II. Bryły, powierzchnie i linie materialne.

§ 6. Gęstość. Gdy ciało nie jest tak małe, byśmy je mogli uważać za punkt materialny, to oprócz masy ciała podajemy także rozmieszczenie masy w ciele. W wielu bowiem zagadnieniach mechaniki duże znaczenie ma nie tylko znajomość masy całego ciała, lecz także znajomość masy jego poszczególnych części.

Często się zdarza, że masa części ciała jest proporcjonalna do objętości. Oznaczając wówczas przez m masę, a przez v objętość ciała, otrzymamy, że masa przypadająca na jednostkę objętości, wynosi

$$\varrho = m/v. \tag{I}$$

Liczbę ϱ nazywamy *gęstością* ciała.

Mówimy w tym przypadku, że masa jest w ciele rozmieszczona jednostajnie, lub że ciało jest *jednorodne*, lub wreszcie, że *gęstość jest stała.*

Masa części ciała o objętości v' wyniesie wówczas $m' = v'\varrho$. Na mocy (I) wymiar gęstości jest

$$[\text{gęstość}] = L^{-3}M \tag{1}$$

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego, t. j. nie zakładajmy, że masa jest w danym ciele rozmieszczona jednostajnie. Niechaj A będzie jakimkolwiek punktem danego ciała. Obierzmy w ciele dowolny sześcian o masie Δm i objętości Δv, którego środkiem jest punkt A. Granicę

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \varrho \tag{II}$$

nazywamy *gęstością ciała w punkcie A*.

Gęstość ϱ zależy w ogólności od punktu A. Jeżeli A ma współrzędne x, y, z, to ϱ jest funkcją zmiennych x, y, z; możemy więc napisać $\varrho = \varrho(x, y, z)$. Jeżeli $\varrho = \text{const.}$, to masa w ciele jest rozmieszczona jednostajnie i mamy rozpatrzony już przypadek ciała jednorodnego.

Zakładać będziemy zawsze, że ϱ jest funkcją ciągłą.

Obliczanie masy. Znając gęstość w każdym punkcie ciała możemy obliczyć jego masę, jak również masę dowolnej jego części.

Przy pomocy płaszczyzn równoległych do płaszczyzn xy, yz, zx podzielmy mianowicie dane ciało na drobne prostopadłościany (t. zw. *elementy objętości*) i na ewentualne kawałki brzeżne o kształcie nieregularnym. Oznaczmy objętości kolejnych prostopadłościanów przez Δv_1, $\Delta v_2, \ldots$ i obierzmy w każdym z nich po jednym punkcie o współrzędnych x_1, y_1, z_1, $x_2, y_2, z_2, \ldots$. Masy poszczególnych prostopadłościanów wynoszą w przybliżeniu $\varrho(x_1, y_1, z_1)\Delta v_1$, $\varrho(x_2, y_2, z_2)\Delta v_2, \ldots$. Zatem suma

$$\varrho(x_1, y_1, z_1)\Delta v_1 + \varrho(x_2, y_2, z_2)\Delta v_2 + \ldots$$

przedstawia w przybliżeniu masę ciała. Tworząc podział na coraz drobniejsze prostopadłościany o wymiarach dążących do zera i przechodząc do granicy, otrzymamy dla masy m danego ciała wzór

$$\text{(III)} \qquad m = \iiint_D \varrho(x, y, z)\, dv,$$

gdzie obszar całkowania D obejmuje całe ciało.

W szczególności, gdy $\varrho = \text{const.}$, dostajemy ze wzoru (III) $m = \varrho v$ zgodnie ze wzorem (I).

Wzór (III) podaje również masę dowolnej części danego ciała, jeżeli przyjmiemy, że D oznacza obszar zajęty przez tę część.

Powierzchnia materialna, linia materialna. Niekiedy jeden lub dwa wymiary ciała są drobne w porównaniu z pozostałymi. Przykładami takich ciał są płyty, pręty, druty i t. p. W tych przypadkach przedstawiamy ciało, jako powierzchnię lub linię materialną i mówimy, że *masa* jego jest *rozłożona powierzchniowo* lub *liniowo*.

Niech masa będzie rozłożona na powierzchni S i niechaj A oznacza dowolny punkt tej powierzchni. Oznaczmy przez $\Delta\sigma$ pole małego płata powierzchni S, pokrywającego punkt A (t. zw. *element pola*), przez Δm masę tego płata. Jeżeli wymiary płata będą dążyły do zera, granicę

$$\text{(IV)} \qquad \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta\sigma} = \varrho$$

nazywamy *gęstością powierzchniową w punkcie* A.

W szczególności, gdy $\varrho = \text{const}$, wówczas ϱ przedstawia masę płata o polu 1 cm², wyciętego z powierzchni S.

Można wykazać (podobnie jak poprzednio przy bryłach), że masa powierzchni S wyraża się wzorem

(V) $$m = \iint\limits_{S} \varrho \, d\sigma,$$

gdzie obszar całkowania S rozciągnięty jest na całą powierzchnię.

Gdy $\varrho = \text{const.}$ i P oznacza pole powierzchni S, mamy $m = \varrho P$, skąd

(2) $$\varrho = m/P.$$

Ze wzoru powyższego otrzymujemy dla gęstości powierzchniowej wymiar

(3) $$[\text{gęstość powierzchniowa}] = L^{-2} M.$$

Podobnie postępujemy w przypadku masy rozłożonej liniowo na pewnej krzywej C. Jeżeli A jest punktem krzywej C, wówczas obieramy dowolny łuk krzywej C, pokrywający punkt A. Jeżeli Δs oznacza długość tego łuku (t. zw. *element długości*), zaś Δm jego masę, wówczas granicę

(VI) $$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \varrho$$

nazywamy *gęstością liniową w punkcie* A.

W szczególności jeżeli $\varrho = \text{const}$, wówczas ϱ przedstawia masę łuku (krzywej C) o długości 1 cm.

Masa m na całej krzywej C wynosi

(VII) $$m = \int\limits_{C} \varrho \, ds,$$

gdzie obszar całkowania rozciągnięty jest na całą tą krzywą.

