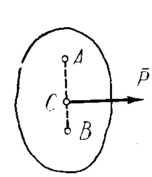
II. Ciało nieswobodne

§ 8. Warunki równowagi. Ciało sztywne nazywamy *nieswobodnym*, jeżeli położenia lub ruchy tego ciała poddane są pewnym warunkom. Warunki te nazywamy *więzami*.

Np. jeżeli jeden punkt ciała jest unieruchomiony, ciało może się tylko obracać około tego punktu. Jeżeli dwa punkty A i B ciała są unieruchomione, ciało może się tylko obracać około prostej AB. Poznamy później inne jeszcze przykłady ciał sztywnych nieswobodnych.

Gdy ciało sztywne nieswobodne jest w równowadze, mówimy, że siły działające na to ciało *równoważą się* lub *są w równowadze*.

Ciało sztywne unieruchomione w dwóch punktach A, B i znajdujące się w równowadze pozostanie w równowadze, gdy dołączymy dowolną siłę $\overline{P}$ o początku w punkcie C, położonym na prostej AB. Intuicyjnie jest to jasne, gdyż ciało może się tylko obracać około osi AB, a więc siła $\overline{P}$, działająca na oś unieruchomioną, nie może ciała poruszyć. Gdyby ciało było swobodne, to pozostałoby w równowadze jedynie w przypadku, gdy $\overline{P}=0$.



Widzimy stąd, że warunki równowagi sił przy ciele nieswobodnym są inne niż przy ciele swobodnym.

Badanie warunków równowagi w przypadku ciała sztywnego nieswobodnego możemy sprowadzić do przypadku ciała swobodnego. Przyjmować będziemy w tym celu, że na ciało sztywne nieswobodne działają oprócz sił danych siły dodatkowe zwane *reakcjami*, dzięki którym ciało zachowuje więzy. Reakcje pochodzą od tych ciał, które ograniczają swobodę ruchów danego ciała sztywnego nieswobodnego.

Jeżeli np. ciało ciężkie spoczywa na stole, wówczas nie jest swobodne, nie może bowiem przejść przez powierzchnię stołu. W tym przypadku reakcjami są siły z jakimi powierzchnia stołu ciśnie na ciało.

Inne siły, pod których działaniem znajduje się ciało sztywne nieswobodne, nazywać będziemy *siłami działającymi* (dla odróżnienia od reakcyj). Jeżeli do sił działających dołączymy reakcje, to możemy ciało sztywne nieswobodne uważać za swobodne.

Wynika stąd, że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił działających jest, by siły działające równoważyły się z reakcjami.*

Powyższy warunek nie jest jednak dogodny, gdyż występują w nim siły reakcyjne, których na ogół nie znamy. W niektórych przypadkach, jak np. w przypadku ciała unieruchomionego w jednym punkcie lub w dwóch punktach, można jednak podać warunki równowagi sił działających, nie odwołując się do reakcyj (str. 274). Warunkiem równowagi, w którym nie występują reakcje, jest t. zw. *zasada prac przygotowanych*, którą poznamy w rozdziale IX.

§ 9. Reakcje ciał stykających się. Każde dwa ciała (bryły, powierzchnie lub linie) sztywne, stykające się z sobą, działają na siebie z pewnymi siłami. Siły te są reakcjami i pochodzą z wzajemnego oddziaływania na siebie punktów obu ciał. Reakcje stosują się do prawa akcji i reakcji.

Siły, z jakimi jedno ciało działa na drugie, możemy w myśl twierdzenia o redukcji (str. 241) zawsze zastąpić jedną siłą $\bar{R}$ i parą o momencie $\bar{M}$. Na odwrót, na mocy prawa akcji i reakcji, ciało drugie działa na ciało pierwsze z siłami równoważnymi sile $-\bar{R}$ (o tym samym początku co $\bar{R}$) i parze o momencie $-\bar{M}$.

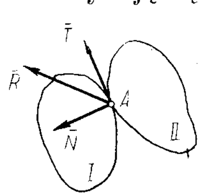
Wyznaczanie reakcyj jest bardzo ważne w zagadnieniach związanych z techniką. Dotychczas nie mamy jeszcze teorii rozwiązującej tę sprawę w zupełności. W praktyce posługujemy się pewnymi hipotezami zgadzającymi się w przybliżeniu z doświadczeniem. Zajmiemy się tutaj niektórymi tylko zagadnieniami dotyczącymi reakcji ciał stykających się. Szerzej ujęta jest ta sprawa w podręcznikach mechaniki technicznej.

Doświadczenie wykazuje, że w ciałach sztywnych stykających się tylko te punkty działają na siebie, które położone są blisko punktów zetknięcia. Przyjmiemy tu hipotezę upraszczającą, że tylko punkty zetknięcia obu ciał działają na siebie; reakcje będą wówczas siłami zaczepionymi w punktach zetknięcia.

Hipoteza powyższa nie da się utrzymać w całej ogólności. Dla dwu ciał sztywnych, stykających się tylko w jednym punkcie, reakcje sprowadzałyby się według tej hipotezy do jednej siły, mającej początek w punkcie zetknięcia. Doświadczenie natomiast poucza, że prócz niej może w tym przypadku występować jeszcze para sił o momencie różnym od zera, co sprzeciwia się hipotezie.

Jeżeli np. sztywna kula ciężka opiera się o sztywną płytę poziomą, to może pozostawać w równowadze nawet wtedy, gdy będzie pod działaniem pary sił (leżącej w płaszczyźnie poziomej) o małym momencie. W stanie równowagi reakcje płyty równoważą zarówno ciężar kuli jak parę sił, co byłoby niemożliwe, gdyby reakcje płyty sprowadzały się do jednej tylko siły zaczepionej w punkcie styczności.

Reakcja normalna i styczna. Niech dwa ciała sztywne I i II stykają się w punkcie A. Oznaczmy przez $\bar{R}$ siłę z jaką ciało II



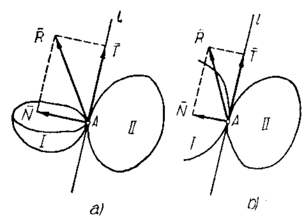
działa na ciało I w punkcie A. Siła $\bar{R}$ ma początek w A. Na mocy prawa akcji i reakcji ciało I działa na ciało II z siłą $-\bar{R}$, mającą początek również w A.

Niech ciało I będzie bryłą lub powierzchnią posiadającą w punkcie A płaszczyznę styczną Π.

Rozłóżmy reakcję $\bar{R}$ na dwie składowe: na składową $\bar{N}$ prostopadłą do ciała, t. j. do płaszczyzny Π, i na składową $\bar{T}$ styczną do ciała, t. j. leżącą w Π.

Składową $\bar{N}$ nazywamy reakcją *normalną*, składową zaś $\bar{T}$ reakcją *styczną* lub *tarciem*. Reakcja normalna jest zazwyczaj skierowana względem ciała II w tę stronę, w której znajduje się ciało I; nazywamy ją wówczas *ciśnieniem*. Gdy w punktach zetknięcia tarcie nie występuje, ciała stykające się nazywamy *gładkimi*.

Rozpatrzmy jeszcze dwa przypadki:



1^0 Ciało I jest powierzchnią, ograniczoną pewną linią, na której leży punkt zetknięcia A, przy czym linia ograniczająca ma w A prostą styczną l (rys. a).

2^0 Ciało I jest linią posiadającą w A prostą styczną l, przy czym A nie jest końcem tej linii (rys. b).

Przykładem 1^0 może być półkula sztywna ograniczona okręgiem, na którym leży punkt A; przykładem 2^0 może być łuk okręgu o punkcie A leżącym w jego połowie. W przypadkach 1^0 i 2^0 reakcją normalną będzie składowa reakcji $\bar{R}$ prostopadła do stycznej l; tarciem zaś będzie składowa reakcji $\bar{R}$ leżąca na prostej l.

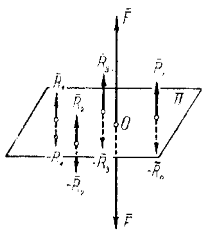
Dla dwu ciał gładkich stykających się w punkcie A kierunek i zwrot reakcji jest wyznaczony, jeżeli jedno z ciał jest bryłą lub powierzchnią posiadającą w A płaszczyznę styczną. Kierunek i zwrot reakcji jest wyznaczony również dla ciał 1^0 i 2^0, jeżeli proste styczne do nich w punkcie ich zetknięcia nie pokrywają się z sobą. W tym bowiem przypadku reakcja musi być prostopadła do obu stycznych. Dla ciał, z których jedno jest ciałem 1^0 lub 2^0, wiemy o reakcji tylko tyle, że leży ona w płaszczyźnie prostopadłej do prostej stycznej l.

Podpory. Ciało sztywne unieruchomione (np. związane sztywnie z ziemią) nazywamy *podporą*. W wielu zastosowaniach idzie o wyznaczenie reakcyj podpór na inne ciała sztywne.

Jeżeli ciało sztywne opierające się na podporach jest w równowadze, to siły działające na to ciało równoważą się z reakcjami podpór. Jeżeli ciało gładkie opiera się na podporach gładkich, to przyjmujemy, że *jeżeli są do pomyślenia reakcje* (oczywiście normalne), *równoważące siły, jakie działają na ciało, to reakcje takie rzeczywiście wystąpią.*

Dzięki powyższej hipotezie możemy w wielu przypadkach podać warunki konieczne i wystarczające dla równowagi sił, jakie działają na ciało sztywne opierające się na podporach gładkich.

