ (t. j. proporcjonalnej do odległości od środka i skierowanej ku środkowi), jeszcze siła $\bar{Q}$ (*tłumiąca* czyli hamująca ruch), co do wielkości proporcjonalna do prędkości, lecz wprost przeciwnie skierowana niż prędkość.

Ruch, jaki punkt będzie wówczas wykonywał, nazywamy ruchem *harmonicznym tłumionym*.

Oznaczając przez P i Q współrzędne sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$, możemy napisać:

(10) $$P = -\lambda^2 x \qquad \text{i} \qquad Q = -2\,\mu\dot{x},$$

gdzie λ^2 i $\mu>0$ są współczynnikami proporcjonalności. Zatem $m\ddot{x} = -\lambda^2 x - 2\,\mu\dot{x}$. Kładąc

(11) $$\lambda^2/m = k^2 \qquad \text{i} \qquad \mu/m = \varepsilon,$$

otrzymamy więc

(IV) $$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + k^2 x = 0.$$

Równanie (IV) jest równaniem liniowym o współczynnikach stałych rzędu drugiego. Jego równaniem charakterystycznym jest

(12) $$r^2 + 2\,\varepsilon r + k^2 = 0,$$

skąd

(13) $$r_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Rozpatrzymy tu trzy przypadki, zależnie od tego czy wyróżnik $\varepsilon^2 - k^2$ jest ujemny, dodatni czy równy zeru.

1^0. $\varepsilon^2 - k^2 < 0$. Przypadek ten występuje, gdy ε jest małe, t. j. gdy siła hamująca $\bar{Q}$ jest mała. Połóżmy

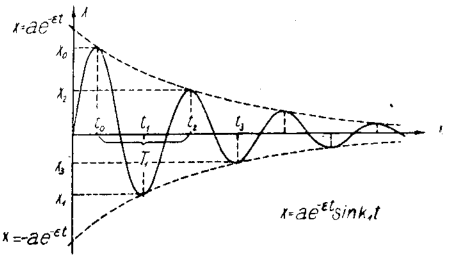
(14) $$\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = k_1.$$

Zatem, na mocy (13) $r_{1,2} = -\varepsilon \pm i k_1 t$. Rozwiązaniem ogólnym równania (IV) jest więc w tym przypadku

$$x = e^{-\varepsilon t}(c_1 \sin k_1 t + c_2 \cos k_1 t).$$

Pisząc stałe c_1, c_2, w postaci $c_1 = A \cos k_1 t_0$ i $c_2 = -A \sin k_1 t_0$, gdzie $A > 0$ i t_0 są dowolnymi stałymi, otrzymamy

(15) $$x = A e^{-\varepsilon t} \sin k_1 (t - t_0).$$



Obierzmy, jako nowy początek czasu, chwilę t_0; podstawmy zatem $t - t_0 = t'$. Dostaniemy $x = A e^{-\varepsilon(t'+t_0)} \sin k_1 t'$; pisząc z powrotem t zamiast t' i kładąc $A e^{-\varepsilon t_0} = a$, otrzymamy

(V) $x = a e^{-\varepsilon t} \sin k_1 t$, gdzie $a > 0$.

Wykres powyższej funkcji podany jest na rysunku. Aby wyznaczyć ekstrema tej funkcji, należy obliczyć miejsca zerowe pochodnej $\dot{x} = a e^{-\varepsilon t}(k_1 \cos k_1 t - \varepsilon \sin k_1 t)$. Będzie więc $\dot{x} = 0$ dla tych wartości t, dla których

(16) $$tg\, k_1 t = k_1/\varepsilon.$$

Jeżeli t_0 jest najmniejszym pierwiastkiem dodatnim równania (16), to pozostałe pierwiastki mają postać

(17) $$t_n = t_0 + n\pi/k_1,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Badając znak drugiej pochodnej, stwierdzamy, że maximum występuje dla n parzystych, a minimum dla n nieparzystych. Wynika stąd, że w chwilach t_n pochodna $\dot{x}$ zmienia znak, a więc prędkość zmienia zwrot.

Chwile t_n nazywamy *chwilami zwrotu*, odpowiednie zaś położenia poruszającego się punktu — *punktami zwrotu*.

