ROZDZIAŁ VI [1])

STATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

I. Ciało swobodne

§ 1. Ciało sztywne. Ciało materialne, które mimo działania sił nie doznaje żadnych odkształceń (t. j. w którym odległości wzajemne punktów ciała nie ulegają zmianie), nazywamy *ciałem sztywnym*.

Ciał sztywnych w przyrodzie nie spotykamy, ponieważ każde ciało mniej lub więcej odkształca się pod wpływem działania sił. Jeżeli jednak jakieś ciało doznaje niewielkich tylko odkształceń pod wpływem sił nie przekraczających pewnej granicy, możemy za model takiego ciała przyjąć ciało sztywne i wnioski, jakie wyprowadzimy, będą w przybliżeniu zgadzały się z doświadczeniem (o ile siły są nieduże). Stąd pochodzi wielkie znaczenie teorii ciała sztywnego dla zastosowań praktycznych.

Zajmiemy się po kolei statyką, kinematyką i dynamiką ciała sztywnego.

Oprócz brył materialnych sztywnych spotkamy się w teorii ciała sztywnego z powierzchniami i liniami materialnymi sztywnymi (str. 171) jako modelami ciał, w których jeden lub dwa wymiary są małe w porównaniu z pozostałymi. Przykładami ciał takich są płyty, pręty, druty i t. p.

Układy sztywne punktów materialnych. Często okazuje się korzystnym uważać ciało sztywne za zbiór (układ) wielkiej liczby punktów materialnych. Zakładamy wówczas, że punkty materialne działają na siebie z pewnymi siłami, które sprawiają, że układ punktów jest sztywny, t. j. że wzajemne odległości jego punktów nie ulegają zmianie. Siły te nazywamy *siłami wewnętrznymi*.

---

[1]) Do zrozumienia tego rozdziału wystarczają wiadomości zawarte w rozdziałach I i III (od str. 70 do 76) oraz twierdzenia o środku ciężkości z rozdziału IV, zawarte w §§ 1, 2, 6, 7 i 8.

O siłach wewnętrznych zakładamy, że stosuje się do nich prawo akcji i reakcji Newtona (str. 74), t. zn. że dwa punkty działają na siebie z siłami równymi co do wielkości i wprost przeciwnie skierowanymi wzdłuż prostej łączącej te punkty.

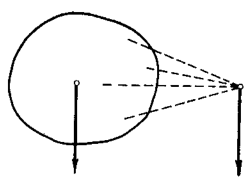
Oprócz sił wewnętrznych działać mogą na punkty układu inne jeszcze siły, które nazywamy *siłami zewnętrznymi.*

Jeżeli więc ciało sztywne uważamy za układ sztywny punktów materialnych, to siły działające na ciało sztywne są siłami zewnętrznymi, działającymi na punkty układu.

Można mieć wątpliwość, czy dopuszczalną jest rzeczą uważać ciało sztywne za układ punktów materialnych. Założenie to możemy jednak usprawiedliwić w ten sposób, że dzieląc ciało sztywne na bardzo wiele drobnych części i zastępując każdą z nich punktem materialnym o tej samej masie, otrzymamy układ sztywny punktów materialnych, przedstawiający dane ciało ze znacznym przybliżeniem.

Jakkolwiek więc założenie, że ciało sztywne jest zbiorem punktów materialnych, nie jest poprawne, będziemy się nim posługiwali, ponieważ upraszcza ono rozumowania i prowadzi do wyników zadowalających. Właściwie jednak należy teorię ciała sztywnego i teorię sztywnych układów punktów materialnych traktować odrębnie.

§ 2. **Siła.** Punkt zaczepienia siły. W teorii ciała sztywnego przyjmujemy, że punkt zaczepienia (początek) siły, działającej na ciało



sztywne, może do ciała należeć lub nie; w tym ostatnim przypadku zakładamy jednak, że punkt zaczepienia jest sztywnie z ciałem związany (wyobrażamy sobie np., że punkt zaczepienia jest połączony z ciałem przy pomocy sztywnych prętów bez masy). Działanie siły będzie więc wówczas takie, jak gdyby punkt zaczepienia do ciała należał.

Moment względem punktu. Jeżeli siła $\overline{P}$ zaczepiona jest w punkcie A o współrzędnych x, y, z, to moment siły względem punktu O o współrzędnych x_0, y_0, z_0 ma na osie układu rzuty (str. 17, (I)):

$$(1) \qquad M_x = P_y(z-z_0) - P_z(y-y_0), \qquad M_y = P_z(x-x_0) - P_x(z-z_0),$$
$$M_z = P_x(y-y_0) - P_y(x-x_0).$$

W szczególności, gdy O jest początkiem układu, t. j. gdy $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, dostajemy:

$$(2) \qquad M_x = P_y z - P_z y, \qquad M_y = P_z x - P_x z, \qquad M_z = P_x y - P_y x.$$

Z określenia momentu (str. 17) wynika, że

$$|\overline{M}| = |\overline{P}|\, h, \tag{3}$$

gdzie h oznacza odległość punktu O od położenia siły $\overline{P}$ (t. j. od prostej, na której leży $\overline{P}$); odległość tę nazywamy *ramieniem siły* $\overline{P}$ *względem punktu* O.

Moment siły $\overline{P}$ względem osi l otrzymamy, obierając dowolny punkt O na l i tworząc następnie rzut na oś l momentu siły $\overline{P}$ względem O (str. 18).

Jeżeli na prostej l dany jest zwrot, to moment siły $\overline{P}$ względem osi l określony będzie przez podanie jego współrzędnej względem tej osi. Współrzędną tą nazywamy również (jeżeli nie ma obawy pomyłki) momentem siły $\overline{P}$ względem osi l.

Jeżeli oś l przechodzi przez punkt $O(x_0, y_0, z_0)$ i tworzy z osiami układu współrzędnych kąty α, β, γ, to oznaczając przez $\overline{M}$ moment siły $\overline{P}$ względem O, zaś przez M_l moment względem osi l, dostaniemy

$$M_l = M_x \cos\alpha + M_y \cos\beta + M_z \cos\gamma \tag{4}$$

czyli na mocy (1)

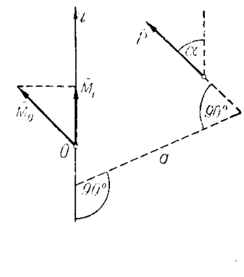
$$M_l = P_x[(y - y_0)\cos\gamma - (z - z_0)\cos\beta] + \tag{5}$$
$$+ P_y[(z - z_0)\cos\alpha - (x - x_0)\cos\gamma] + P_z[(x - x_0)\cos\beta - (y - y_0)\cos\alpha].$$

W szczególności, gdy punkt O, przez który przechodzi oś l, jest początkiem układu współrzędnych, t. j. gdy $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, otrzymamy

$$M_l = P_x[y\cos\gamma - z\cos\beta] + \tag{6}$$
$$+ P_y[z\cos\alpha - x\cos\gamma] + P_z[x\cos\beta - y\cos\alpha].$$

Rzuty M_x, M_y, M_z we wzorach (1) i (4) są momentami siły $\overline{P}$ względem osi równoległych do osi x, y, z i przechodzących przez O, zaś we wzorach (2) względem osi x, y, z.

Jeżeli przez d oznaczymy odległość osi l od siły $\overline{P}$ (ściślej: od położenia siły $\overline{P}$, t. j. prostej na której $\overline{P}$ leży), zaś przez α kąt między l a $\overline{P}$, otrzymamy (str. 18, wzór (III))



$$|M_l| = |\overline{P}|\, d \sin\alpha. \tag{7}$$

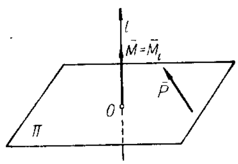
Jeżeli w szczególności $\overline{P} \perp l$, czyli $\alpha = \pi/2$, to

$$|M_l| = |\overline{P}|\, d. \tag{8}$$

Znak momentu M_l otrzymujemy z reguły następującej:

$M_l > 0$, jeżeli siła $\bar{P}$ stara się obrócić ciało około osi l w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegarka (względem człowieka mającego stopy w dowolnym punkcie O osi l, głowę zaś zwróconą w kierunku osi l); w przeciwnym razie $M_l < 0$.

Przy pomocy powyższej reguły i wzoru (7) możemy wyznaczyć M_l, znając $|\bar{P}|$, d i α.



1.

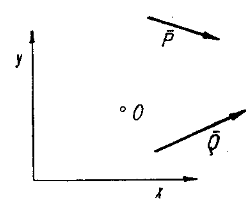
Jeżeli siła $\bar{P}$ i punkt O leżą w pewnej płaszczyźnie Π (rys. 1), to moment $\bar{M}$ siły $\bar{P}$ względem O jest prostopadły do płaszczyzny Π. Zatem $\bar{M}$ równa się wtedy momentowi siły $\bar{P}$ względem osi l, prostopadłej do Π i przechodzącej przez O:

$$|\bar{M}| = |M_l|.$$

Jeżeli badamy np. układ sił leżących w płaszczyźnie xy, wówczas przyjmując, że O leży również w xy, mamy $M_x = 0$ i $M_y = 0$. Moment względem osi równoległej do z, t. j. M_z, nazywamy wówczas krótko *momentem względem* O i oznaczamy wprost przez M. Zatem

$$(8) \qquad M = P_x(y - y_0) - P_y(x - x_0) \qquad \text{lub} \qquad M = P_x y - P_y x.$$

Przypuśćmy np., że wykreśliliśmy osie x, y jak na rysunku 2. Należy zatem przyjąć oś z skierowaną pionowo w dół. Jeżeli więc chcemy wyznaczyć moment siły $\bar{P}$ względem jakiegoś punktu O, to należy pamiętać, że $M > 0$, gdy siła stara się obrócić kartkę papieru około O w kierunku wskazówek zegarka (t. j. tak jak na rys. 2); w przeciwnym razie będzie $M < 0$, jak dla siły $\bar{Q}$.



