ROZDZIAŁ V

UKŁADY PUNKTÓW MATERIALNYCH

§ 1. Równania ruchu. Niech dany będzie układ punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Oznaczmy przez $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ sumy sił działających na poszczególne punkty, a przez $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_n$ przyśpieszenia tych punktów względem układu inercjalnego współrzędnych. Wówczas według prawa Newtona:

$$m_1\overline{p}_1 = \overline{P}_1, \qquad m_2\overline{p}_2 = \overline{P}_2, \qquad \ldots, \qquad m_n\overline{p}_n = \overline{P}_n.$$

Równania powyższe zapisujemy krócej

$$\text{(I)} \qquad m_i\overline{p}_i = \overline{P}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Niechaj punkt m_i ma współrzędne x_i, y_i, z_i. Równania (I) możemy napisać w postaci:

$$\text{(II)} \qquad m_i\ddot{x}_i = P_{i_x}, \qquad m_i\ddot{y}_i = P_{i_y}, \qquad m_i\ddot{z}_i = P_{i_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Układy swobodne. O siłach $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ zakładamy, że w najogólniejszym przypadku zależą one od czasu, położenia i prędkości punktów układu. Przyjmować więc będziemy, że siły są funkcjami: czasu t, zmiennych $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ określających położenia punktów oraz zmiennych $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$ określających prędkości punktów. Zatem możemy napisać:

$$P_{i_x} = F_i(t, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n),$$

i podobnie $P_{i_y} = \Phi_i$, $P_{i_z} = \Psi_i$.

O funkcjach P_{i_x}, P_{i_y} i P_{i_z} zakładamy, że są ciągłe i że mają ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe względem każdej zmiennej.

Równania (II) noszą nazwę *równań ruchu Newtona.*

Stanowią one układ równań różniczkowych drugiego rzędu. Z teorii równań różniczkowych wynika, że równania (II) wyznaczają ruch układu punktów, jeżeli dane są w chwili początkowej $t=t_0$ położenia początkowe punktów (t. j. współrzędne $x_1^0, y_1^0, z_1^0, \dots, z_n^0$) i prędkości początkowe (t. j. $\dot{x}_1^0, \dot{y}_1^0, \dot{z}_1^0, \dots, \dot{z}_n^0$).

Siły wewnętrzne i zewnętrzne. Siły, działające na punkty układu, dzielimy na dwie grupy.

Do pierwszej zaliczamy te siły, które pochodzą ze wzajemnego oddziaływania punktów układu na siebie. Siły te nazywamy siłami *wewnętrznymi.*

Pozostałe siły nazywamy siłami *zewnętrznymi.*

O siłach wewnętrznych zakładamy, że stosują się do prawa akcji i reakcji Newtona (str. 73).

Weźmy pod uwagę parę sił, z jakimi działają na siebie dwa punkty układu m' i m''. Suma tych sił jest zerem, a że nadto działają one wzdłuż prostej, łączącej punkty m' i m'', więc i moment ich względem dowolnego punktu jest zerem. Ponieważ siły wewnętrzne możemy zgrupować w takie pary, więc *suma i ogólny moment sił wewnętrznych jest zerem.*

Równowaga układu punktów. Układ punktów jest w równowadze, jeżeli każdy punkt jest w równowadze.

A więc, jeżeli układ punktów jest w równowadze, to suma sił działających na każdy punkt jest równa zeru. O układzie sił, mającym tę własność, mówimy, że *jest w równowadze* lub że *siły* tego układu *równoważą się.*

Niech dany będzie układ sił w równowadze. Weźmy pod uwagę siły tego układu, działające na dowolny punkt materialny. Ponieważ suma tych sił, jak i moment ogólny względem dowolnego punktu przestrzeni, są równe zeru, więc dany układ jest *równoważny zeru* (str. 23).

A więc: *jeżeli siły, działające na układ punktów materialnych, równoważą się, wówczas suma tych sił i ogólny moment jest zerem.*

Warunek powyższy jest warunkiem koniecznym równowagi sił, ale nie jest warunkiem wystarczającym. Ponieważ siły wewnętrzne mają sumę i ogólny moment równy zeru, więc z podanego warunku wynika, że *jeżeli układ punktów materialnych jest w równowadze, to suma i ogólny moment sił zewnętrznych jest zerem.*

Podobnie jak poprzedni, warunek ten jest tylko warunkiem koniecznym równowagi układu.

Zasada d'Alemberta. Równania (I), str. 190, możemy napisać w postaci

$$\overline{P}_i + (-m_i\overline{p}_i) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

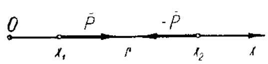
Wektory $-m_i\overline{p}_i$ nazwaliśmy *siłami bezwładności* punktów m_i (str. 74). Możemy więc powiedzieć, że *siły bezwładności równoważą się z siłami działającymi na punkty układu.*

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady d'Alemberta.*

Znaczenie tej zasady występuje głównie w układach punktów nieswobodnych, czym zajmiemy się dalej. Należy pamiętać, o czym mówiliśmy na str. 74, że siły bezwładności nie są siłami, lecz wektorami, które tylko dla wygody nazywamy siłami.

Przykład 1. Po osi x poruszają się dwa punkty A_1, A_2 o masach m_1, m_2, przyciągające się z siłą $\overline{P}$ według prawa Newtona. Więc $|\overline{P}|=Km_1m_2/r^2$, gdzie $r=A_1A_2$. Oznaczając przez x_1 i x_2 ($x_1<x_2$) współrzędne punktów, otrzymamy równania ruchu w postaci:

$$(1) \qquad m_1\ddot{x}_1 = Km_1m_2/(x_2-x_1)^2, \qquad m_2\ddot{x}_2 = -Km_1m_2/(x_2-x_1)^2.$$



Przyjmijmy, że w chwili początkowej $t=0$ jest $x_1=x_1^0$, $x_2=x_2^0$, $\dot{x}_1=0$, $\dot{x}_2=0$. Dodając równania (1) stronami, dostaniemy $m_1\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2=0$, skąd po scałkowaniu

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = a, \qquad m_1x_1 + m_2x_2 = at + b.$$

Ze względu na warunki początkowe otrzymamy $a=0$ i $b=m_1x_1^0+m_2x_2^0$. Więc:

$$(2) \qquad m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0, \qquad m_1x_1 + m_2x_2 = m_1x_1^0 + m_2x_2^0.$$

Z równań (1) otrzymujemy jeszcze

$$(3) \qquad \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -K(m_1+m_2)/(x_2-x_1)^2.$$

Połóżmy $x_2-x_1=r$ i $K(m_1+m_2)=h$. Dostaniemy $\ddot{r}=-h/r^2$. Mnożąc obustronnie przez $\dot{r}$ i całkując, otrzymamy $\frac{1}{2}\dot{r}^2=h/r+c$. Ponieważ dla $t=0$ mamy $\dot{r}=\dot{x}_2^0-\dot{x}_1^0=0$ oraz $r=x_2^0-x_1^0=r_0$, więc $c=-\dfrac{h}{r_0}\cdot$ Zatem $\dfrac{1}{2}\dot{r}^2=\dfrac{h}{r}-\dfrac{h}{r_0}$, skąd

$$(4) \qquad \dot{r} = -\sqrt{2h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}\cdot$$

Przyjęliśmy znak ujemny, gdyż punkty będą się zbliżać do siebie, więc r będzie maleć, skąd $\dot{r} < 0$. Z (4) dostajemy

$$-\frac{dr}{\sqrt{2h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}} = dt, \qquad \text{więc} \qquad -\int \frac{dr}{\sqrt{2h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}} + c' = t.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{2h}}\left[2\sqrt{r_0 r - r^2} + r_0 \arcsin\frac{r_0 - 2r}{r_0}\right] + c' = t. \tag{5}$$

Ponieważ dla $t=0$ jest $r=r_0$, więc

$$c' = \frac{\pi}{4}\frac{r_0\sqrt{r_0}}{\sqrt{2h}}. \tag{6}$$

Czas T, po którym punkty się spotkają, otrzymamy z (5), kładąc $r=0$. Zatem

$$T = \frac{\pi}{2}\frac{r_0\sqrt{r_0}}{\sqrt{2h}} = \frac{r_0^{3/2}\,\pi}{2\sqrt{2K(m_1+m_2)}}.$$

Dla $m_1 = m_2 = 1$ g, $r_0 = 1$ cm i $K = 6{,}6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{g}^{-1}\,\mathrm{sek}^{-2}$ otrzymujemy $T = 3055$ sek.

Wzory (2), (5) i (6) (gdzie $r = x_2 - x_1$) wyznaczają ruch punktów.

Układy nieswobodne. Jeżeli istnieją warunki ograniczające możliwe ruchy układu punktów materialnych, wówczas nazywamy go *układem nieswobodnym*, a warunki ograniczające *więzami*. Podobnie, jak w przypadku jednego punktu nieswobodnego, przyjmujemy, że więzy są wynikiem pewnych sił, zwanych *reakcjami*, które powodują, że układ zachowuje więzy.

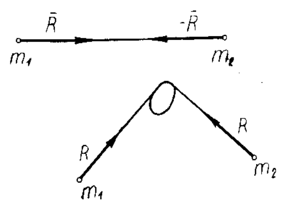
Jeżeli do sił działających na punkty układu dołożymy siły reakcyjne, wówczas układ możemy uważać za swobodny. W ten sposób badanie ruchów układów nieswobodnych sprowadzamy do badania ruchów układów swobodnych.

Jeżeli więc na punkty układu o masach $\{m_i\}$ działają siły $\{\overline{P}_i\}$, to oznaczając przez $\{\overline{R}_i\}$ reakcje, mamy

$$m_i \overline{p}_i = \overline{P}_i + \overline{R}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{III}$$

W szczególności układ nieswobodny jest w równowadze, jeżeli siły działające równoważą się z reakcjami.

Więzy układu mogą polegać na tym, że niektóre punkty muszą się stale znajdować na pewnych liniach lub powierzchniach. Oprócz tego rodzaju więzów, poprzednio już poznanych (por. str. 123), spotykamy się jeszcze z innymi. Np. dwa punkty materialne mogą być połączone nicią nierozciągliwą o długości l; odległość zatem punktów od siebie musi być stale $\leqslant l$. Nić działa na punkty tylko wtedy, gdy jest napięta (rys. górny). Jeżeli założymy, że masa nici jest dość mała, by można ją było pominąć, to siły, z jakimi nić działa na punkty, będą co do wielkości równe nawet wtedy, gdy nić będzie nawinięta na jakieś ciało (rys. dolny) — o ile nie ma tarcia. Siły te są oczywiście reakcjami. Reakcje są styczne do nici i mają zwrot w kierunku nici.



Układ sztywny. Ważnym przykładem układu punktów nieswobodnego jest t. zw. *układ sztywny*. Jest to układ nieswobodny, którego więzy polegają na tym, że wzajemne odległości punktów układu pozostają niezmienne. Przyjmujemy, że w tym przypadku występują pewne siły wewnętrzne (t. j. działające między punktami układu), które sprawiają, że punkty zachowują odległości stałe, mimo działania sił zewnętrznych.

Ciało stałe fizyczne na ogół odkształca się, t. j. zmienia swoją postać pod wpływem sił na nie działających. Zdarzyć się jednak może, że gdy siły nie przekraczają pewnej granicy, odkształcenia są tak niewielkie, iż praktycznie możemy nie brać ich pod uwagę. W tym przypadku za model takiego ciała przy małych siłach możemy obrać układ punktów, który nazwaliśmy układem sztywnym. Wyniki, jakie otrzymamy, będą wówczas ważne w przybliżeniu dla ciała fizycznego. W ten sposób możemy stosować do ciał stałych fizycznych twierdzenia, jakie otrzymamy dla układów sztywnych. Ze względu na ważną rolę, jaką odgrywa teoria układu sztywnego, zajmiemy się tą teorią szczegółowo w rozdziale VI. W tym rozdziale ograniczymy się tylko do podania kilku przykładów na tle ogólnej teorii układu punktów.

Najprostszym przypadkiem układu sztywnego jest układ złożony z dwóch punktów materialnych, których odległość r jest stała.

Układ taki możemy zrealizować, łącząc dwa punkty materialne sztywnym prętem o małej masie, którą w stosunku do mas samych punktów można pominąć. Mówimy wówczas, że punkty połączone są prętem sztywnym bez masy. W ten sposób siły wewnętrzne między punktami zastępujemy siłami, z jakimi pręt oddziaływa na te punkty. Siły te są zatem co do wielkości równe, mają kierunek pręta, a zwroty przeciwne.

Przykład 2. Dwa ciężkie punkty materialne o masach m_1 i m_2 połączone są nicią nierozciągliwą (bez masy), przewiniętą przez krążek. Punkt m_2 musi pozostawać na prostej pionowej l. Jaki kąt φ tworzy nić z prostą l w położeniu równowagi, jeżeli nie ma tarcia?

Na punkt m_1 działa nić z siłą T skierowaną pionowo do góry oraz ciężar $m_1 g$ skierowany pionowo w dół (rys. 1). Zatem $T - m_1 g = 0$, więc

$$T = m_1 g. \tag{7}$$

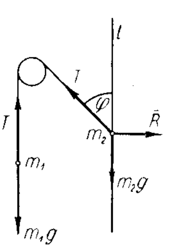
Na punkt m_2 działa nić z siłą T skierowaną wzdłuż nici, ciężar $m_2 g$ skierowany pionowo w dół i reakcja $\bar{R}$ prostopadła do prostej l. Tworząc rzuty sił na prostą l, dostaniemy $T\cos\varphi - m_2 g = 0$, więc

$$T\cos\varphi = m_2 g. \tag{8}$$

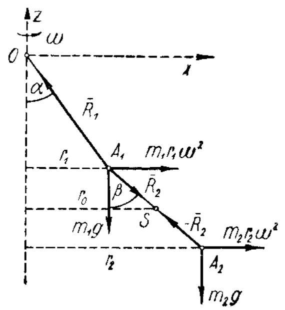
Z równań (7) i (8) otrzymamy

$$\cos\varphi = m_2/m_1.$$

Równowaga jest więc możliwa tylko wówczas gdy $m_2 < m_1$.



1.



2.

Przykład 3. Punkty materialne ciężkie A_1 i A_2 o masach m_1, m_2 połączone są nicią nierozciągliwą bez masy. Punkt A_1 zawieszony jest na nici OA_1, również nierozciągliwej i bez masy. Cały układ obraca się około osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω, przyczem kąty α i β, jakie nici OA_1 i A_1A_2 tworzą z pionem, nie ulegają zmianie podczas tego obrotu. Wyznaczyć kąty α i β.

Obierzmy w punkcie O początek układu ruchomego (x, y, z), obracającego się około osi pionowej z z prędkością kątową ω (rys. 2). Możemy przyjąć, że punkt A_1 znajduje się stale w płaszczyźnie xz. Ponieważ kąt α jest stały, więc punkt A_1 jest w równowadze względnej względem układu (x, y, z).

Wykażemy najpierw, że w płaszczyźnie xz znajduje się również punkt A_2.

Ponieważ punkt A_1 jest w równowadze względnej, więc jego siła unoszenia $\bar{P}_u^{(1)}$ równoważy się z siłami działającymi t. j. z ciężarem $\bar{Q}_1$, reakcją $\bar{R}_1$ nici OA_1 i reakcją $\bar{R}_2$ nici A_1A_2. Zatem

$$\bar{P}_u^{(1)}+\bar{Q}_1+\bar{R}_1+\bar{R}_2=0. \tag{9}$$

Z równania powyższego wynika, że $\bar{R}_2=-\bar{P}_u^{(1)}-\bar{Q}_1-\bar{R}_1$. Ponieważ siły $-\bar{P}_u^{(1)}$, $-\bar{Q}_1$ i $-\bar{R}_1$ leżą w płaszczyźnie xz, więc $\bar{R}_2$ leży również w płaszczyźnie xz. Ponieważ nadto $\bar{R}_2$ ma kierunek nici A_1A_2, więc i nić A_1A_2 leży w płaszczyźnie xz; zatem punkt A_2 leży również w płaszczyźnie xz.