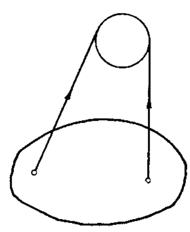
Środek ciśnień. Niech dwa ciała gładkie I i II stykają się w punktach leżących na pewnej płaszczyźnie Π (rys. 1). Reakcje będą więc prostopadłe do płaszczyzny Π. Reakcje działające na ciało I są zatem równoległe; załóżmy że są ciśnieniami. Mają więc ten sam zwrot. Wynika stąd, że mają wypadkową $\bar{F}$, o której możemy przyjąć, że zaczepiona jest w pewnym punkcie O płaszczyzny Π. Punkt O nazywamy *środkiem ciśnień*.



1.

Oczywiście reakcje działające na drugie ciało mają wypadkową $-\bar{F}$ i ten sam środek ciśnień.

Reakcje nici. Nić nierozciągliwa, przyczepiona do ciała, działa na nie tylko wtedy, gdy jest napięta. Jeżeli masa nici jest mała (tak, że można ją pominąć) i obydwa końce nici przyczepione są do ciała, to działa ona w obu końcach, z siłami równymi co do wielkości, także i wtedy, gdy jest nawinięta na jakieś ciało gładkie (rys. 2). Siły, z jakimi nić działa w swoich końcach, są styczne do nici i mają zwrot w kierunku nici. Siły te nazywamy *napięciami nici*.

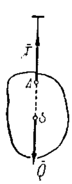


2.

Przykład 1. Jeżeli ciało ciężkie, zawieszone na nici w punkcie A, jest w równowadze, to napięcie nici $\bar{T}$ o początku A równoważy się z ciężarem $\bar{Q}$, mającym początek w środku ciężkości S. Zatem $\bar{T}+\bar{Q}=0$ czyli

$$|\bar{T}| = |\bar{Q}|. \tag{1}$$

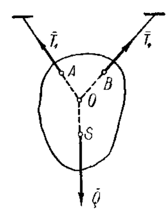
Ponadto siły $\bar{T}$ i $\bar{Q}$ muszą działać wzdłuż jednej prostej. Nić ma zatem kierunek pionowy i jej przedłużenie przechodzi przez środek ciężkości (rys. 3). Zawieszając więc ciało po kolei w dwóch punktach i zaznaczając kierunki nici w ciele, otrzymamy jako punkt przecięcia środek ciężkości ciała.



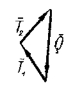
3.

Przykład 2. Jeżeli ciało zawieszone na dwóch niciach w punktach A i B jest w równowadze, to napięcia nici $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ o początkach w A i B równoważą się z ciężarem $\overline{Q}$, mającym początek w środku ciężkości S (rys. 1). Zatem

$$\overline{T}_1 + \overline{T}_2 + \overline{Q} = 0. \tag{2}$$



1.



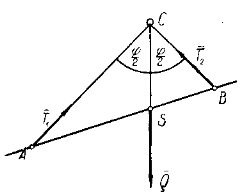
1a.

Na mocy więc twierdzenia podanego na str. 250 kierunki sił przecinają się w jednym punkcie O lub siły są równoległe. W obu przypadkach możemy wyznaczyć siły $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$, tworząc moment względem dowolnego punktu, np. względem punktu A. Oznaczając przez a_2 i d ramiona sił $\overline{T}_2$ i $\overline{Q}$ względem A, dostaniemy $|\overline{T}_2| a = |\overline{Q}| d$ czyli

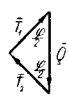
$$|\overline{T}_2| = |\overline{Q}| d/a. \tag{3}$$

Podobnie otrzymamy $|\overline{T}_1|$, tworząc moment względem B. W przypadku, gdy siły $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ nie są równoległe, możemy je wyznaczyć graficznie, tworząc trójkąt sił (rys. 1a).

Przykład 3. Na nici nierozciągliwej bez masy, przewiniętej przez gładki pierścień w punkcie C, zawieszony jest w punktach A i B ciężki pręt sztywny (rys. 2). Wyznaczyć napięcia nici w położeniu równowagi.



2.



2a.

Oznaczmy przez l długość nici, przez φ kąt ACB, a przez S środek ciężkości pręta. Połóżmy:

$$AB = a, \quad AC = l_1, \quad BC = l_2, \quad AS = b.$$

Przypuśćmy, że dane są a, b, l i ciężar pręta $\overline{Q}$.

Ponieważ napięcia $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ nici równoważą się z ciężarem $\overline{Q}$, więc siły te przecinają się w punkcie C (gdyż siły $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ przechodzą przez punkt C (str. 250)) i ponadto

$$\overline{T}_1 + \overline{T}_2 + \overline{Q} = 0. \tag{4}$$

Prócz tego (str. 264)

$$|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2|. \tag{5}$$

Gdy $\varphi=0$, pręt ma położenie pionowe i siły $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ mają kierunek pionowy. Na mocy (5) jest więc $\overline{T}_1=\overline{T}_2$, skąd na mocy (4)

$$|\overline{T}_1|=|\overline{T}_2|=|\overline{Q}|/2.$$

Zbadajmy w jakim przypadku może być $\varphi\neq 0$, jak na rysunku. Przyjmijmy więc, że $\varphi\neq 0$.

Oznaczając przez d_1 i d_2 odległości kierunków sił $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ od S i tworząc moment względem S, dostaniemy $|T_1|d_1=|T_2|d_2$; zatem, z uwagi na (5), $d_1=d_2$. Środek ciężkości S jest równo oddalony od boków AC i BC, czyli prosta CS jest symetralną kąta φ. Ze znanego twierdzenia geometrycznego o symetralnych kątów trójkąta, otrzymujemy $AC/BC=AS/BS$ czyli

$$l_1/l_2=b/(a-b). \tag{6}$$

Ponieważ

$$l_1+l_2=l, \tag{7}$$

więc rozwiązując układ równań (6) i (7), dostaniemy:

$$l_1=bl/a, \qquad l_2=(a-b)l/a. \tag{8}$$

Aby boki l_1, l_2, a mogły tworzyć trójkąt, muszą zachodzić nierówności $l_1+l_2>a$, $l_1+a>l_2$, $l_2+a>l_1$, które możemy napisać w postaci:

$$l_1+l_2>a, \qquad a>|l_1-l_2|,$$

skąd na mocy (8)

$$l>a>|a-2b|\,l/a. \tag{9}$$

Muszą być więc spełnione nierówności $a<l<a^2/|a-2b|$ czyli, kładąc $k=b/a$,

$$a<l<a/|1-2k|. \tag{10}$$

A więc: *równowaga zajdzie przy $\varphi\neq 0$, jeżeli długość nici l spełnia warunek* (10).

Zauważmy, że jeżeli $k=b/a=1/2$ (t. j. gdy środek ciężkości S wypada w środku odcinka AB), to warunki (9) spełnione są dla każdego $l>a$. W tym więc przypadku możliwe jest zawsze położenie równowagi pręta przy $\varphi\neq 0$.

Kąt φ otrzymamy z twierdzenia Carnota

$$a^2=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\varphi. \tag{11}$$

Z trójkąta sił dostajemy

(12) $$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = |\bar{Q}|/2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Po łatwych przeróbkach, wyrażając $\cos \frac{1}{2}\varphi$ przez a, b, l ze wzorów (8) i (11), otrzymamy na mocy (12)

$$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = |\bar{Q}| \frac{l}{a} \sqrt{\frac{(a-b)\,b}{l^2-a^2}}\,.$$

W szczególności dla $b = a/2$ dostaniemy

$$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = |\bar{Q}| \frac{l}{2\sqrt{l^2-a^2}}\,.$$

Przykład 4. Belka pozioma spoczywa w punktach A i B na dwóch podporach gładkich. Na belkę działają siły pionowe (skierowane w dół) $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5$ (str. 257, rys. 1). Wyznaczyć reakcje podpór.

Oznaczmy przez $x_1, x_2, \ldots, x_5$ odległości punktów zaczepienia sił od A. Połóżmy $AB = d$. Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w A i B są pionowe. Tworząc moment względem A i oznaczając przez $P_1, P_2, \ldots, P_5, R_1, R_2$ wartości bezwzględne sił, otrzymamy $P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_5x_5 - R_2d = 0$, skąd

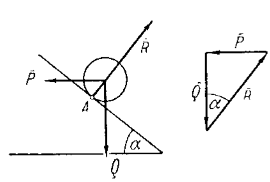
(13) $$R_2 = (P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_5x_5)/d.$$

Ponieważ $R_1 + R_2 = P_1 + P_2 + \ldots + P_5$, więc

(14) $$R_1 = [P_1(d-x_1) + \ldots + P_5(d-x_5)]/d.$$

Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ można również wyznaczyć przy pomocy wieloboku sznurowego jak na str. 257.

Przykład 5. Kula ciężka o stałej gęstości dotyka płaszczyzny gładkiej Π, nachylonej do poziomu pod kątem α. Wyznaczyć siłę poziomą $\bar{P}$, utrzymującą kulę w równowadze.