Gdy $\varrho = \text{const}$ i s oznacza długość krzywej C, mamy na mocy (VII):

(4) $$m = \varrho s, \qquad \text{skąd} \qquad \varrho = m/s.$$

Na wymiar gęstości liniowej otrzymujemy więc wzór

(5) $$[\text{gęstość liniowa}] = L^{-1} M.$$

§ 7. Momenty statyczne bezwładności. Środek masy.

Moment statyczny ciała względem pewnej płaszczyzny, np. xy, określamy w sposób następujący. Dzielimy ciało na drobne prostopadłościany o objętościach Δv_1, Δv_2, ... i ewentualnie na pewne kawałki nieregularne brzeżne. W każdym prostopadłościanie obieramy dowolnie po jednym punkcie o współrzędnych x_1, y_1, z_1, $x_2, y_2, z_2, \ldots$ Oznaczmy przez $\varrho(x, y, z)$ gęstość ciała w punkcie x, y, z. Masa prostopadłościanu Δv_1 wynosi w przybliżeniu $\varrho(x_1, y_1, z_1)\cdot\Delta v_1$; gdybyśmy całą jego masę umieścili w punkcie x_1, y_1, z_1, to moment statyczny tej masy względem płaszczyzny xy byłby równy $z_1 \cdot \varrho(x_1, y_1, z_1)\cdot\Delta v_1$. Możemy więc przyjąć, że suma

$$z_1 \cdot \varrho(x_1, y_1, z_1)\cdot\Delta v_1 + z_2 \cdot \varrho(x_2, y_2, z_2)\cdot\Delta v_2 + \ldots$$

przedstawia w przybliżeniu moment statyczny ciała względem płaszczyzny xy. Z tego powodu granicę powyższej sumy, gdy wymiary prostopadłościanów dążą do zera, nazywamy *momentem statycznym ciała względem płaszczyzny* xy.

Ponieważ granicą powyższej sumy jest całka potrójna $\iiint\limits_D z\varrho dv$, gdzie obszar całkowania D jest rozciągnięty na całe ciało, więc

$$\text{(I)}\quad M_{xy} = \iiint\limits_D z\varrho dv \quad \text{i podobnie} \quad M_{xz} = \iiint\limits_D y\varrho dv, \quad M_{yz} = \iiint\limits_D x\varrho dv.$$

Analogicznie określamy moment statyczny powierzchni i linij. Zamiast całek potrójnych wystąpią odpowiednio całki podwójne po powierzchniach i pojedyncze po liniach.

W przypadku masy rozłożonej na powierzchni S otrzymamy

$$\text{(II)}\quad M_{xy} = \iint\limits_S z\varrho d\sigma, \qquad M_{xz} = \iint\limits_S y\varrho d\sigma, \qquad M_{yz} = \iint\limits_S x\varrho d\sigma,$$

gdzie $d\sigma$ jest elementem pola, a dla masy rozłożonej liniowo na krzywej C:

$$\text{(III)}\quad M_{xy} = \int\limits_C z\varrho ds, \qquad M_{xz} = \int\limits_C y\varrho ds, \qquad M_{yz} = \int\limits_C x\varrho ds,$$

gdzie ds jest elementem długości łuku.

Momenty statyczne figur płaskich względem osi x i y wyrażają się wzorami

$$\text{(1)}\quad M_x = \iint\limits_D y\varrho\, dx\, dy, \qquad M_y = \iint\limits_D x\varrho\, dx\, dy.$$

Dla linij płaskich mamy:

$$M_x = \int_C y \varrho\, ds, \qquad M_y = \int_C x \varrho\, ds. \tag{2}$$

Środek masy ciała, powierzchni lub linii materialnej określamy jako punkt o współrzędnych:

$$x_0 = M_{zy}/m, \qquad y_0 = M_{xz}/m, \qquad z_0 = M_{xy}/m, \tag{IV}$$

gdzie M_{zy}, M_{xz}, M_{xy} oznaczają momenty statyczne względem płaszczyzn zy, xz, xy, a m masę ciała.

Dla figur i linii płaskich dostajemy:

$$x_0 = M_y/m, \qquad y_0 = M_x/m. \tag{V}$$

Jeżeli gęstość w ciele jest $\varrho = \text{const.}$, to $M_{zy} = \varrho \iiint_D x\, dv$ i $m = \varrho \iiint_D dv = \varrho v$, skąd

$$x_0 = \frac{\iiint_D x\, dv}{v}, \qquad y_0 = \frac{\iiint_D y\, dv}{v}, \qquad z_0 = \frac{\iiint_D z\, dv}{v}. \tag{VI}$$

Widzimy stąd, że x_0, y_0 i z_0 nie zależą od gęstości.

A więc: *jeżeli gęstość jest stała, to położenie środka ciężkości nie zależy od gęstości.*

To samo odnosi się do powierzchni i linij.

Można wykazać, że twierdzenia o środku masy dla układów punktów materialnych, udowodnione w § 2, zachodzą również w przypadku ciał, powierzchni i linij materialnych.

Bryły, powierzchnie i linie geometryczne. *Momentem statycznym bryły geometrycznej* nazywamy moment statyczny ciała materialnego, mającego postać danej bryły, przy założeniu, że gęstość $\varrho = \text{const}$; zazwyczaj przyjmujemy $\varrho = 1$.

Środek masy tego ciała (który nie zależy od ϱ) nazywamy *środkiem ciężkości bryły geometrycznej.*

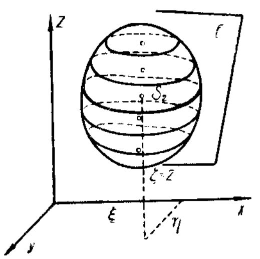
Analogicznie określamy moment statyczny i środek ciężkości dla powierzchni i linii geometrycznych.

Momenty statyczne i środki masy tworów geometrycznych otrzymamy zatem, kładąc w podanych wzorach (I)-(V), (1) i (2) $\varrho=1$ i przyjmując wobec tego, że m oznacza objętość, pole lub długość, zależnie od tego czy twór geometryczny jest bryłą, powierzchnią czy linią.

Poznamy teraz pewne twierdzenie, ułatwiające w wielu wypadkach znalezienie środka masy. Przetnijmy daną bryłę D płaszczyznami równoległymi do pewnej płaszczyzny Π. Załóżmy, że środki ciężkości przekrojów leżą w pewnej płaszczyźnie σ.