Przejdźmy do wyznaczenia kątów α i β. Z uwagi na to, że kąty te są stałe, oraz że długości OA_1 i A_1A_2 również się nie zmieniają, wynika, że punkt A_2 jest także w równowadze względnej względem układu (x, y, z). Oznaczając przez $\bar{P}_u^{(2)}$ jego siłę unoszenia, a przez $\bar{Q}_2$ jego ciężar, otrzymamy

$$\bar{P}_u^{(2)}+\bar{Q}_2-\bar{R}_2=0. \tag{10}$$

Oznaczmy przez r_1 i r_2 odległości punktów A_1 i A_2 od osi obrotu. Mamy:

$$r_1=OA_1\sin\alpha, \qquad r_2=OA_1\sin\alpha+A_1A_2\sin\beta, \tag{11}$$

$$|\bar{P}_u^{(1)}|=m_1r_1\omega^2, \qquad |\bar{P}_u^{(2)}|=m_2r_2\omega^2. \tag{12}$$

Utwórzmy rzuty (9) i (10) na osie x i z. Kładąc $R_1=|\bar{R}_1|$ i $R_2=|\bar{R}_2|$, dostaniemy:

$$m_1r_1\omega^2-R_1\sin\alpha+R_2\sin\beta=0, \qquad -m_1g+R_1\cos\alpha-R_2\cos\beta=0, \tag{13}$$

$$m_2r_2\omega^2-R_2\sin\beta=0, \qquad -m_2g+R_2\cos\beta=0. \tag{14}$$

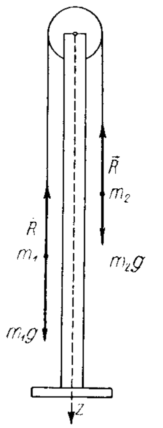
Z równań (13) i (14) otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha=(m_1r_1+m_2r_2)\omega^2/(m_1+m_2)g, \qquad \operatorname{tg}\beta=r_2\omega^2/g. \tag{15}$$

Jeżeli przez r_0 oznaczymy odległość środka S masy układu punktów A_1, A_2 od osi obrotu z, to otrzymamy $(m_1+m_2)r_0=m_1r_1+m_2r_2$, skąd na mocy (15) $\operatorname{tg}\alpha=r_0\omega^2/g$, a więc z uwagi na to, że $r_1<r_0<r_2$, będzie $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\beta$ czyli $\alpha<\beta$.

Znając OA_1 i A_1A_2, znajdujemy α i β z równań (11) i (15).

Przykład 4. Maszyna Atwooda. Na końcach nici (nierozciągliwej, bez masy), przewiniętej przez krążek (bez masy), zawieszone są dwa ciężkie punkty materialne o masach m_1 i m_2. Załóżmy, że oba punkty poruszają się pionowo. Ponieważ nić jest nierozciągliwa, więc drogi przebywane przez oba punkty są równe. Zatem przyśpieszenia i prędkości obu punktów są równe co do wielkości, zwroty zaś mają przeciwne. Oznaczmy przez p rzut przyśpieszenia punktu m_1 na oś z skierowaną pionowo w dół. Niechaj R oznacza wartość bezwzględną siły, z jaką nić działa na punkty m_1 i m_2. Na punkt m_1 działa ciężar i reakcja nici. Zatem



(16) $$m_1 p = m_1 g - R.$$

Dla punktu m_2 otrzymamy podobnie

(17) $$-m_2 p = m_2 g - R.$$

Z równań (16) i (17) dostajemy:

(18) $$p = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \qquad R = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

A więc punkty będą się poruszać z przyśpieszeniem stałym.

Z równania (18) dostajemy $(m_1 + m_2)p = m_1 g - m_2 g$.

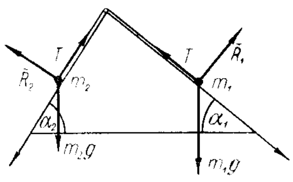
A więc przyśpieszenie jest takie, jak gdyby na punkt materialny o masie $m_1 + m_2$ działała siła $m_1 g - m_2 g$, t. j. siła równa różnicy ciężarów.

Jeżeli $m_1 > m_2$, wówczas $p > 0$, t. zn. że przyśpieszenie punktu m_1 jest skierowane w dół, zaś punktu m_2 w górę.

Jeżeli $m_1 = m_2$, wówczas $p = 0$, t. zn. że punkty poruszają się ruchem jednostajnym.

Przykład 5. Dwa punkty ciężkie o masach m_1 i m_2, połączone nicią nierozciągliwą bez masy, poruszają się w płaszczyźnie pionowej po dwóch prostych l_1 i l_2. Na punkt m_1 działa nić z siłą $\bar{T}_1$, ciężar $m_1\bar{g}$ i reakcja prostej $\bar{R}_1$. Podobnie na punkt m_2 działają siły $\bar{T}_2$, $m_2\bar{g}$ i $\bar{R}_2$. Przyjmijmy, że nie ma tarcia, zatem że $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ są prostopadłe odpowiednio do prostych l_1 i l_2 (str. 198, rys. 1).

Ponieważ nić jest nierozciągliwa, więc drogi przebywane przez oba punkty będą równe, przyśpieszenia będą tedy równe co do wielkości.



1.

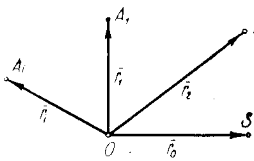
Nadajmy prostym l_1 i l_2 zwroty w dół. Niechaj p oznacza współrzędną (względem l_1) przyśpieszenia punktu m_1, zatem współrzędna (względem l_2) przyśpieszenia punktu m_2 wynosi $-p$. Siły $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ są co do wielkości równe; połóżmy $T=|\overline{T}_1|=|\overline{T}_2|$. Oznaczmy przez α_1 i α_2 kąty, jakie proste l_1 i l_2 tworzą z poziomem. Tworząc rzuty na proste l_1 i l_2, otrzymamy $m_1 p = -T + m_1 g \sin\alpha_1$ i $-m_2 p = -T + m_2 g \sin\alpha_2$, skąd

$$p = \frac{m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2}{m_1 + m_2} g.$$

A więc punkty poruszać się będą po prostych ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

§ 2. Ruch środka masy. Własności kinematyczne środka masy. Niechaj będzie dany układ punktów materialnych $A_1, A_2 \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$, którego środkiem masy jest punkt S (rys. 2). Obierzmy dowolny punkt O. Połóżmy $m=\sum m_i$ oraz:

$$\overline{r}_0 = \overline{OS}, \quad \overline{r}_i = \overline{OA_i} \quad (i=1,2,\ldots).$$



2.

Przy powyższym znakowaniu zachodzi równość

(I) $$m\overline{r}_0 = \sum m_i \overline{r}_i.$$

Dowód. Obierzmy dowolny układ współrzędnych o początku w O. Jeżeli x_i, y_i, z_i oznaczają współrzędne punktu A_i, zaś x_0, y_0, z_0 współrzędne środka S, to na mocy (II), str. 155, jest:

(1) $$mx_0 = \sum m_i x_i, \qquad my_0 = \sum m_i y_i, \qquad mz_0 = \sum m_i z_i.$$

Ponieważ wektor $\overline{r}_i$ ma rzuty x_i, y_i, z_i, zaś $\overline{r}_0$ ma rzuty x_0, y_0, z_0, więc równanie (I) jest tylko postacią wektorową równości (1).

Utwórzmy teraz pochodną obu stron równości (I) względem czasu; otrzymamy $m\dot{\overline{r}}_0 = \sum m_i \dot{\overline{r}}_i$. Ponieważ $\dot{\overline{r}}_i$ oznacza prędkość $\overline{v}_i$ punktu A_i, zaś $\dot{\overline{r}}_0$ prędkość $\overline{v}_0$ środka masy S względem układu $O(x,y,z)$, więc

(II) $$m\overline{v}_0 = \sum m_i \overline{v}_i.$$

Wektor $m_i\overline{v}_i$ jest pędem (str. 73) punktu A_i. Prawa strona równości (II) przedstawia więc sumę pędów poszczególnych punktów układu. Sumę tę nazywamy *pędem (ogólnym) układu.*

Wektor $m\bar{v}_0$ możemy uważać za pęd punktu materialnego, mającego masę równą masie całkowitej układu, umieszczonego w środku masy (i poruszającego się wraz ze środkiem masy).

A więc: *pęd (ogólny) układu równa się pędowi masy całkowitej układu, umieszczonej w środku masy.*

Zróżniczkujmy równanie (II) obustronnie względem czasu t. Dostaniemy $m\dot{\bar{v}}_0 = \sum m_i \dot{\bar{v}}_i$. Lecz $\dot{\bar{v}}_i$ oznacza przyśpieszenie $\bar{p}_i$ punktu A_i, zaś $\dot{\bar{v}}_0$ przyśpieszenie $\bar{p}_0$ środka masy S. Więc

$$\text{(III)} \qquad m\bar{p}_0 = \sum m_i \bar{p}_i.$$

Wektor $-m_i\bar{p}_i$ nazwaliśmy siłą bezwładności punktu A_i (str. 74 i 192).

A więc: *suma sił bezwładności punktów układu równa się sile bezwładności masy całkowitej układu, umieszczonej w środku masy.*

Uwaga. Tworząc rzuty na osie układu współrzędnych, otrzymamy z równań (II) i (III):

$$\text{(II')} \qquad m\dot{x}_0 = \sum m_i \dot{x}_i, \qquad m\dot{y}_0 = \sum m_i \dot{y}_i, \qquad m\dot{z}_0 = \sum m_i \dot{z}_i,$$

$$\text{(III')} \qquad m\ddot{x}_0 = \sum m_i \ddot{x}_i, \qquad m\ddot{y}_0 = \sum m_i \ddot{y}_i, \qquad m\ddot{z}_0 = \sum m_i \ddot{z}_i.$$

Wypadkowa sił ciężkości. Niech układ punktów $A_1, A_2, \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$ znajduje się w polu siły ciężkości. Oznaczmy przez $\bar{g}$ wektor przyśpieszenia ziemskiego, a przez S środek masy. Niechaj O będzie dowolnym punktem. Połóżmy jak poprzednio $\bar{r}_0 = \overline{OS}$ i $\bar{r}_i = \overline{OA}_i$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Moment ogólny sił ciężkości względem O wynosi $\bar{M} = (m_1\bar{g} \times \bar{r}_1) + (m_2\bar{g} \times \bar{r}_2) + \ldots$, więc $\bar{M} = \bar{g} \times (m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \ldots)$, skąd na mocy (I), str. 198,

$$(2) \qquad \bar{M} = \bar{g} \times m\bar{r}_0 = m\bar{g} \times \bar{r}_0.$$

Jeżeli w szczególności punkt O schodzi się z S, to $\bar{r}_0 = 0$, skąd na mocy (2) $\bar{M} = 0$.

A więc: *moment ogólny ciężarów punktów układu względem środka masy jest zerem.*

Ponieważ ciężary tworzą układ sił równoległych i zgodnie skierowanych, więc układ ten ma wypadkową (str. 26). Wypadkowa przechodzi przez środek masy, gdyż moment ogólny względem środka masy jest zerem.

Własności dynamiczne środka masy. Niechaj na punkty materialne m_i danego układu działają siły $\overline{P}_i$. Oznaczmy przez $\overline{p}_i$ przyśpieszenie punktu m_i, a przez $\overline{p}_0$ przyśpieszenie środka masy tego układu punktów względem inercjalnego układu współrzędnych. Na mocy wzoru (III), str. 199, mamy $m\overline{p}_0 = \sum m_i \overline{p}_i$, gdzie $m = \sum m_i$. Ponieważ $m_i \overline{p}_i = \overline{P}_i$, więc $m\overline{p}_0 = \sum \overline{P}_i$ czyli

$$\text{(IV)} \qquad m\overline{p}_0 = \overline{P}, \qquad \text{gdzie} \qquad \overline{P} = \sum \overline{P}_i.$$

A więc: *środek masy układu punktów porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona całkowita masa układu, poddana działaniu sumy wszystkich sił.*

Równanie (IV) możemy napisać w postaci $d(m\overline{v}_0)/dt = \overline{P}$.

Zatem: *pochodna pędu układu równa jest sumie wszystkich sił działających.*

Jeżeli suma sił działających na punkty układu jest równa zeru, t. j. jeżeli $\overline{P} = 0$, wówczas na mocy (IV) mamy $m\overline{p}_0 = 0$ czyli $\overline{p}_0 = 0$. Jeżeli suma $\overline{P}$ jest zerem stale, to stale jest $\overline{p}_0 = 0$, więc prędkość $\overline{v}_0$ środka masy jest stała. Środek masy jest wtedy w spoczynku albo w ruchu jednostajnym prostolinijnym. Zauważmy, że na mocy (II), str. 198, jest $m\overline{v}_0 = \sum m_i \overline{v}_i$; a więc w tym przypadku pęd ogólny (czyli ilość ruchu) układu jest wektorem stałym.

A więc: *jeżeli suma sił, działających na układ punktów, jest stale równa zeru, to środek masy jest w spoczynku albo w ruchu jednostajnym prostoliniowym, a pęd ogólny układu jest wektorem stałym.*

Powyższe twierdzenie nosi nazwę *zasady zachowania pędu lub ilości ruchu.*

Jak wiemy (str. 191), suma sił wewnętrznych jest zawsze zerem, zatem suma wszystkich sił działających na punkty układu równa się sumie sił zewnętrznych. W podanych twierdzeniach możemy więc sumę sił zastąpić przez sumę sił zewnętrznych.

Oznaczmy przez $\overline{P}^{(z)}$ sumę sił zewnętrznych. Na mocy (IV) jest

$$\text{(V)} \qquad m\overline{p}_0 = \overline{P}^{(z)}.$$

Jeżeli na układ nie działają żadne siły zewnętrzne, to $\overline{p}_0 = 0$, więc $\overline{v}_0 = \text{const.}$ Możemy więc powiedzieć, że *siły wewnętrzne nie mogą zmienić prędkości środka masy ani co do wielkości, ani co do kierunku.*

Weźmy pod uwagę układ słoneczny (t. j. złożony ze słońca i planet). Siły, pochodzące z przyciągania ciał układu słonecznego przez gwiazdy stałe, możemy pominąć, gdyż siły te są bardzo małe z powodu wielkich odległości gwiazd stałych. Możemy więc przyjąć, że na ciała układu słonecznego działają tylko siły wewnętrzne, z jakimi ciała te przyciągają się wzajemnie według prawa Newtona (str. 90). Wynika stąd, że środek masy układu słonecznego jest względem gwiazd stałych w spoczynku albo porusza się ruchem jednostajnym prostolinijnym.

Przypuśćmy, że badamy ruch układu punktów w polu siły ciężkości. Suma sił ciężkości wynosi $m_1 g + m_2 g + \ldots = mg$. Środek masy S będzie więc poruszał się tak, jak punkt materialny o masie m pod wpływem siły ciężkości mg, t. j. po prostej lub paraboli, aż do chwili gdy choć jeden z punktów układu dotknie ziemi. W tej bowiem chwili wystąpi nowa siła zewnętrzna wskutek zderzenia się punktu z ziemią.

Przykłady: 1. Środek masy pocisku biegnie po paraboli nawet wówczas, gdy pocisk wybuchnie i pęknie. Ruch środka masy nie zostanie bowiem przez to zakłócony, ponieważ wybuch powstaje pod wpływem sił wewnętrznych. Dopiero gdy jeden z odłamków spadnie na ziemię, ruch środka masy ulegnie zmianie.