Punkty zwrotu wypadają okresowo co π/k_1 sek, i to kolejno, raz na prawo, raz na lewo od początku O.

Czas $T_1 = 2\pi/k_1$ nazywamy jak wprzódy *okresem ruchu.*

Czas $\frac{1}{2}T_1 = \pi/k_1$ między dwiema chwilami zwrotu nazywa się *okresem drgania.*

Na mocy (17) mamy więc

$$t_n = t_0 + \tfrac{1}{2}\,n\,T_1. \tag{18}$$

Weźmy pod uwagę dwa po sobie następujące punkty zwrotu x_n, x_{n+1}, odpowiadające chwilom t_n, t_{n+1}. Na mocy (V) i (18) jest:

$$|x_n| = a e^{-\varepsilon(t_0+\frac{1}{2}nT_1)}\,|\sin k_1 t_0|, \qquad |x_{n+1}| = a e^{-\varepsilon(t_0+\frac{1}{2}(n+1)T_1)}\,|\sin k_1 t_0|,$$

skąd

$$|x_{n+1}|/|x_n| = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon T_1}.$$

Wynika stąd, że współrzędne x_n maleją do zera (co do modułu) według postępu geometrycznego.

A więc: *jeżeli siła hamująca jest mała, to maksymalne odchylenia punktu następują po sobie w równych odstępach czasu* (okres drgania) *i maleją do zera według postępu geometrycznego.*

2^0. $\varepsilon^2 - k^2 > 0$. Przypadek ten występuje gdy siła tłumiąca jest duża. Łatwo stwierdzić, że pierwiastki równania charakterystycznego (13) są w tym przypadku ujemne. Oznaczając je przez $-\varrho_1$ i $-\varrho_2$, otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (IV) w postaci

$$x = Ae^{-\varrho_1 t} + Be^{-\varrho_2 t}, \tag{VI}$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi oraz $\varrho_1 > 0$ i $\varrho_2 > 0$.

Gdy czas t wzrasta, to x szybko dąży do zera. Nie trudno, sprawdzić, że istnieje co najwyżej jeden punkt zwrotu. Prędkość jest więc co najwyżej raz tylko zerem.

3^0. $\varepsilon^2 - k^2 = 0$. Przy tym założeniu równanie charakterystyczne (13) ma pierwiastek podwójny $-\varepsilon$. Rozwiązanie ogólne równania (IV) ma postać

$$x = e^{-\varepsilon t}(At + B), \tag{VII}$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.

Gdy czas wzrasta, x dąży szybko do zera. Podobnie jak poprzednio, istnieje co najwyżej jeden punkt zwrotu, a więc prędkość staje się zerem co najwyżej raz tylko.

Ruch harmoniczny wymuszony. Niech na punkt materialny, poruszający się po osi x, działa oprócz siły sprężystej $\bar{P}$ i tłumiącej $\bar{Q}$ jeszcze siła $\bar{R}$, skierowana wzdłuż osi x i zależna tylko od czasu.

Współrzędna siły $\bar{R}$ będzie więc

$$R = mw\, f(t),$$

gdzie w jest stałe.

Przypuśćmy, że siła $\bar{R}$ jest periodyczna, np. że

$$R = mw \sin(\alpha t + \beta), \tag{19}$$

gdzie α i β są stałe. Równanie ruchu ma więc postać (por. (IV), str. 115):

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + k^2 x = w \sin(\alpha t + \beta), \tag{20}$$

gdzie znaczenie stałych ε i k jest takie same jak poprzednio. Aby otrzymać rozwiązanie ogólne równania (20), wyznaczamy jedno szczególne postaci

$$x = b \sin(\alpha t + \gamma). \tag{21}$$

W celu wyznaczenia stałych b i γ, podstawmy (21) w (20). Dostaniemy

$$(k^2 - \alpha^2) b \sin(\alpha t + \gamma) + 2\alpha\varepsilon b \cos(\alpha t + \gamma) = w \sin(\alpha t + \beta). \tag{22}$$

Kładąc raz $\alpha t + \gamma = 0$, drugi raz $\alpha t + \gamma = \pi/2$, dostaniemy

$$2\alpha\varepsilon b = w \sin(\beta - \gamma), \qquad (k^2 - \alpha^2) b = w \cos(\beta - \gamma), \tag{23}$$

skąd

$$b^2 = \frac{w^2}{(k^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\varepsilon^2}, \qquad \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{2\alpha\varepsilon}{k^2 - \alpha^2}, \tag{24}$$

a z równości tych wyznaczamy już b i γ.