2.

Mając dane ramię h, możemy więc ze wzoru (3) otrzymać M, wyznaczając znak w sposób wyżej podany.

Równowaga sił. Jeżeli ciało sztywne jest w spoczynku to mówimy, że jest *w równowadze*. O siłach zaś działających na ciało sztywne, pozostające w równowadze mówimy, że *się równoważą* (są w równowadze) lub że *się znoszą*.

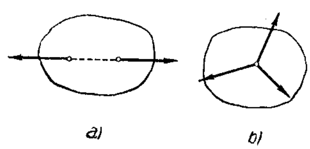
Statyka zajmuje się badaniem warunków, jakim muszą czynić zadość siły, będące w równowadze.

Należy zwrócić uwagę na różnicę, jaka zachodzi między równowagą ciała a równowagą sił. Ciało jest w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy jest w spoczynku. Jeżeli ciało jest w równowadze, to i układ sił, działających na nie, jest w równowadze. Na odwrót jednak, jeżeli układ sił działających na ciało jest w równowadze, to nie wynika stąd jeszcze, by ciało musiało być w równowadze, ponieważ może się ono np. poruszać ruchem jednostajnym postępowym.

Warunki równowagi sił wyprowadzimy na razie niezależnie od zasad dynamiki, zakładając pewne hipotezy dość oczywiste. Okażemy później (w rozdz. IX), że warunki równowagi wynikają z t. zw. *zasady prac przygotowanych.*

§ 3. Hipotezy równowagi sił. Aby wyprowadzić warunki równowagi ciała sztywnego, przyjmiemy hipotezy następujące:

I. *Do układu sił, działających na ciało sztywne znajdujące się w równowadze, możemy bez zachwiania równowagi dołożyć (lub z układu usunąć):*



a) *dwie siły równe co do wielkości, i działające wzdłuż tej samej prostej, lecz wprost przeciwnie skierowane;*

b) *kilka sił o wspólnym punkcie zaczepienia, których suma jest zerem.*

II. *Siły zerowe równoważą się*; innymi słowy: *jeżeli na ciało sztywne nie działają żadne siły, to ciało może pozostawać w równowadze.*

Hipotezy powyższe można sprawdzić doświadczalnie. Wyprowadzimy z nich warunki konieczne i wystarczające dla równowagi sił. Na razie zajmiemy się pewnymi wnioskami, wypływającymi z przyjętych hipotez.

§ 4. Przekształcanie układów sił. Opierając się na określeniu przekształceń elementarnych (str. 29), możemy hipotezę I wypowiedzić jak następuje:

I'. *Jeżeli ciało sztywne jest w równowadze, to bez zachwiania równowagi możemy wykonać na układzie sił działających dowolne przekształcenia elementarne.*

Zmiana punktu zaczepienia siły. Z twierdzenia 1), str. 29, wynika, że

1^0 *punkt zaczepienia siły możemy obrać gdziekolwiek na prostej jej działania.*

W przypadku równowagi działanie siły będzie więc określone, jeżeli podamy jej wielkość, kierunek, zwrot i położenie, zaś punkt zaczepienia siły jest rzeczą obojętną. Na mocy tw. ze str. 18.

wnosimy stąd, że działanie siły $\overline{P}$ będzie wyznaczone, jeżeli podamy jej rzuty i rzuty jej momentu $\overline{M}$ względem dowolnego punktu. Rzuty:

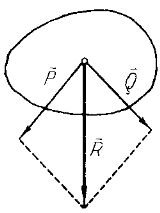
$$(1) \qquad P_x, P_y, P_z, \qquad M_x, M_y, M_z$$

określają więc działanie siły na ciało sztywne. Zauważmy, że ponieważ $\overline{M} \perp \overline{P}$, więc iloczyn skalarowy $\overline{M} \cdot \overline{P}$ jest zerem czyli

$$(2) \qquad M_x P_x + M_y P_y + M_z P_z = 0.$$

Na ogół więc pięć spośród liczb (1) wystarcza do określenia siły; szóstą możemy otrzymać z równania (2).

Prawo składania i rozkładania sił. Z twierdzeń 2) i 3), str. 29, wnosimy, że:



2⁰ *kilka sił, zaczepionych w jednym punkcie, możemy zastąpić ich sumą, zaczepioną w tym samym punkcie.*

3⁰ *każdą siłę możemy zastąpić kilkoma siłami o tym samym początku co siła dana i o sumie równej sile danej.*

Twierdzenia powyższe noszą nazwę *prawa składania i rozkładania sił.*

Układy równoważne. Z hipotezy I i tw. 3, str. 31, wnosimy, że:

4⁰ *układ sił działających na ciało sztywne możemy zastąpić przez dowolny inny układ równoważny.*

Innymi słowy: *układy sił równoważne działają na ciało sztywne jednakowo*; stąd znaczenie pojęcia równoważności układów. W twierdzeniu 4⁰ zawarte są, jak łatwo widzieć, twierdzenia 1⁰, 2⁰ i 3⁰.

Jak wiemy, dwa układy sił są równoważne, jeżeli mają równe sumy i równe momenty ogólne względem jednego punktu (str. 22). Na mocy tw. 4⁰ działanie układu sił na ciało sztywne będzie więc określone, jeżeli podamy sumę $\overline{R}$ i moment ogólny $\overline{M}$ układu sił względem dowolnego punktu.

Niechaj na ciało sztywne działają siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ zaczepione w punktach $A_1, A_2, \ldots$ o współrzędnych x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... Oznaczając przez $\overline{R}$ sumę, a przez $\overline{M}$ moment ogólny względem początku układu, otrzymamy ze wzoru (2), str. 236,

$$(3) \qquad R_x = \sum P_{i_x}, \qquad R_y = \sum P_{i_y}, \qquad R_z = \sum P_{i_z}$$

$$M_x = \sum (P_{i_y} z_i - P_{i_z} y_i), \quad M_y = \sum (P_{i_z} x_i - P_{i_x} z_i), \quad M_z = \sum (P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i).$$

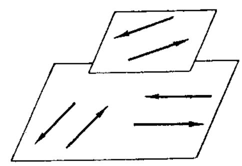
Działanie układu sił określone jest zatem przy pomocy sześciu liczb $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$.

Parametrem układu (str. 21) jest $K = \overline{R} \cdot \overline{M}$ czyli

$$K = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z. \tag{4}$$

Para sił. Układ złożony z dwóch sił równych co do wielkości, równoległych, lecz przeciwnie skierowanych nazywamy *parą sił* (str. 23). Moment pary nie zależy od wyboru punktu, względem którego moment wyznaczamy (str. 23). Ponieważ suma sił pary jest zerem, więc dwie pary są równoważne, jeżeli mają równe momenty. Zatem działanie pary sił na ciało sztywne jest określone przez podanie jej momentu.

Para sił stara się ciało obrócić. Działanie pary nie ulegnie zmianie, jeżeli dowolnie ją przesuniemy i skręcimy w jej płaszczyźnie (nie zmieniając zwrotu momentu). Parę możemy również dowolnie przesuwać w przestrzeni, byleby tylko w każdym położeniu pozostawała w płaszczyznie równoległej i zwroty momentu były zgodne.



Para o momencie równym zeru równoważna jest wektorowi zerowemu. Parę taką nazywamy także *parą zerową*.

Redukcja układu sił. Twierdzenia dotyczące redukcji układów § 16, str. 24, pozwalają wyznaczyć najprostszy układ sił równoważny danemu (t. j. najprostszy układ sił, przez który możemy zastąpić układ dany). W szczególności, twierdzenie o redukcji możemy wypowiedzieć jak następuje:

Każdy układ sił działających na ciało sztywne możemy zastąpić:

a) *bądź przez jedną siłę równą sumie układu, zaczepioną w dowolnym punkcie O i parę sił o momencie równym momentowi układu względem O,*

b) *bądź przez dwie siły, z których jedna zaczepiona jest w dowolnie obranym punkcie.*

W podobny sposób można wypowiedzieć twierdzenia podane na str. 25 i 26.

Niechaj na ciało sztywne działa siła $\overline{P}$ o początku w punkcie A. Obierzmy dowolny punkt O. Z twierdzenia o redukcji wynika (jeżeli za układ przyjmiemy siłę $\overline{P}$), że *siłę $\overline{P}$ możemy zastąpić przez siłę jej równą, zaczepioną w O, i przez parę sił o momencie równym momentowi siły $\overline{P}$ względem O.*

Układ płaski sił. Jeżeli siły układu leżą w jednej płaszczyźnie, to układ ich nazywamy *układem płaskim*. Na mocy tw. 3, str. 26, *układ płaski sił bądź ma wypadkową, bądź jest równoważny parze sił.*

Z tabelki podanej na str. 26 widzimy, że układ płaski ma wypadkową, gdy suma sił układu jest różna od zera lub gdy zarówno suma jak moment ogólny są równe zeru; jeżeli zaś suma jest zerem, a moment ogólny różny od zera, to układ jest równoważny parze.