2. Gdy człowiek znajduje się na płaszczyźnie poziomej gładkiej (np. na lodzie), siłami zewnętrznymi są reakcja płaszczyzny i siła ciężkości; obie siły mają kierunek pionowy. Jeżeli w chwili początkowej człowiek był w spoczynku, to dopóki nie wystąpią inne siły zewnętrzne, środek masy będzie mógł się poruszać tylko po pionie. Ruchy, jakie człowiek wykonywa przy pomocy mięśni, odbywają się pod wpływem sił wewnętrznych, a więc nie mogą wpłynąć na ruch środka masy w kierunku poziomym. Gdyby zatem nie było tarcia, chodzenie byłoby niemożliwe.

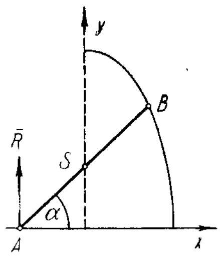
Jeżeli pewna część układu punktów zmienia w jakiejś chwili swój pęd pod wpływem sił wewnętrznych, wówczas pęd pozostałej części układu doznaje równocześnie zmiany równej co do wielkości i kierunku, lecz o zwrocie przeciwnym. Siły wewnętrzne nie mogą bowiem zmienić pędu ogólnego. Oznaczając przez m' i m'' masę jednej i drugiej części układu, a przez $\bar{v}_0'$ i $\bar{v}_0''$ zmianę prędkości środków tych mas, otrzymamy $m'\bar{v}_0' + m''\bar{v}_0'' = 0$ czyli $|\bar{v}_0'|/|\bar{v}_0''| = m''/m'$.

A zatem: *zmiana prędkości środków mas jest odwrotnie proporcjonalna do mas obu części układu.*

Tym tłumaczy się cofanie armaty po strzale. Podobnie, jeżeli człowiek zacznie biec po pokładzie łodzi, łódź zacznie się poruszać w kierunku przeciwnym. Prędkości łodzi i człowieka będą w stosunku odwrotnym do ich mas.

Przykład 1. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej Π opiera się pręt ciężki AB (o gęstości stałej). Siłami zewnętrznymi są ciężar i reakcja w punkcie A; obie siły są pionowe. Jeżeli zatem w chwili początkowej pręt był w spoczynku, to pod działaniem sił zewnętrznych, których suma ma kierunek pionowy, pręt będzie się poruszał w taki sposób, że środek S jego masy będzie spadał po pionie.

Obierzmy za oś x krawędź przecięcia płaszczyzny pionowej (przechodzącej przez pręt) z płaszczyzną Π. Za oś y przyjmijmy pion, po którym się porusza środek ciężkości S. Połóżmy $AB=l$ i oznaczmy przez α kąt, jaki AB tworzy z osią x. Oznaczając przez x, y współrzędne punktu B, otrzymujemy: $x=\frac{1}{2}l\cos\alpha$ i $y=l\sin\alpha$, skąd



$$(x/\tfrac{1}{2}l)^2+(y/l)^2=1.$$

Koniec pręta B będzie więc poruszał się po elipsie o osiach $l, 2l$.

Przykład 2. Niech układ punktów $A_1, A_2, \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$ porusza się w polu środkowym (str. 102) sił sprężystych (str. 114), proporcjonalnych do mas. Niechaj O będzie środkiem pola. Połóżmy $\overline{OA_1}=\bar{r}_1$, $\overline{OA_2}=\bar{r}_2$ i t. d. Oznaczając przez $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ siły działające na punkty $A_1, A_2, \ldots$ i kładąc $\bar{P}=\bar{P}_1+\bar{P}_2+\ldots$, otrzymamy $\bar{P}_1=-\lambda^2 m_1\bar{r}_1$, $\bar{P}_2=-\lambda^2 m_2\bar{r}_2$ i t. d., skąd $\bar{P}=-\lambda^2(m_1\bar{r}_1+m_2\bar{r}_2+\ldots)$. Oznaczając przez S środek masy całkowitej m i kładąc $OS=\bar{r}_0$, otrzymamy na mocy (I), str. 198,

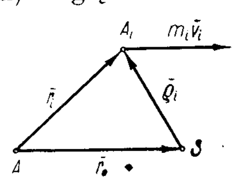
$$\bar{P}=-\lambda^2 m\bar{r}_0.$$

A zatem środek masy będzie się poruszał tak jak punkt materialny o masie m, poddany działaniu siły sprężystej $\bar{P}$. Środek masy będzie się więc poruszał ruchem harmonicznym płaskim po prostej lub po elipsie (str. 114).

§ 3. Moment ilości ruchu. Kręt względem punktu.

Niech dany będzie układ punktów $A_1, A_2, \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$ i masie całkowitej m. Weźmy pod uwagę układ pędów (układ ilości ruchu) t. j. wektorów $m_1\bar{v}_1$, $m_2\bar{v}_2, \ldots$ o początkach w $A_1, A_2, \ldots$.

Moment ogólny układu pędów (ilości ruchu) względem dowolnego punktu A nazywamy *krętem* lub *momentem ilości ruchu* układu względem A.



Zatem kręt $\bar{K}$ względem A wynosi

$$\bar{K}=\sum \mathrm{Mom}_A(m_i\bar{v}_i).$$

Kładąc $\bar{r}_i = \overline{AA_i}$, otrzymamy

(1) $$\bar{K} = \sum (m_i \bar{v}_i \times \bar{r}_i).$$

Jeżeli ξ, η, ζ są współrzędnymi punktu A zaś x_i, y_i, z_i współrzędnymi punktu A_i, to rzuty krętu na osie układu wynoszą:

(I) $$\begin{aligned} K_x &= \sum m_i [\dot{y}_i (z_i - \zeta) - \dot{z}_i (y_i - \eta)], \\ K_y &= \sum m_i [\dot{z}_i (x_i - \xi) - \dot{x}_i (z_i - \zeta)], \\ K_z &= \sum m_i [\dot{x}_i (y_i - \eta) - \dot{y}_i (x_i - \xi)]. \end{aligned}$$

W szczególności, gdy $\xi = \eta = \zeta = 0$, mamy:

(I') $$K_x = \sum m_i (\dot{y}_i z_i - \dot{z}_i y_i), \quad K_y = \sum m_i (\dot{z}_i x_i - \dot{x}_i z_i), \quad K_z = \sum m_i (\dot{x}_i y_i - \dot{y}_i x_i).$$

Niechaj S będzie środkiem masy. Połóżmy $\overline{AS} = r_0$ i $\overline{SA_i} = \varrho_i$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Mamy $\bar{r}_i = \varrho_i + \bar{r}_0$. Zatem na mocy (1) kręt względem A wynosi

$$\bar{K} = \sum m_i \bar{v}_i \times (\bar{\varrho}_i + \bar{r}_0) = \sum m_i \bar{v}_i \times \bar{\varrho}_i + (\sum m_i \bar{v}_i) \times \bar{r}_0.$$

Pierwszy składnik ostatniego członu jest krętem względem środka masy. Kręt ten oznaczymy przez $\bar{K}_0$. Ponieważ $\sum m_i \bar{v}_i = m\bar{v}_0$ (gdzie $\bar{v}_0$ oznacza prędkość środka masy), więc

(2) $$\bar{K} = \bar{K}_0 + m\bar{v}_0 \times \bar{r}_0.$$

Zauważmy, że $m\bar{v}_0 \times \bar{r}_0$ jest to moment względem A ogólnego pędu, zaczepionego w środku masy.

Wzór (2) wynika bezpośrednio z twierdzenia na str. 20, odnoszącego się do zmiany ogólnego momentu układu wektorów.

K r ę t   w   r u c h u   p o s t ę p o w y m. Załóżmy, że układ punktów porusza się ruchem postępowym z prędkością $\bar{v}$, t. zn. że wszystkie punkty mają prędkość $\bar{v}$.

Kręt względem dowolnego punktu A wynosi zatem wedle (2) $\bar{K} = \sum (m_i \bar{v} \times \bar{r}_i) = \sum (\bar{v} \times m_i \bar{r}_i) = \bar{v} \times \sum m_i \bar{r}_i$. Lecz na mocy (I), str. 198, jest $\sum m_i \bar{r}_i = m\bar{r}_0$. Więc $\bar{K} = \bar{v} \times m\bar{r}_0$ czyli

(3) $$\bar{K} = m\bar{v} \times \bar{r}_0.$$

A więc: *kręt układu punktów, poruszającego się ruchem postępowym względem pewnego punktu A, równa się momentowi względem A pędu ogólnego, zaczepionego w środku masy układu.*

W szczególności gdy punkt A pokrywa się ze środkiem masy, mamy $\bar{r}_0 = 0$, więc $\bar{K} = 0$. Zatem: *kręt względem środka masy w ruchu postępowym jest równy zeru.*

Wynika stąd (str. 26), że układ pędów w ruchu postępowym ma wypadkową o początku w środku masy układu.

Kręt w ruchu względem środka masy. Niech układ współrzędnych $O(x, y, z)$ porusza się ruchem postępowym z prędkością $\bar{u}$. Oznaczając przez $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots$ prędkości względne punktów $A_1, A_2, \ldots$, przez $\bar{w}_0$ prędkość względną środka S ich masy, przez $\bar{K}_w$ kręt ruchu względnego i przez $\bar{K}_b$ kręt ruchu bezwzględnego układu tych punktów względem O, otrzymamy

$$\bar{K}_w = m_1 \bar{w}_1 \times \overline{OA_1} + m_2 \bar{w}_2 \times \overline{OA_2} + \ldots .$$

Ponieważ $\bar{w}_1 = \bar{v}_1 - \bar{u}$, $\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \bar{u}$, ..., więc

$$\bar{K}_w = (m_1 \bar{v}_1 \times \overline{OA_1} + m_2 \bar{v}_2 \times \overline{OA_2} + \ldots) - \bar{u} \times (m_1 \overline{OA_1} + m_2 \overline{OA_2} + \ldots).$$

Wyrażenie zawarte w pierwszym nawiasie równe jest $\bar{K}_b$; wyrażenie zawarte w drugim nawiasie wynosi $m \cdot \overline{OS}$ (str. 198). Zatem

$$\bar{K}_w = \bar{K}_b - m\bar{u} \times \overline{OS}. \tag{4}$$

W szczególności, gdy początek O ruchomego układu współrzędnych obierzemy w środku S masy układu punktów $A_1, A_2, \ldots$, będzie $\overline{OS} = 0$, skąd na mocy (4) $\bar{K}_w = \bar{K}_b$.

Jeżeli więc badamy ruch układu względem środka masy, to *kręty względem środka masy w ruchu względnym i bezwzględnym są równe.*

Kręt względem osi. Moment ogólny pędów układu punktów względem pewnej osi nazywamy *krętem układu względem tej osi.*

Wzory (I) przedstawiają kręty układu punktów względem osi równoległych do osi x, y, z, przechodzących przez punkt A, a wzory (I′) kręty względem osi x, y, z. Weźmy pod uwagę kręt względem osi y

$$K_y = \sum m_i (\dot{z}_i x_i - \dot{x}_i z_i).$$

Oznaczając przez S_i prędkość polową (str. 47) ruchu, jaki wykonywa rzut punktu A_i na płaszczyznę pionową xz, otrzymamy ze wzoru (II), str. 48, $S_i = \frac{1}{2}(\dot{z}_i x_i - \dot{x}_i z_i)$, zatem

$$K_y = 2 \sum m_i S_i.$$

A więc: *kręt względem pewnej osi równa się podwójnej sumie iloczynów mas przez prędkości polowe ruchów, jakie wykonują rzuty punktów na płaszczyznę prostopadłą do tej osi:*

$$K = 2 \sum m_i S_i. \tag{5}$$

Jeżeli w płaszczyźnie prostopadłej do osi wprowadzimy współrzędne biegunowe r, φ, wówczas na mocy (I), str. 48, otrzymamy $S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \dot{\varphi}_i$, a więc

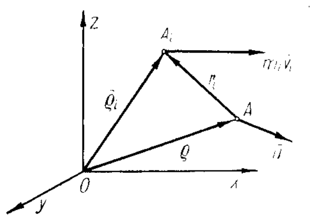
$$K = \sum m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i. \tag{6}$$

Niech układ punktów obraca się około pewnej osi z prędkością kątową ω. Mamy wówczas $\dot\varphi_1=\dot\varphi_2=...=\omega$. Zatem $K=\sum m_i r_i^2\omega=\omega\sum m_i r_i^2$. Ponieważ $\sum m_i r_i^2=I$, gdzie I jest momentem bezwładności względem osi obrotu, więc

$$K=I\omega. \tag{7}$$

A więc: *jeżeli układ punktów obraca się około pewnej osi, wówczas kręt względem osi obrotu równa się iloczynowi prędkości kątowej i momentu bezwładności względem osi obrotu.*

Dynamiczne własności krętu. Niech A będzie dowolnym punktem stałym lub ruchomym. Oznaczmy przez $\bar r_i$ wektory $\overline{AA_i}$, przez ϱ_i wektory $\overline{OA_i}$ (gdzie O jest początkiem układu inercjalnego współrzędnych), przez $\bar\varrho$ wektor $\overline{OA}$ i przez $\bar u$ prędkość punktu A. Zatem:



$$\dot{\bar\varrho}=\bar u \quad \text{i} \quad \dot{\bar\varrho}_i=\bar v_i \quad (i=1, 2, ...). \tag{8}$$

Niechaj $\bar K$ będzie krętem względem A. Na mocy (1), str. 203, jest $\bar K=\sum(m_i\bar v_i\times\bar r_i)$. Oznaczając przez $\bar p_i$ przyśpieszenia punktów A_i, otrzymamy, różniczkując względem t,

$$\dot{\bar K}=\sum(m_i\bar p_i\times\bar r_i)+\sum(m_i\bar v_i\times\dot{\bar r}_i). \tag{9}$$

Lecz $\bar r_i=\bar\varrho_i-\bar\varrho$, więc $\dot{\bar r}_i=\dot{\bar\varrho}_i-\dot{\bar\varrho}$. Zatem na mocy (8) $\dot{\bar r}_i=\bar v_i-\bar u$, więc $\sum(m_i\bar v_i\times\dot{\bar r}_i)=\sum(m_i\bar v_i\times\bar v_i)-\sum(m_i\bar v_i\times\bar u)$. Ale $\bar v_i\times\bar v_i=0$, zaś $\sum m_i\bar v_i=m\bar v_0$, gdzie $\bar v_0$ oznacza prędkość środka masy. Zatem

$$\sum(m_i\bar v_i\times\dot{\bar r}_i)=-m\bar v_0\times\bar u. \tag{10}$$

Jeżeli na punkt A_i działa siła $\bar P_i$, to $m_i\bar p_i=\bar P_i$, a zatem $m_i\bar p_i\times\bar r_i=\bar P_i\times\bar r_i=\mathrm{Mom}_A\,\bar P_i$. Jeżeli więc $\bar M$ jest momentem ogólnym sił względem A, to $\sum m_i\bar p_i\times\bar r_i=\sum\bar P_i\times\bar r_i=\sum\mathrm{Mom}_A\,\bar P_i=\bar M$. Wzór ten łącznie ze wzorem (10) daje na mocy (9)

$$\dot{\bar K}=\bar M-m\bar v_0\times\bar u. \tag{II}$$

Wyrażenie $\bar v_0\times\bar u$ będzie zerem, jeżeli przyjmiemy, że punkt A jest w spoczynku (zatem że $\bar u=0$) lub że A pokrywa się ze środkiem masy (zatem że $\bar u=\bar v_0$). W obu przypadkach otrzymamy

$$\dot{\bar K}=\bar M. \tag{III}$$

A więc: ***pochodna krętu (względem punktu stałego lub środka masy) równa się ogólnemu momentowi sił działających.***

Tworząc rzuty na oś stałą lub przechodzącą przez środek masy i nie zmieniającą kierunku, wnosimy ze wzoru (III), że *pochodna krętu względem osi stałej (lub przechodzącej przez środek masy i nie zmieniającej kierunku) równa się ogólnemu momentowi sił względem tej osi.*

W szczególności gdy moment ogólny sił względem pewnego punktu stałego lub względem środka masy jest stale zerem, pochodna krętu jest zerem czyli kręt jest wektorem stałym.