Opierając się na (24), łatwo stwierdzić, że funkcja (21) spełnia równanie (20) tożsamościowo dla każdego t.

Rozpatrzmy przypadek $\varepsilon^2 - k^2 < 0$. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + k^2 x = 0$ podaje wzór (15), str. 116. Zatem ogólnym rozwiązaniem równania (20) jest

$$x = Ae^{-\varepsilon t} \sin k_1(t - t_0) + b \sin(\alpha t + \gamma), \quad \text{gdzie} \quad k_1 = \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}. \tag{25}$$

Gdy t wzrasta, pierwszy składnik dąży szybko do zera i ruch staje się w przybliżeniu harmonicznym o równaniu

$$x = b \sin(\alpha t + \gamma).$$

Amplitudą tego ruchu jest b. Siła $\bar{R}$ jest siłą periodyczną o okresie $T' = 2\pi/a$. Okres ruchu harmonicznego tłumionego wynosi $T_1 = 2\pi/k_1$. Przypuśćmy, że okresy T' i T_1 mało się różnią od siebie, czyli że a mało się różni od k_1. Jeżeli siła tłumiąca jest mała, to ε jest małe, więc $k_1 = \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$ mało się różni od k. Zatem i k mało się będzie różniło od a. Na mocy więc (24) może być b wielkie nawet wówczas, gdy w jest małe (t. zn. gdy siła $\bar{R}$ jest mała).

Widzimy stąd, że *małą siłą periodyczną, o okresie zbliżonym do okresu ruchu, możemy wywołać wielkie odchylenia punktu od środka, gdy siła tłumiąca jest mała.*

Oddział żołnierzy, przechodzących przez most krokiem miarowym, wywołuje drgania (własne) mostu. Jeżeli okresy kroków i drgania mostu mało się różnią od siebie, to odchylenia mostu mogą stać się szybko tak duże, że most się załamie. Podobnie gdy automobil doznaje na złej drodze wstrząsów, drobnych nawet, ale których okres jest zbliżony do okresu drgań (własnych) jego resorów, to wahania mogą stać się tak wielkie, że resor pęknie.

Krzywe Lissajous. Niech na punkt materialny działa siła $\bar{P}$, której rzuty na osie układu są (co do wielkości) proporcjonalne do współrzędnych punktu i skierowane ku początkowi układu. Możemy więc przyjąć, że:

$$P_x = -\lambda_1^2 x, \qquad P_y = -\lambda_2^2 y, \qquad P_z = -\lambda_3^2 z,$$

gdzie λ_1, λ_2, λ_3 są stałe. Równania ruchu mają postać:

$$m\ddot{x} = -\lambda_1^2 x, \qquad m\ddot{y} = -\lambda_2^2 y, \qquad m\ddot{z} = -\lambda_3^2 z.$$

Kładąc $\lambda_1^2/m = k_1^2$, $\lambda_2^2/m = k_2^2$ i $\lambda_3^2/m = k_3^2$, otrzymamy więc:

(26) $$\ddot{x} = -k_1^2 x, \qquad \ddot{y} = -k_2^2 y, \qquad \ddot{z} = -k_3^2 z.$$

Rozwiązaniami powyższych równań (por. str. 112, wzór (4)) są funkcje:

(27) $$x = a_1 \sin k_1 (t - t_0'), \qquad y = a_2 \sin k_2 (t - t_0''), \qquad z = a_3 \sin k_3 (t - t_0''').$$

Okresy tych funkcji wynoszą (str. 112, wzór (5)):

(28) $$T_1 = 2\pi/k_1, \qquad T_2 = 2\pi/k_2, \qquad T_3 = 2\pi/k_3.$$

Jeżeli ruch jest okresowy o okresie T, to ilorazy $T:T_1$, $T:T_2$, $T:T_3$ muszą być liczbami całkowitymi. Zatem ilorazy $T_1:T_2$, $T_1:T_3$ i $T_2:T_3$ (lub ze względu na (28) ilorazy $k_2:k_1$, $k_3:k_1$ i $k_3:k_2$) muszą być liczbami wymiernymi. Jeżeli więc nie wszystkie te ilorazy są liczbami wymiernymi, to ruch nie jest ruchem okresowym.