Przy tych założeniach można udowodnić, że środek ciężkości bryły D leży również w płaszczyźnie σ.

Intuicyjnie jest to jasne. Podzielmy bowiem bryłę D na cienkie warstwy przy pomocy płaszczyzn równoległych do płaszczyzny Π. Możemy przyjąć w przybliżeniu, że środek masy każdej warstwy leży w płaszczyźnie σ. Zatem moment statyczny każdej warstwy względem płaszczyzny σ jest równy zeru. Wynika stąd, że moment statyczny całej bryły D względem płaszczyzny σ jest zerem (gdyż równy jest sumie momentów poszczególnych warstw). A więc środek masy bryły D też będzie leżał w płaszczyźnie σ.



Ścisły dowód można przeprowadzić w następujący sposób. Przyjmijmy, że Π jest płaszczyzną poziomą, zaś σ jest płaszczyzną o równaniu

(3) $$Ax+By+Cz+E=0.$$

Oznaczmy przez D_z przekrój bryły D płaszczyzną poziomą na wysokości z. Niechaj ξ, η i $\zeta=z$, będą współrzędnymi środka ciężkości S_z przekroju D_z. Oczywiście ξ, η i ζ są funkcjami z i na mocy (3)

(4) $$A\xi+B\eta+C\zeta+E=0.$$

Oznaczając przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka masy bryły D, otrzymujemy z (VI)

(5) $$Ax_0+By_0+Cz_0+E=\frac{1}{v}\left(A\iiint\limits_D x\,dv+B\iiint\limits_D y\,dv+C\iiint\limits_D z\,dv+Ev\right).$$

Niech P_z będzie polem przekroju D_z, a z' i z'' (gdzie $z'<z''$) granicami, w których się zmienia zmienna z. Wówczas

(6) $$P_z=\iint\limits_{D_z} dx\,dy.$$

Zamieniając całkę potrójną na całkę iterowaną, otrzymamy:

$$v=\iiint_D dv=\int_{z'}^{z''} dz \iint_{D_z} dx\,dy=\int_{z'}^{z''} P_z\,dz, \tag{7}$$

$$\iiint_D z\,dv=\int_{z'}^{z''} z\,dz \iint_{D_z} dx\,dy=\int_{z'}^{z''} P_z\,z\,dz=\int_{z'}^{z''} P_z\,\zeta\,dz, \tag{8}$$

$$\iiint_D x\,dv=\int_{z'}^{z''} dz \iint_{D_z} x\,dx\,dy. \tag{9}$$

Ponieważ $\iint_{D_z} x\,dx\,dy$ przedstawia moment statyczny przekroju D_z względem płaszczyzny yz, więc $\iint_{D_z} x\,dx\,dy=P_z\,\xi$. Zatem na mocy (9)

$$\iiint_D x\,dv=\int_{z'}^{z''} P_z\,\xi\,dz \quad \text{i podobnie} \quad \iiint_D y\,dv=\int_{z'}^{z''} P_z\,\eta\,dz. \tag{10}$$

Na mocy więc (6)—(10) dostaniemy

$$Ax_0+By_0+Cz_0+E=\frac{1}{v}\int_{z'}^{z''}(A\xi+B\eta+C\zeta+E)P_z\,dz.$$

Ze wzoru (4) otrzymamy tedy

$$Ax_0+By_0+Cz_0+E=0.$$

A więc, środek ciężkości bryły D leży w płaszczyźnie σ. Udowodniliśmy więc

Twierdzenie. *Jeżeli środki ciężkości przekrojów równoległych danej bryły leżą w jednej płaszczyźnie, to środek ciężkości tej bryły leży w tej samej płaszczyźnie.*

W szczególności wynika stąd, że jeżeli środki ciężkości przekrojów leżą na jednej prostej, to i środek ciężkości bryły leży na tej prostej. Jeżeli bowiem przez tę prostą przeprowadzimy dowolną płaszczyznę, to na mocy udowodnionego twierdzenia środek ciężkości bryły będzie leżał w tej płaszczyźnie.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla powierzchni i figur płaskich.

Reguły Guldina. Niech na płaszczyźnie xy dana będzie krzywa C, o równaniu $y=f(x)$, przyczem $f(x)\geqslant 0$ dla $a\leqslant x\leqslant b$. Oznaczmy przez l długość krzywej. Na mocy (V) środek ciężkości wyznaczony jest wzorami:

$$(11)\qquad x_0=M_y/m=\int_a^b x\,ds/l,\qquad y_0=M_x/m=\int_a^b y\,ds/l.$$

Pole powierzchni zatoczonej przez daną krzywą przy obrocie około osi x-ów wynosi $P=2\pi\int_a^b y\,ds$. Na mocy więc (11) jest

$$\text{I.}\qquad P=2\pi l y_0.$$

Podobny wzór otrzymamy, dla dowolnej krzywej, leżącej ponad osią x-ów.

Ponieważ przy obrocie krzywej środek masy zatacza koło o promieniu y_0, więc $2\pi y_0$ oznacza obwód tego koła.

A więc: *powierzchnia bryły, zatoczonej przez obrót krzywej płaskiej około osi, leżącej w płaszczyźnie tej krzywej i nie przecinającej jej, równa się iloczynowi długości krzywej przez drogę, jaką opisuje środek ciężkości.*

Jest to t. zw. *pierwsza reguła Guldina.*

Weźmy teraz pod uwagę dla tej samej krzywej obszar D zawarty między krzywą, osią x a rzędnymi $x=a$ i $x=b$. Oznaczmy przez F pole obszaru D. Środek ciężkości obszaru D ma na mocy (V), str. 174, współrzędne:

$$(12)\qquad x_0=\frac{M_y}{F}=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{F},\qquad y_0=\frac{M_x}{F}=\frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{F}.$$

Lecz $\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int_a^b dx\left(\int_0^y y\,dy\right)=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx$. Na mocy więc (12) jest

$$(13)\qquad F y_0=\tfrac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx.$$

Jeżeli krzywa obróci się około osi x, wówczas objętość zatoczonej bryły będzie wynosiła $V=\pi\int\limits_a^b y^2 dx$, skąd na mocy (13)

$$\text{II.} \qquad V=2\pi y_0 F.$$

Podobny wzór otrzymalibyśmy dla dowolnego obszaru położonego nad osią x.