A więc: *jeżeli moment ogólny sił (względem pewnego punktu stałego lub środka masy) jest stale zerem, wówczas kręt jest wektorem stałym.*

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania krętu.*

Podobne twierdzenie otrzymujemy dla krętu względem osi.

A więc: *jeżeli moment sił względem pewnej osi stałej (lub przechodzącej przez środek masy i nie zmieniającej kierunku) jest stale zerem, wówczas kręt względem tej osi jest stały.*

Kręt względem osi wynosi w myśl wzoru (5), str. 204, $K=2\sum m_i S_i$, gdzie przez S_i oznaczyliśmy prędkości polowe ruchów, jakie wykonują rzuty na płaszczyznę Π prostopadłą do osi. Jeżeli więc kręt jest stały, to

$$\sum m_i S_i = c = \text{const.} \tag{11}$$

Zauważmy, że $a_i = \int_{t_0}^{t} S_i\, dt$ przedstawia pole zakreślone w płaszczyźnie Π przez rzut na nią promienia wodzącego r_i punktu A_i w czasie od t_0 do t. Zatem na mocy (11)

$$\sum m_i a_i = c(t-t_0). \tag{12}$$

A więc: *suma iloczynów mas i pól, zakreślonych przez rzuty promieni wodzących na płaszczyznę prostopadłą do osi, jest proporcjonalna do czasu.*

Z tego powodu zasada zachowania krętu nosi również nazwę *zasady zachowania pól.*

Jak wiemy (str. 191), moment sił wewnętrznych jest względem dowolnego punktu równy zeru. Zatem moment wszystkich sił działających sprowadza się do momentu sił zewnętrznych. Jeżeli więc przez $\overline{M}^{(z)}$ oznaczymy moment sił zewnętrznych względem pewnego punktu stałego A lub środka masy, równość (III) przyjmie postać

$$\dot{\overline{K}} = \overline{M}^{(z)}. \tag{III'}$$

W twierdzeniach poprzednio podanych możemy więc moment wszystkich sił działających zastąpić przez moment sił zewnętrznych.

Jeżeli na układ punktów żadne siły zewnętrzne nie działają, to zachodzi oczywiście zasada zachowania pól (krętu), a więc kręt względem każdego punktu stałego lub środka masy jest wtedy wektorem stałym. Ponieważ kręt względem każdej osi stałej (lub przechodzącej przez środek masy i nie zmieniającej kierunku) jest wówczas stały, więc równania (11) i (12) zachodzą dla ruchów, jakie wykonują rzuty punktów na dowolną płaszczyznę stałą (lub poruszającą się wraz ze środkiem masy i nie zmieniającą kierunku).

Ruch w polu siły ciężkości. Niech układ punktów materialnych $A_1, A_2, \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$ porusza się w polu siły ciężkości. Jeżeli jedynymi siłami zewnętrznymi są ciężary punktów, to moment ogólny sił ciężkości względem środka masy jest zerem (str. 199), więc kręt względem środka masy jest stały.

Przyjmijmy układ ruchomy współrzędnych o początku w środku ciężkości, poruszający się ruchem postępowym. Aby otrzymać ruch względny, należy do sił działających dodać siły unoszenia (siła Coriolisa jest zerem, bo układ współrzędnych porusza się, w myśl założenia, ruchem postępowym).

Oznaczmy przez $\bar{g}$ wektor przyśpieszenia ziemskiego. Ponieważ środek ciężkości ma przyśpieszenie $\bar{g}$, więc przyśpieszenie unoszenia wynosi również $\bar{g}$. Zatem siła unoszenia dla poszczególnych punktów wynosi $-m_1\bar{g}, -m_2\bar{g}, \ldots$. Widzimy więc, że siły unoszenia znoszą się z ciężarami punktów. A więc ruch względny będzie taki, jak gdyby nie działała siła ciężkości. Jeżeli prócz ciężarów nie ma innych sił zewnętrznych, to kręt względem środka masy w ruchu względnym będzie wektorem stałym i na mocy (4), str. 204, będzie równy krętowi względem środka masy w ruchu bezwzględnym.

Przykład 1. Dwa punkty materialne A i B o masach m_1 i m_2, połączone prętem sztywnym bez masy, poruszają się w polu siły ciężkości. Na punkty A i B działają więc siły ciężkości i reakcje pręta $\bar{R}$ i $-\bar{R}$. Reakcje zachowują się tak jak siły wewnętrzne, działają bowiem wzdłuż prostej łączącej te punkty, są co do wielkości równe, zwroty zaś mają przeciwne. Środek masy będzie się więc poruszał (jak punkt materialny o masie m_1+m_2 pod wpływem ciężaru) z przyśpieszeniem pionowym g po linii prostej lub po paraboli.

Oznaczmy przez $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ prędkości punktów A i B, a przez S środek masy. Kręt względem środka masy wynosi

$$(12) \qquad \bar{K} = m_1\bar{v}_1 \times \overline{SA} + m_2\bar{v}_2 \times \overline{SB}.$$

Ponieważ

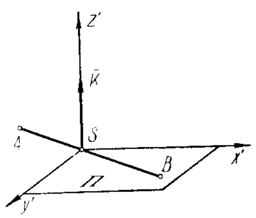
$$SA = \frac{m_2}{m_1+m_2} AB, \qquad SB = \frac{m_1}{m_1+m_2} AB,$$

(str. 158), więc

$$\overline{SA} = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \overline{AB}, \qquad \overline{SB} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \overline{AB},$$

skąd otrzymujemy przez podstawienie w (12):

$$(13) \qquad \bar{K} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \times \overline{AB}.$$



Załóżmy, że $\bar{K} \neq 0$; zatem $\bar{K} \perp \overline{AB}$. Ponieważ $\bar{K}$ jest wektorem stałym, więc odcinek AB jest podczas ruchu stale równoległy do pewnej płaszczyzny Π, prostopadłej do krętu $\bar{K}$.

Obierzmy środek masy za początek ruchomego układu współrzędnych (x', y', z'), poruszającego się ruchem postępowym. Przyjmijmy, że płaszczyzna $x'y'$ jest stale równoległa do Π. Zatem oś z' jest równoległa do $\bar{K}$. Pręt AB pozostaje więc stale w płaszczyźnie $x'y'$. Wynika stąd, że ruch względny pręta AB będzie obrotem około osi z' (punkt S pręta jest bowiem nieruchomy względem układu (x', y', z')). Ponieważ kręt w ruchu względnym jest stały, więc kręt względem osi z' wyniesie w myśl wzoru (7), str. 205,

$$(14) \qquad K_{z'} = I_{z'}\omega = \text{const.},$$

gdzie moment bezwładności $I_{z'} = m_1 AS^2 + m_2 BS^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} AB^2$, zaś ω oznacza prędkość kątową. Zatem $\omega = \text{const.}$

A więc ruch względny będzie obrotem w płaszczyźnie $x'y'$ około środka masy S z prędkością kątową stałą.

Obrót układu około osi. Załóżmy, że na układ U punktów materialnych nie działają żadne siły zewnętrzne. Przypuśćmy, że układ był na początku w spoczynku, a następnie jakaś część U_1 układu zaczęła się pod wpływem sił wewnętrznych obracać około pewnej osi stałej l. Oznaczmy przez I_1 moment bezwładności względem l, a przez ω_1 prędkość kątową tej części układu. Zatem kręt jej względem osi obrotu wynosi $K_1 = I_1\omega_1$.

Ponieważ kręt całego układu musi być zerem, gdyż siły wewnętrzne nie mogą zmienić krętu, więc pozostała część U_2 układu musi wykonać ruch, którego kręt względem osi l wynosi $K_2 = -K_1$, tak by suma obu krętów była zerem (t. j. aby $K_1 + K_2 = 0$). Przypuśćmy, że ruch drugiej części jest również obrotem około osi l (przypadek ten zajdzie, jeżeli założymy np., że obie części mogą tylko obracać się około l). Jeżeli przez I_2 oznaczymy moment bezwładności części U_2 względem l, zaś przez ω_2 jej prędkość kątową, to $K_2 = I_2\omega_2$.

Ponieważ $K_1 + K_2 = 0$, więc

(15) $$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = 0.$$

Równanie powyższe wyraża związek między prędkościami kątowymi obu części układu U. Ponieważ

(16) $$\omega_1/\omega_2 = -I_2/I_1,$$

więc obydwie części układu obracają się w kierunkach przeciwnych, przyczem ich prędkości kątowe są co do wielkości odwrotnie proporcjonalne do momentów bezwładności.

Oznaczmy przez φ_1 i φ_2 kąty, o jakie obróciły się części U_1 i U_2 układu U w czasie t. Ponieważ $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ i $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$, więc na mocy (13) jest $I_1\dot{\varphi}_1 + I_2\dot{\varphi}_2 = 0$, skąd $I_1\varphi_1 + I_2\varphi_2 = c$. Zakładając, że dla $t = 0$ jest $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = 0$, otrzymamy $I_1\varphi_1 + I_2\varphi_2 = 0$ czyli

(17) $$\varphi_1/\varphi_2 = -I_2/I_1.$$

Kąty obrotu są więc co do wielkości również odwrotnie proporcjonalne do momentów bezwładności obu części układu.

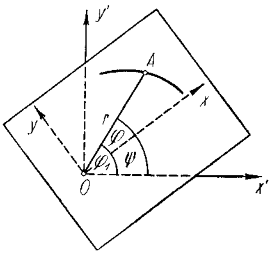
Jeżeli w pewnej chwili $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, to położenie układu jest takie, jak gdyby układ obrócił się o kąt φ_1.

Widzimy więc, że układ punktów może się pod działaniem jedynie sił wewnętrznych obrócić około osi o dowolny kąt φ. Obrót ten może nastąpić np. w ten sposób, że jedna część układu obróci się o kąt φ, a druga w kierunku przeciwnym o kąt $2\pi - \varphi$.

Tym tłumaczy się fakt, że kot spadając może obrócić się w powietrzu tak, by spaść na wszystkie cztery nogi.

Jeżeli na pokładzie łodzi zaczniemy obracać koło materialne około osi pionowej z prędkością kątową ω_1, wówczas łódź pocznie się obracać w kierunku przeciwnym z prędkością kątową ω_2; obie prędkości będą spełniały związki (15) i (16), gdzie I_1 i I_2 oznaczają odpowiednio momenty bezwładności koła i łodzi.

Przykład 2. Kartka papieru spoczywa na gładkiej płaszczyźnie poziomej; kartka jest przebita szpilką w punkcie O tak, że może się tylko obracać wkoło tego punktu. Po kartce porusza się owad A.



Siłami zewnętrznymi działającymi na układ, złożony z kartki i owadu, są: reakcja szpilki o początku w punkcie O, ciężar kartki i owadu oraz reakcja płaszczyzny poziomej — mające kierunek pionowy. Moment tych sił względem osi pionowej z przechodzącej przez O jest więc równy zeru, a wobec tego kręt względem osi z jest stały.

Załóżmy, że w chwili początkowej $t=0$ owad i kartka papieru były w spoczynku. Kręt względem osi z będzie więc stale zerem.

Obierzmy w płaszczyźnie poziomej układ współrzędnych (x', y') stały, zaś na kartce papieru układ (x, y) ruchomy, oba mające początek w O. Oznaczmy przez φ_1 kąt między OA a x', przez φ kąt między OA a x, a przez ψ kąt, o jaki obróciła się kartka, t. j. kąt między osiami x a x'. Niech wreszcie m oznacza masę owadu, I moment bezwładności kartki względem O i niech $r=OA$. Wówczas kręt względem osi z wynosi $mr^2\dot{\varphi}_1+I\dot{\psi}=0$, a ponieważ $\varphi_1=\varphi+\psi$, więc

$$mr^2\dot{\varphi}+(mr^2+I)\dot{\psi}=0. \tag{18}$$

Przypuśćmy, że owad porusza się po krzywej o równaniu $r=f(\varphi)$. Na mocy (18), z uwagi że $\dot{\psi}/\dot{\varphi}=d\psi/d\varphi$, otrzymamy $d\psi/d\varphi=-mr^2/(mr^2+I)$. Zatem, całkując od φ_0 do φ, dostaniemy

$$\psi-\psi_0=-\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{mr^2}{mr^2+I}d\varphi. \tag{19}$$

Różnica $\psi-\psi_0$ przedstawia kąt, o jaki obróciła się kartka w czasie, gdy owad poruszał się po krzywej $r=f(\varphi)$ od φ_0 do φ.

Widzimy, że kąt obrotu nie zależy od prędkości owadu, lecz tylko od krzywej, po której owad się porusza. W szczególności, jeżeli owad porusza się po kole $r=\text{const.}$ wówczas na mocy (19)

$$\psi-\psi_0=-\frac{mr^2}{mr^2+I}(\varphi-\varphi_0). \tag{20}$$

Kręt w ruchu względnym. Niech układ współrzędnych $O'(x', y', z')$ porusza się względem inercjalnego układu współrzędnych $O(x, y, z)$. Aby wyznaczyć ruch względny układu punktów materialnych, należy do sił działających dodać siły unoszenia i Coriolisa. Oznaczmy przez $\overline{K}_w$ kręt ruchu względnego względem początku O' układu ruchomego, a przez $\overline{M}, \overline{M}_u, \overline{M}_C$ momenty sił działających, unoszenia i Coriolisa względem punktu O'. Ponieważ prawa Newtona stosują się do ruchu względnego, jeżeli do sił działających dodać siły unoszenia i Coriolisa (str. 137), więc

$$\dot{\overline{K}}_w = \overline{M} + \overline{M}_u + \overline{M}_C. \tag{21}$$

Wzór powyższy upraszcza się w przypadku, gdy O' pokrywa się ze środkiem S masy układu punktów materialnych, a układ współrzędnych (x, y, z) porusza się ruchem postępowym. Udowodniliśmy bowiem (str. 204), że w tym przypadku jest $\overline{K}_w = \overline{K}$, gdzie $\overline{K}$ oznacza kręt (względem środka masy) w ruchu bezwzględnym. Zatem $\dot{\overline{K}}_w = \dot{\overline{K}}$, a ponieważ $\dot{\overline{K}} = \overline{M}$, więc otrzymujemy

$$\dot{\overline{K}}_w = \overline{M}. \tag{22}$$

Jeżeli więc badamy ruch względem środka masy, to *pochodna krętu* (względem środka masy) *w ruchu względnym równa się momentowi* (względem środka masy) *sił działających.*

§ 4. Praca i potencjał układu punktów.

Praca. Niech na punkty układu działają siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$. Praca siły $\overline{P}_i$ wyraża się (str. 95) wzorem $L_i = \int\limits_{C_i} (P_{i_x} dx_i + P_{i_y} dy_i + P_{i_z} dz_i)$, gdzie C_i oznacza tor punktu i-tego.

Pracą całkowitą (lub krótko *pracą*) *sił* $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ nazywamy sumę prac poszczególnych sił.