W przypadku ruchu na płaszczyźnie, tory ruchu określonego równaniami (27) noszą nazwę *krzywych Lissajous*; odgrywają one ważną rolę w akustyce.

Przykład. Ruch odbywa się w płaszczyźnie xy. Niech $k_2 : k_1 = 2$ i $t_0' = t_0'' = 0$.

Kładąc $k_1 = k$ i $k_2 = 2k$, otrzymamy zatem na mocy (27):

$$x = a_1 \sin kt \qquad \text{i} \qquad y = a_2 \sin 2kt.$$

Ponieważ $y = 2a_2 \sin kt \cos kt$, więc $\sin kt = x/a_1$ i $\cos kt = a_1 y / 2a_2 x$, skąd $(x/a_1)^2 + (a_1 y / 2a_2 x)^2 = 1$, czyli

$$4\, a_2^2 x^4 - 4\, a_1^2 a_2^2 x^2 + a_1^4 y^2 = 0.$$

Tor będzie więc krzywą rzędu czwartego.

§ 16. Warunki równowagi w polu sił. Jeżeli w pewnym polu sił punkt materialny jest w punkcie A w równowadze, to oczywiście siła $\overline{P}$ działająca w A równa się zeru. Na odwrót, jeżeli w pewnym punkcie $A(x_0, y_0, z_0)$ pola, siła $\overline{P} = 0$, to punkt materialny umieszczony w A w chwili $t = t_0$ bez prędkości początkowej (t. zn. $\overline{v}_0 = 0$) pozostanie stale w spoczynku t. j. w równowadze. Wynika to stąd, że warunki początkowe wyznaczają ruch jednoznacznie, a spoczynek (t. j. ruch określony równaniami $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$) spełnia warunki początkowe i równanie $m\overline{p} = \overline{P}$; mamy bowiem stale $\overline{p} = 0$ i $\overline{P} = 0$.

W polu potencjalnym pochodne cząstkowe potencjału V równe są, jak wiemy, rzutom siły na osie układu (§ 11, str. 100). Jeżeli więc punkt A jest położeniem równowagi, wówczas w punkcie A:

$$(1) \qquad \partial V / \partial x = 0, \qquad \partial V / \partial y = 0, \qquad \partial V / \partial z = 0.$$

Równania powyższe zachodzą w szczególności w tych punktach, w których występują maxima lub minima potencjału.

A więc: *punkty, w których występują ekstrema potencjału, są położeniami równowagi.*

Położenia równowagi mogą jednak występować również w takich punktach, w których potencjał nie ma ekstremum; równania (1) przedstawiają bowiem tylko warunki k o n i e c z n e istnienia ekstremum.

Równowaga stała. Niech w polu sił punkt materialny znajduje się w równowadze w punkcie A.

Powiadamy, że *równowaga jest stała*, jeżeli punkt materialny po małym przesunięciu z punktu A i po otrzymaniu małej energii kinetycznej początkowej, będzie poruszał się stale w niewielkiej odległości od A i posiadał stale małą energię kinetyczną. Ściślej mówiąc, równowaga w A jest stała, jeżeli do każdych dwu liczb $R>0$ i $\varepsilon>0$ można dobrać takie liczby $R_0>0$ i $\varepsilon_0>0$, że punkt materialny, znajdujący się gdziekolwiek w odległości mniejszej niż R_0 od A, będzie po otrzymaniu energii kinetycznej początkowej mniejszej niż ε_0 poruszał się w odległości od A stale mniejszej niż R i posiadał energię kinetyczną stale mniejszą niż ε.

Jeżeli równowaga w punkcie A nie jest stała, mówimy, że w punkcie tym jest *równowaga niestała*.

Twierdzenie Dirichleta. *W polu potencjalnym punkt, w którym potencjał osiąga maximum właściwe, jest położeniem równowagi stałej.*

Dowód. Niech w pewnym polu potencjalnym potencjał V osiąga maximum właściwe w punkcie A (mówi się, że funkcja osiąga w punkcie A *maximum właściwe*, jeżeli w pewnym otoczeniu tego punktu największą wartość przyjmuje tylko w punkcie A).