Niechaj w płaszczyźnie xy dany będzie układ płaski sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$, zaczepionych w punktach $A_1, A_2, \ldots$ o współrzędnych x_1, y_1, $x_2, y_2, \ldots$

Rzuty sił P_{i_z} na oś z są zerami, jak również współrzędne z_i punktów A_i. Zatem, oznaczając przez $\bar{R}$ sumę sił, a przez $\bar{M}$ moment ogólny względem początku układu, otrzymujemy ze wzorów (3), str. 240:

$$R_z = 0, \qquad M_x = 0, \qquad M_y = 0.$$

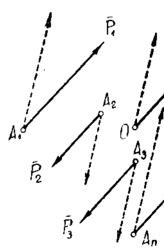
Działanie więc układu płaskiego sił wyznaczone jest przez trzy liczby: R_x, R_y i M_z.

Ze wzorów (3), str. 240, otrzymujemy też (pisząc M zamiast M_z):

$$(5) \qquad R_x = \Sigma P_{i_x}, \qquad R_y = \Sigma P_{i_y}, \qquad M = \Sigma (P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i).$$

Układ równoległy sił. Z tw. 4, str. 26, wynika, że *układ równoległy sił ma wypadkową albo jest równoważny parze sił.*

Niech siły równoległe $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ mają początki w punktach $A_1, A_2, \ldots$ o współrzędnych x_1, y_1, z_1, $x_2, y_2, z_2, \ldots$ Załóżmy, że suma sił $\bar{R}$ jest różna od zera. Zatem dany układ ma wypadkową.



Obierzmy zwrot dowolnej siły układu, np. zwrot siły $\bar{P}_1$, za dodatni. Oznaczmy dla $i = 1, 2, \ldots$ przez P_i liczbę, której bezwzględna wartość równa się $|\bar{P}_i|$, zaś znak jest dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy $\bar{P}_i$ ma zwrot dodatni (t. j. zgodny ze zwrotem siły $\bar{P}_1$) czy nie. Podobnie określamy R. Mamy $R = \Sigma P_i$.

Na str. 28 dowiedliśmy, że wypadkowa $\bar{R}$ przechodzi przez pewien punkt O, zwany *środkiem sił*. Współrzędne x_0, y_0, z_0 środka sił otrzymamy ze wzoru (4), str. 28, kładąc $a_i = P_i$:

$$(6) \qquad x_0 = \Sigma P_i x_i / R, \quad y_0 = \Sigma P_i y_i / R, \quad z_0 = \Sigma P_i z_i / R.$$

Jeżeli siły obrócimy około ich punktów zaczepienia o ten sam kąt tak, że pozostaną nadal równoległe (jak np. wektory kreskowane na rysunku), to środek sił nie ulegnie zmianie. Wynika to ze wzorów (6), gdyż współrzędne x_0, y_0, z_0 zależą tylko od P_i, x_i, y_i i z_i, a nie zależą od kierunku sił. Nowa wypadkowa będzie więc również przechodziła przez O.

Jeżeli punkty zaczepienia sił leżą w jednej płaszczyźnie (lub na jednej prostej), to środek sił leży również na tej płaszczyźnie (lub na tej prostej).

Zakładając bowiem, że punkty zaczepienia leżą na płaszczyźnie Π i obierając tę płaszczyznę za płaszczyznę xy, otrzymamy $z_1=z_2=\ldots=0$; ze wzorów (6) dostaniemy więc $z_0=0$, co oznacza, że środek sił leży w płaszczyźnie Π.

Podobnie, jeżeli punkty zaczepienia leżą na jednej prostej l, to obierając ją za oś x, mamy $y_1=y_2=\ldots=0$ i $z_1=z_2=\ldots=0$, więc na mocy (6) $y_0=0$ i $z_0=0$; zatem środek sił leży na prostej l.

Niech na punkty materialne o masach $m_1, m_2, \ldots$ działają siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ równoległe, zgodnie skierowane i proporcjonalne co do wielkości do mas poszczególnych punktów. Kładąc $P_1=|\overline{P}_1|$, $P_2=|\overline{P}_2|, \ldots$, otrzymujemy:

$$(7) \qquad P_1=km_1, \qquad P_2=km_2, \ldots \qquad R=P_1+P_2+\ldots=km,$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności, zaś $m=m_1+m_2+\ldots$ Ze wzorów (6) i (7) dostaniemy po podstawieniu:

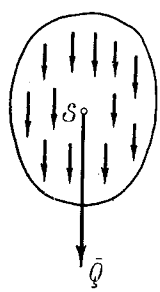
$$x_0=\Sigma m_i x_i/m, \qquad y_0=\Sigma m_i y_i/m, \qquad z_0=\Sigma m_i z_i/m.$$

Porównując te równości ze wzorami (1), str. 154, widzimy, że środek sił jest środkiem masy danego układu punktów materialnych.

A więc: *środek masy układu punktów materialnych jest środkiem działających na te punkty sił, zgodnie skierowanych, równoległych, i proporcjonalnych co do wielkości do mas tych punktów.*

Siły ciężkości. Niech ciało sztywne znajduje się w polu siły ciężkości. Uważając ciało za układ punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots$, możemy przyjąć, że ciężary poszczególnych punktów są siłami równoległymi, skierowanymi zgodnie (pionowo w dół). Ciężary mają zatem wypadkową.

Wielkości ciężarów poszczególnych punktów wynoszą $Q_1=m_1 g$, $Q_2=m_2 g$, ... (gdzie g oznacza przyśpieszenie ziemskie). Zatem wielkości ciężarów są proporcjonalne do mas punktów. Na mocy więc poprzedniego twierdzenia, środkiem sił ciężkości jest środek masy ciała. Wielkość wypadkowej jest



$$Q=m_1 g+m_2 g+\ldots=(m_1+m_2+\ldots)g=mg,$$

gdzie m oznacza masę ciała.

A więc: *wypadkowa sił ciężkości przechodzi w każdym położeniu ciała przez środek ciężkości ciała. Ciężar ciała* (t. j. wypadkowa sił ciężkości, działających na poszczególne jego punkty) *wynosi*

$$Q = mg, \tag{8}$$

gdzie m oznacza masę ciała, a g przyśpieszenie ziemskie.

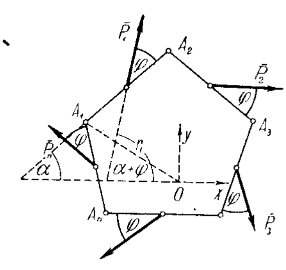
Opierając się na powyższym twierdzeniu możemy działanie siły ciężkości zastąpić jedną siłą, zaczepioną w środku ciężkości ciała.

Układy par. Układ złożony z kilku par ma sumę zero. Z tabelki na str. 26 wynika, że układ taki równoważny jest parze lub wektorowi zerowemu (t. j. parze zerowej). Niech $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots$ oznaczają momenty poszczególnych par. Wówczas moment ogólny będzie $\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots$ Z twierdzenia o redukcji (str. 24) otrzymujemy więc twierdzenie następujące:

Układ złożony z kilku par równoważny jest jednej parze o momencie równym momentowi ogólnemu układu.

Zauważmy, że para sił (o momencie różnym od zera) nie może być równoważna jednej sile. Ze względu bowiem na to, że suma sił pary jest zerem, siła ta musiałaby być zerem, a jej moment różny od zera, co jest niemożliwe.

Przykład 1. W środkach boków wielokąta płaskiego $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zaczepione są siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$, leżące w płaszczyźnie wielokąta, tworzące z jego bokami $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \ldots, \overline{A_nA_1}$ kąt φ, skierowane na zewnątrz i proporcjonalne co do wielkości do boków wielokąta.



Łatwo zauważyć, że suma sił jest zerem. Tworząc bowiem sumę $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n$, otrzymamy wielokąt podobny do danego, lecz skręcony względem niego o kąt φ.

Układ sił jest więc równoważny parze albo zeru.