Zatem praca całkowita wynosi

$$L = \sum \int\limits_{C_i} (P_{i_x} dx_i + P_{i_y} dy_i + P_{i_z} dz_i). \tag{I}$$

Pracę całkowitą, jaką wykonują siły w czasie od t_0 do t, możemy przedstawić w postaci (IV), str. 96,

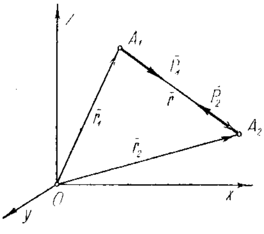
$$L = \int\limits_{t_0}^{t} \sum (P_{i_x} \dot{x}_i + P_{i_y} \dot{y}_i + P_{i_z} \dot{z}_i)\, dt \tag{II}$$

lub ((V), str. 96)

(II')
$$L = \int_{t_0}^{t} \sum (\bar{P}_i \bar{v}_i)\, dt,$$

gdzie $\bar{v}_i$ oznaczają prędkości punktów, zaś $\bar{P}_i \bar{v}_i$ jest iloczynem skalarowym.

Praca równa zeru. Ważne są przypadki, w których praca sił działających na układ jest równa zeru. Podamy kilka przykładów.



Przykład 1. Dla układu sztywnego punktów materialnych (str. 194) zachodzi twierdzenie następujące:

Praca sił wewnętrznych w układzie sztywnym jest zerem.

Dowód. Weźmy na razie pod uwagę dwa punkty układu sztywnego A_1 i A_2. Połóżmy:

(1)
$$\bar{r}_1 = \overline{OA_1}, \qquad \bar{r}_2 = \overline{OA_2}, \qquad \bar{r} = \overline{A_1 A_2},$$

gdzie O jest początkiem układu współrzędnych. Jeżeli $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ są prędkościami punktów A_1, A_2, to

(2)
$$\bar{v}_1 = \dot{\bar{r}}_1, \qquad \bar{v}_2 = \dot{\bar{r}}_2.$$

Na mocy (1) mamy $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, skąd $\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_2 - \dot{\bar{r}}_1$, więc

(3)
$$\dot{\bar{r}} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1.$$

Ponieważ $A_1A_2 = \text{const.}$, więc $\bar{r}^2 = \text{const.}$ Różniczkując względem czasu t, otrzymamy $2\bar{r}\dot{\bar{r}} = 0$. Na mocy więc (3)

(4)
$$\bar{r}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = 0.$$

Oznaczmy przez $\bar{P}_1$ (wzgl. $\bar{P}_2$) siłę, z jaką punkt A_2 (wzgl. A_1) działa na punkt A_1 (wzgl. A_2). Na mocy prawa akcji i reakcji jest

(5)
$$\bar{P}_1 = -\bar{P}_2.$$

Ponieważ siły $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$ mają kierunek wektora $\overline{A_1 A_2} = \bar{r}$, więc możemy przyjąć, że

(6)
$$\bar{P}_1 = \lambda \bar{r} \qquad \text{i} \qquad \bar{P}_2 = -\lambda \bar{r},$$

gdzie λ jest współczynnikiem zależnym od czasu (wielkość sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$

może się bowiem zmieniać z biegiem czasu). Na mocy (II') praca sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ wynosi

(7) $$L=\int_{t_0}^{t_1}(\overline{P}_1\overline{v}_1+\overline{P}_2\overline{v}_2)\,dt.$$

Z równości (6) dostajemy $\overline{P}_1\overline{v}_1+\overline{P}_2\overline{v}_2=\lambda(\overline{r}\overline{v}_1-\overline{r}\overline{v}_2)=\lambda\overline{r}(\overline{v}_1-\overline{v}_2)$, na mocy więc (4) $\overline{P}_1\overline{v}_1+\overline{P}_2\overline{v}_2=0$. Wynika stąd wobec (7), że

$$L=0.$$

Udowodniliśmy zatem, że praca sił wewnętrznych, z jakimi działają na siebie dwa jakiekolwiek punkty układu sztywnego jest zerem. Suma prac wszystkich sił wewnętrznych jest więc również zerem, c. b. d. d.

Przykład 2. Dwa punkty materialne A_1 i A_2 połączone są nicią nierozciągliwą (bez masy), przechodzącą przez stały punkt O. Załóżmy, że nie ma tarcia. Udowodnimy, że praca sił, z jakimi nić działa na punkty układu, równa jest zeru.

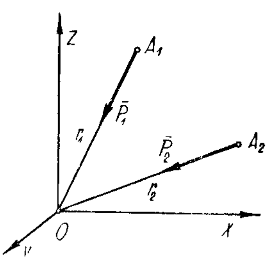
Obierzmy punkt O za początek układu współrzędnych. Niechaj x_1, y_1, z_1 będą współrzędnymi punktu A_1, zaś x_2, y_2, z_2 współrzędnymi punktu A_2. Połóżmy

(8) $$r_1=OA_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \quad \text{i} \quad r_2=OA_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}.$$

Ponieważ długość nici $l=\text{const.}$ i $r_1+r_2=l$, więc

(9) $$\dot{r}_1+\dot{r}_2=0.$$

Oznaczmy przez $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ siły, z jakimi nić działa na punkty A_1 i A_2. Mamy (str. 194)



(10) $$|\overline{P}_1|=|\overline{P}_2|.$$

Kładąc $P=-|\overline{P}_1|=-|\overline{P}_2|$, otrzymamy:

$$P_{1x}=P\frac{x_1}{r_1},\quad P_{1y}=P\frac{y_1}{r_1} \quad \text{i} \quad P_{1z}=P\frac{z_1}{r_1}, \quad \text{więc}$$

$$P_{1x}\dot{x}_1+P_{1y}\dot{y}_1+P_{1z}\dot{z}_1=P\,\frac{x_1\dot{x}_1+y_1\dot{y}_1+z_1\dot{z}_1}{r_1}=P\dot{r}_1$$

i analogicznie $P_{2x}\dot{x}_2+P_{2y}\dot{y}_2+P_{2z}\dot{z}_2=P\dot{r}_2$.

Na mocy (II), str. 211, praca sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ wynosi tedy

$$L=\int_{t_0}^{t}[P\dot{r}_1+P\dot{r}_2]\,dt=\int_{t_0}^{t}P[\dot{r}_1+\dot{r}_2]\,dt.$$

Z (9) dostaniemy więc $L=0$.

Przykład 3. Przypuśćmy, że jakieś ciało K porusza się w ten sposób, że pozostaje stale styczne do pewnej powierzchni Σ. Zakładając, że siły reakcyjne powierzchni zaczepione są w punktach styczności, widzimy, że reakcje zmieniają punkty zaczepienia, jeżeli ciało coraz to innymi punktami styka się z powierzchnią Σ. Przyjmujemy, że praca sił reakcyjnych wyraża się w tym przypadku wzorem (II'), str. 212, gdzie $\bar{v}_i$ oznaczają prędkości punktów styczności, w których w danej chwili zaczepione są reakcje $\bar{P}_i$.

Jeżeli prędkości punktów styczności są stale równe zeru, mówimy, że ciało K *toczy się* po powierzchni Σ.

A więc: *przy toczeniu się ciała praca sił reakcyjnych jest zerem.*

Potencjał układu. Jeżeli siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ zależą tylko od położenia układu punktów, wówczas powiadamy, że siły tworzą *pole sił*.

Ponieważ położenie układu określone jest współrzędnymi x_1, y_1, z_1 $x_2, y_2, z_2, \ldots$ jego punktów, więc siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ są funkcjami zmiennych $x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots$. Zatem

$$P_{i_x} = F_i(x_1, y_1, z_1, \ldots), \qquad P_{i_y} = \Phi_i(x_1, y_1, z_1, \ldots), \qquad P_{i_z} = \Psi_i(x_1, y_1, z_1, \ldots).$$

Jeżeli w polu sił praca całkowita nie zależy od drogi przebytej przez układ punktów, lecz tylko od położenia początkowego i końcowego tych punktów, to pole sił nazywamy *polem potencjalnym* lub *zachowawczym (konserwatywnym)*.

Weźmy pod uwagę dowolne położenie S_0 układu punktów, określone współrzędnymi $x_1^0, y_1^0, z_1^0,\ x_2^0, y_2^0, z_2^0, \ldots$. Oznaczmy przez V pracę, jaką wykonają siły przy przejściu układu z położenia S_0 do położenia S o współrzędnych $x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots$. Jeżeli pole jest polem potencjalnym, to praca V nie będzie zależała od drogi przejścia. Zatem V będzie funkcją zmiennych $x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots$. Funkcję V nazywamy *potencjałem* lub *funkcją sił*.

Postępując podobnie jak w przypadku jednego punktu materialnego (str. 100), można udowodnić następujące wzory:

$$\text{(III)} \qquad P_{i_x} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \qquad P_{i_y} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \qquad P_{i_z} = \frac{\partial V}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Na odwrót, jeżeli istnieje funkcja V spełniająca równania (III), to pole jest polem potencjalnym i V jest potencjałem.

Jeżeli układ przesuniemy z położenia o potencjale V_1 w położenie o potencjale V_2, praca wyniesie

$$L = V_2 - V_1.$$

Jeżeli siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ tworzą każda z osobna pole potencjalne o potencjałach $V_1, V_2, \dots$, wówczas pole jest polem potencjalnym o potencjale

$$V = V_1 + V_2 + \dots . \tag{11}$$

Potencjał siły ciężkości. Niech układ punktów o masach $m_1, m_2, \dots$ porusza się w polu siły ciężkości. Jeżeli przyjmiemy, że oś z jest skierowana pionowo do góry, wówczas (str. 102)

$$V_1 = -m_1 g z_1, \qquad V_2 = -m_2 g z_2, \qquad \dots$$

Na mocy więc (11) pole będzie polem potencjalnym o potencjale

$$V = -(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots) g. \tag{12}$$

Oznaczając przez z_0 współrzędną środka masy układu, będziemy mieli $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots = m z_0$, gdzie m oznacza masę całkowitą układu (str. 154). Według (12) jest więc

$$V = -m g z_0. \tag{13}$$

Zauważmy, że mg jest ciężarem całego układu (t. zn. sumą ciężarów poszczególnych punktów).

Jeżeli w jednym położeniu układu środek ciężkości ma współrzędną $z_0^{(1)}$, a w drugim $z_0^{(2)}$, wówczas praca wykonana przez siły ciężkości wynosi $L = (-mgz_0^{(2)}) - (-mgz_0^{(1)})$ czyli

$$L = mg(z_0^{(1)} - z_0^{(2)}). \tag{14}$$

A więc: *praca w polu ciężkości zależy tylko od różnicy poziomów środka ciężkości układu, a nie zależy od torów poszczególnych jego punktów.*

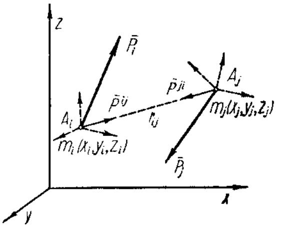
Praca sił ciężkości równa się zatem pracy, jaką wykonałby ciężar całkowity układu, zaczepiony w środku jego masy.

Potencjał sił wewnętrznych. Niech będzie dany układ punktów $A_1, A_2, \dots, A_n$ o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$. Załóżmy, że siły wewnętrzne, z jakimi dwa dowolne punkty układu działają na siebie, zależą co do wielkości tylko od odległości tych punktów, t. zn. że jeśli oznaczyć przez $\overline{P}^{ij}$ siłę, z jaką punkt $A_j(x_j, y_j, z_j)$ działa na punkt $A_i(x_i, y_i, z_i)$, zaś przez r_{ij} odległość między punktami A_i i A_j, to $|\overline{P}^{ij}|$ jest funkcją odległości r_{ij} czyli

(15) $$|\overline{P}^{ij}| = f_{ij}(r_{ij}),$$

gdzie

(16) $$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$



Niechaj P_{ij} oznacza rzut siły $\overline{P}^{ij}$ na kierunek $\overline{A_jA_i}$. Zatem:

1⁰ $|P_{ij}| = |\overline{P}^{ij}|$,

2⁰ $P_{ij} \leqslant 0$, jeżeli punkty A_i i A_j się przyciągają, zaś $P_{ij} \geqslant 0$ jeżeli punkty A_i i A_j się odpychają.

Ponieważ w myśl prawa akcji i reakcji jest $\overline{P}^{ij} = -\overline{P}^{ji}$, więc $P_{ij} = P_{ji}$, skąd na mocy (15) i warunku 1⁰

(17) $$P_{ij} = \pm f_{ij}(r_{ij}) \qquad \text{czyli} \qquad P_{ij} = F_{ij}(r_{ij}).$$

Z określenia liczby P_{ij} wynika, że rzuty siły $\overline{P}^{ij}$ na osie układu (x, y, z) możemy napisać w postaci:

(18) $$P_x^{ij} = P_{ij}\frac{x_i - x_j}{r_{ij}}, \qquad P_y^{ij} = P_{ij}\frac{y_i - y_j}{r_{ij}}, \qquad P_z^{ij} = P_{ij}\frac{z_i - z_j}{r_{ij}}.$$

Połóżmy

(19) $$V_{ij} = \int P_{ij}\,dr_{ij} = \int F_{ij}(r_{ij})\,dr_{ij}.$$

Ponieważ $P_{ij} = P_{ji}$ i $r_{ij} = r_{ji}$, więc

(20) $$V_{ij} = V_{ji}.$$

Mamy $\dfrac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} = \dfrac{dV_{ij}}{dr_{ij}} \cdot \dfrac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} = P_{ij}\dfrac{x_i - x_j}{r_{ij}}$, zatem na mocy (18):

(21) $$\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} = P_x^{ij}, \qquad \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_i} = P_y^{ij}, \qquad \frac{\partial V_{ij}}{\partial z_i} = P_z^{ij}.$$

Połóżmy

(22) $$V = \frac{1}{2}\sum' V_{ij} = \frac{1}{2}\sum' \int P_{ij}\,dr_{ij},$$

gdzie sumowanie rozciągnięte jest na wszystkie pary liczb i, j takie, że $i \neq j$, $i \leqslant n$ i $j \leqslant n$.

Niechaj $\overline{P}_i$ oznacza sumę wszystkich sił wewnętrznych, działających na punkt A_i. Zatem

(23) $$\overline{P}_i = \sum_{j=1}^{n}{}' \overline{P}^{ij} \quad \text{dla } j \neq i.$$

Obliczmy pochodną cząstkową $\partial V/\partial x_i$. Zmienna x_i występuje tylko w funkcjach V_{ij} i V_{ji}, gdzie $j \neq i$. Na mocy (22) jest wobec tego

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n}{}' \left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial V_{ji}}{\partial x_i}\right] \qquad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Z równości (20) i (21) wynika więc

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n}{}' 2P_x^{ij} = \sum_{j=1}^{n}{}' P_x^{ij} \qquad \text{dla} \quad i \neq j,$$

skąd na mocy (23):

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = P_{i_x}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y_i} = P_{i_y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z_i} = P_{i_z}.$$

Zatem V jest potencjałem. Udowodniliśmy więc twierdzenie następujące:

Jeżeli siły wewnętrzne, z jakimi punkty układu działają na siebie, zależą tylko od odległości tych punktów, wówczas siły wewnętrzne wytwarzają pole potencjalne o potencjale danym przez wzór (22).

Przykład 4. Niech punkty układu przyciągają się wzajemnie według prawa Newtona. Wówczas dla $i \neq j$ jest $P_{ij} = -Km_i m_j / r_{ij}^2$, a więc według (19) $V_{ij} = \int P_{ij} dr_{ij} = Km_i m_j / r_{ij}$, skąd na mocy (22)

$$V = \tfrac{1}{2} K \sum m_i m_j / r_{ij}, \tag{24}$$

gdzie suma rozciągnięta jest na wszystkie pary liczb i, j takie, że $i \neq j$, $i \leqslant n$ i $j \leqslant n$.