A więc: *objętość bryły zatoczonej przez obrót obszaru płaskiego naokoło osi, leżącej w płaszczyźnie obszaru i nieprzecinającej go, równa się iloczynowi pola obszaru przez drogę, jaką odbył środek ciężkości obszaru.*

Jest to t. zw. *druga reguła Guldina.*

Momenty bezwładności i momenty zboczenia. Postępując podobnie jak przy momentach statycznych, dochodzimy do określenia momentów bezwładności i momentów zboczenia dla brył, powierzchni i linij.

Jeżeli $\varrho(x, y, z)$ oznacza gęstość bryły, to momenty bezwładności względem płaszczyzn xy, yz i zx określamy przez wzory:

$$\text{(VII)} \quad I_{xy}=\iiint\limits_D \varrho z^2 dv, \qquad I_{yz}=\iiint\limits_D \varrho x^2 dv, \qquad I_{zx}=\iiint\limits_D \varrho y^2 dv,$$

momenty bezwładności względem osi współrzędnych:

$$\text{(VIII)} \quad \begin{gathered} I_x=\iiint\limits_D \varrho (y^2+z^2) dv, \qquad I_y=\iiint\limits_D \varrho (x^2+z^2) dv, \\ I_z=\iiint\limits_D \varrho (x^2+y^2) dv, \end{gathered}$$

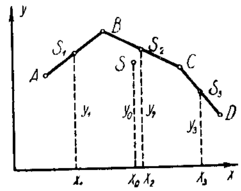
a momenty zboczenia względem płaszczyzn układu:

$$\text{(IX)} \quad D_x=\iiint\limits_D \varrho yz dv, \qquad D_y=\iiint\limits_D \varrho zx dv, \qquad D_z=\iiint\limits_D \varrho xy dv.$$

Aby otrzymać momenty bezwładności dla powierzchni (linij), należy w podanych wzorach całkę potrójną zamienić na podwójną (pojedyńczą) po powierzchni (po linii) i zastąpić dv przez $d\sigma$ (ds), podobnie jak dla momentów statycznych. Określenia ramienia bezwładności oraz masy zredukowanej pozostają bez zmiany. Twierdzenia udowodnione dla układów punktów materialnych zachodzą także i tutaj.

§ 8. Środki ciężkości niektórych linij powierzchni i brył. Jeżeli linia, powierzchnia lub bryła posiada środek symetrii, to jest on równocześnie środkiem ciężkości. Zatem środkiem ciężkości odcinka, pełnego równoległoboku, koła, równoległościanu, kuli i walca jest środek symetrii tych tworów.

Linia łamana. Środek ciężkości linii łamanej, np. $ABCD$, otrzymamy, zastępując każdy odcinek linii punktem materialnym, umieszczonym w środku odcinka, o masie równej długości odcinka. Środek ciężkości układu tych punktów będzie środkiem linii $ABCD$ (rys. 1).



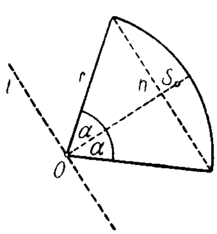
1.

Niechaj d_1, d_2, d_3 oznaczają długości odcinków AB, BC, CD, zaś $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$, $S_3(x_3, x_3)$ środki tych odcinków. Środek ciężkości łamanej $ABCD$ będzie więc miał współrzędne

$$(1) \qquad x_0 = \frac{d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3}{d_1 + d_2 + d_3}, \qquad y_0 = \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3}{d_1 + d_2 + d_3},$$

Łuk koła o promieniu r, należący do kąta środkowego 2α, ma za oś symetrii dwusieczną tego kąta. Środek ciężkości łuku leży więc na tej dwusiecznej (rys. 2).

Aby wyznaczyć odległość środka ciężkości S od środka koła O, opieramy się na pierwszej regule Guldina. Przy obrocie naokoło średnicy l, prostopadłej do dwusiecznej kąta 2α, łuk opisuje powierzchnię pasa kulistego o polu $2r\pi h$ (gdzie h oznacza długość cięciwy, na której wspiera się łuk). Długość łuku wynosi $s = 2r\alpha$, droga zaś środka ciężkości $2\pi \cdot OS$. Zatem $2r\pi h = 4r\pi\alpha \cdot OS$, skąd $OS = h/2\alpha$. Ponieważ $h = 2r \sin\alpha$, więc



2.

$$(2) \qquad OS = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

W szczególności dla półkola jest $2\alpha = \pi$, stąd $OS = 2r/\pi = 0{,}64r$.

Trójkąt. Przetnijmy trójkąt prostymi równoległymi do jednego z boków. Środki odcinków, a więc i środek ciężkości trójkąta, leżą na dośrodkowej.

Wynika stąd, że środek ciężkości trójkąta leży w punkcie przecięcia się trzech dośrodkowych, a więc w odległości $^1/_3$ odpowiedniej wysokości od każdego boku.

Trapez. Środki odcinków równoległych do podstawy trapezu, a więc również środek ciężkości S trapezu, leżą na dośrodkowej.

Aby wyznaczyć odległość y_0 środka ciężkości S od podstawy, obliczmy moment statyczny trapezu względem podstawy. Niechaj a oznacza podstawę, b drugi bok równoległy, h wysokość i P powierzchnię trapezu. Moment statyczny względem podstawy wynosi

(3) $$M=Py_0=\tfrac{1}{2}(a+b)hy_0.$$

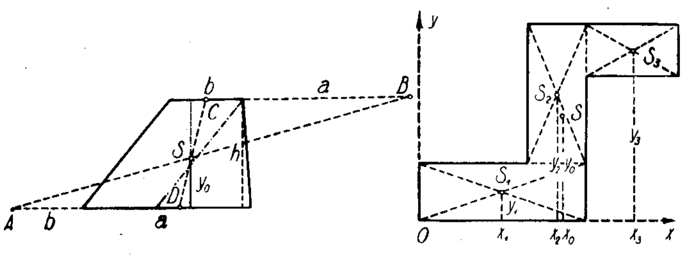
Dzieląc trapez na równoległobok i trójkąt, dostaniemy

(4) $$M=bh\cdot\tfrac{1}{2}h+\tfrac{1}{2}(a-b)h\cdot\tfrac{1}{3}h=\tfrac{1}{6}h^2(a+2b).$$

Z porównania (3) i (4) dostaniemy

(5) $$y_0=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}h.$$

Wynika stąd konstrukcja geometryczna środka ciężkości, przedstawiona na rysunku 1. Z podobieństwa trójkątów BCS i ADS dostajemy $(h-y_0)/y_0=(\frac{1}{2}b+a)/(\frac{1}{2}a+b)$, skąd otrzymujemy y_0 zgodnie ze wzorem (5).