Załóżmy, że w punkcie A potencjał ma wartość 0; możemy to zawsze uzyskać przez dodanie odpowiedniej stałej, ponieważ potencjał określony jest tylko z dokładnością do pewnej stałej (str. 99).

Weźmy dowolne $R>0$ i $\varepsilon>0$. Bez szkody dla ogólności dowodu możemy też obrać R tak małe, by w kuli K o środku A i promieniu R potencjał był wszędzie po za A ujemny. Oznaczmy przez L maksimum potencjału na powierzchni kuli K; zatem $L<0$.

Niech teraz ε_0 będzie dowolną liczbą, spełniającą nierówności:

(2) $$\varepsilon_0>0, \qquad \varepsilon_0<-\tfrac{1}{2}L, \qquad \varepsilon_0<\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Ponieważ w A potencjał jest zerem, więc istnieje taka kula K_0 o środku A i promieniu $R_0<R$, że

(3) $$-\varepsilon_0<V\leqslant 0 \quad \text{w kuli} \quad K_0.$$

Umieśćmy punkt materialny gdziekolwiek w odległości $<R_0$ od A (t. j. w kuli K_0) i nadajmy mu energię kinetyczną początkową

(4) $$E_0<\varepsilon_0.$$

Na mocy (5), str. 106, jest podczas ruchu stale

(5) $$E - V = E_0 - V_0.$$

Ponieważ na mocy (3) jest $-\varepsilon_0 < V_0$, więc wobec (5) i (4) jest

(6) $$E - V < 2\,\varepsilon_0.$$

Z uwagi na to, że $E \geqslant 0$, otrzymujemy $-V \leqslant 2\,\varepsilon_0$, skąd na mocy (2) $-V < -L$, czyli $V > L$. A więc punkt materialny nigdy nie przekroczy powierzchni kuli K (bo potencjał na niej jest $\leqslant L$); ruch jego będzie się tedy odbywał wewnątrz kuli K, t. j. w odległości od A mniejszej niż R. Ponieważ ponadto w kuli K jest stale $V \leqslant 0$, czyli $-V \geqslant 0$, więc na mocy (6) jest $E < 2\varepsilon_0$, skąd na mocy (1) $E < \varepsilon$. A więc w A jest równowaga stała, c. b. d. d.

Przykład. Weźmy pod uwagę pole sił, w którym $P_x = -k^2x$, $P_y = -k^2y$, $P_z = -k^2z$. Pole to jest więc polem potencjalnym o potencjale $V = -\frac{1}{2}k^2r^2$, gdzie $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Punkt $A(0,0,0)$ jest położeniem równowagi stałej, bo w punkcie tym potencjał osiąga wartość największą 0, a poza tym jest ujemny.

Stałość równowagi w A udowodnimy teraz bezpośrednio.

Niech dane będą dowolne liczby $R > 0$ i $\varepsilon > 0$. Umieśćmy punkt materialny w odległości r_0 od A i nadajmy mu energię kinetyczną E. Zatem $E + \frac{1}{2}k^2r^2 = E_0 + \frac{1}{2}k^2r_0^2$, skąd

(7) $$E \leqslant E_0 + \tfrac{1}{2}k^2r_0^2.$$

Ponadto $\frac{1}{2}k^2r^2 \leqslant E_0 + \frac{1}{2}k^2r_0^2$ czyli

(8) $$r \leqslant \sqrt{\frac{2}{k^2}E_0 + r_0^2}.$$

Jeżeli więc dobierzemy ε_0 i R_0 tak, by było równocześnie

$$\varepsilon_0 + \tfrac{1}{2}k^2R_0^2 < \varepsilon \qquad \text{i} \qquad \sqrt{\frac{2}{k^2}\varepsilon_0 + R_0^2} < R,$$

to otrzymamy dla wszelkich $E_0 < \varepsilon_0$ i $r_0 < R_0$ na mocy (7) i (8) $E < \varepsilon$ i $r < R$. Udowodniliśmy więc, że równowaga w A jest stała.