W szczególności dla dwóch punktów mamy

$$V = Km_1 m_2 / r_{12}. \tag{25}$$

Przykład 5. Niech punkty układu przyciągają się z siłami proporcjonalnymi do odległości. Wówczas dla $i \neq j$ będzie $P_{ij} = -\lambda_{ij}^2 r_{ij}$, gdzie λ_{ij} jest współczynnikiem zależnym od pary punktów m_i, m_j. A więc według (19) $V_{ij} = \int P_{ij} dr_{ij} = -\frac{1}{2}\lambda_{ij}^2 r_{ij}^2$, skąd na mocy (22)

$$V = -\frac{1}{4} \sum \lambda_{ij}^2 r_{ij}^2. \tag{26}$$

§ 5. Energia kinetyczna układu punktów. Niech dany będzie układ punktów $m_1 m_2, \ldots$, mających w pewnej chwili t prędkości $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots$

Energią kinetyczną układu punktów w chwili t nazywamy sumę energij kinetycznych poszczególnych punktów.

Jeżeli więc położymy $v_1 = |\bar{v}_1|$, $v_2 = |\bar{v}_2|$, ..., to energia kinetyczna układu wyniesie

(I) $$E = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots = \tfrac{1}{2} \sum m_i v_i^2.$$

Energia kinetyczna układu w ruchu postępowym. Jeżeli układ porusza się ruchem postępowym z prędkością $\bar{v}$ (t. zn. jeżeli wszystkie jego punkty mają tą samą prędkość $\bar{v}$), wówczas kładąc $v = |\bar{v}|$, mamy $E = \frac{1}{2} \sum m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i$ czyli

(II) $$E = \tfrac{1}{2} m v^2,$$

gdzie m oznacza masę całkowitą układu.

Energia kinetyczna w ruchu obrotowym około osi. Niech układ punktów obraca się około osi l z prędkością kątową ω. Oznaczając przez $r_1, r_2, \ldots$ odległości punktów układu od osi obrotu, mamy $v_i = r_i \omega$, a zatem $E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2$. Ponieważ $\sum m_i r_i^2$ jest momentem bezwładności układu względem osi obrotu, więc kładąc $\sum m_i r_i^2 = I$, otrzymamy

(III) $$E = \tfrac{1}{2} I \omega^2.$$

Twierdzenie Königa. Niech dowolny układ współrzędnych o początku O porusza się względem układu odniesienia ruchem postępowym. Oznaczmy przez $\bar{u}$ prędkość punktu O, zaś przez $\bar{v}_i$ prędkości bezwzględne, a przez $\bar{w}_i$ prędkości względne punktów materialnych m_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Ponieważ $\bar{u}$ jest prędkością unoszenia, więc

(1) $$\bar{v}_i = \bar{u} + \bar{w}_i,$$

skąd $\bar{v}_i^2 = (\bar{u} + \bar{w}_i)^2 = \bar{u}^2 + \bar{w}_i^2 + 2\bar{u}\bar{w}_i$. Kładąc $v_i = |\bar{v}_i|$, $w_i = |\bar{w}_i|$ i $u = |\bar{u}|$, otrzymamy $E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i u^2 + \frac{1}{2} \sum m_i w_i^2 + \sum m_i \bar{u}\bar{w}_i$.

Jeżeli więc położymy $m = \Sigma m_i$, dostaniemy

(2) $$E = \tfrac{1}{2} m u^2 + \tfrac{1}{2} \sum m_i w_i^2 + \bar{u} \sum m_i \bar{w}_i.$$

Oznaczmy przez $\bar{v}_0$ prędkość bezwzględną, a przez $\bar{w}_0$ prędkość względną środka masy. Na mocy (1) mamy $\bar{v}_0 = \bar{u} + \bar{w}_0$. Ponieważ $\Sigma m_i \bar{w}_i = m \bar{w}_0$, więc z (2) wynika $E = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i w_i^2 + m \bar{u}\bar{w}_0$ lub, pisząc $\bar{v}_0 - \bar{u}$ zamiast $\bar{w}_0$,

(IV) $$E = \tfrac{1}{2} m u^2 + \tfrac{1}{2} \sum m_i w_i^2 + m \bar{u}(\bar{v}_0 - \bar{u}).$$

Pierwszy wyraz tej sumy oznacza energię ruchu postępowego układu punktów, poruszającego się z prędkością $\bar{u}$. Wyraz drugi oznacza energię kinetyczną ruchu względnego, przyczem prędkości $\bar{w}_i$ możemy uważać za prędkości punktów m_i względem punktu O, poruszającego się z prędkością $\bar{u}$.

Jeżeli więc przyjmiemy, że ruch układu złożony jest z ruchu postępowego o prędkości dowolnego punktu O i ruchu względnego względem tegoż punktu O, to *energia kinetyczna układu równa się sumie energii kinetycznej ruchu postępowego, energii kinetycznej ruchu względnego i iloczynu masy całkowitej układu przez iloczyn skalarowy z prędkości punktu O i prędkości względnej środka masy.*

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *twierdzenia Königa.*

Jeżeli w szczególności za punkt O obierzemy środek masy, to $\bar{u}=\bar{v}_0$, skąd na mocy (IV)

(3) $$E=\tfrac{1}{2}mv_0^2+\tfrac{1}{2}\sum m_i w_i^2.$$

Jeżeli więc ruch układu będziemy uważać za ruch złożony z ruchu postępowego o prędkości środka masy i ruchu względnego względem środka masy, wówczas *energia kinetyczna układu równa się sumie energii kinetycznej ruchu postępowego i energii kinetycznej ruchu względnego.*

Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej. Niech na punkty materialne m_i działają siły $\bar{P}_i$. Oznaczmy przez $\bar{v}_i$ prędkość punktu m_i w chwili t, przez $\bar{v}_i^{(0)}$ prędkość jego w chwili t_0, a przez $L_{t_0 t}^{(i)}$ pracę siły $\bar{P}_i$ w czasie od t_0 do t. Zatem ((3), str. 106) $\tfrac{1}{2}m_i v_i^2-\tfrac{1}{2}m_i(v_i^{(0)})^2=L_{t_0 t}^{(i)}$, skąd

$$\tfrac{1}{2}\sum m_i v_i^2-\tfrac{1}{2}\sum m_i(v_i^{(0)})^2=\sum L_{t_0 t}^{(i)}.$$

Kładąc: $E=\tfrac{1}{2}\sum m_i v_i^2$, $E_0=\tfrac{1}{2}\sum m_i(v_i^{(0)})^2$, $L_{t_0 t}=\sum L_{t_0 t}^{(i)}$, otrzymamy

(V) $$E-E_0=L_{t_0 t}.$$

We wzorze tym E oznacza energię kinetyczną układu w chwili t, a E_0 w chwili t_0; wyrażenie $L_{t_0 t}$ przedstawia sumę prac poszczególnych sił działających na układ, t. j. pracę całkowitą, jaką siły te wykonały w czasie od t_0 do t.

A więc: *przyrost energii kinetycznej układu punktów materialnych równa się pracy całkowitej sił działających na punkty układu.*

Twierdzenie to nosi nazwę *zasady równowartości pracy i energii kinetycznej.*

Jeżeli praca całkowita sił działających jest zerem, czyli $L_{t_0 t}=0$, wówczas na mocy (V) jest $E-E_0=0$ czyli

$$E=E_0.$$

A więc: *jeżeli praca całkowita sił, działających na punkty układu jest stale zerem, wówczas energia kinetyczna układu jest wielkością stałą.*

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania energii kinetycznej.*

Załóżmy, że układ sił działających posiada potencjał. Jeżeli przez V oznaczymy potencjał w chwili t, a przez V_0 potencjał w chwili t_0, to $L_{t_0 t}=V-V_0$, a więc na mocy (V) $E-E_0=V-V_0$ czyli

$$E-V=E_0-V_0.$$

Wielkość $U=-V$ nazywamy *energią potencjalną układu.*

Zatem

$$E+U=E_0+U_0=\text{const.} \tag{VI}$$

Sumę $E+U$ nazywamy *energią całkowitą układu.*

A więc: *jeżeli układ punktów porusza się w polu potencjalnym, to energia całkowita układu jest stała.*

Twierdzenia te są oczywiście uogólnieniem odpowiednich twierdzeń, dowiedzionych na str. 106 i 107 dla jednego punktu materialnego.

Energia kinetyczna w ruchu względnym. Niech układ współrzędnych $O'(x',y',z')$ porusza się względem układu inercjalnego $O(x,y,z)$. Oznaczmy przez E_w i $E_w^{(0)}$ energię kinetyczną w ruchu względnym w chwilach t i t_0, przez $L_{t_0 t}, L_{t_0 t}^u$ i $L_{t_0 t}^C$ prace w ruchu względnym sił działających, sił unoszenia i Coriolisa w czasie od t_0 do t. Ponieważ prawa Newtona odnoszą się do ruchu względnego, gdy do sił działających dodać siły unoszenia i Coriolisa (str. 137), więc

$$E_w-E_w^{(0)}=L_{t_0 t}+L_{t_0 t}^u+L_{t_0 t}^C. \tag{4}$$

Ponieważ przyśpieszenie Coriolisa jest prostopadłe do prędkości względnej, więc siła Coriolisa jest również prostopadła do tej prędkości. Zatem praca sił Coriolisa w ruchu względnym jest zerem, wobec czego możemy napisać

$$E_w-E_w^{(0)}=L_{t_0 t}+L_{t_0 t}^u. \tag{5}$$

A więc: *przyrost energii kinetycznej w ruchu względnym równa się sumie prac w ruchu względnym sił działających i sił unoszenia.*

Niech w szczególności punkt O' znajduje się w środku S masy układu $O'(x', y', z')$ i niech układ ten porusza się ruchem postępowym. Ponieważ przy tym założeniu przyśpieszenie unoszenia równa się przyśpieszeniu $\bar{p}_0$ środka masy, więc siły unoszenia poszczególnych punktów układu $m_1, m_2, \ldots$ wynoszą

$$(6) \qquad \bar{P}_{1u} = -m_1 \bar{p}_0, \qquad \bar{P}_{2u} = -m_2 \bar{p}_0, \qquad \ldots$$

Oznaczając przez $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots$ prędkości względne punktów układu, otrzymujemy $L^u_{t_0 t} = \int_{t_0}^{t} \bar{P}_{1_u} \bar{w}_1 dt + \int_{t_0}^{t} \bar{P}_{2_u} \bar{w}_2 dt + \ldots$, skąd według (6)

$$L^u_{t_0 t} = -\int_{t_0}^{t} \bar{p}_0 (m_1 \bar{w}_1 + m_2 \bar{w}_2 + \ldots)\, dt.$$

Prędkość względna $\bar{w}_0$ środka masy równa się zeru, gdyż założyliśmy, że środek S masy całkowitej m jest stale w początku układu ruchomego $O'(x', y', z')$. Zatem $m_1 \bar{w}_1 + m_2 \bar{w}_2 + \ldots = m \bar{w}_0 = 0$, skąd według ostatniego wzoru $L^u_{t_0 t} = 0$. Na mocy więc (5)

$$(7) \qquad E_w - E_w^{(0)} = L_{t_0 t}.$$

A więc: *przyrost energii kinetycznej w ruchu względnym względem środka masy równa się pracy w ruchu względnym sił działających.*

Przykład 1. Układ punktów materialnych porusza się w polu siły ciężkości. Niech środek masy S będzie początkiem układu współrzędnych (x', y', z'), poruszającego się ruchem postępowym. Przyjmijmy, że oś z' jest pionowa i zwrócona ku dołowi.

Ponieważ ciężary poszczególnych punktów mają kierunek osi z', więc (podobnie jak w układzie bezwzględnym, str. 215) praca sił ciężkości w ruchu względnym równa się pracy, jaką wykona ciężar całkowity, zaczepiony w środku masy. Z uwagi na to, że środek masy jest w spoczynku względem układu (x', y', z'), gdyż znajduje się z założenia stale w początku tego układu, praca sił ciężkości w ruchu względnym jest zerem. Przyrost zatem energii kinetycznej w ruchu względnym równa się pracy pozostałych sił (poza ciężarami), jakie działają na punkty układu.

W szczególności jeżeli na punkty układu działają same tylko ciężary, to energia kinetyczna tego układu w ruchu względnym jest stała.

Przypuśćmy np., że w chwili $t=0$ puściliśmy swobodnie punkt materialny o masie m_1, a po T sek drugi punkt o masie m_2. Po czasie $t>T$ prędkości punktów m_1 i m_2 wynoszą:

$$v_1=gt \qquad \text{i} \qquad v_2=g(t-T). \tag{8}$$

Prędkość środka masy v_0 otrzymamy z równania

$$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v_0.$$

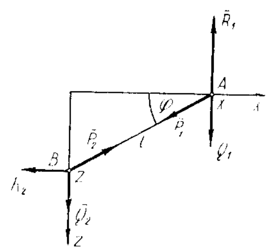
Zatem $v_0=(m_1v_1+m_2v_2)/(m_1+m_2)$. Prędkości względne punktów m_1 i m_2 wynoszą $w_1=v_1-v_0$ i $w_2=v_2-v_0$, więc $w_1=m_2(v_1-v_2)/(m_1+m_2)$ i $w_2=m_1(v_2-v_1)/m_1+m_2)$, skąd na mocy (8) $w_1=m_2gT/(m_1+m_2)$ i $w_2=-m_1gT/(m_1+m_2)$.

Energia kinetyczna w ruchu względnym wynosi zatem

$$E_w=\tfrac{1}{2}m_1w_1^2+\tfrac{1}{2}m_2w_2^2=m_1m_2g^2T^2/2(m_1+m_2)=\text{const}.$$

Widzimy więc, że energia kinetyczna w ruchu względnym względem środka masy jest stała.

Przykład 2. Dwa punkty A i B o masach m_1 i m_2, połączone nicią nierozciągliwą bez masy, poruszają się w płaszczyźnie pionowej w ten sposób, że punkt A musi pozostawać stale na osi poziomej x zaś punkt B na osi pionowej z.



Oznaczmy przez l długość nici, a przez x, z współrzędne punktów A, B. Na punkt A działa reakcja $\bar{R}_1$, prostopadła do osi x (zakładamy, że nie ma tarcia), ciężar $\bar{Q}_1$ i reakcja nici $\bar{P}_1$; na punkt B działa reakcja $\bar{R}_2$, prostopadła do osi z, ciężar $\bar{Q}_2$ i reakcja nici $\bar{P}_2$.

Z sił powyższych nie wykonują pracy: reakcje $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ i ciężar $\bar{Q}_1$, gdyż siły te są prostopadłe do toru. Nie wykonują również pracy siły $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$, ponieważ $\bar{P}_1=-\bar{P}_2$, a ponadto odległość punktów A, B jest stała (str. 212). Tylko więc ciężar $\bar{Q}_2$ wykonuje pracę.