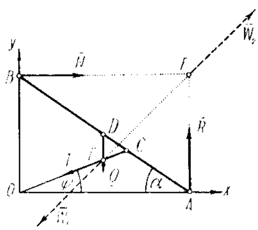


Ciężar $\bar{Q}$ kuli ma początek w jej środku O, a reakcja $\bar{R}$ płaszczyzny Π w punkcie styczności A; jest ona prostopadła do Π. Siły $\bar{Q}$ i $\bar{R}$ przecinają się w punkcie O. Ponieważ siły $\bar{P}$, $\bar{Q}$ i $\bar{R}$ równoważą się, więc na mocy tw. III, str. 250, przecinają się one w punkcie O. Ponadto $\bar{P} + \bar{Q} + \bar{R} = 0$, więc z trójkąta sił otrzymujemy siły $\bar{P}$ i $\bar{R}$. Mamy:

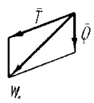
$$R = Q/\cos\alpha, \qquad P = Q \operatorname{tg}\alpha,$$

gdzie P, Q i R oznaczają bezwzględne wartości odpowiednich sił.

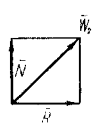
Przykład 6. W płaszczyźnie pionowej Π leży pręt ciężki AB o gęstości stałej, oparty na dwóch płaszczyznach gładkich: poziomej Π_1 i pionowej Π_2. Niechaj Ox i Oy będą prostymi przecięcia płaszczyzn Π_1 i Π_2 z płaszczyzną Π. Pręt AB przywiązany jest nicią nierozciągliwą OC do punktu O. Pręt znajduje się w równowadze. Wyznaczyć reakcje, mając dane: $AB = 2l$, kąt α między AB a osią x i kąt φ między OC a osią x (rys. 1).



1.



2.



3.

Siłą działającą na pręt jest ciężar $\overline{Q}$ zaczepiony w środku pręta AB w punkcie D. Reakcjami są reakcje ścian $\overline{R}$ i $\overline{N}$, zaczepione w A i B i prostopadłe do ścian, oraz reakcja nici $\overline{T}$ zaczepiona w C i skierowana wzdłuż nici ku punktowi O. Siła działająca równoważy się z reakcjami. Z warunku rzutów na osie x i y otrzymujemy:

$$N_x + T_x = 0, \qquad R_y + Q_y + T_y = 0, \tag{15}$$

a z warunku momentu względem O:

$$-R_y \cdot 2l\cos\alpha + N_x \cdot 2l\sin\alpha - Q_y l\cos\alpha = 0. \tag{16}$$

Oznaczmy przez R, N, T, Q bezwzględne wartości odpowiednich sił. Mamy oczywiście $R_y = R$, $N_x = N$, $Q_y = -Q$ i $T_x = -T\cos\varphi$, $T_y = -T\sin\varphi$. Zatem z równań (15) i (16) otrzymujemy:

$$N - T\cos\varphi = 0, \qquad R - Q - T\sin\varphi = 0, \tag{17}$$

$$-2R\cos\alpha + 2N\sin\alpha + Q\cos\alpha = 0. \tag{18}$$

Wyznaczając R i N z równań (17) i wstawiając w (18) otrzymamy

$$T = \frac{Q\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\varphi)}, \tag{19}$$

skąd na mocy równań (17):

$$N = \frac{Q\cos\alpha\cos\varphi}{2\sin(\alpha-\varphi)}, \qquad R = Q\left(1 + \frac{\cos\alpha\sin\varphi}{2\sin(\alpha-\varphi)}\right). \tag{20}$$

Ponieważ $T > 0$, więc na mocy (19) musi być $\alpha > \varphi$; zatem punkt C musi leżeć między A i D.

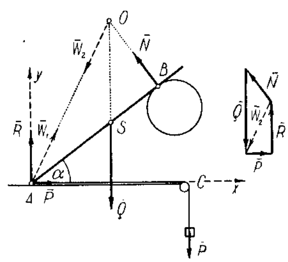
Zadanie możemy również rozwiązać graficznie (rys. 2 i 3).

Oznaczmy przez E punkt przecięcia sił $\bar{T}$ i $\bar{Q}$, zaś przez F sił $\bar{N}$ i $\bar{R}$. Wypadkowa $\bar{W}_1$ sił $\bar{T}$ i $\bar{Q}$ zaczepiona jest w E, zaś wypadkowa $\bar{W}_2$ sił $\bar{R}$ i $\bar{N}$ w F. Ponieważ układ sił $\bar{N}, \bar{R}, \bar{T}, \bar{Q}$ jest równoważny zeru, więc układ sił $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$ jest też równoważny zeru. Zatem siły działają wzdłuż prostej EF i $\bar{W}_1 + \bar{W}_2 = 0$. Siła $\bar{Q}$ oraz kierunki sił $\bar{T}$ i $\bar{W}_1 = \bar{T} + \bar{Q}$ są dane, więc możemy wyznaczyć siły $\bar{W}_1$ i $\bar{T}$ jak na rys. 2. Ponieważ $\bar{N} + \bar{R} = \bar{W}_2 = -\bar{W}_1$, więc siły $\bar{N}$ i $\bar{R}$ otrzymamy, rozkładając siłę $\bar{W}_2$ na składowe w kierunkach osi x i y (rys. 3).

Przykład 7. Pręt ciężki AB o środku ciężkości S opiera się w punkcie A o płaszczyznę poziomą gładką, a w punkcie B o kulę gładką. W punkcie A uczepiona jest nić nierozciągliwa, przewinięta przez blok C i obciążona w drugim końcu ciężarem $\bar{P}$. Wyznaczyć ciężar $\bar{P}$, reakcję $\bar{R}$ ściany poziomej i reakcję $\bar{N}$ kuli w położeniu równowagi, mając dane $a = AS$, $b = AB$, kąt α między prętem a płaszczyzną i ciężar pręta $\bar{Q}$.

Obierzmy osie x i y jak na rysunku. Ponieważ napięcie nici w punkcie A wynosi $\bar{P}$, więc oznaczając przez P, Q, R, N wartości bezwzględne sił i tworząc rzuty na osie x, y, dostaniemy:

$$P - N \sin \alpha = 0, \quad R - Q + N \cos \alpha = 0. \tag{21}$$



Moment ogólny względem A wynosi

$$Q a \cos \alpha - bN = 0. \tag{22}$$

Z równań (21) i (22) otrzymamy:

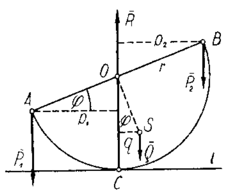
$$N = Q \frac{a \cos \alpha}{b}, \qquad P = Q \frac{a \sin 2\alpha}{2b},$$

$$R = Q \left(1 - \frac{a}{b} \cos^2 \alpha\right).$$

Zadanie możemy rozwiązać również graficznie. Oznaczmy w tym celu przez $\bar{W}_1$ wypadkową sił $\bar{R}$ i $\bar{P}$, a przez $\bar{W}_2$ wypadkową sił $\bar{Q}$ i $\bar{N}$. Siła $\bar{W}_1 = \bar{R} + \bar{P}$ zaczepiona jest w punkcie A, zaś $\bar{W}_2 = \bar{Q} + \bar{N}$ w punkcie O, w którym przecinają się kierunki sił $\bar{Q}$ i $\bar{N}$. Ponieważ znamy położenia sił $\bar{Q}$ i $\bar{N}$, więc punkt O możemy wyznaczyć.

Siły $\bar{P}$, $\bar{R}$, $\bar{Q}$ i $\bar{N}$ są w równowadze, więc i siły $\bar{W}_1$ i $\bar{W}_2$ równoważą się. Zatem $\bar{W}_1 + \bar{W}_2 = 0$; ponadto siły $\bar{W}_1$ i $\bar{W}_2$ leżą na jednej prostej. Prostą tą jest oczywiście prosta AO. Ponieważ znamy już kierunek siły $\overline{W}_2$, więc możemy ze związku $\overline{W}_2=\overline{Q}+\overline{N}$ wyznaczyć $\overline{W}_2$ i $\overline{N}$, rysując trójkąt sił. Mamy $\overline{W}_1=-\overline{W}_2$ i $\overline{W}_1=\overline{R}+\overline{P}$, więc siły $\overline{R}$ i $\overline{P}$ otrzymamy, rozkładając siłę $\overline{W}_1$ w kierunkach sił $\overline{R}$ i $\overline{P}$.

Przykład 8. Drut ciężki sztywny o stałej gęstości, w kształcie półokręgu, leży w płaszczyźnie pionowej, opierając się o prostą poziomą l. Na końcach pręta A i B zaczepione są siły $\overline{P}_1$ i $\overline{P}_2$, skierowane pionowo w dół. Wyznaczyć kąt φ, jaki w położeniu równowagi tworzy średnica AB z poziomem, oraz reakcję $\overline{R}$ w punkcie styczności C (przy założeniu, że nie ma tarcia).