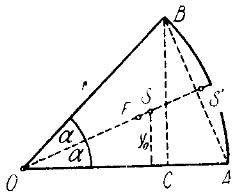
1. 2.

Wielokąt. Aby wyznaczyć środek ciężkości wielokąta, rozbijamy go na trójkąty (trapezy, prostokąty), a następnie obliczamy momenty statyczne poszczególnych części względem osi układu.

Oznaczmy przez p np. pole figury podanej na rys. 2. Rozbijamy ją na 3 prostokąty o polach p_1, p_2 i p_3. Niechaj x_1, y_1, x_2, y_2 i x_3, y_3 będą współrzędnymi środków ciężkości względem osi x i y. Mamy $M_x=p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3$ i $M_y=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3$; środek ciężkości S ma więc współrzędne:

(6) $$x_0=M_y/p, \qquad y_0=M_x/p.$$

Wycinek koła. Weźmy pod uwagę wycinek koła OAB. Z powodu symetrii środek ciężkości S wycinka leży na dwusiecznej kąta środkowego 2α. Odległość OS środka ciężkości od środka koła O otrzymamy opierając się na drugiej regule Guldina. Wycinek OAB zatoczy przez obrót naokoło promienia $OA=r$ wycinek kuli. Wysokość czaszy wycinka kulistego wyniesie $CA=OA-OC=r-r\cos 2\alpha=2r\sin^2\alpha$, skąd objętość wycinka kuli $v=\frac{2}{3}r^2\pi\cdot 2r\sin^2\alpha=$ $=\frac{4}{3}r^3\pi\sin^2\alpha$. Środek ciężkości zatoczy koło o promieniu $y_0=OS\cdot\sin\alpha$. Pole wycinka równa się $r^2\alpha$. Na mocy drugiej reguły Guldina będzie więc $\frac{4}{3}r^3\pi\sin^2\alpha=2\pi y_0\cdot r^2\alpha=2\pi OS\sin\alpha\cdot r^2\alpha$, skąd



$$(7) \qquad OS=\frac{2\sin\alpha}{3\alpha}r.$$

Dla półkola mamy w szczególności $2\alpha=\pi$ czyli

$$(8) \qquad OS=4r/3\pi=0{,}42\,r.$$

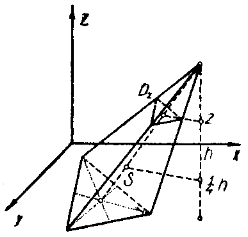
Odcinek koła. Środek ciężkości S' odcinka koła znajduje się na dwusiecznej kąta środkowego do którego należy ten odcinek. Odległość OS' środka ciężkości odcinka od środka koła otrzymamy ze wzoru, przedstawiającego moment statyczny wycinka OAB względem OA jako sumę momentów trójkąta OAB i odcinka koła. Oznaczając więc przez p pole wycinka, przez p' pole trójkąta OAB, przez p'' pole odcinka, a przez F środek ciężkości trójkąta OAB, otrzymamy $p\cdot OS\sin\alpha=p'\cdot OF\sin\alpha+p''\cdot OS'\sin\alpha$. Ponieważ $p=r^2\alpha$, $p'=\frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha$, $p''=p-p'$ i $OF=\frac{2}{3}r\cos\alpha$, więc

$$(9) \qquad OS'=\frac{4\sin^3\alpha}{3(2\alpha-\sin 2\alpha)}r.$$

Graniastosłup. Walec. Środki ciężkości przekrojów graniastosłupa płaszczyznami równoległymi do podstawy leżą na prostej, łączącej środki ciężkości obu podstaw. Przekroje zaś płaszczyznami równoległymi do jednej ze ścian bocznych są równoległobokami (lub składają się z kilku równoległoboków); środki ciężkości tych przekrojów leżą w płaszczyźnie równoległej do podstawy, poprowadzonej w połowie wysokości. Podobnie przedstawia się sprawa dla walca.

Wynika stąd, że *środek ciężkości graniastosłupa lub walca leży w połowie jego wysokości na prostej, łączącej środki ciężkości obu jego podstaw.*

Ostrosłup. Stożek. Środki ciężkości przekrojów równoległych do podstawy ostrosłupa leżą na prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy. Na tej prostej leży więc również środek ciężkości S ostrosłupa. Aby wyznaczyć wysokość, na jakiej leży ten środek ciężkości, obliczamy moment statyczny ostrosłupa względem płaszczyzny podstawy. Obierając płaszczyznę podstawy za płaszczyznę poziomą, otrzymujemy $M_{xy}=\int\int\int z\,dx\,dy\,dz$. Obszar całkowania jest rozciągnięty na cały ostrosłup. Oznaczmy przez h wysokość ostrosłupa, przez D_z przekrój płaszczyzną poziomą na wysokości z i przez P_z pole przekroju D_z. Zamieniając całkę potrójną na całkę iterowaną dostaniemy $M_{xy}=\int_0^h z\,dz\int\int_{D_z} dx\,dy=\int_0^h zP_z\,dz$. Niech P oznacza pole podstawy. Jak wiadomo $P_z/P=(h-z)^2/h^2$, czyli $P_z=\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 P$.



Zatem

$$M_{xy}=\int_0^h z\left(1-\frac{z}{h}\right)^2 P\,dz=\frac{1}{12}h^2P.$$

Z drugiej strony, oznaczając przez v objętość ostrosłupa, a przez z_0 wysokość jego środka ciężkości, mamy

$$M_{xy}=z_0v=z_0\cdot\tfrac{1}{3}hP.$$

Z przyrównania obu wzorów na M_{xy} otrzymujemy

$$z_0=h/4. \tag{10}$$

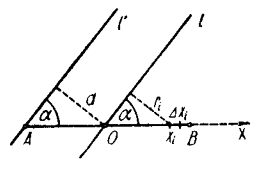
Podobnie przedstawia się sprawa dla stożka.