Obierzmy dowolny układ współrzędnych $O(x, y)$ i oznaczmy przez $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots$ współrzędne punktów $A_1, A_2, \ldots$ Punkt zaczepienia siły $\overline{P}_1$ ma współrzędne $(x_1 + x_2)/2$, $(y_1 + y_2)/2$. Zatem moment siły $\overline{P}_1$ względem O wynosi ((8), str. 238)

$$M_1 = P_{1_x}(y_1 + y_2)/2 - P_{1_y}(x_1 + x_2)/2. \tag{9}$$

Według założenia jest

$$(10) \qquad |\overline{P}_1| = \lambda\, d_1,$$

gdzie $d_1 = A_1A_2$, zaś λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Jeżeli $\overline{A_1A_2}$ tworzy z osią x kąt α, to siła $\overline{P}_1$ tworzy z osią x kąt $\alpha+\varphi$. Zatem:

$$P_{1_x} = |\overline{P}_1| \cos(\alpha+\varphi), \qquad P_{1_y} = |\overline{P}_1| \sin(\alpha+\varphi).$$

Na mocy więc (10) jest $P_{1_x} = \lambda d_1 [\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi]$. Lecz $d_1 \cos\alpha = x_2 - x_1$ i $d_1 \sin\alpha = y_2 - y_1$, więc

$$P_{1_x} = \lambda [(x_2 - x_1) \cos\varphi - (y_2 - y_1) \sin\varphi].$$

Podobnie

$$P_{1_y} = \lambda [(y_2 - y_1) \cos\varphi + (x_2 - x_1) \sin\varphi].$$

Wstawiając w (9), otrzymamy

$$(11) \qquad M_1 = \tfrac{1}{2}\lambda [2(y_1x_2 - y_2x_1) \cos\varphi + (y_1^2 + x_1^2 - y_2^2 - x_2^2) \sin\varphi].$$

Kładąc $OA_1 = r_1$, $OA_2 = r_2, \ldots$ i oznaczając przez $p_1, p_2, \ldots$ pola trójkątów OA_1A_2, OA_2A_3, ..., dostaniemy $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \ldots$, $p_1 = \frac{1}{2}(y_1x_2 - y_2x_1)$ i t. d. Zatem na mocy (11)

$$(12) \qquad M_1 = \tfrac{1}{2}\lambda [4p_1 \cos\varphi + (r_1^2 - r_2^2) \sin\varphi].$$

Podobne wyrażenia otrzymamy na momenty pozostałych sił.

Ogólny moment sił względem O wynosi $M = M_1 + M_2 + \ldots$ Więc w myśl (12)

$$M = \tfrac{1}{2}\lambda [4(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) \cos\varphi + (r_1^2 - r_2^2 + r_2^2 - r_3^2 + \ldots r_n^2 - r_1^2) \sin\varphi].$$

Ponieważ $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ jest polem wielokąta $A_1A_2 \ldots A_n$, więc

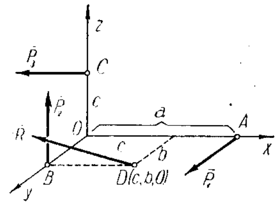
$$(13) \qquad M = 2\lambda p \cos\varphi.$$

Moment ogólny jest zatem proporcjonalny do pola wielokąta i do cosinusa kąta φ.

W szczególności, gdy siły są prostopadłe do boków wielokąta, to $\varphi = \pi/2$ i $\cos\varphi = 0$, skąd na mocy (13) $M = 0$, czyli siły tworzą układ równoważny zeru.

Gdy zaś siły są skierowane wzdłuż boków (t. j. gdy $\varphi = 0$), mamy na mocy (13) $M = 2\lambda p$, więc moment jest wówczas proporcjonalny do pola wielokąta.

Przykład 2. W punktach $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ i $C(0,0,c)$ na osiach układu współrzędnych (x,y,z) zaczepione są siły $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ i $\overline{P}_3$, równoległe do osi układu, równe co do wielkości i mające zwroty jak na rysunku. Jaki zachodzi związek między współrzędnymi a, b i c, jeżeli układ sił ma wypadkową?



Połóżmy $P=|\overline{P}_1|=|\overline{P}_2|=|\overline{P}_3|$. Suma sił $\overline{R}$ ma zatem rzuty

(14) $$R_x=-P, \quad R_y=P, \quad R_z=P.$$

Obliczmy moment ogólny $\overline{M}$ względem O. Moment sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_3$ względem osi x jest zerem; moment siły $\overline{P}_2$ względem osi x wynosi $-Pb$ Zatem $M_x=-Pb$; podobnie $M_y=Pc$ i $M_z=-Pa$. Parametr układu wynosi $K=\overline{R}\overline{M}=R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z$, więc

$$K=P^2(b+c-a).$$

Jeżeli układ ma wypadkową, to $K=0$ (str. 26). Zatem

(15) $$b+c-a=0.$$

Równanie (15) stanowi warunek d o s t a t e c z n y i, jak łatwo widać z tabelki na str. 26, również warunek k o n i e c z n y na to, by układ miał wypadkową, gdyż $\overline{R}\neq 0$.

Za punkt zaczepienia wypadkowej możemy przyjąć punkt $D(x,y,z)$, względem którego moment ogólny jest zerem.

Oznaczmy przez $\overline{M}'$ moment ogólny względem D. Mamy:

$$M'_x=-Pz-P(b-y), \quad M'_y=-Px+P(c-z), \quad M'_z=-P(a-x)+Py.$$

Zakładając, że moment względem D jest zerem, dostaniemy:

$$y-z=b, \qquad x+z=c, \qquad x+y=a.$$

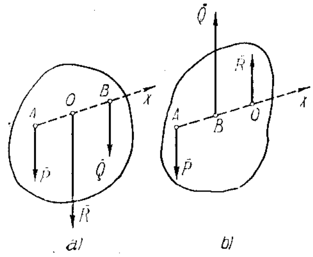
Z uwagi na (15) równania te są od siebie zależne. Dwa z nich są równaniami prostej, na której leży wypadkowa. Kładąc np. $z=0$, otrzymamy $x=c$ i $y=b$. A więc za punkt zaczepienia wypadkowej możemy przyjąć punkt $D(c,b,0)$.

Przykład 3. W punktach A i B zaczepione są siły równoległe $\overline{P}$ i $\overline{Q}$, przyczem $\overline{P}+\overline{Q}\neq 0$. Wyznaczyć środek sił.

Środek sił leży na prostej AB (str. 243). Obierzmy ją za oś x, przyjmując punkt A za początek osi x i nadając jej zwrot taki, by punkt B leżał na jej części dodatniej. Połóżmy $P=|\overline{P}|$ i oznaczmy przez Q liczbę, której wartość bezwzględna równa się $|\bar{Q}|$, znak zaś jest $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy $\bar{Q}$ ma zwrot zgodny z siłą $\bar{P}$, czy przeciwny. Kładąc $AB=d$ i oznaczając przez x_0 współrzędną środka sił O, dostaniemy ze wzoru (6), str. 242,

$$x_0 = Qd/R, \qquad \text{gdzie} \qquad R=P+Q.$$

Jeżeli siły $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ mają zwroty zgodne, to $Q>0$, a zatem $0<Q/R<1$, skąd $0<x_0<d$. Środek sił znajduje się wówczas między punktami A i B.



Jeżeli zaś siły $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ mają zwroty przeciwne i np. $|\bar{P}|<|\bar{Q}|$, to $Q<0$ i $R<0$, skąd $x_0>0$. Ponadto $|R|<|Q|$, zatem $x_0>d$. Środek sił leży więc wówczas poza punktem B.

Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach jest $AO/BO=|\bar{Q}|/|\bar{P}|$.

A więc: *środek dwóch sił równoległych* (o sumie $\neq 0$) *znajduje się na prostej łączącej punkty zaczepienia tych sił.*

Jeżeli siły skierowane są zgodnie, to środek ich leży między punktami zaczepienia, w przeciwnym razie leży on poza punktem zaczepienia tej siły, której wartość bezwzględna jest większa.

Odległości środka sił od punktów zaczepienia są w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do wielkości tych sił.

Przykład 4. Na pręt sztywny AB działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ o początkach w $A_1, A_2, \ldots$ oraz siły $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots$ o początkach w $B_1, B_2, \ldots$ Wszystkie siły są do siebie równoległe i prostopadłe do pręta, przyczem siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ mają zwrot przeciwny niż siły $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots$

Niechaj $\bar{R}=\bar{P}_1+\bar{P}_2+\ldots+\bar{Q}_1+\bar{Q}_2+\ldots$ Oznaczmy przez $P_1, P_2, \ldots$ i $Q_1, Q_2, \ldots$ bezwzględne wartości sił, przez $a_1, a_2, \ldots$ i $b_1, b_2, ,,,$ odpowiednio długości odcinków $AA_1, AA_2, \ldots$ i $AB_1, AB_2, \ldots$ Przyjmijmy zwrot sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ za dodatni. Połóżmy

$$R=P_1+P_2+\ldots-Q_1-Q_2-\ldots \tag{16}$$

Oczywiście $|R|=|\bar{R}|$. Gdy $R>0$, suma $\bar{R}$ ma zwrot zgodny z siłami $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ Gdy zaś $R<0$, to $\bar{R}$ ma zwrot zgodny z siłami $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots$

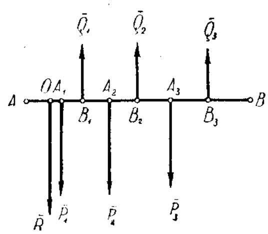
Obliczmy moment ogólny M sił względem A. Oznaczając przez $M_1, M_2, \ldots$ i $M_1', M_2', \ldots$ momenty sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ i $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots$ względem A, mamy (według umowy co do znaku momentu, przyjętej na str. 238):

$$M_1=P_1a_1, \quad M_2=P_2a_2, \quad \ldots, \qquad M_1'=-Q_1b_1, \quad M_2'=-Q_2b_2, \quad \ldots$$

Zatem

(17) $$M = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots - Q_1 b_1 - Q_2 b_2 - \ldots$$

Załóżmy, że $\bar{R}=0$. Układ sił równoważny jest wówczas parze o momencie M według wzoru (17).