W położeniu równowagi siły $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ ciężar $\overline{Q}$, zaczepiony w środku S masy oraz reakcja $\overline{R}$, prostopadła do l, równoważą się. Ponieważ siły powyższe są równoległe, więc (oznaczając ich wartości bezwzględne przez P_1; P_2, Q i R) otrzymamy z warunku rzutów na oś y, skierowaną pionowo w górę, $-P_1+R-Q-P_2=0$ czyli

$$R=P_1+P_2+Q. \tag{23}$$

Obliczmy moment ogólny sił względem punktu styczności C. Z warunku momentu otrzymamy

$$-P_1p_1+Qq+P_2p_2=0, \tag{24}$$

gdzie p_1, p_2 i q oznaczają ramiona sił P_1, P_2 i Q względem C. Kładąc $r=OB$ (gdzie O jest środkiem średnicy AB), otrzymamy:

$$p_1=p_2=r\cos\varphi, \qquad q=OS\cdot\sin\varphi, \tag{25}$$

a ponieważ $OS=2r/\pi$ (str. 179), więc

$$q=\frac{2r\sin\varphi}{\pi}. \tag{26}$$

Z (25) i (26) dostaniemy przez podstawienie w (24)

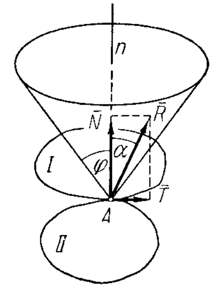
$$(P_2-P_1)r\cos\varphi+\frac{2rQ\sin\varphi}{\pi}=0$$

czyli

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{(P_1-P_2)\pi}{2Q}. \tag{27}$$

§ 10. Tarcie. Niech dwa ciała I i II, będące w spoczynku, stykają się w punkcie A i niech mają w tym punkcie wspólną płaszczyznę styczną Π. Oznaczmy przez $\bar{R}$ reakcję z jaką w punkcie A działa ciało II na ciało I. Jeżeli ciała nie są gładkie, to reakcja $\bar{R}$ nie jest do płaszczyzny Π prostopadła.

Niechaj α będzie kątem, jaki $\bar{R}$ tworzy z normalną n do Π.



Oznaczając przez $\bar{N}$ składową normalną, a przez $\bar{T}$ składową styczną czyli *tarcie* i kładąc $R=|\bar{R}|$, $N=|\bar{N}|$, $T=|\bar{T}|$, otrzymujemy:

(1) $$T=R\sin\alpha, \qquad N=R\cos\alpha,$$

skąd

(2) $$T=N\operatorname{tg}\alpha.$$

Doświadczenie pokazuje, że kąt α nie może przekroczyć pewnej granicy, zależnej od natury powierzchni ciał I i II.

Oznaczmy przez φ maksymalną wartość kąta α w punkcie A dla danej pary ciał I i II w położeniu równowagi. Mamy więc $0\leqslant\alpha\leqslant\varphi$ czyli $0\leqslant\operatorname{tg}\alpha\leqslant\operatorname{tg}\varphi$, skąd na mocy (2)

(3) $$T\leqslant N\operatorname{tg}\varphi.$$

Kładąc $f=\operatorname{tg}\varphi$, dostaniemy

(4) $$T\leqslant Nf.$$

Liczbę f nazywamy *współczynnikiem statycznym tarcia* dla danej pary ciał I i II w punkcie styczności A.

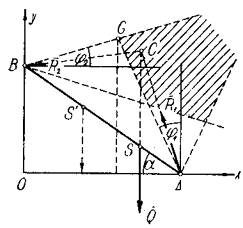
Weźmy pod uwagę stożek obrotowy o wierzchołku A, a którego osią jest normalna n, nachylona do tworzących stożka pod kątem φ. Stożek ten nazywamy *stożkiem tarcia* w punkcie A.

Ponieważ $\alpha\leqslant\varphi$, więc *reakcja leży wewnątrz stożka tarcia lub na jego powierzchni.*

Podobnie jak dla podpór gładkich (str. 263), przyjmujemy również w przypadku tarcia zasadę następującą:

Jeżeli ciało sztywne opiera się na podporach i są do pomyślenia reakcje (leżące wewnątrz stożków tarcia), równoważące się z siłami, jakie działają na ciało, to reakcje te wystąpią w rzeczywistości (jeżeli w chwili początkowej ciało było w spoczynku).

Przykład 1. Pręt ciężki AB, leżący na płaszczyźnie pionowej, opiera się na płaszczyznach poziomej i pionowej. Współczynniki tarcia w A i B są f_1 i f_2. Zbadać warunki równowagi.



Weźmy pod uwagę stożki tarcia w A i B. Tworzące tych stożków są nachylone do normalnych w A i B pod kątami φ_1 i φ_2, gdzie $\operatorname{tg}\varphi_1 = f_1$ i $\operatorname{tg}\varphi_2 = f_2$. Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w A i B muszą leżeć wewnątrz lub na powierzchni tych stożków.

Na pręt AB działają trzy siły: $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ i ciężar $\bar{Q}$, zaczepiony w środku ciężkości S.

Jeżeli pręt jest w równowadze, to kierunki tych sił przechodzą przez jeden punkt C (str. 250). Punkt ten musi oczywiście leżeć we wspólnym obszarze obu stożków tarcia (p. obszar zacieniowany na rysunku), gdyż kierunki reakcyj $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ mogą się tylko przecinać w tym obszarze. Kierunek siły ciężkości musi zatem przechodzić przez obszar wspólny obu stożków tarcia.

Na odwrót, jeżeli kierunek ciężaru $\bar{Q}$ przechodzi przez wspólny obszar stożków tarcia, to pręt może pozostawać w równowadze. Obierzmy bowiem na pionie przechodzącym przez S dowolny punkt C wewnątrz wspólnego obszaru stożków tarcia. Łatwo widzieć, że mogą wystąpić reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, mające kierunek AC i BC i równoważące ciężar $\bar{Q}$. A więc pręt może w tym przypadku pozostawać w równowadze.

Gdyby środek ciężkości leżał w takim punkcie S', że pion przechodzący przez ten punkt nie przecinałby wspólnego obszaru stożków tarcia, to równowaga pręta byłaby niemożliwa.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym dla równowagi pręta jest to, by kierunek ciężaru przechodził przez wspólny obszar stożków tarcia.*

Położmy: $AB = l$, $AS = d$, $BS = d'$ i oznaczmy przez α kąt, jaki AB tworzy z poziomem. Obierzmy osie x i y układu współrzędnych jak na rysunku i załóżmy, że pręt jest w równowadze. Z warunków rzutów i momentu względem O otrzymamy:

$$R_{1_x} + R_{2_x} = 0, \qquad R_{1_y} + R_{2_y} - Q = 0, \tag{5}$$

oraz $-R_{1_y} d \cos\alpha + R_{2_x} l \sin\alpha + Qd' \cos\alpha = 0$ czyli

$$-R_{1_y} d + R_{2_x} l \operatorname{tg}\alpha + Qd' = 0. \tag{6}$$

Mamy ponadto nierówności następujące:

$$(7) \qquad |R_{1_x}| \leqslant R_{1_y} f_1, \qquad |R_{2_y}| \leqslant R_{2_x} f_2.$$

Ze wzorów (5) i (6) nie możemy reakcyj wyznaczyć. Związki (5)-(7) pozwalają nam tylko podać granice, których nie mogą przekroczyć składowe reakcyj.

Oznaczmy przez x_0 odciętą punktu S, a przez ξ odciętą punktu G, w którym przecinają się tworzące skrajne stożków tarcia. Równowaga nastąpi, jeżeli

$$(8) \qquad \xi \leqslant x_0.$$

Aby wyznaczyć ξ, napiszmy równania prostych BG i AG:

$$y = f_2 x + l \sin\alpha, \qquad y = -(x - l\cos\alpha)/f_1.$$

Punkt G jest punktem przecięcia tych prostych, więc

$$(9) \qquad \xi = \frac{1 - f_1 \operatorname{tg}\alpha}{1 + f_1 f_2} l \cos\alpha.$$

Ponieważ zaś $x_0 = d' \cos\alpha$, więc nierówność (8) przyjmuje postać

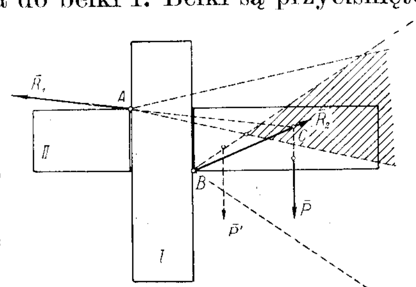
$$(10) \qquad (1 - f_1 \operatorname{tg}\alpha)/(1 + f_1 f_2) \leqslant d'/l.$$

Równowaga nastąpi, jeżeli lewa strona tej nierówności jest liczbą ujemną lub zerem. W tym przypadku jest $1 - f_1 \operatorname{tg}\alpha \leqslant 0$, więc $1/f_1 \leqslant \operatorname{tg}\alpha$ czyli $\operatorname{ctg}\varphi_1 \leqslant \operatorname{tg}\alpha$, zatem $\pi/2 - \varphi_1 \leqslant \alpha$.

Jeżeli więc $\pi/2 - \varphi_1 \leqslant \alpha$, to równowaga nastąpi. Jeżeli zaś $\pi/2 - \varphi_1 > \alpha$, to lewa strona nierówności (10) będzie dodatnia i równowaga nie zajdzie przy zbyt małym d'.