A więc: *środek ciężkości ostrosłupa (stożka) leży w $^1/_4$ jego wysokości na prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy.*

§ 9. Momenty bezwładności niektórych linij, powierzchni i brył. W tym § zakładać będziemy, że rozpatrywane linie, powierzchnie i bryły mają gęstość stałą ϱ.

Odcinek. Obliczmy moment bezwładności odcinka AB o długości a względem prostej l, przechodzącej przez środek O tego odcinka i nachylonej do niego pod kątem α.

Przyjmijmy, że AB leży na osi x-ów i że O jest początkiem układu współrzędnych. Podzielmy odcinek AB na drobne odcinki przy pomocy punktów $x_1, x_2 \dots$ Połóżmy $\Delta x_1 = x_2 - x_1$, $\Delta x_2 = x_3 - x_2$ i t. d. Moment bezwładności odcinka Δx_i względem prostej l wynosi w przybliżeniu $r_i^2 \Delta m_i$, gdzie Δm_i oznacza masę i-tego odcinka, zaś r_i odległość jego lewego końca od l. Ponieważ $r_i = x_i \sin\alpha$, $\Delta m_i = \varrho \Delta x_i$, więc $r_i^2 \Delta m_i = x_i^2 \varrho \Delta x_i \sin^2\alpha$. Możemy zatem przyjąć, że moment bezwładności I_l względem prostej l wynosi w przybliżeniu $\sum x_i^2 \varrho \Delta x_i \sin^2\alpha$. Przechodząc do granicy, otrzymamy



$$I_l = \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} x^2 \varrho \sin^2\alpha \, dx = \frac{1}{12} a^3 \varrho \sin^2\alpha.$$

Masa m odcinka AB wynosi $m = a\varrho$. Zatem

(1) $$I_l = \tfrac{1}{12} m a^2 \sin^2\alpha.$$

Ponieważ O jest środkiem ciężkości odcinka AB, więc moment bezwładności względem prostej l' równoległej do l i leżącej w odległości d od O wynosi w myśl wzoru (I), str. 161, $I_{l'} = I_l + md^2$, czyli

(2) $$I_{l'} = \tfrac{1}{12} m (a^2 \sin^2\alpha + 12 d^2).$$

W szczególności jeżeli l' przechodzi przez koniec A, to $d = \frac{1}{2} a \sin\alpha$, skąd

(3) $$I_{l'} = \tfrac{1}{3} m a^2 \sin^2\alpha.$$

Jeżeli zaś proste l i l' są prostopadłe do AB, to $\alpha = \pi/2$ i momenty I_l i $I_{l'}$ redukują się do momentów bezwładności względem punktów O i A. Z (1) i (3) otrzymujemy dla $\alpha = \pi/2$:

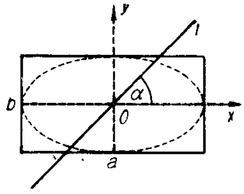
(4) $$I_O = \tfrac{1}{12} m a^2, \qquad I_A = \tfrac{1}{3} m a^2.$$

P r o s t o k ą t. Przeprowadźmy przez środek prostokąta o bokach a, b osie x, y układu współrzędnych. Ponieważ osie te są osiami symetrii, więc są zarazem osiami środkowymi i

$$I_y = \iint_D x^2 \varrho \, dx \, dy = \varrho \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \frac{1}{12} a^3 b \varrho.$$

Masa prostokąta jest $m=ab\varrho$, więc

(5) $$I_y=\tfrac{1}{12}ma^2;\quad \text{podobnie}\quad I_x=\tfrac{1}{12}mb^2.$$



1.

Moment zboczenia D_z jest zerem, więc elipsa bezwładności środkowa ma równanie (str. 169, (3)) $I_x x^2+I_y y^2=c^2$ czyli $\frac{1}{12}mb^2x^2+\frac{1}{12}ma^2y^2=c^2$. Stała c jest dowolna; kładąc $c^2=\frac{1}{12}ma^2b^2\lambda^2$, gdzie λ jest nową stałą dowolną, otrzymamy

(6) $$(x/\lambda a)^2+(y/\lambda b)^2=1.$$

A więc: *elipsy bezwładności środkowe mają osie proporcjonalne do boków prostokąta.*

Moment bezwładności względem prostej l (rys. 1), przechodzącej przez O i nachylonej pod kątem α względem osi x, wynosi (str. 169, wzór (1)) $I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha$ czyli

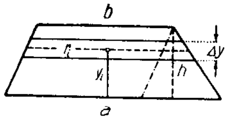
(7) $$I_l=\tfrac{1}{12}m(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha).$$

Momenty bezwładności I_a i I_b względem boków a i b prostokąta wynoszą $I_a=I_x+m(b/2)^2$ i $I_b=I_x+m(a/2)^2$, czyli

(8) $$I_a=\tfrac{1}{3}mb^2,\qquad I_b=\tfrac{1}{3}ma^2.$$

K w a d r a t. Zachowując znakowanie jak dla prostokąta, mamy $a=b$, skąd $I_x=I_y$. Wynika stąd, że elipsa bezwładności środkowa jest kołem. Środek kwadratu jest więc punktem kołowym.

T r a p e z. Aby wyznaczyć moment bezwładności trapezu względem podstawy a (p. rys. 2), podzielmy trapez na drobne paski równoległe do podstawy. Oznaczmy przez $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots$ grubości tych pasków, przez $y_1, y_2, \ldots$ odległość ich środków od podstawy, a przez $r_1, r_2, \ldots$ długości odcinków, przechodzących przez środki pasków równolegle do podstawy. Możemy przyjąć, że moment bezwładności i-tego paska względem boku a wynosi w przybliżeniu $\Delta m_i y_i^2$, gdzie Δm_i oznacza masę i-tego paska. Moment bezwładności I_a względem boku a równa się w przybliżeniu $\sum\Delta m_i y_i^2$. Lecz $\Delta m_i=\Delta y_i r_i\varrho$. Z rysunku 2 widzimy, że $(r_i-b)/(a-b)=(h-y_i)/h$, skąd $r_i=a-(a-b)\dfrac{y_i}{h}\cdot$ Zatem I_a wynosi



2.