Przypuśćmy, że w chwili początkowej $t_0=0$ punkty A, B miały współrzędne x_0, z_0 i prędkość zero. Energia kinetyczna w chwili t wynosi

$$E=\tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}m_2\dot{z}^2.$$

Praca siły $\bar{Q}_2$ równa się $m_2g(z-z_0)$, jeżeli osi z nadamy zwrot ku dołowi. Zatem na mocy zasady równowartości pracy i energii kinetycznej

$$\tfrac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\tfrac{1}{2}m_2\dot{z}^2=m_2g(z-z_0). \tag{9}$$

Oznaczmy przez φ kąt, jaki nić tworzy z osią x w chwili t, a przez φ_0 kąt w chwili $t_0=0$. Mamy więc:

$$x=l\cos\varphi, \qquad z=l\sin\varphi, \qquad z_0=l\sin\varphi_0,$$

skąd:

(10) $$\dot{x}=-l\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{z}=l\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Według (9) jest zatem

(11) $$\tfrac{1}{2}l^2\dot{\varphi}^2(m_1\sin^2\varphi+m_2\cos^2\varphi)=m_2gl(\sin\varphi-\sin\varphi_0).$$

Z powyższego równania możemy, znając φ, obliczyć $\dot{\varphi}$, a następnie z równań (10) wyznaczyć prędkości $\dot{x}$ i $\dot{y}$. Znając φ, możemy również wyznaczyć reakcje $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \overline{P}_1, \overline{P}_2$. Przyjmijmy dla prostoty, że $m_1=m_2=m$ i $\varphi_0=0$. Otrzymamy z (11)

(12) $$\tfrac{1}{2}l\dot{\varphi}^2=g\sin\varphi.$$

Różniczkując względem t, dostaniemy $l\dot{\varphi}\ddot{\varphi}=g\dot{\varphi}\cos\varphi$, skąd

(13) $$\ddot{\varphi}=g\cos\varphi/l.$$

Oznaczając przez $\overline{p}_1$ przyśpieszenie punktu A, otrzymamy

(14) $$m_1\overline{p}_1=\overline{R}_1+\overline{Q}_1+\overline{P}_1.$$

Tworząc rzut na oś x i kładąc $P=|\overline{P}_1|=|\overline{P}_2|$, dostaniemy

(15) $$m\ddot{x}=-P\cos\varphi.$$

Ponieważ na mocy (10)

(16) $$\ddot{x}=-l\ddot{\varphi}\sin\varphi-l\dot{\varphi}^2\cos\varphi,$$

więc z równań (15) i (16) możemy otrzymać P, znając φ, gdyż $\dot{\varphi}$ i $\ddot{\varphi}$ możemy obliczyć z równań (12) i (13). Dostaniemy

(17) $$P=3mg\sin\varphi.$$

Tworząc rzut na oś z, dostaniemy z (14) $R_1+mg+P\sin\varphi=0$ czyli

(18) $$R_1=-mg-P\sin\varphi,$$

gdzie R_1 oznacza rzut siły $\overline{R}_1$ na oś z.

Podobnie, dla punktu B mamy $m\overline{p}_2=\overline{R}_2+\overline{P}_2+\overline{Q}_2$. Tworząc rzut na oś x, otrzymamy z uwagi na to, że $\overline{P}_2=-\overline{P}_1$, równość $R_2+P\cos\varphi=0$, skąd

(19) $$R_2=-P\cos\varphi.$$

Wzory (17)—(19) wyznaczają reakcje w zależności od kąta φ.

Przykład 3. Dwa punkty materialne A_1 i A_2 o masach m_1 i m_2, połączone nicią nierozciągliwą bez masy, przechodzącą przez stały punkt O, poruszają się w płaszczyźnie poziomej (przechodzącej przez O) bez tarcia. Obierzmy w tej płaszczyźnie układ współrzędnych (x, z) o początku w O (p. rys. na str. 213). Ponieważ kierunki sił $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, z jakimi nić działa na punkty A_1 i A_2, przechodzą stale przez O, więc punkty A_1 i A_2 będą poruszać się ruchem środkowym o środku O.

Połóżmy $r_1 = OA_1$ i $r_2 = OA_2$; niechaj φ_1, φ_2 oznaczają kąty między osią x a odcinkami OA_1 i OA_2. Prędkości polowe punktów A_1 i A_2 są odpowiednio równe $\frac{1}{2}r_1^2\dot{\varphi}_1$ i $\frac{1}{2}r_2^2\dot{\varphi}_2$. Ponieważ prędkości polowe w ruchu środkowym są stałe (str. 87), więc

$$r_1^2\dot{\varphi}_1 = c_1, \qquad r_2^2\dot{\varphi}_2 = c_2, \tag{20}$$

gdzie c_1 i c_2 są pewnymi stałymi.

Na str. 213 dowiedliśmy, że praca całkowita sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ jest zerem. Zatem energia kinetyczna układu punktów A_1, A_2 ma wartość stałą. Oznaczając przez v_1 i v_2 wielkość prędkości punktów A_1 i A_2, otrzymamy $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = c$ lub

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = h, \tag{21}$$

gdzie c i $h = 2c$ są stałymi. Ale ((3), str. 47):

$$v_1^2 = \dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\varphi}_1^2 \text{ i } v_2^2 = \dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\varphi}_2^2,$$

więc na mocy (20), wyrażając $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ przez r_1 i r_2, otrzymamy $v_1^2 = \dot{r}_1^2 + \frac{c_1^2}{r_1^2}$ i $v_2^2 = \dot{r}_2^2 + \frac{c_2^2}{r_2^2}$, skąd na mocy (21)

$$m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2 + \frac{m_1c_1^2}{r_1^2} + \frac{m_2c_2^2}{r_2^2} = h. \tag{22}$$

Oznaczmy przez l długość nici. Zatem $r_1 + r_2 = l$ czyli $r_2 = l - r_1$, skąd

$$\dot{r}_2 = -\dot{r}_1. \tag{23}$$

Wstawiając w (22), otrzymamy

$$(m_1 + m_2)\dot{r}_1^2 + \frac{m_1c_1^2}{r_1^2} + \frac{m_2c_2^2}{(l - r_1)^2} = h. \tag{24}$$

Równanie różniczkowe (24) wyznacza r_1 jako funkcję czasu t. Z równości (23) i (20) otrzymamy $r_2, \varphi_1, \varphi_2$. Aby otrzymać reakcje $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, zauważmy, że jeżeli $\overline{p}_1$ oznacza przyśpieszenie punktu A_1, to $m_1\overline{p}_1 = \overline{P}_1$. Utwórzmy rzut na kierunek $\overline{OA}_1$. Oznaczając rzuty $\overline{p}_1$ i $\overline{P}_1$ na $\overline{OA}_1$ przez p_{1r}, P, dostaniemy

$$m_1 p_{1r} = P. \tag{25}$$

Na mocy (II), str. 47, mamy $p_{1r} = \ddot{r}_1 - r_1 \dot{\varphi}_1^2$. Zatem wedle (20)

$$p_{1r} = \ddot{r}_1 - \frac{c_1^2}{r_1^3}. \tag{26}$$

Aby otrzymać $\ddot{r}_1$, zróżniczkujmy równanie (24). Dostaniemy

$$\dot{r}_1 \left[(m_1 + m_2) \ddot{r}_1 - \frac{m_1 c_1^2}{r_1^3} + \frac{m_2 c_2^2}{(l - r_1)^3} \right] = 0. \tag{27}$$

Jeżeli $\dot{r}_1 \neq 0$, to na mocy (25)—(27)

$$P = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[\frac{c_2^2}{(l - r_1)^3} + \frac{c_1^2}{r_1^3} \right]. \tag{28}$$

Ze wzoru (28) możemy otrzymać reakcję P, znając tylko r_1. Znając P, znamy $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, gdyż $|\overline{P}_1| = |\overline{P}_2|$.

§ 6. Zagadnienie dwóch ciał. Niech dwa punkty materialne o masach M i m przyciągają się wedle prawa Newtona z siłą o wielkości

$$P = KmM/r^2,$$

gdzie r oznacza odległość tych punktów. Na str. 107 badaliśmy ruch punktu m przy założeniu, że punkt M jest nieruchomy. Udowodniliśmy, że w tym przypadku zachodzą prawa Keplera. Obecnie nie będziemy zakładać, że punkt M jest nieruchomy, lecz że oba punkty są swobodne. Pod wpływem więc wzajemnego przyciągania oba punkty m i M będą się poruszać. Oczywiście, ich środek masy będzie w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostolinijnym, bo według prawa akcji i reakcji suma sił działających na punkty m i M jest równa zeru. Możemy zatem początek układu inercjalnego umieścić w środku ciężkości obu punktów.

Niechaj x_1, y_1, z_1 będą współrzędnymi punktu M, zaś x_2, y_2, z_2 punktu m. Równania ruchu Newtona dla punktów M i m będą miały postać:

$$M\ddot{x}_1 = \frac{KmM}{r^2} \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad M\ddot{y}_1 = \frac{KmM}{r^2} \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad M\ddot{z}_1 = \frac{KmM}{r^2} \frac{z_2 - z_1}{r} \tag{1}$$

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{KmM}{r^2} \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad m\ddot{y}_2 = -\frac{KmM}{r^2} \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad m\ddot{z}_2 = -\frac{KmM}{r^2} \frac{z_2 - z_1}{r}. \tag{1'}$$

Ponieważ środek ciężkości układu M, m jest w początku układu współrzędnych, więc $Mx_1+mx_2=0$, $My_1+my_2=0$ i $Mz_1+mz_2=0$, skąd $x_2=-Mx_1/m$, $y_2=-My_1/m$ i $z_2=-Mz_1/m$. Zatem:

$$(2)\qquad x_2-x_1=-\frac{M+m}{m}x_1,\qquad y_2-y_1=-\frac{M+m}{m}y_1,\qquad z_2-z_1=-\frac{M+m}{m}z_1.$$

A więc

$$(3)\qquad r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\frac{M+m}{m}r_1,$$

gdzie $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ oznacza odległość punktu M od środka ciężkości. Podstawiając w równania (1) wyrażenia ze wzorów (2) i (3), otrzymamy:

$$(4)\qquad \begin{gathered} M\ddot{x}_1=-\frac{Km^3M}{(M+m)^2r_1^2}\cdot\frac{x_1}{r_1},\qquad M\ddot{y}_1=-\frac{Km^3M}{(M+m)^2r_1^2}\cdot\frac{y_1}{r_1}, \\ M\ddot{z}_1=-\frac{Km^3M}{(M+m)^2r_1^2}\cdot\frac{z_1}{r_1}. \end{gathered}$$

Porównując te równania z równaniami (I), str. 107, widzimy, że ruch punktu M będzie taki, jak gdyby punkt ten był przyciągany przez masę nieruchomą $m^3/(M+m)^2$, umieszczoną w początku układu.

A więc: *jeżeli dwa punkty M i m przyciągają się wedle prawa Newtona, to każdy z nich, np. M, porusza się względem środka ciężkości (obu punktów) tak, jak gdyby w środku ciężkości umieszczona była masa nieruchoma $m^3/(M+m)^2$, przyciągająca punkt M wedle prawa Newtona.*

Badanie zatem ruchu względem środka masy dwu punktów sprowadza się do przypadku rozpatrywanego na str. 107.

Wynika stąd, że oba punkty poruszają się po krzywych rzędu drugiego w których ognisku znajduje się środek ciężkości tych punktów. Tory więc obu punktów są torami płaskimi.

Zbadajmy jeszcze ruch punktu m względem punktu M. Umieśćmy w punkcie M początek układu współrzędnych (x', y', z'), poruszającego się wraz z M ruchem postępowym. Oznaczając przez ξ, η, ζ współrzędne punktu m względem tego układu współrzędnych, otrzymamy

$$(5)\qquad \xi=x_2-x_1,\qquad \eta=y_2-y_1,\qquad \zeta=z_2-z_1.$$

Mnożąc równania (1) przez m/M i odejmując od (1') dostaniemy z uwagi na (5)

$$(6)\qquad m\ddot{\xi}=-\frac{K(M+m)m}{r^2}\frac{\xi}{r},\quad m\ddot{\eta}=-\frac{K(M+m)m}{r^2}\frac{\eta}{r},$$
$$m\ddot{\zeta}=-\frac{K(M+m)m}{r^2}\frac{\zeta}{r}.$$

Porównując równania (6) z równaniami (I), str. 107, widzimy, że punkt m porusza się względem punktu M tak, jak gdyby punkt M był nieruchomy, a masa jego była zwiększona o masę punktu m.

A więc: *jeżeli dwa punkty M i m przyciągają się wedle prawa Newtona, to ruch względny punktu m względem punktu M jest taki, jak gdyby punkt M był nieruchomy, a masa jego była zwiększona o masę punktu m.*

Także i w tym przypadku badanie ruchu jednego punktu materialnego względem drugiego sprowadza się więc do przypadku rozpatrzonego na str. 107.

Przyjmijmy, że ruch względny punktu m odbywa się po elipsie o osi wielkiej $2a$, przyczem czas obiegu niechaj będzie T. Na mocy (10), str. 109, otrzymamy $a^3/T^2=K(M+m)/4\pi^2$. Widzimy zatem, że w ruchu względnym stosunek a^3/T^2 zależy od mas obu ciał. Ponieważ ruchy planet badamy względem słońca, więc przyjmując, że M oznacza masę słońca, a m masę planety, widzimy, że *trzecie prawo Keplera* (str. 89), które odnosi się do ruchu względnego planety względem słońca, *jest nieścisłe*. Dla innej planety (przy odpowiednim znakowaniu) jest

$$(7)\qquad a_1^3/T_1^2=K(M+m_1)/4\pi^2,$$

skąd

$$(8)\qquad \frac{a^3/T^2}{a_1^3/T_1^2}=\frac{M+m}{M+m_1}=\frac{1+\frac{m}{M}}{1+\frac{m_1}{M}}.$$

Ponieważ w układzie słonecznym stosunek m/M wyraża się w tysięcznych, więc ostatni ułamek mało różni się od jedności. Dokładne obserwacje ruchu planet wykazują te odchylenia od trzeciego prawa Keplera.

Gwiazdami podwójnymi nazywamy dwa ciała niebieskie, krążące wokół siebie (zdala od innych ciał). Przyjmując, że gwiazdy podwójne przyciągają się według prawa Newtona, możemy stosować do nich wnioski otrzymane w tym §. Obserwacje potwierdzają te wnioski, a tym samym prawo powszechnego ciążenia, z któregośmy je wyprowadzili.

§ 7. Zagadnienie n ciał. Niechaj n punktów materialnych przyciąga się wzajemnie z siłami działającymi według prawa powszechnego ciążenia Newtona (str. 90). Badaniem ruchów w takim układzie punktów zajmuje się t. zw. *zagadnienie n ciał*.

Zagadnienie to jest ważne dla astronomii. Słońce wraz z planetami tworzy taki układ, jeżeli pominąć działanie gwiazd stałych, bardzo małe wskutek wielkiego ich oddalenia od układu słonecznego.

Zagadnienie dwóch ciał, którym zajmowaliśmy się w § 6, jest szczególnym przypadkiem zagadnienia n ciał.

Zagadnienie n ciał nie jest rozwiązane w całej ogólności. Nawet w przypadku trzech ciał jest jeszcze wiele spraw nierozstrzygniętych. Przy pomocy jednak t. zw. *teorii perturbacji* (czyli *zaburzeń*) możemy wyznaczyć ruchy układu słonecznego z żądaną dokładnością.

W zagadnieniu n ciał mamy do czynienia tylko z siłami wewnętrznymi. Z twierdzenia o środku masy (str. 200) wynika zatem, że środek masy układu jest w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostolinijnym. Możemy więc początek układu inercjalnego współrzędnych obrać w środku masy. Względem tak obranego układu współrzędnych pęd układu n punktów będzie stale zerem (str. 199).

Z twierdzenia o kręcie (str. 206) wynika, że kręt układu punktów jest stały. Płaszczyzna przechodząca przez środek masy i prostopadła do krętu nie zmienia zatem położenia.

W przypadku układu słonecznego środek masy leży w słońcu (ze względu na wielką masę słońca w stosunku do pozostałych planet).

Płaszczyznę przechodzącą przez środek masy układu słonecznego i prostopadłą do krętu nazwał Laplace *płaszczyzną niezmienną*.

Płaszczyzna ta nie zmienia swego położenia w przestrzeni względem układu inercjalnego współrzędnych o początku w słońcu. Podług obliczeń wykonanych przez Laplace'a płaszczyzna niezmienna tworzy z ekliptyką kąt $\alpha = 1{,}7689^0$.