Wyniki te łatwo sprawdzić na rysunku (str. 272).

Przykład 2. Belka I przechodzi luźno przez wycięcie w belce II. Na belkę II działa siła $\overline{P}$ równoległa do belki I. Belki są przyciśnięte do siebie w punktach A i B.



Wyznaczmy stożki tarcia w A i B. Jeżeli kierunek siły $\overline{P}$ przejdzie przez obszar wspólny stożków tarcia, to w A i B wystąpią działające na belkę II reakcje $\overline{R}_1$ i $\overline{R}_2$, które zrównoważą siłę $\overline{P}$. Wówczas belka II się nie poruszy: nastąpi t. zw. *zacinanie*.

Z rys. łatwo widzieć, że zacinania nie będzie, jeżeli siła $\overline{P}'$ będzie miała początek w pobliżu belki I i będzie do niej równoległa. Wtedy bowiem kierunek siły $\overline{P}'$ nie przejdzie przez wspólną część obu stożków tarcia; równowaga nie będzie więc możliwa.

§ 11. Warunki równowagi nie zawierające reakcji. Warunek równowagi sił działających na ciało sztywne, podany na str. 261, wyraża związek zachodzący między siłami działającymi a reakcjami. Obecnie podamy kilka przykładów, w których warunki równowagi sił działających można będzie odnieść do samych tylko sił działających z pominięciem reakcji.

Ciało o punkcie nieruchomym. Niech ciało sztywne ma jeden punkt unieruchomiony, np. punkt O. Możemy więc przyjąć, że ciało jest swobodne i że w punkcie O działa reakcja $\bar{R}$, przytrzymująca punkt O.

Załóżmy dalej, że ciało jest w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$. Siły te równoważą się zatem z reakcją $\bar{R}$. Z warunków równowagi wynika, że zarówno suma sił, jak i moment względem punktu O, są równe zeru czyli:

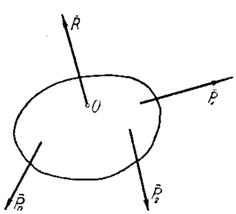
(1) $$\bar{R} + \Sigma \bar{P}_i = 0,$$

(I) $$\Sigma \operatorname{Mom}_O \bar{P}_i = 0.$$

W równaniu (I) nie występuje reakcja $\bar{R}$, gdyż moment jej względem O (jako siły o początku O) jest zerem. Z równania (1) możemy wyznaczyć $\bar{R}$. Mamy

(2) $$\bar{R} = -\Sigma \bar{P}_i.$$

Równanie (I) stanowi warunek konieczny, jaki muszą spełniać siły działające $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ w przypadku równowagi.



Dowiedziemy teraz, że warunek (I) jest również warunkiem wystarczającym równowagi.

Załóżmy, że układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ spełnia równanie (I), czyli że moment układu tych sił względem O jest zerem. Wynika stąd, że siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ mają wypadkową $\bar{P} = \Sigma \bar{P}_i$ o początku w O (str. 26). Otóż siła $\bar{P}$, zaczepiona w O, nie może poruszyć danego ciała, będącego w spoczynku, gdyż punkt O jest nieruchomy. Układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ (równoważny sile $\bar{P}$) jest zatem w równowadze.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układ sił, działających na ciało sztywne unieruchomione w jednym punkcie O, był w równowadze, jest, by moment ogólny sił działających względem punktu O był zerem* (czyli aby układ miał wypadkową przechodzącą przez O).

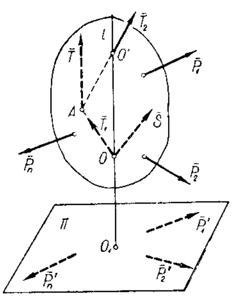
Ciało o osi nieruchomej. Niech ciało sztywne ma unieruchomioną pewną prostą l (wystarczy w tym celu np. unieruchomić dwa punkty tej prostej). Ciało sztywne może się wówczas tylko obracać około osi l. Możemy przyjąć, że ciało jest swobodne i że w punktach położonych na osi zaczepione są siły reakcyjne, dzięki którym oś jest nieruchoma.

Załóżmy, że ciało jest w równowadze pod działaniem sił $\{\overline{P}_i\}$. Zatem siły $\{\overline{P}_i\}$ równoważą się z siłami reakcyjnymi. Z warunków równowagi wynika, że moment ogólny tych sił względem osi l jest równy zeru. Ponieważ moment sił reakcyjnych względem osi l, jako sił o początkach położonych na osi, jest zerem, więc moment ogólny sił $\{\overline{P}_i\}$ względem osi l jest zerem czyli

$$\text{(II)} \qquad \Sigma\, \mathrm{Mom}_l\, \overline{P}_i = 0.$$

W równaniu (II) siły reakcyjne nie występują. Równanie to jest zatem warunkiem koniecznym, jaki musi spełniać dany układ sił $\{\overline{P}_i\}$, by ciało było w równowadze.

Udowodnimy teraz, że warunek (II) jest również warunkiem wystarczającym równowagi.



Załóżmy więc, że dowolny układ sił $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ spełnia warunek (II). Obierzmy dowolny punkt O na osi l. Na mocy twierdzenia o redukcji (str. 241), dany układ sił jest równoważny układowi złożonemu z dwóch sił $\overline{S}$ i $\overline{T}$, z których $\overline{S}$ ma początek w O. Ponieważ moment ogólny sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ względem l jest zerem, więc moment ogólny sił $\overline{S}$ i $\overline{T}$ względem l jest również zerem. Z uwagi na to, że $\mathrm{Mom}_l\, \overline{S} = 0$ (gdyż siła $\overline{S}$ zaczepiona jest w punkcie O, położonym na l), musi też być $\mathrm{Mom}_l\, \overline{T} = 0$. Zatem siła $\overline{T}$ bądź przecina l, bądź jest równoległa do l.

Weźmy pod uwagę na osi l dowolny punkt $O' \neq O$. Niechaj A będzie początkiem siły $\overline{T}$. Ponieważ siła $\overline{T}$ leży w płaszczyźnie przechodzącej przez l i A, więc możemy rozłożyć $\overline{T}$ na dwie siły $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ o kierunkach OA i $O'A$, a następnie przesunąć ich punkty zaczepienia do O i O'. Wykazaliśmy w ten sposób, że układ sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ równoważny jest układowi sił, zaczepionych w punktach osi l.

Ponieważ jest oczywistym, że siły zaczepione w punktach osi l, unieruchomionej z założenia, nie poruszą ciała będącego w spoczynku, więc dany układ sił działających $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ jest w równowadze.

Zatem: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układ sił działających na ciało sztywne, mające oś nieruchomą, był w równowadze, jest to, by moment ogólny układu sił względem tej osi był zerem.*

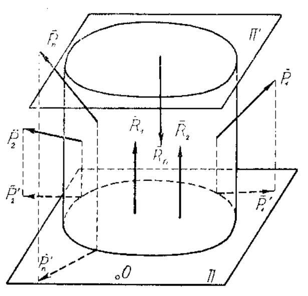
Uwaga. Niech Π będzie dowolną płaszczyzną prostopadłą do prostej l, a O_1 punktem przebicia płaszczyzny Π osią l. Oznaczmy przez $\overline{P}'_1, \overline{P}'_2, \dots$ rzuty na płaszczyznę Π sił działających $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ Z określenia momentu względem osi (str. 237) wynika, że moment siły $\overline{P}'_i$ względem O_1 równa się momentowi siły $\overline{P}_i$ względem l. Zatem moment ogólny sił $\{\overline{P}'_i\}$ względem punktu O_1 równy jest momentowi ogólnemu sił $\{\overline{P}_i\}$ względem osi l.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu sił $\{\overline{P}_i\}$ jest to, by moment ogólny sił $\{\overline{P}'_i\}$ względem O_1 był zerem.*

Warunek ten ma taką postać, jak gdyby rzut ciała na płaszczyznę Π miał punkt O_1 unieruchomiony i jak gdyby na rzut ciała działały rzuty sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$

Aby wiedzieć, czy układ sił działających na ciało sztywne, mające oś nieruchomą, jest w równowadze, wystarczy więc znać tylko rzuty sił działających na płaszczyznę prostopadłą do osi i punkt przecięcia osi z tą płaszczyzną.

Ciało płasko prowadzone. Niechaj ciało sztywne może się poruszać tylko w ten sposób, że tor każdego punktu jest płaski i leży w płaszczyźnie równoległej do pewnej płaszczyzny stałej Π.



Mówimy wówczas, że ciało może odbywać jedynie *ruch płaski* lub że jest *płasko prowadzone*, a płaszczyznę Π nazywamy *płaszczyzną kierowniczą*.

Przykładem ciała płasko prowadzonego jest walec, którego podstawy leżą na dwóch płaszczyznach równoległych Π i Π'. Jeżeli nie ma tarcia, to reakcje płaszczyzn Π i Π' są do tych płaszczyzn prostopadłe.

Założymy ogólnie, że *ilekroć nie ma tarcia, reakcje, dzięki którym ciało wykonywać może tylko ruch płaski, są prostopadłe do płaszczyzny kierowniczej Π.*

Oczywistym jest zatem, że układ sił prostopadłych do płaszczyzny kierowniczej jest w równowadze, t. zn. że siły prostopadłe do Π nie mogą poruszyć ciała płasko prowadzonego, będącego w spoczynku.