Gdy $M>0$, to para będzie starała się obrócić pręt w kierunku wskazówek zegara, gdy zaś $M<0$ — w kierunku przeciwnym. Gdy wreszcie $M=0$, układ równoważny będzie zeru.

Załóżmy teraz, że $\bar{R} \neq 0$. Układ ma zatem wypadkową.

Niechaj O będzie początkiem wypadkowej $\bar{R}$, znajdującym się na prostej AB. Połóżmy $d = \pm AO$, przyjmując znak $+$, gdy punkt O jest po tej samej stronie punktu A, co początki sił, zaś znak $-$ w przypadku przeciwnym. Jak łatwo sprawdzić, moment wypadkowej względem O wynosi przy tym znakowaniu Rd. Ponieważ moment wypadkowej równa się momentowi ogólnemu, więc dostaniemy z (17)

$$d = \frac{1}{R}(P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots - Q_1 b_1 - Q_2 b_2 - \ldots).$$

§ 5. Warunki równowagi sił. Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie I. *Na to, by układ sił działających na ciało sztywne był w równowadze, potrzeba i wystarcza, by suma sił i moment ogólny były zerem,* czyli *by układ sił był równoważny zeru.*

Dowód. Udowodnimy najpierw, że warunek jest konieczny. Przyjmijmy, że ciało sztywne jest układem sztywnym punktów materialnych $A_1, A_2, \ldots$ i że jest w równowadze pod działaniem danego układu sił. Weźmy pod uwagę dowolny punkt A_i. Oznaczmy przez $\bar{P}_i$ sumę sił zewnętrznych, a przez $\bar{W}_i$ sumę sił wewnętrznych, zaczepionych w A_i. Ponieważ punkt A_i jest w równowadze (gdyż cały układ sztywny jest w równowadze), więc $\bar{P}_i + \bar{W}_i = 0$. Zatem

(1) $$\Sigma(\bar{P}_i + \bar{W}_i) = 0,$$

gdzie suma Σ rozciągnięta jest na wszystkie punkty A_i danego układu sztywnego.

Z prawa akcji i reakcji wynika, że suma sił, z jakimi działają na siebie dwa punkty, jest zerem. Ponieważ wszystkie siły wewnętrzne możemy ułożyć w pary, z jakimi działają na siebie dwa punkty, więc suma sił wewnętrznych jest zerem czyli $\Sigma \overline{W}_i = 0$, skąd na mocy (1)

$$\Sigma \overline{P}_i = 0. \tag{2}$$

Wynika stąd, że suma sił zewnętrznych, t. j. sił działających na ciało sztywne w równowadze, jest zerem.

Obierzmy teraz dowolny punkt O. Ponieważ siły $\overline{P}_i$ i $\overline{W}_i$ mają wspólny początek A_i, a ponadto $\overline{P}_i + \overline{W}_i = 0$, więc (str. 17) $\mathrm{Mom}_O \overline{P}_i + \mathrm{Mom}_O \overline{W}_i = 0$, skąd

$$\Sigma(\mathrm{Mom}_O \overline{P}_i + \mathrm{Mom}_O \overline{W}_i) = 0. \tag{3}$$

Moment ogólny sił wewnętrznych, z jakimi dwa punkty działają na siebie, jest — jak łatwo stwierdzić — zerem. Zatem moment ogólny wszystkich sił wewnętrznych jest zerem, czyli $\Sigma \mathrm{Mom}_O \overline{W}_i = 0$, skąd na mocy (3)

$$\Sigma \mathrm{Mom}_O \overline{P}_i = 0. \tag{4}$$

Dowiedliśmy więc, że zarówno suma jak i moment ogólny sił działających na ciało sztywne jest zerem. Konieczność warunku jest tym samym udowodniona.

Załóżmy teraz, że dany układ sił jest równoważny zeru. Ponieważ układ równoważny zeru jest równoważny sile zerowej, więc na mocy hipotezy II (str. 239) jest on w równowadze. Warunek jest więc zarazem w y s t a r c z a j ą c y m, c. b. d. d.

Z tw. I wynika, że jeżeli układ sił działających na ciało sztywne nie jest równoważny zeru, to ciało nie może być w równowadze. W szczególności nie może więc pozostawać w równowadze ciało sztywne pod działaniem układu sił złożonego

bądź z jednej siły różnej od zera,

bądź z jednej pary sił o momencie różnym od zera,

bądź z jednej siły różnej od zera i jednej pary o momencie różnym od zera.

Jak wiemy (str. 23), układ sił jest równoważny zeru, jeżeli momenty ogólne względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej są zerami. Opierając się na tw. I, otrzymujemy stąd następujące

Twierdzenie II. *Na to, aby układ sił działających na ciało sztywne był w równowadze, potrzeba i wystarcza, by momenty układu względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej były równe zeru.*

W zastosowaniach korzystamy często z następującego twierdzenia:

Twierdzenie III. *Jeżeli układ złożony z trzech sił jest w równowadze, to siły te leżą w jednej płaszczyźnie i bądź są równoległe, bądź ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie.*

Tw. III wynika z twierdzenia rozdz. I, § 14 (str. 23), w którego dowodzie wykazano, że wektory leżą w jednej płaszczyźnie.

Postać analityczna warunków równowagi. Obierzmy dowolny układ współrzędnych $O(x,y,z)$. Niechaj na ciało sztywne działają siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ zaczepione w punktach $A_1, A_2, \ldots$ o współrzędnych x_1, y_1, z_1, $x_2, y_2, z_2, \ldots$ Oznaczmy przez $\overline{R}$ sumę, a przez $\overline{M}$ moment ogólny układu względem O. Na mocy tw. I (str. 248) równania:

$$\overline{R} = 0, \qquad \overline{M} = 0 \tag{5}$$

stanowią warunek konieczny i wystarczający równowagi. Tworząc rzuty na osie układu, otrzymujemy z (5) i ze wzorów (3), str. 240:

$$\Sigma P_{i_x} = 0, \qquad \Sigma P_{i_y} = 0, \qquad \Sigma P_{i_z} = 0, \tag{I}$$

$$\Sigma(P_{i_y} z_i - P_{i_z} y_i) = 0, \quad \Sigma(P_{i_z} x_i - P_{i_x} z_i) = 0, \quad \Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = 0. \tag{II}$$

Równania (I) noszą nazwę *warunku rzutów*, a równania (II) *warunku momentu.*

Równania (I) i (II) są postacią analityczną warunków równowagi układu sił. Z równań tych możemy na ogół wyznaczyć sześć niewiadomych.

Układ płaski sił. Warunki równowagi stosują się oczywiście także do układu płaskiego sił.

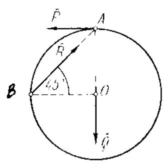
Niech siły leżą w płaszczyźnie xy. Z uwagi na to, że $P_{i_z} = 0$ i $z_i = 0$, warunki równowagi (I) i (II) przyjmą postać:

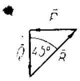
$$\Sigma P_{i_x} = 0, \qquad \Sigma P_{i_y} = 0, \tag{I'}$$

$$\Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = 0. \tag{II'}$$

W przypadku układu płaskiego otrzymujemy więc trzy równania. Możemy z nich na ogół wyznaczyć trzy niewiadome.

Przykład 1. Kula ciężka jest w równowadze pod działaniem trzech sił (rys. 1): ciężaru $\overline{Q}$ (zaczepionego w środku kuli O), siły poziomej $\overline{P}$ (zaczepionej w punkcie A, położonym na powierzchni kuli w końcu średnicy pionowej) i siły $\overline{R}$ (zaczepionej w punkcie B, położonym na powierzchni kuli w końcu średnicy poziomej). Dany jest ciężar $\overline{Q}$. Wyznaczyć siły $\overline{P}$ i $\overline{R}$.


1.

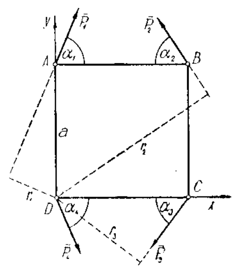

2.

Siły $\overline{P}$, $\overline{Q}$ i $\overline{R}$ są w równowadze, więc na mocy tw. III leżą w jednej płaszczyźnie i kierunki ich przecinają się w jednym punkcie, którym jest punkt A. Siła $\overline{R}$ ma więc kierunek prostej BA, która tworzy z poziomem kąt 45^0. Ponieważ $\overline{Q}+\overline{P}+\overline{R}=0$, więc znając siłę $\overline{Q}$ i kierunki sił $\overline{P}$ i $\overline{R}$, możemy utworzyć trójkąt sił (rys. 2). Z trójkąta tego otrzymujemy:

$$P=Q, \qquad R=Q/\cos 45^0=\sqrt{2}\,Q,$$

gdzie P, Q i R oznaczają wartości bezwzględne sił.

Przykład 2. W wierzchołkach kwadratu $ABCD$ o boku a zaczepione są cztery siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_4$, leżące w płaszczyźnie kwadratu i tworzące z jego bokami kąty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (rys. 3). Podać warunki równowagi.


3.