Zagadnienie trzech ciał. Niechaj dane będą trzy punkty materialne A_1, A_2, A_3 o masach m_1, m_2, m_3. Oznaczmy przez $\overline{P}_{ij}$ siłę, z jaką punkt m_j przyciąga punkt m_i; niech $\overline{w}_{ij}$ będzie siłą, z jaką jednostka masy umieszczona w A_j przyciąga jednostkę masy umieszczoną w A_i. Według prawa Newtona mamy zatem

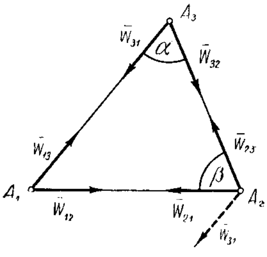
$$\overline{P}_{ij} = m_i m_j \overline{w}_{ij}. \tag{1}$$

Z prawa akcji i reakcji wynika, że $\overline{P}_{ij} = -\overline{P}_{ji}$, więc

$$\overline{w}_{ij} = -\overline{w}_{ji}. \tag{2}$$

Oznaczmy przez $\bar{p}_i$ przyśpieszenie punktu m_i w układzie inercjalnym współrzędnych. A więc $m_1\bar{p}_1=\bar{P}_{12}+\bar{P}_{13}=m_1 m_2\bar{w}_{12}+m_1 m_3\bar{w}_{13}$, skąd

(3) $$\bar{p}_1=m_2\bar{w}_{12}+m_3\bar{w}_{13}.$$



Podobnie

(4) $$\bar{p}_2=m_1\bar{w}_{21}+m_3\bar{w}_{23}.$$

Na mocy (3) i (4) otrzymamy z uwagi na to, że w myśl (2) jest $\bar{w}_{12}=-\bar{w}_{21}$ i $\bar{w}_{13}=-\bar{w}_{31}$:

(5) $$\bar{p}_2-\bar{p}_1=(m_1+m_2)\bar{w}_{21}+m_3(\bar{w}_{23}+\bar{w}_{31}).$$

Różnica $\bar{p}_2-\bar{p}_1$ przedstawia przyśpieszenie względne punktu A_2 względem A_1, t. j. przyśpieszenie punktu A_2 względem układu współrzędnych o początku A_1, poruszającego się ruchem postępowym. Połóżmy $\bar{p}=\bar{p}_2-\bar{p}_1$. Z równania (5) dostaniemy

(6) $$m_2\bar{p}=m_2(m_1+m_2)\bar{w}_{21}+m_2 m_3(\bar{w}_{23}+\bar{w}_{31}).$$

Prawa strona równości (6) przedstawia siłę względną punktu A_2 w ruchu względem A_1.

Pierwszy jej składnik, t. j. $m_2(m_1+m_2)\bar{w}_{21}$, przedstawia siłę względną, jaka działałaby na punkt A_2, gdyby nie było trzeciego punktu A_3 (t. j. gdyby było $m_3=0$). Siła ta miałaby (zgodnie z twierdzeniem podanym na str. 227) kierunek ku punktowi A_1 i byłaby taka, jak gdyby masa punktu A_1 była zwiększona o masę punktu A_2.

Drugi składnik sumy, t. j. $m_2m_3(\bar{w}_{23}+\bar{w}_{31})$, nazywamy *siłą perturbacyjną* (lub *zaburzającą*); pochodzi ona z działania punktu A_3.

Przykład 1. Niech m_1 oznacza masę ziemi, m_2 masę księżyca, a m_3 masę słońca.

W przybliżeniu masa słońca $=\frac{1}{3}10^6$ masy ziemi, odległość ziemi od słońca $=400$ odległości ziemi od księżyca, wreszcie masa księżyca $=\frac{1}{80}$ masy ziemi. A więc:

(7) $$m_3=\tfrac{1}{3}10^6 m_1, \qquad m_2=\tfrac{1}{80}m_1, \qquad A_1A_3=400A_1A_2.$$

Z trójkąta $A_1A_2A_3$ otrzymujemy

(8) $$399A_1A_2\leqslant A_2A_3\leqslant 401A_1A_2.$$

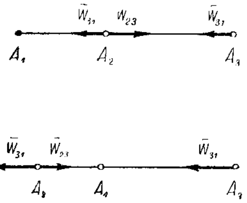
Ze względu na wielką odległość słońca od ziemi i od księżyca (w stosunku do odległości księżyca od ziemi) wektory $\overline{w}_{23}$ i $\overline{w}_{31}$ będą mało różniły się od siebie co do wielkości i kierunku, a zwroty będą miały przeciwne. Suma $\overline{w}_{23}+\overline{w}_{31}$ jest więc mała co do wartości bezwzględnej. Opierając się na danych (7) i (8), można okazać, że

$$\frac{m_2 m_3 |\overline{w}_{23}+\overline{w}_{31}|}{m_2(m_1+m_2)|\overline{w}_{21}|} \leqslant 1{,}5 \cdot 10^{-2}. \tag{9}$$

Widzimy stąd na mocy (6), że siła perturbacyjna, pochodząca od słońca, jest mała i możemy ją w pierwszym przybliżeniu opuścić.

Zatem: *w pierwszym przybliżeniu ruch względny księżyca względem ziemi otrzymamy, pomijając działanie słońca.*

Przybliżone badanie ruchu względnego sprowadza się więc w danym przypadku do zagadnienia dwóch ciał. Odnosi się to również do innych planet mających księżyce.



Przykład 2. Niech A_1 będzie środkiem ziemi, A_2 punktem na powierzchni ziemi i A_3 środkiem księżyca. Niech m_1, m_2 i m_3 oznaczają odpowiednio masy ziemi, punktu A_2 i księżyca. Załóżmy że punkty A_1, A_2 i A_3 leżą na jednej prostej.

Wektory $\overline{w}_{23}$ i $\overline{w}_{31}$ mają zwroty przeciwne. Jeżeli A_2 leży między A_1 i A_3, wówczas $|\overline{w}_{23}|>|\overline{w}_{31}|$, zatem wektor $\overline{w}_{23}+\overline{w}_{31}$ ma zwrot wektora $\overline{w}_{23}$. Jeżeli zaś A_1 leży między A_3 i A_2, to $|\overline{w}_{23}|<|\overline{w}_{31}|$ i wektor $\overline{w}_{23}+\overline{w}_{31}$ ma wówczas zwrot wektora $\overline{w}_{31}$. W obu przypadkach siła purturbacyjna księżyca $m_2 m_3(\overline{w}_{23}+\overline{w}_{31})$ jest skierowana względem ziemi pionowo w górę. Działaniem tej siły tłumaczą się przypływy i odpływy morza.

Przykład 3. Niech m_1 oznacza masę jakiejś planety, m_2 masę jej księżyca, a średnią odległość planety od jej księżyca, T czas obiegu księżyca dokoła planety w ruchu względnym (względem planety). Na mocy (7), str. 227, mamy

$$a^3/T^2 = K(m_1+m_2)/4\pi^2. \tag{10}$$

Jeżeli m_1', m_2', a' i T' oznaczają odpowiednie wielkości dla innej planety i jej księżyca, wówczas analogicznie do (10)

$$a'^3/T'^2 = K(m_1'+m_2')/4\pi^2. \tag{11}$$

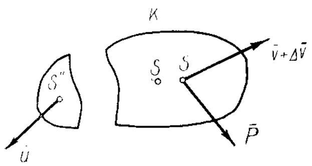
Na mocy (10) i (11) jest $(m_1+m_2)/(m_1'+m_2')=a^3T'^2/a'^3T^2$. Opuszczając masy księżyców m_2 i m_2', jako zazwyczaj małe w stosunku do mas planet, dostajemy

(12) $$m_1/m_1'=a^3T'^2/a'^3T^2.$$

Zatem: *stosunek mas dwóch planet możemy otrzymać z obserwacji ruchów ich księżyców.*

Uwaga. Możemy również przyjąć, że m_1' oznacza masę słońca, $m_2'=m_1$, a' średnią odległość planety od słońca, zaś T' jej czas obiegu. Przy tych założeniach wzór (12) przedstawia stosunek masy danej planety (posiadającej księżyc) do masy słońca.

§ 8. Ruch ciał o masie zmiennej. Zbadajmy teraz ruch ciała, którego masa się zmienia wskutek odrywania się od ciała (lub przyłączania się nowych) cząstek podczas ruchu.



Przykładem takim jest poruszający się wózek do którego dosypujemy piasek (lub z którego piasek się wysypuje). Innym przykładem jest rakieta. Materiały pędne, spalając się, wywołują wypływ gazów i siłę popędową rakiety. Masa rakiety maleje zatem o masę uchodzących gazów.

Przyjmijmy, że ciało składa się z wielkiej liczby drobnych cząstek, które możemy uważać za punkty materialne. Oznaczmy przez m masę ciała, przez $\bar{v}$ prędkość środka S jego masy w chwili t, zaś przez $m+\Delta m$ i $\bar{v}+\Delta\bar{v}$ masę i prędkość środka S w chwili $t+\Delta t$. Niechaj wreszcie $\bar{P}$ oznacza sumę sił działających na ciało w chwili t.

Masa oderwanych cząstek w czasie od t do $t+\Delta t$ wynosi $(-\Delta m)$; niech $\bar{u}$ i $\bar{u}+\Delta\bar{u}$ oznaczają prędkości (w chwilach t i $t+\Delta t$) środka S'' masy oderwanych cząstek.

Weźmy pod uwagę układ U wszystkich cząstek, z których składa się dane ciało w chwili t. Pęd tego układu w chwili t jest $\bar{H}=m\bar{v}$, a w chwili $t+\Delta t$ będzie $\bar{H}'=(m+\Delta m)(\bar{v}+\Delta\bar{v})+(-\Delta m)(\bar{u}+\Delta\bar{u})$. Przyrost pędu wyniesie zatem

$$\bar{H}'-\bar{H}=m\Delta\bar{v}-\Delta m(\bar{u}+\Delta\bar{u}-\bar{v})+\Delta m\Delta\bar{v}.$$

Dzieląc przez Δt, otrzymamy w granicy dla Δt dążącego do zera

(1) $$\frac{d\bar{H}}{dt}=m\frac{d\bar{v}}{dt}-\frac{dm}{dt}(\bar{u}-\bar{v}).$$

Ponieważ pochodna pędu układu równa się sumie wszystkich sił działających (str. 200), więc $d\overline{H}/dt = \overline{P}$. Na mocy (1) jest więc

$$(2) \qquad m\dot{\overline{v}} - \dot{m}(\overline{u} - \overline{v}) = \overline{P}.$$

Równość powyższą możemy napisać w postaci $m\dot{\overline{v}} + \dot{m}\overline{v} = \dot{m}\overline{u} + \overline{P}$ czyli

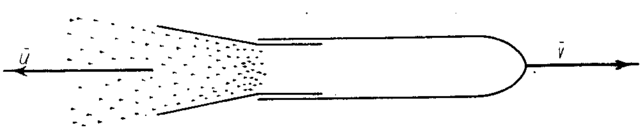
$$(3) \qquad d(m\overline{v})/dt = \dot{m}\overline{u} + \overline{P}.$$

Wzory (2) i (3) stosują się również do przypadku, gdy nowe cząstki dołączają się do ciała. W równaniach (2) i (3) wektor $\overline{u}$ przedstawia prędkość środka S'' masy cząstek odrywających się od ciała (lub dołączających się do ciała).

Kładąc $\overline{u} - \overline{v} = \overline{w}$ w równaniu (2), otrzymamy

$$(4) \qquad m\dot{\overline{v}} - \dot{m}\overline{w} = \overline{P}.$$

Wektor $\overline{w}$ przedstawia prędkość względną środka masy odrywających się cząstek względem środka masy ciała.



Przykład. Ruch rakiety. Oznaczmy przez m masę rakiety, przez $\overline{v}$ jej prędkość, przez $\overline{w}$ prędkość względną (względem rakiety) gazów wypływających z rakiety, a przez $\overline{P}$ sumę sił zewnętrznych działających na rakietę (jak ciężar, opór powietrza i t. d.). Przy tych oznaczeniach zachodzi wzór (4).

Przyjmijmy najpierw, że rakieta porusza się w płaszczyźnie poziomej po linii prostej, którą obierzemy za oś x-ów, nadając jej zwrot zgodny z kierunkiem ruchu rakiety. Połóżmy $v = |\overline{v}|$ i $w = |\overline{w}|$. Załóżmy, że $\overline{P} = 0$ (a więc, że siła ciężkości znosi się z reakcją płaszczyzny, przyczem pomijamy opór powietrza i tarcie). Ponieważ $\overline{v}$ i $\overline{w}$ mają zwroty przeciwne, więc na mocy (4) $m\dot{v} + \dot{m}w = 0$, skąd

$$(5) \qquad \dot{v} = -\frac{\dot{m}}{m} w.$$

Prędkość względną w wypływających gazów możemy uważać za stałą. Całkując równanie (5), otrzymamy więc

$$(6) \qquad v = -w \log m + c.$$

Przyjmijmy, że dla $t=0$ jest $m=m_0$ i $v=0$. Według równania (6) jest tedy $0=-w\log m_0+c$, więc $c=w\log m_0$, a zatem na mocy (6)

$$v=w\log\frac{m_0}{m}, \tag{7}$$

skąd $m_0/m=e^{v/w}$ czyli

$$m=m_0 e^{-v/w}. \tag{8}$$

Przypuśćmy, że rakieta osiągnęła szybkość $v=100\,\mathrm{km/godz}=$ $=27\,\mathrm{m/sek}$. Jako prędkość wypływu gazu można przyjąć $w=1000\,\mathrm{m/sek}$. Zatem na mocy (8) $m=m_0e^{-0{,}027}=0{,}973\,m_0$, skąd $m_0-m=0{,}03\,m_0$.

Aby więc uzyskać prędkość rakiety 100 km/godz, trzeba spalić materiałów pędnych o masie równej 3% masy rakiety.

Niech teraz rakieta porusza się pionowo w górę. Przyjmijmy oś z skierowaną pionowo ku górze i zachowajmy znakowanie poprzednie. Otrzymamy z (4) (pomijając opór powietrza) $m\dot v+\dot m w=-mg$ czyli

$$\dot v=-w\frac{\dot m}{m}-g. \tag{9}$$

Całkując i przyjmując, że dla $t=0$ jest $v=0$ i $m=m_0$, otrzymamy podobnie jak poprzednio

$$v=w\log\frac{m_0}{m}-gt. \tag{10}$$

Aby rakieta nie spadła z powrotem na ziemię i oddaliła się w przestrzenie międzyplanetarne, należałoby nadać jej prędkość $v\geqslant 12\,\mathrm{km/sek}$ (str. 111). Z równania (10) otrzymujemy $v\leqslant w\log\frac{m_0}{m}$, skąd $e^{v/w}\leqslant m_0/m$ czyli $me^{v/w}\leqslant m_0$, a zatem

$$m_0-m\geqslant m(e^{v/w}-1).$$

Kładąc $v=12\,\mathrm{km/sek}$ i $w=1000\,\mathrm{m/sek}=1\,\mathrm{km/sek}$, dostaniemy

$$m_0-m\geqslant 160000\,m.$$

W nierówności tej m oznacza masę rakiety po uzyskaniu prędkości $v=12\,\mathrm{km/sek}$, zaś m_0-m masę spalonych materiałów pędnych. Jeżeli więc przyjmiemy $m=1\,\mathrm{kg}$, wówczas $m_0-m\geqslant 160000\,\mathrm{kg}$.

Trzebaby zatem spalić 160000 kg materiałów pędnych, by 1 kg masy uleciał w przestworza.

Żeby więc odbyć podróż międzyplanetarną w wozie, mającym wraz z podróżnymi masę 1 tony, należałoby zabrać z sobą 160000 ton materiałów pędnych, co jest oczywiście niemożliwe. Dowodzi to, że przy dzisiejszym stanie techniki podróż taka jest niewykonalna. Sprawa posunęłaby się naprzód, gdybyśmy mogli wydatnie zwiększyć w, t. j. prędkość wypływu gazów, która dzisiaj, praktycznie biorąc, dochodzi do 2000 m/sek.