Niechaj ciało płasko prowadzone będzie w równowadze pod działaniem układu sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ Siły działające równoważą się więc z reakcjami $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \dots$, czyli tworzą układ równoważny zeru. Wynika stąd, że rzuty sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ i reakcyj $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \dots$ na płaszczyznę kierowniczą Π tworzą również układ równoważny zeru. Ponieważ rzuty reakcyj są zerami (gdyż reakcje są prostopadłe do Π), więc same rzuty $\overline{P}'_1, \overline{P}'_2, \dots$ sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ na płaszczyznę kierowniczą też tworzą układ równoważny zeru.

Niech O będzie dowolnym punktem płaszczyzny Π. Jeżeli siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ są w równowadze, otrzymamy:

$$\Sigma \overline{P}'_i = 0, \qquad \Sigma \operatorname{Mom}_O \overline{P}'_i = 0. \tag{3}$$

Warunek (3) jest więc warunkiem koniecznym równowagi układu sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ Udowodnimy, że jest on również warunkiem dostatecznym.

Załóżmy w tym celu, że układ sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ spełnia równania (3). Na mocy twierdzenia o redukcji układ ten jest równoważny układowi złożonemu z siły $\overline{P} = \Sigma \overline{P}_i$ i pewnej pary $\overline{U}, -\overline{U}$. Oznaczmy przez $\overline{P}'$, $\overline{U}'$ i $-\overline{U}'$ rzuty tych sił na płaszczyznę Π. Na mocy (3) otrzymamy:

$$\overline{P}' = 0, \qquad \operatorname{Mom}(\overline{U}', -\overline{U}') = 0.$$

Zatem $\overline{P}$ jest prostopadłe do Π; para zaś $\overline{U}, -\overline{U}$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do Π. Możemy więc parę $\overline{U}, -\overline{U}$ obrócić w jej płaszczyźnie (nie zmieniając momentu) tak, aby w nowym położeniu obie siły były prostopadłe do Π. Oznaczając przez $\overline{V}, -\overline{V}$ nową parę równoważną dawnej, widzimy, że układ sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ równoważny jest układowi sił $\overline{P}$, $\overline{V}$ i $-\overline{V}$, prostopadłych do Π. Wynika stąd, że układ $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots$ jest w równowadze.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układ sił działających na ciało sztywne płasko prowadzone był w równowadze, jest by rzuty tych sił na płaszczyznę kierowniczą tworzyły układ równoważny zeru.*

Aby więc zbadać, czy układ sił działających na ciało płasko prowadzone jest w równowadze, wystarczy znać tylko rzuty sił działających na płaszczyznę kierowniczą.

Przykład 1. Dźwignia. Belkę mającą unieruchomioną oś poziomą, do niej prostopadłą, nazywamy *dźwignią*.

Zakładamy, że siły działające na dźwignię leżą w jednej płaszczyźnie Π, prostopadłej do osi obrotu i przechodzącej przez środek ciężkości.

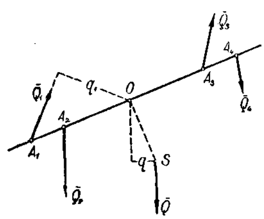
Oznaczmy przez $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots$ siły działające na belkę, zaczepione w punktach $A_1, A_2, \ldots$, przez $\bar{Q}$ ciężar belki, zaczepiony w jej środku ciężkości S, przez $Q_1, Q_2, \ldots, Q$ wartości bezwzględne, a przez $q_1, q_2, \ldots, q$ ramiona tych sił względem punktu przebicia O płaszczyzny Π osią obrotu (rys. 1).

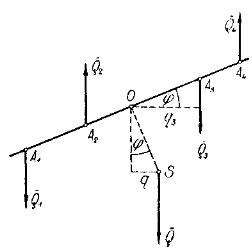
Moment układu sił $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots, \bar{Q}$ względem osi obrotu jest w tym przypadku równy momentowi tego układu względem O. Siły działające będą zatem w równowadze, jeżeli suma ich momentów względem O będzie zerem. Warunek równowagi możemy więc napisać w postaci

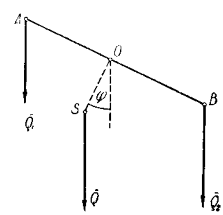
$$\pm Q_1 q_1 \pm Q_2 q_2 \pm \ldots \pm Q q = 0, \tag{4}$$

gdzie znaki + i — przyjmujemy według reguły podanej na str. 238.

Załóżmy, że środek ciężkości leży pod osią obrotu, gdy belka ma położenie poziome. Wynika stąd oczywiście, że dla belki, na którą nie działają żadne siły (oprócz ciężkości), położenie poziome jest położeniem równowagi. Załóżmy ponadto, że siły działające mają kierunek pionowy (rys. 2).


1.


2.


3.

Niech φ oznacza kąt, jaki belka tworzy z poziomem. Ponieważ OS jest prostopadłe do belki, więc OS tworzy z pionem również kąt φ. Mamy zatem:

$$q_1 = OA_1 \cos\varphi, \qquad q_2 = OA_2 \cos\varphi, \qquad \ldots, \qquad q = OS \sin\varphi,$$

skąd przez podstawienie w (4)

$$(\pm Q_1 \cdot OA_1 \pm Q_2 \cdot OA_2 \pm \ldots) \cos\varphi \pm Q \cdot OS \sin\varphi = 0,$$

czyli, dzieląc przez $\cos\varphi$,

(5) $$\pm Q_1\cdot OA_1 \pm Q_2\cdot OA_2 \pm \ldots \pm Q\cdot OS \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Znając siły $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots, \bar{Q}$, możemy obliczyć z równania (5) kąt φ, jaki belka tworzy z poziomem w położeniu równowagi.

W szczególności, gdy na belkę działają tylko dwie siły $\bar{Q}_1$ i $\bar{Q}_2$, skierowane w dół i uczepione po przeciwnych stronach belki (jak na rys. 3, str. 278), otrzymamy z (5) $-Q_1\cdot OA + Q_2\cdot OB - Q\cdot OS\cdot\operatorname{tg}\varphi = 0$ czyli

(6) $$\operatorname{tg}\varphi = (Q_2\cdot OB - Q_1\cdot OA)/Q\cdot OS.$$

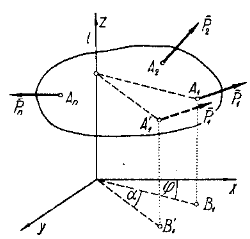
Jeżeli $\varphi = 0$ (t. j. jeżeli belka jest w równowadze w położeniu poziomym), otrzymamy

$$Q_1\cdot OA = Q_2\cdot OB.$$

W szczególności więc, jeżeli $OA = OB$, to $Q_1 = Q_2$.

Na tej zasadzie polega przyrząd zwany *wagą*, służący do porównywania ciężarów dwóch ciał, a pośrednio ich mas.

Przykład 2. Ciało sztywne, mające oś l unieruchomioną, jest w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ o punktach zaczepienia $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Podać warunki konieczne i dostateczne, jakie muszą spełniać te siły, by ciało pozostawało nadal w równowadze, jeżeli obrócimy je około osi l o dowolny kąt α, nie zmieniając przy tym kierunków, zwrotów, wielkości, ani punktów zaczepienia (w ciele) tych sił.



Przyjmijmy oś l za oś z układu współrzędnych i oznaczmy przez x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... współrzędne punktów zaczepienia $A_1, A_2, \ldots$, a przez x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2', ... współrzędne punktów $A_1', A_2', \ldots$, w które przeszły punkty $A_1, A_2, \ldots$ przy obrocie ciała o kąt α wokoło osi l. Niech B_1 i B_1' będą rzutami punktów A_1 i A_1' na płaszczyznę xy, a φ kątem między OB a osią x. Kładąc $r_1 = OB_1 = OB_1'$, mamy:

(7) $$x_1 = r_1\cos\varphi, \qquad y_1 = r_1\sin\varphi,$$

(8) $$x_1' = r_1\cos(\varphi+\alpha), \qquad y_1' = r_1\sin(\varphi+\alpha), \qquad z_1 = z_1'.$$

Zatem $x_1' = r_1\cos\varphi\cos\alpha - r_1\sin\varphi\sin\alpha$, skąd na mocy (7)

(9) $$x_1' = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha \quad \text{i podobnie} \quad y_1' = y_1\cos\alpha + x_1\sin\alpha.$$

Analogiczne wzory otrzymamy dla pozostałych punktów $A_2', A_3', \ldots$

Ponieważ po obrocie o kąt α ciało ma zachować równowagę, więc moment sił względem osi z musi być zerem czyli

$$\Sigma(P_{i_x} y'_i - P_{i_y} x'_i) = 0.$$

Podstawiając zamiast x'_i, y'_i wyrażenia ze wzorów (9), otrzymamy

(10) $$\cos\alpha\, \Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) + \sin\alpha\, \Sigma(P_{i_x} x_i + P_{i_y} y_i) = 0.$$

Ponieważ równowaga zachodzi dla $\alpha = 0$, więc wstawiając $\alpha = 0$ do wzoru (10), otrzymamy

(11) $$\Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = 0.$$

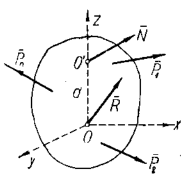
Z (10) mamy dla $\alpha = \pi/2$

(12) $$\Sigma(P_{i_x} x_i + P_{i_y} y_i) = 0.$$

Na odwrót, jeżeli zachodzą warunki (11) i (12), to zachodzi oczywiście warunek (10) dla każdego α. Równania (11) i (12) są więc szukanymi warunkami koniecznymi i wystarczającymi.