w przybliżeniu $\sum\left[a-(a-b)\frac{y_i}{h}\right]\varrho y_i^2 \Delta y_i$. Przechodząc do granicy, dostajemy

$$I_a=\int_0^h\left[a-(a-b)\frac{y}{h}\right]\varrho y^2 dy=\frac{1}{12}\varrho(a+3b)h^3.$$

Ponieważ $m=\frac{1}{2}(a+b)h\varrho$, więc

(9) $$I_a=\frac{1}{6}\cdot\frac{a+3b}{a+b}mh^2.$$

Trójkąt. Ze wzoru powyższego otrzymamy moment bezwładności trójkąta względem podstawy, kładąc $b=0$. Dostaniemy

(10) $$I_a=\tfrac{1}{6}mh^2.$$

Równoległobok. Kładąc we wzorze (9) $b=a$, otrzymamy moment bezwładności równoległoboku względem jednego z boków:

(11) $$I_a=\tfrac{1}{3}mh^2.$$

Prostopadłościan. Umieśćmy początek układu współrzędnych w środku prostopadłościanu, prowadząc osie x, y, z równolegle do krawędzi, których długości oznaczymy przez a, b, c. Moment bezwładności względem osi x wynosi

$$I_x=\int\int\int\varrho(y^2+z^2)dx\,dy\,dz=\varrho\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-c/2}^{c/2}(y^2+z^2)dz=\frac{1}{12}abc\varrho(b^2+c^2).$$

Kładąc $m=abc\varrho$, otrzymujemy stąd

(12) $$I_x=\tfrac{1}{12}m(b^2+c^2)$$

i podobnie $I_y=\frac{1}{12}m(a^2+c^2)$, $I_z=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$.

Moment bezwładności I_a względem krawędzi a jest $I_a=I_x+md^2$, gdzie $d=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}$ więc

(13) $$I_a=\tfrac{1}{3}m(b^2+c^2)$$

i podobnie $I_b=\frac{1}{3}m(a^2+c^2)$, $I_c=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)$.

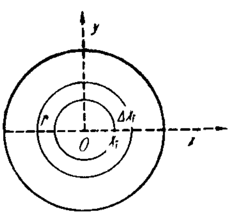
Okrąg koła. Moment bezwładności okręgu o promieniu r względem środka O wynosi oczywiście

(14) $$I_O=mr^2.$$

Aby wyznaczyć moment bezwładności względem średnicy, obierzmy O za początek układu współrzędnych (x, y). Mamy oczywiście $I_x = I_y$. Ponieważ $I_O = I_x + I_y$, więc $I_O = 2I_x$ czyli $I_x = \frac{1}{2} I_O$. Stąd moment bezwładności względem średnicy wynosi

$$I_x = \tfrac{1}{2} m r^2. \tag{15}$$

Koło. Ze względu na symetrię momenty bezwładności powierzchni koła względem średnic są równe. Obierzmy środek koła O za środek układu współrzędnych (x, y). Zatem $I_x = I_y$, a ponieważ moment bezwładności względem środka $I_O = I_x + I_y$, więc $I_O = 2I_x$, więc $I_x = \frac{1}{2} I_O$. Aby obliczyć I_O, podzielmy koło na pierścienie przy pomocy kół współśrodkowych o promieniach $x_1, x_2, \ldots$. Połóżmy $\Delta x_1 = x_2 - x_1$, $\Delta x_2 = x_3 - x_2, \ldots$. Możemy przyjąć, że moment bezwładności i-tego pierścienia względem O wynosi w przybliżeniu $\Delta m_i x_i^2$, gdzie Δm_i oznacza masę tego pierścienia. Ponieważ pole pierścienia wynosi w przybliżeniu $2\pi x_i \Delta x_i$, więc $\Delta m_i = 2\pi x_i \varrho \Delta x_i$. Zatem w przybliżeniu $I_O = \sum 2\pi x_i^3 \varrho \Delta x_i$. Przechodząc do granicy, otrzymujemy stąd



$$I_O = \int_0^r 2\pi x^3 \varrho \, dx = \tfrac{1}{2} \pi \varrho r^4. \tag{16}$$

Ponieważ masa koła $m = r^2 \pi \varrho$, więc:

$$I_O = \tfrac{1}{2} m r^2 \quad \text{i} \quad I_x = \tfrac{1}{4} m r^2. \tag{17}$$

Powierzchnia kuli. Moment bezwładności powierzchni kuli względem środka wynosi oczywiście

$$I_O = m r^2. \tag{18}$$

Aby wyznaczyć moment bezwładności względem średnicy kuli, umieśćmy początek układu współrzędnych w środku kuli. Z powodu symetrii mamy $I_x = I_y = I_z$. Ponieważ $2I_O = I_x + I_y + I_z$, więc $I_O = \frac{3}{2} I_x$. Zatem $I_x = \frac{2}{3} I_O$, skąd

$$I_x = \tfrac{2}{3} m r^2. \tag{19}$$

Kula. Biorąc za początek układu współrzędnych środek kuli, mamy ze względu na symetrię jak poprzednio $I_x = \frac{2}{3} I_O$. Moment I_O

obliczymy postępując podobnie jak przy kole, t. j. dzieląc kulę na warstwy przy pomocy kul współśrodkowych. Otrzymamy

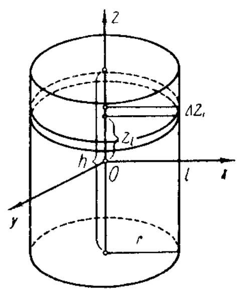
(20) $$I_O = \tfrac{3}{5} mr^2 \quad \text{i} \quad I_x = \tfrac{2}{5} mr^2.$$

Walec obrotowy. Oznaczmy przez r promień podstawy, a przez h wysokość walca. Weźmy za początek układu współrzędnych środek osi walca, przyjmując oś walca za oś z-ów.