Oznaczmy przez P_1, P_2, P_3, P_4 bezwzględne wartości sił. Obierzmy osie x i y wzdłuż boków kwadratu. Tworząc rzuty sił na osie x i y, dostaniemy w przypadku równowagi (przy zwrotach sił jak na rys. 3):

$$(6)\qquad P_1\cos\alpha_1-P_2\cos\alpha_2-P_3\cos\alpha_3+P_4\cos\alpha_4=0,$$

$$(7)\qquad P_1\sin\alpha_1+P_2\sin\alpha_2-P_3\sin\alpha_3-P_4\sin\alpha_4=0.$$

Oznaczając przez r_1, r_2, r_3, r_4 ramiona sił względem wierzchołka D, otrzymamy:

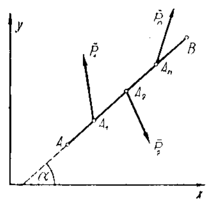
$$r_1=a\cos\alpha_1, \qquad r_2=\sqrt{2}\,a\sin(\alpha_2+45^0), \qquad r_3=a\sin\alpha_3.$$

Ponadto $r_4=0$. Ponieważ w przypadku równowagi moment ogólny względem D jest zerem, więc (przyjmując znak momentu podług reguły podanej na str. 238) dostaniemy po podzieleniu przez a

$$(8)\qquad P_1\cos\alpha_1-P_2\sqrt{2}\sin(\alpha_2+45^0)+P_3\sin\alpha_3=0.$$

Równania (6), (7) i (8) stanowią warunek równowagi konieczny i wystarczający.

Przykład 3. Na pręt AB, leżący w płaszczyźnie poziomej xy, działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$, leżące w tejże płaszczyźnie i zaczepione w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n$. Podać warunki, jakim muszą czynić zadość siły, aby pręt był w równowadze w każdym położeniu na płaszczyźnie xy przy założeniu, że siły nie zmieniają swych wielkości, kierunków, zwrotów ani punktów zaczepienia (na pręcie).



Weźmy pod uwagę dowolne położenie pręta AB w płaszczyźnie xy. Oznaczmy przez x_0, y_0 współrzędne punktu A, przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ współrzędne punktów $A_1, A_2, \dots$ i przez α kąt, jaki pręt AB tworzy z osią x-ów. Połóżmy: $d_1 = AA_1$, $d_2 = AA_2$, ..., $d_n = AA_n$. Mamy:

(9) $$x_i = x_0 + d_i \cos\alpha, \qquad y_i = y_0 + d_i \sin\alpha \qquad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Z warunków równowagi (I′) i (II′), str. 250, otrzymujemy:

(10) $$\Sigma P_{i_x} = 0, \qquad \Sigma P_{i_y} = 0,$$

(11) $$\Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = \Sigma[P_{i_x}(y_0 + d_i \sin\alpha) - P_{i_y}(x_0 + d_i \cos\alpha)] = 0.$$

Warunek (11) możemy napisać w postaci

(12) $$y_0 \Sigma P_{i_x} - x_0 \Sigma P_{i_y} + \sin\alpha \Sigma P_{i_x} d_i - \cos\alpha \Sigma P_{i_y} d_i = 0,$$

skąd na mocy (10)

(13) $$\sin\alpha \Sigma P_{i_x} d_i - \cos\alpha \Sigma P_{i_y} d_i = 0.$$

Ponieważ związek (13) ma zachodzić dla każdego kąta α, więc dla $\alpha = \pi/2$, a następnie dla $\alpha = 0$ dostajemy:

(14) $$\Sigma P_{i_x} d_i = 0, \qquad \Sigma P_{i_y} d_i = 0.$$

Równania (10) i (14) są warunkami koniecznymi i dostatecznymi na to, aby pręt był w równowadze w każdym swym położeniu na płaszczyźnie.

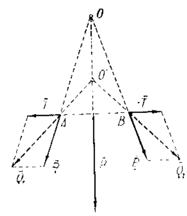
Jeżeli bowiem zachodzą warunki (10) i (14), to łatwo widzieć, że zachodzi też warunek (13), a zatem na mocy (10) również i warunki (12) i (11).

Warunki zaś (10) i (11) są, jak widzieliśmy, konieczne i wystarczające dla równowagi na mocy (I′) i (II′).

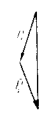
§ 6. Grafostatyka. Wielobok sznurowy. Zadania, z jakimi spotykamy się w statyce, prowadzą często do długich i żmudnych rachunków. Istnieją jednak metody graficzne (t. j. rysunkowe), pozwalające otrzymać w wielu przypadkach rozwiązania przybliżone wprawdzie, lecz wystarczająco dokładne dla zastosowań. Metody te mają wielkie znaczenie w technice, gdyż prowadzą do celu szybciej, z pominięciem zawiłych obliczeń.

Ta część statyki teoretycznej, która zajmuje się metodami graficznymi, nosi nazwę *grafostatyki.*

Poznamy tu tylko niektóre metody graficzne, jak np. wyznaczanie graficzne (przy pomocy wieloboku sznurowego) wypadkowej układu płaskiego sił, oraz pewne ich zastosowania. Później (w § 16) poznamy jeszcze metody graficzne, służące do wyznaczania napięć w prętach kratownicy.



1.



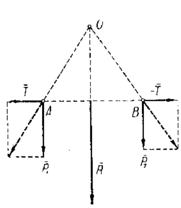
1a.

S k ł a d a n i e s i ł. Mając dwie siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, których kierunki przecinają się w punkcie O, wyznaczamy obok sumę $\overline{R}$ (rys. 1a), a następnie rysujemy wypadkową przez punkt O (rys. 1).

Jeżeli punkt O leży poza granicą rysunku, możemy postąpić jak następuje: dodajemy dwie siły $\overline{T}$ i $-\overline{T}$, zaczepione w punktach A i B (t. j. w początkach sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$) i działające wzdłuż prostej AB. Układ $\overline{T}, -\overline{T}, \overline{P}_1, \overline{P}_2$ jest oczywiście równoważny układowi $\overline{P}_1, \overline{P}_2$, gdyż siły $\overline{T}$ i $-\overline{T}$ znoszą się nawzajem, a zatem wypadkowa nowego układu czterech sił jest ta sama co poprzednio.

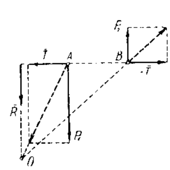
Siły $\overline{T}$ i $\overline{P}_1$ zastępujemy siłą $\overline{Q}_1 = \overline{T} + \overline{P}_1$ o początku w A; podobnie siły $-\overline{T}$ i $\overline{P}_2$ zastępujemy siłą $\overline{Q}_2 = -\overline{T} + \overline{P}_2$ o początku w B. Wypadkowa $\overline{R}$ przechodzi przez punkt przecięcia O' sił $\overline{Q}_1, \overline{Q}_2$.

Konstrukcję powyższą można również zastosować do przypadku dwóch sił równoległych, nie tworzących pary (rys. 2, 2a i 3, 3a).

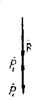


2.

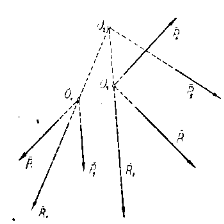
2a.



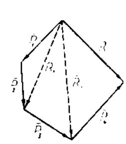
3.



3a.



4.



4a.

W tenże sposób można otrzymać wypadkową (lub parę wypadkową) układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ (str. 253, rys. 4 i 4a). Tworzymy najpierw wypadkową $\bar{R}_1$ dwóch z tych sił (np. sil $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$) i otrzymujemy układ zawierający już tylko $n-1$ sił.

Szybciej prowadzi do celu metoda, którą poznamy obecnie.

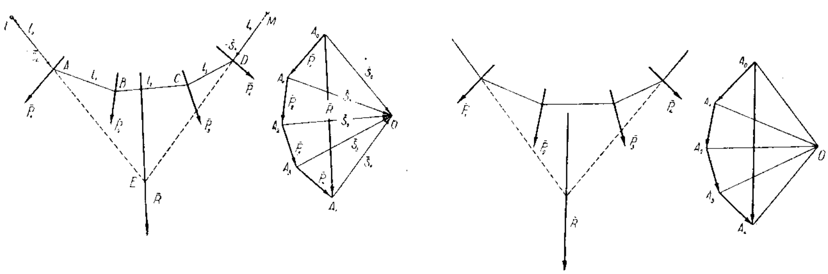
Wielobok sznurowy. Przypuśćmy, że mamy znaleźć wypadkową układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ (rys. 1).

Tworzymy najpierw sumę $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4$. Otrzymany wielobok nazywamy *wielobokiem sił*[1]).

Oznaczmy (w wieloboku sił) przez A_0 początek siły $\bar{P}_1$, zaś przez A_1, A_2, A_3, A_4 końce sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$. Obierzmy teraz dowolny punkt O poza wielobokiem sił. Punkt ten nazywamy *biegunem*.

Łączymy biegun O z punktami $A_0, A_1, \ldots, A_4$. Z dowolnego punktu A, położonego na kierunku siły P_1, kreślimy proste l_0 i l_1, równoległe odpowiednio do prostych OA_0 i OA_1. Prostą l_1 przedłużamy aż do punktu B jej przecięcia z kierunkiem siły $\bar{P}_2$. Prosta l_1 przetnie kierunek siły $\bar{P}_2$, gdyż l_1 jest równoległa do OA_1, zaś OA_1 nie jest równoległa do $\bar{P}_2$ (rys. 1a).