Wyznaczanie reakcyj działających na oś nieruchomą. Niech ciało sztywne ma prostą l unieruchomioną w dwóch punktach O i O'. Możemy wówczas przyjąć, że siły reakcyjne zaczepione są w punktach O i O'.

Załóżmy, że układ $\{\bar{P}_i\}$ sił działających na ciało jest w równowadze.



Niech punkt O będzie początkiem układu współrzędnych, a oś l osią z-ów. Oznaczmy przez x_i, y_i, z_i współrzędne punktów zaczepienia sił $\{P_i\}$, przez $\bar{R}$ i $\bar{N}$ reakcje w punktach O i O', a przez d długość odcinka OO'.

Ponieważ układ sił $\{P_i\}$ wraz z reakcjami $\bar{R}$ i $\bar{N}$ jest w równowadze, więc tworząc rzuty sumy i momentu ogólnego względem O na osie układu współrzędnych, otrzymamy sześć równań:

(I) $$\Sigma P_{i_x} + R_x + N_x = 0,$$
(II) $$\Sigma P_{i_y} + R_y + N_y = 0,$$
(III) $$\Sigma P_{i_z} + R_z + N_z = 0,$$

(IV) $$\Sigma(P_{i_y} z_i - P_{i_z} y_i) + N_y d = 0,$$
(V) $$\Sigma(P_{i_z} x_i - P_{i_x} z_i) - N_x d = 0,$$
(VI) $$\Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = 0.$$

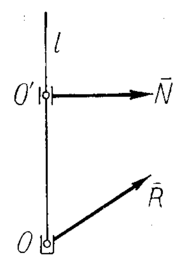
Z równań (IV) i (V) możemy wyznaczyć N_x i N_y. Następnie wyznaczamy R_x i R_y z równań (I) i (II). Wreszcie obliczamy R_z+N_z z równania (III).

Widzimy więc, że równania powyższe nie pozwalają wyznaczyć reakcji. Niewiadomych jest wprawdzie sześć (R_x, R_y, R_z i N_x, N_y, N_z), t. j. tyle ile równań, występują one jednak tylko w pięciu równaniach. Równanie (VI) wyraża warunek równowagi sił działających. Z równań (I)-(V) możemy wyznaczyć tylko składowe reakcji, prostopadłe do osi l, i sumę składowych równoległych do osi l.

Zadania, w których siły reakcyjne nie dają się wyznaczyć z warunków równowagi, nazywamy *statycznie niewyznaczalnymi*.

A więc obliczenie reakcyj ciała sztywnego, unieruchomionego w dwóch punktach jest statycznie niewyznaczalne.

Jeżeli założymy, że dane ciało nie jest ciałem sztywnym, lecz ciałem mogącym ulegać zniekształceniom, to opierając się na teorii sprężystości, moglibyśmy siły reakcyjne obliczyć.

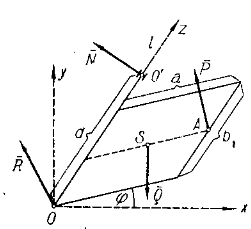


1.

Zadanie nasze możemy uczynić statycznie wyznaczalnym, przyjmując, że punkt O' jest unieruchomiony w t. zw. *łożysku szyjnym* bez tarcia.

Reakcja $\bar{N}$ jest wtedy prostopadła do osi l. Mamy w tym przypadku $N_z=0$, możemy więc wyznaczyć R_z z równania (III).

Przykład 3. Płyta ciężka prostokątna ma oś poziomą l unieruchomioną w punktach O i O' (łożysko szyjne). Środek boku równoległego do osi jest punktem zaczepienia siły $\bar{P}$ prostopadłej do płyty. Dane są: ciężar $\bar{Q}$ o początku w środku S prostokąta, boki prostokąta a i b oraz długość $d=OO'$. Wyznaczyć w położeniu równowagi reakcje $\bar{R}$ i $\bar{N}$ (w O i O') oraz kąt φ, jaki płyta tworzy z poziomem.



2.

Niech O będzie początkiem, a oś l osią z układu współrzędnych; nadajmy osi x kierunek poziomy, a osi y kierunek pionowy ku górze. Będziemy mogli zastosować równania (I)-(VI), str. 280.

Punkt S ma współrzędne $\frac{1}{2}a\cos\varphi$, $\frac{1}{2}a\sin\varphi$, $\frac{1}{2}b$; punkt A zaś $a\cos\varphi$, $a\sin\varphi$, $\frac{1}{2}b$. Mamy:

$$Q_x=0, \quad Q_y=-Q, \quad Q_z=0, \quad \text{gdzie} \quad Q=|\overline{Q}|;$$
$$P_x=-P\sin\varphi, \quad P_y=P\cos\varphi, \quad P_z=0, \quad \text{gdzie} \quad P=|\overline{P}|.$$

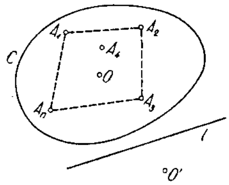
Z uwagi, że $N_z=0$, dostaniemy na mocy wzorów (I)-(VI), str. 280:

$$-P\sin\varphi+R_x+N_x=0, \qquad P\cos\varphi-Q+R_y+N_y=0, \qquad R_z=0,$$
$$\tfrac{1}{2}bP\cos\varphi-\tfrac{1}{2}Qb+N_yd=0, \quad \tfrac{1}{2}bP\sin\varphi-N_xd=0, \quad -Pa+\tfrac{1}{2}Qa\cos\varphi=0.$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $\cos\varphi=2P/Q$, a z pozostałych równań wyznaczamy R_x, R_y i N_x, N_y. Mamy $R_z=N_z=0$. Oczywiście równowaga jest możliwa, jeżeli $2P/Q\leqslant 1$, t. j. jeżeli $P\leqslant Q/2$.

§ 12. Równowaga ciał ciężkich podpartych. Jeżeli ciało sztywne, na które nie działają żadne siły prócz siły ciężkości, opiera się na płaszczyźnie poziomej Π i jest w równowadze, to siły reakcyjne z jakimi płaszczyzna działa na ciało (w punktach podparcia) równoważą się z siłami ciężkości.

Załóżmy, że płaszczyzna podpierająca Π jest gładka. Reakcje są wtedy prostopadłe do płaszczyzny; mają więc wypadkową $\overline{F}$, zaczepioną w pewnym punkcie O płaszczyzny Π. Punkt O nazwaliśmy *środkiem ciśnień* (str. 264). Siły ciężkości działające na dane ciało sztywne mają wypadkową $\overline{Q}$, zaczepioną w środku ciężkości S.



Gdy ciało jest w równowadze, siły $\overline{F}$ i $\overline{Q}$ równoważą się nawzajem. Zatem $\overline{F}+\overline{Q}=0$, a ponadto $\overline{F}$ i $\overline{Q}$ leżą na jednej prostej. Wobec tego środek ciśnień leży w punkcie przecięcia się kierunku siły $\overline{Q}$ z płaszczyzną Π. Środek ciśnień O jest więc rzutem środka ciężkości S na płaszczyznę podpierającą Π.

Jeżeli ciało opiera się na płaszczyźnie Π tylko w jednym punkcie O i jest w równowadze, to reakcja zaczepiona jest w O. Zatem środek ciężkości leży wówczas nad punktem oparcia.

Niech teraz ciało opiera się na płaszczyźnie Π w punktach $A_1, A_2, \ldots$ i niech C będzie dowolną linią zamkniętą wypukłą, otaczającą wszystkie punkty oparcia $A_1, A_2, \ldots$. Udowodnimy, że wówczas środek ciśnień O leży również bądź wewnątrz, bądź na samej linii C.

Przypuśćmy bowiem, że środek ciśnień leży zewnątrz linii C w punkcie O'. Poprowadźmy dowolną prostą l w płaszczyźnie Π, tak by punkt O' i linia C leżały po przeciwnych stronach prostej l.

Momenty sił reakcyjnych względem prostej l byłyby więc skierowane przeciwnie niż moment siły $\overline{F}$. Jest to jednak niemożliwe, gdyż moment ogólny sił reakcyjnych jest równy momentowi siły $\overline{F}$. Istotnie więc środek ciśnień musi leżeć wewnątrz obwodu wypukłego C. Jeżeli K jest najmniejszą linią wypukłą (na rysunku łamana A_1, A_2, A_3, A_n), w obrębie której leżą punkty oparcia[1]), to środek ciśnień leży także w obrębie tej linii. Ponieważ założyliśmy, że ciało jest w równowadze, więc kierunek siły ciężkości przechodzi przez środek ciśnień, trafia zatem również w obręb linii K.