Aby obliczyć moment I_z, postąpmy podobnie jak przy kole, t. j. podzielmy walec na warstwy przy pomocy walców o podstawach współśrodkowych z podstawą walca. Otrzymamy

(21) $$I_z = \tfrac{1}{2} mr^2.$$

Aby obliczyć momenty I_x i I_y, podzielmy walec na warstwy przy pomocy płaszczyzn równoległych do podstawy. Oznaczmy przez $\Delta z_1, \Delta z_2, \ldots$ grubości warstw, przez $z_1, z_2, \ldots$ współrzędne środków ich podstaw, przez $\Delta m_1, \Delta m_2, \ldots$ masy warstw. Moment bezwzględności i-tej warstwy względem prostej równoległej do osi x i przechodzącej przez środek ciężkości tej warstwy równa się w przybliżeniu $\frac{1}{4}\Delta m_i r^2$ (jak moment bezwładności koła względem średnicy). A więc moment bezwładności warstwy względem osi x wyniesie w przybliżeniu $\frac{1}{4}\Delta m_i r^2 + \Delta m_i z_i^2$. Ponieważ $\Delta m_i = r^2 \pi \Delta z_i \varrho$, więc będzie w przybliżeniu $I_x = \sum (\frac{1}{4} r^2 + z_i^2) r^2 \pi \varrho \Delta z_i$, skąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy



$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1}{4} r^2 + z^2\right) r^2 \pi \varrho \, dz = \frac{1}{12} r^2 \pi \varrho h (3r^2 + h^2).$$

Ponieważ masa walca jest $m = r^2 \pi \varrho h$, więc

(22) $$I_x = \tfrac{1}{12} m (3r^2 + h^2).$$

Ze względu na symetrię mamy oczywiście $I_x = I_y$.

Moment względem tworzącej l walca wynosi $I_l = I_z + mr^2$, więc

(23) $$I_l = \tfrac{3}{2} mr^2.$$

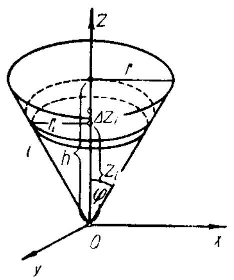
Oś z jest osią symetrii, a więc jest ona równocześnie osią środkową. Z powodu symetrii osie x i y są również osiami środkowymi. Elipsoida bezwładności ma więc równanie $I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = c^2$, skąd wobec (22) $\frac{1}{12} m (3r^2 + h^2)(x^2 + y^2) + \frac{1}{2} mr^2 z^2 = c^2$ czyli

$$(x/r)^2+(y/r)^2+(z/\sqrt{\tfrac{1}{6}(3r^2+h^2)})^2=\lambda^2, \tag{24}$$

gdzie λ^2 jest dowolną stałą.

Elipsoida bezwładności jest więc elipsoidą obrotową. Gdy $r\sqrt{3}=h$, elipsoida jest kulą.

Stożek obrotowy. Oznaczmy przez r promień podstawy, a przez h wysokość stożka. Umieśćmy początek O układu współrzędnych w wierzchołku stożka i przyjmijmy oś stożka za oś z-ów.



Jako oś symetrii jest ona również osią bezwładności środkową, a więc na mocy twierdzenia 2^0, str. 168, osią bezwładności w punkcie O. Z powodu symetrii osie x i y są również osiami bezwładności w punkcie O.

Podzielmy stożek na warstwy o grubości Δz_i przy pomocy płaszczyzn równoległych do podstawy. Moment bezwładności i-tej warstwy względem osi z wynosi w przybliżeniu $\Delta m_i r_i^2/2$ (podobnie jak moment bezwładności walca względem osi), gdzie r_i oznacza promień dolnej podstawy i-tej warstwy. Niech z_i oznacza współrzędną środka dolnej podstawy i-tej warstwy; wówczas $r_i/r=z_i/h$, czyli

$$r_i=rz_i/h. \tag{25}$$

Ponieważ w przybliżeniu $\Delta m_i=r_i^2\pi\Delta z_i\varrho$, więc na mocy (25) mamy

$$\tfrac{1}{2}\Delta m_i r_i^2=\tfrac{1}{2}(r/h)^4\pi\varrho z_i^4\Delta z_i, \tag{26}$$

skąd w przybliżeniu $I_z=\sum\frac{1}{2}(r/h)^4\pi\varrho z_i^4\Delta z_i$. Przechodząc do granicy, otrzymamy

$$I_z=\int_0^h\frac{1}{2}\left(\frac{r}{h}\right)^4\pi\varrho z^4dz=\frac{1}{10}r^4h\pi\varrho.$$

Masa stożka jest $m=\frac{1}{3}r^2\pi h\varrho$, więc

$$I_z=\frac{3}{10}mr^2. \tag{27}$$

Aby obliczyć I_x, zauważmy, że moment i-tej warstwy względem prostej równoległej do osi x-ów i przechodzącej przez środek ciężkości tej warstwy wynosi w przybliżeniu $\frac{1}{4}\Delta m_i r_i^2$. Zatem względem osi x-ów wynosi on $\frac{1}{4}\Delta m_i r_i^2+\Delta m_i z_i^2$. Suma ta równa się na mocy

(25) i (26) $\frac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2\pi\varrho z_i^4\left(4+\left(\frac{r}{h}\right)^2\right)\Delta z_i=\Delta w_i$, czyli I_x równa się w przybliżeniu $\sum\Delta w_i$. Przechodząc do granicy, otrzymamy

$$I_x=\int_0^h\left[\frac{1}{4}\left(\frac{r}{h}\right)^2\pi\varrho z^4\left(4+\left(\frac{r}{h}\right)^2\right)\right]dz=\frac{1}{20}r^2\pi\varrho(4h^2+r^2)h,$$

czyli

(28) $$I_x=\frac{3}{20}m(r^2+4h^2).$$

Oczywiście mamy $I_x=I_y$.

Niech φ oznacza kąt między osią z a tworzącą l (leżącą w płaszczyźnie xz). Ponieważ osie x, y, z są osiami bezwładności w O, więc na mocy wzoru (I), str. 164, jest $I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma$, gdzie α, β, γ oznaczają kąty między tworzącą l a osiami układu współrzędnych. Mamy $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$, $\beta=\frac{\pi}{2}$ i $\gamma=\varphi$, skąd

$$I_l=I_x\sin^2\varphi+I_z\cos^2\varphi,$$

a stąd na mocy (27) i (28)

(29) $$I_l=\frac{3}{20}m[(r^2+4h^2)\sin^2\varphi+2r^2\cos^2\varphi].$$

Z uwagi na to, że $\operatorname{tg}\varphi=r/h$, dostajemy

(30) $$I_l=\frac{3m}{20}\cdot\frac{r^2+6h^2}{r^2+h^2}r^2.$$