Z punktu B kreślimy prostą $l_2 \| OA_2$ aż do punktu jej przecięcia C z kierunkiem siły $\bar{P}_3$. Z punktu C kreślimy prostą $l_3 \| OA_3$ aż do punktu jej przecięcia D z kierunkiem siły $\bar{P}_4$. Z punktu D kreślimy prostą $l_4 \| OA_4$.



1. 1a. 2. 2a.

Wyznaczamy teraz punkt przecięcia E prostych l_0 i l_4. Przez punkt E przechodzi wypadkowa $\bar{R}$. Ponieważ $\bar{R}$ znamy z wieloboku sił, więc możemy wypadkową tę wykreślić.

[1]) Na rys. 1, 2 i dalszych podane są tylko położenia sił, zaś wielkości sił zaznaczone są w wielobokach sił (rys. 1a, 2a i t. d.).

Przejdziemy teraz do uzasadnienia powyższej konstrukcji.

Oznaczmy wektory $\overline{A_0O}, \overline{A_1O_1}, \ldots, \overline{A_4O}$ odpowiednio przez $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_4$. Z wieloboku sił (str. 254, rys. 1a) otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&\bar{P}_1+\bar{S}_1+(-\bar{S}_0)=0, \qquad && \bar{P}_2+\bar{S}_2+(-\bar{S}_1)=0,\\
&\bar{P}_3+\bar{S}_3+(-\bar{S}_2)=0, && \bar{P}_4+\bar{S}_4+(-\bar{S}_3)=0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Dodajmy do układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ siły $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_0$, leżące na prostej l_0, siły $\bar{S}_1$ i $-\bar{S}_1$, leżące na l_1 i t. d., wreszcie siły $\bar{S}_4$ i $-\bar{S}_4$, leżące na l_4. Dodany układ jest oczywiście równoważny zeru, gdyż siły $\bar{S}_0$, $-\bar{S}_0$, $\bar{S}_1$, $-\bar{S}_1$ i t. d. znoszą się parami. Wypadkowa rozszerzonego układu jest więc ta sama co poprzednio.

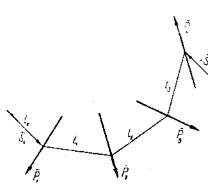
Na mocy (1) siły $\bar{P}_1$, $\bar{S}_1$ i $-\bar{S}_0$ znoszą się, gdyż suma ich równa się zeru, a kierunki ich przecinają się w A. Siły te możemy więc usunąć. Podobnie możemy usunąć siły $\bar{P}_2$, $\bar{S}_2$ i $-\bar{S}_1$, następnie, $\bar{P}_3$, $\bar{S}_3$ i $-\bar{S}_2$ i t. d. w końcu siły $\bar{P}_4$, $\bar{S}_4$ i $-\bar{S}_3$. Zostaną siły $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$, które tworzą zatem układ równoważny danemu. Przez punkt przecięcia E kierunków sił $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$ (t. j. prostych l_0, l_4) przechodzi więc wypadkowa $\bar{R}$, c. b. d. d.

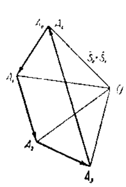
Odcinki l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 tworzą t. zw. *wielobok sznurowy*; l_0 i l_4 nazywamy jego *bokami skrajnymi*.

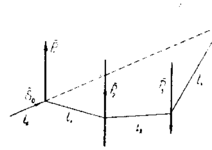
A więc: *wypadkowa przechodzi przez punkt przecięcia skrajnych boków wieloboku sznurowego.*

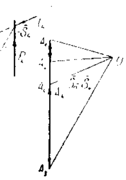
Nazwa wieloboku sznurowego pochodzi stąd, że nić (sznur) nierozciągliwa i nieważka, utwierdzona w punktach L i M, położonych na prostych l_0 i l_4 w kierunkach $-\bar{S}_0$ i $\bar{S}_4$ (zresztą dowolnych), i przyjmująca położenie wieloboku $LABCDM$, będzie w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$, zaczepionych odpowiednio w punktach A, B, C, D.

W praktyce opuszczamy oznaczenia zbędne i wykres przedstawia się jak na rys. 2 i 2a str. 254 oraz jak na rysunkach str. niniejszej.


1.


1a.


2.


2a.

Na str. 255 rys. 1 przedstawia układ sił, którego suma jest zerem. Mówimy wtedy, że *wielobok sił zamyka się* (rys. 1a).

Kreśląc zaś wielobok sznurowy przekonywamy się, że skrajne jego boki nie przecinają się (są równoległe). Mówimy wtedy, że *wielobok sznurowy nie zamyka się.*

Układ sił równoważny jest w tym przypadku układowi sił $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$, które, jak widać z wieloboku sił, tworzą parę. Układ jest tedy równoważny parze sił $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$ leżących na bokach skrajnych wieloboku sznurowego.

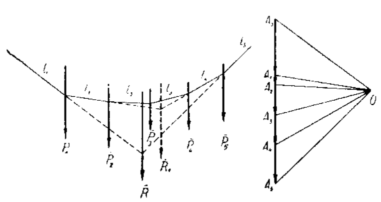
A więc: *jeżeli wielobok sił zamyka się, zaś wielobok sznurowy nie zamyka się, to układ jest równoważny parze sił.*

Na rys. 2 str. 255 widzimy układ sił, dla którego wielobok sił (rys. 2a) się zamyka, a boki skrajne wieloboku sznurowego leżą na jednej prostej. Mówimy wtedy, że *wielobok sznurowy zamyka się.*

Układ sił równoważny jest w tym przypadku układowi sił $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$, leżących na skrajnych bokach wieloboku sznurowego, a więc na jednej linii prostej. Ponieważ (jak widać z wieloboku sił) $\bar{S}_0 = \bar{S}_4$, więc siły $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$ znoszą się; dany układ jest tedy równoważny zeru.

A więc: *jeżeli wielobok sił i wielobok sznurowy zamykają się, to układ sił jest równoważny zeru.*

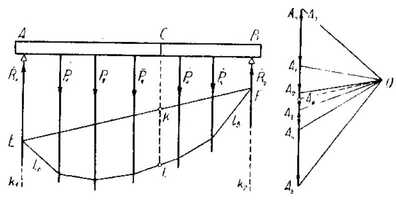
Wypadkowa części układu. Mając wielobok sznurowy pewnego układu sił, możemy łatwo wyznaczyć wypadkową dowolnej części tego układu, złożonej z sił występujących po sobie w wieloboku sił.



Niech dany będzie np. układ sił równoległych $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5$. Niech wyznaczona będzie wypadkową $\bar{R}$ całego układu i wypadkowa $\bar{R}_1$ sił $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$. Z rysunku obok widać, że wielobok sznurowy dla układu $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ jest częścią wieloboku sznurowego całego układu.

§ 7. Niektóre zastosowania wieloboku sznurowego. Wyznaczanie reakcji w punktach podparcia belki. Dany jest układ sił równoległych $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5$. Wyznaczyć dwie siły $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ równoległe do poprzednich i tworzące wraz z nimi układ równoważny zeru, przyczem dane są proste k_1 i k_2, na których siły $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ mają leżeć.

Z zadaniem tym spotykamy się w przypadku belki sztywnej poziomej, podpartej w punktach A i B i obciążonej siłami pionowymi $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5$ (rys. 1). Jeżeli nie ma tarcia, to w punktach A i B występują reakcje pionowe, równoważące się z siłami $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5$ (str. 267).



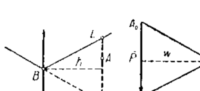
1.

Aby wyznaczyć siły $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, kreślimy wielobok sznurowy dla danego układu sił w porządku $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5, \bar{R}_2, \bar{R}_1$. W wieloboku sił prosta A_6O łącząca koniec siły $\bar{R}_2$ z biegunem O jest na razie nieznana. Ponieważ wielobok sił zamyka się, więc punkt A_7, t. j. koniec siły $\bar{R}_1$, schodzi się z początkiem siły $\bar{P}_1$, t. j. z punktem A_0.

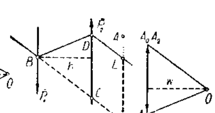
Kreślimy wielobok sznurowy, zaczynając od prostej $l_0 \| A_0O$ aż dojdziemy do prostej $l_5 \| A_5O$.

Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia się prostych l_0 i l_5 z kierunkami sił $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, t. j. z prostymi danymi k_1 i k_2. Rysując w wieloboku sił prostą OA_6 równolegle do prostej EF, otrzymujemy siły $\bar{R}_1 = \overline{A_5A_6}$ i $\bar{R}_2 = \overline{A_6A_7}$. Łatwo bowiem zauważyć, że kreśląc w dalszym ciągu wielobok sznurowy dla tak wyznaczonych sił $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, otrzymamy wielobok sznurowy zamknięty.

Wyznaczanie momentu sił. Gdy mamy wyznaczyć moment siły $\bar{P}$ względem pewnego punktu A, kreślimy najpierw z dowolnego punktu B, położonego na kierunku siły $\bar{P}$, wielobok sznurowy, jak na rys. 2.



2.



3.

Prowadzimy następnie przez A prostą równoległą do $\bar{P}$. Oznaczmy przez L, K punkty przecięcia się tej prostej z bokami wieloboku sznurowego. Z podobieństwa trójkątów A_0A_1O i KLB otrzymujemy $KL : |\bar{P}| = h : w$, gdzie h i w są wysokościami tych trójkątów. Stąd $|\bar{P}|h = KL \cdot w$. Oznaczając przez M moment siły $\bar{P}$ względem A, mamy $|M| = |\bar{P}|h$ czyli

$$|M| = KL \cdot w. \tag{1}$$

A więc: *moment siły $\bar{P}$ względem punktu A jest* (co do modułu) *proporcjonalny do odcinka, jaki boki wieloboku sznurowego odcinają na prostej przechodzącej przez A równolegle do $\bar{P}$; współczynnikiem proporcjonalności jest odległość bieguna od siły w wieloboku sił.*

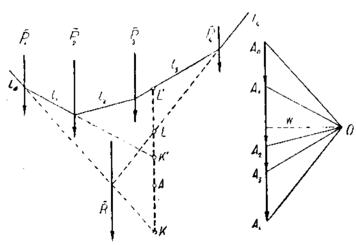
Niech dana będzie teraz para sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ (gdzie $\overline{P}_1 = -\overline{P}_2$). Wykreślmy wielobok sznurowy tej pary, jak na rys. 3, str. 257. Poprowadźmy przez dowolny punkt A prostą równoległą do sił i oznaczmy przez K i L punkty przecięcia się boków skrajnych wieloboku sznurowego z tą prostą.

Dowiedziemy, że jeżeli oznaczymy przez M moment pary, przez w zaś odległość bieguna od sił $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$ w wieloboku sił, to będzie zachodził wzór (1).

Weźmy bowiem pod uwagę trójkąt BCD, gdzie B jest punktem na kierunku siły $\overline{P}_1$, z którego zaczęliśmy kreślić wielobok sznurowy, C i D zaś są punktami przecięcia kierunku siły $\overline{P}_2$ ze skrajnymi bokami wieloboku sznurowego.

Niech h oznacza wysokość trójkąta BCD. Z podobieństwa trójkątów BCD i A_0A_1O mamy $CD:|\overline{P}_1| = h:w$, skąd $|\overline{P}_1|h = CD \cdot w$. Ponieważ $|M| = |\overline{P}_1|h$, zaś $CD = KL$, więc dostajemy istotnie wzór (1).

Zatem: *moment pary sił jest* (co do wielkości) *proporcjonalny do odcinka, jaki odcinają skrajne boki wieloboku sznurowego na dowolnej prostej równoległej do sił pary*; *współczynnikiem proporcjonalności jest odległość bieguna od sił w wieloboku sił.*

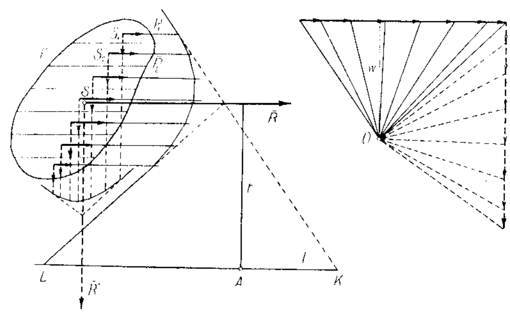


Podobne sposoby wyznaczania momentu są korzystne wówczas, gdy mamy do czynienia z kilkoma siłami równoległymi, wtedy bowiem możemy dla wszystkich sił przyjąć to samo w. Gdy zaś mamy wyznaczyć moment układu sił równoległych, wyznaczamy najpierw wypadkową (ewentualnie wypadkową parę sił), a następnie jej moment.

Nakreśliwszy wielobok sznurowy układu sił równoległych, możemy względem punktu A wyznaczyć moment dowolnej części układu, złożonej z sił następujących po sobie w takim porządku jak w wieloboku sił. Wielobok sznurowy tej części zawarty jest bowiem w wieloboku sznurowym całego układu. Na rysunku odcinek $K'L'$ jest proporcjonalny (co do modułu) do momentu układu sił $\overline{P}_2, \overline{P}_3$ względem A.

Niech wreszcie dany będzie układ sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_5, \overline{R}_1, \overline{R}_2$ równoważny zeru (rys. 1, str. 257). Prowadzimy przez dowolny punkt C prostą równoległą do sił. Odcinek LK tej prostej, leżący między bokami wieloboku sznurowego, jest proporcjonalny (co do modułu) do momentu ogólnego względem C sił położonych po jednej stronie tej prostej (w naszym przypadku do momentu sił $\bar{R}_1, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ lub sił $\bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{R}_2$; momenty obu tych części układu względem C są równe co do modułu, ponieważ suma ich jest zerem, na skutek założenia, że układ jest równoważny zeru). Współczynnikiem proporcjonalności jest w, t. j. odległość bieguna O od sił w wieloboku sił.

Wyznaczanie środka ciężkości i momentu statycznego figur płaskich. Aby wyznaczyć środek ciężkości figury płaskiej F, dzielimy ją na wąskie paski przy pomocy prostych równoległych. Jeżeli w środkach ciężkości $S_1, S_2, \ldots$ otrzymanych pasków zaczepimy siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ równoległe, zgodnie skierowane i proporcjonalne co do wielkości do pól $F_1, F_2, \ldots$ tych pasków, to środek sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ będzie środkiem ciężkości figury F.



1. 1a.

Zauważmy bowiem, że środek ciężkości figury F jest środkiem masy układu punktów materialnych, jaki otrzymamy, zastępując każdy pasek punktem materialnym o masie równej masie paska (str. 156). Na mocy zaś twierdzenia dowiedzionego na str. 243 środek masy otrzymanego układu punktów materialnych jest środkiem układu sił równoległych $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$

Paski dostatecznie wąskie możemy uważać za trapezy; środki ciężkości trapezów wyznaczamy podług konstrukcji podanej na str. 180, rys. 1. Linie podziału figury prowadzimy zazwyczaj w równych odstępach (rys. 1). Zatem pola trapezów będą proporcjonalne do ich linij środkowych. Wielkości sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ możemy więc uważać za proporcjonalne do linij środkowych trapezów.

Wypadkowa $\bar{R}$ przechodzi przez środek ciężkości S; wyznaczamy ją przy pomocy wieloboku sznurowego (rys. 1a).

Zmieniając kierunek sił i wyznaczając nową wypadkową $\bar{R}'$, otrzymamy środek ciężkości S jako punkt przecięcia się obu wypadkowych $\bar{R}$ i $\bar{R}'$.

Aby wyznaczyć moment statyczny figury F względem pewnej prostej l, rysujemy siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ równolegle do l.

Moment wypadkowej $\bar{R}$ względem dowolnego punktu A prostej l jest co do wielkości proporcjonalny do momentu statycznego figury F względem l.

Oznaczając bowiem przez M moment siły $\bar{R}$ względem A, przez h odległość A od kierunku siły $\bar{R}$, przez M_s moment statyczny danej figury względem l, wreszcie przez F pole figury, mamy:

$$|M| = h|\bar{R}|, \qquad |M_s| = hF, \tag{2}$$

gdyż środek ciężkości leży na kierunku wypadkowej.

Ponieważ wielkość sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ obraliśmy proporcjonalnie do pól $F_1, F_2, \ldots$ poszczególnych pasków, więc

$$|\bar{P}_1| = \lambda F_1, \qquad |\bar{P}_2| = \lambda F_2 \qquad \text{i t. d.}, \tag{3}$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Lecz

$$|\bar{R}| = |\bar{P}_1| + |\bar{P}_2| + \ldots,$$

skąd

$$|\bar{R}| = \lambda(F_1 + F_2 + \ldots) = \lambda F.$$

Na mocy więc (2) jest $|M| = \lambda h F = \lambda |M_s|$ czyli

$$|M_s| = |M| / \lambda. \tag{4}$$

A więc: *moment statyczny figury jest* (co do modułu) *proporcjonalny do momentu wypadkowej.*

Momenty statyczne figur płaskich możemy zatem wyznaczać przy pomocy wieloboku sznurowego.

Na rys. 1, str. 259, jest $|\bar{M}| = w \cdot KL$, skąd na mocy (4)

$$|M_s| = w \cdot KL / \lambda. \tag{5}$$

Oznaczmy przez $d_1, d_2, \ldots$ długość linij środkowych trapezów, a przez a odstęp między liniami podziału. Zatem $F_1 = ad_1$, $F_2 = ad_2, \ldots$. Ponieważ przyjęto na rysunku $|\bar{P}_1| = kd_1$, $|\bar{P}_2| = kd_2, \ldots$, gdzie $k = \frac{1}{3}$, więc $|\bar{P}_1| = kF_1/a$, $|\bar{P}_2| = kF_2/a, \ldots$ Na mocy (3) będzie tedy $\lambda = k/a$, skąd na mocy (5)

$$|M_s| = aw \cdot KL/k = 3aw \cdot KL.$$

Mierząc a, w i KL na rysunku, otrzymujemy $|M_s|$ z powyższego wzoru.