Udowodnimy teraz, że jeżeli ciężar trafia w obręb linii K, to wystąpią reakcje, które zrównoważą ciężar.

Rozpatrzymy dwa przypadki:

1⁰ Ciało podparte jest w dwóch punktach A i B. W tym przypadku linią K jest odcinek AB. Jeżeli kierunek siły ciężkości przechodzi przez punkt G odcinka AB, to istnieją dwie siły reakcyjne $\overline{R}_1$ i $\overline{R}_2$ o początkach w A i B, skierowane pionowo w górę. Siły te można wyznaczyć graficznie jak na str. 257, lub rachunkowo jak w przykładzie 4, str. 267. Wynika stąd na mocy zasady podanej na str. 263, że reakcje zrównoważą ciężar.

2⁰ Ciało podparte jest w $n>2$ punktach. Jeżeli punkty te leżą na jednej prostej, to oznaczając przez A i B skrajne punkty oparcia, możemy postąpić jak w przypadku 1⁰. Przypuśćmy więc, że punkty oparcia nie leżą wszystkie na jednej prostej. Jeżeli siła ciężkości trafia w obręb linii K w punkcie O, to możemy znaleźć takie trzy punkty oparcia, że punkt O leżeć będzie w obrębie trójkąta, którego punkty te są wierzchołkami (punkty A_1, A_3, A_n na rysunku). Jak wykażemy za chwilę (str. 284, przykład 4), można wówczas wyznaczyć reakcje, zaczepione w wierzchołkach tego trójkąta i równoważące siłę ciężkości.

Mamy więc twierdzenie następujące:

Jeżeli ciężkie ciało sztywne opiera się na płaszczyźnie poziomej gładkiej, to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby reakcje płaszczyzny mogły zrównoważyć ciężar ciała jest, by siła ciężkości trafiała w obręb najmniejszej linii wypukłej K, obejmującej wszystkie punkty oparcia.

---

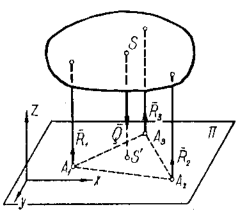
[1]) W geometrii dowodzi się, że linia taka zawsze istnieje i mieści się wewnątrz każdej linii wypukłej, obejmującej punkty oparcia.

Ogólniej: niech ciało sztywne opiera się na powierzchni poziomej gładkiej i niech oprócz siły ciężkości działają na nie inne jeszcze siły. Jeżeli ciało jest w równowadze, to wypadkowa reakcyj $\bar{F}$ równoważy siły działające. Wynika stąd, że siły działające na ciało mają wypadkową pionową $-\bar{F}$, której kierunek przechodzi przez środek ciśnień O, a więc trafia w obręb linii K. Na odwrót, jeżeli siły działające mają wypadkową pionową, skierowaną w dół i trafiającą w obręb linii K, to wystąpią reakcje, równoważące siły działające na ciało. Dowód przeprowadza się jak poprzednio.

Przykład 4. Stołek o trzech nogach opiera się na podłodze Π. Wyznaczyć reakcje w punktach oparcia A_1, A_2, A_3 przy założeniu, że nie ma tarcia.

Oznaczmy przez S środek ciężkości stołka, przez S' rzut S na Π, przez $\bar{Q}$ ciężar stołka, a przez $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$ reakcje (rys. 1).

Zadanie rozwiążemy najprościej, obliczając momenty ogólne sił względem prostych A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1; oczywiście momenty te są zerami.



1.

Niech h_3 oznacza odległość A_3 od A_1A_2, a w_3 odległość S' od A_1A_2. Tworząc moment względem osi A_1A_2, otrzymamy:

$$R_3 h_3 - Q w_3 = 0, \quad \text{gdzie} \quad R_3 = |\bar{R}_3| \quad \text{i} \quad Q = |\bar{Q}|,$$

gdyż momenty sił $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ są zerami. Zatem

$$R_3 = Q w_3 / h_3.$$

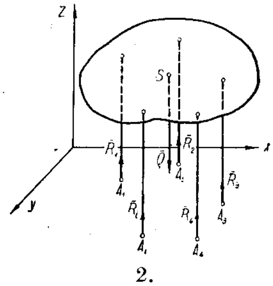
Analogicznie otrzymamy:

$$R_1 = Q w_1 / h_1 \qquad \text{i} \qquad R_2 = Q w_2 / h_2.$$

Przykład 5. Niech ciało sztywne spoczywa na płaszczyźnie poziomej Π na n punktach oparcia $A_1, A_2, \dots, A_n$. Przyjmijmy płaszczyznę Π za płaszczyznę xy układu współrzędnych (x, y, z) i oznaczmy przez $x_1, y_1, 0, x_2, y_2, 0, \dots, x_n, y_n, 0$ współrzędne punktów oparcia $A_1, A_2, \dots, A_n$, zaś przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości S (rys. 2).

Niechaj $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_n$ oznaczają reakcje, $\bar{Q}$ ciężar, zaś $R_1, R_2, \dots, R_n$ i Q wartości bezwzględne tych sił.

Tworząc rzuty na osie układu współrzędnych, otrzymamy dla rzutu na oś z



2.

$$(13) \qquad R_1 + R_2 + \dots + R_n - Q = 0.$$

Pozostałe dwa równania odpadają, gdyż dają tożsamościowo 0.

Tworząc następnie momenty względem początku układu współrzędnych, otrzymamy tylko dwa równania:

(14) $-R_1y_1-R_2y_2-\ldots+Qy_0=0, \qquad R_1x_1+R_2x_2+\ldots-Qx_0=0,$

gdyż momen. sił względem osi z jest zerem.

Mamy wobec tego trzy tylko równania dla wyznaczenia reakcyj. Jeżeli więc $n>3$, to reakcyj nie będziemy mogli wyznaczyć. Zadanie wyznaczenia reakcyj w przypadku np. stołu opierającego się na czterech nogach jest więc statycznie niewyznaczalnym (p. str. 281).

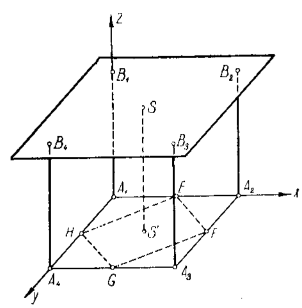
Jeżeli natomiast ciało podparte w $n>3$ punktach nie jest sztywne, to reakcje można wyznaczyć, opierając się na teorii sprężystości. Okażemy to na przykładzie następnym.

Przykład 6. Stół prostokątny opiera się na czterech nogach w punktach A_1, A_2, A_3, A_4 płaszczyzny poziomej gładkiej Π.

Oznaczmy przez $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_4$ reakcje, przez $\bar{Q}$ ciężar, a przez R_1, R_2, R_3, R_4, Q wartości bezwzględne tych sił. Załóżmy, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami prostokąta i połóżmy:

(15) $$A_1A_2=A_3A_4=a, \qquad A_1A_4=A_2A_3=b.$$

Przyjmijmy A_1 za początek układu współrzędnych, a proste A_1A_2 i A_1A_4 za osie x i y, nadając osi z zwrot ku górze. Oznaczmy wreszcie przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości S płyty danego stołu.



Tworząc rzuty sił na osie układu współrzędnych, oraz momenty sił względem tych osi, otrzymamy (por. równania (13) i (14) przykładu 5):

(16) $$R_1+R_2+R_3+R_4-Q=0,$$

(17) $$-(R_3+R_4)b+Qy_0=0, \quad (R_2+R_3)a-Qx_0=0.$$

Z równań tych wyznaczyć reakcyj nie można.

Załóżmy jednak, że płyta stołu i płaszczyzna Π (na której opierają się nogi stołu) są sztywne, natomiast, że nogi stołu sztywne nie są, lecz ulegają ściśnieniu, i że reakcje są proporcjonalne (co do wielkości) do skrócenia poszczególnych nóg.

Jeżeli więc przez l oznaczymy pierwotną długość nóg, zaś przez z_1, z_2, z_3, z_4 ich długości po ściśnieniu, to skrócenia wyniosą $l-z_1$, $l-z_2$, $l-z_3$, $l-z_4$, skąd w myśl założenia:

$$(18)\qquad R_1=m(l-z_1),\quad R_2=m(l-z_2),\quad R_3=m(l-z_3),\quad R_4=m(l-z_4),$$

gdzie m jest współczynnikiem proporcjonalności.

Równania (16), (17) i (18) stanowią układ siedmiu równań o ośmiu niewiadomych R_1, R_2, R_3, R_4 i z_1, z_2, z_3, z_4. Ósme równanie otrzymamy, wyrażając, że punkty B_1, B_2, B_3, B_4, w których płyta stołu opiera się na nogach, leżą w jednej płaszczyźnie; założyliśmy bowiem, że płyta stołu jest sztywna.

Punkty B_1, B_2, B_3 i B_4 mają współrzędne $0, 0, z_1$, $a, 0, z_2$, a, b, z_3 i $0, b, z_4$. Jak wiadomo z geometrii analitycznej, warunek by punkty te leżały w jednej płaszczyźnie, wyraża się wzorem

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & z_1, & 1 \\ a, & 0, & z_2, & 1 \\ a, & b, & z_3, & 1 \\ 0, & b, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Obliczając wyznacznik, otrzymamy:

$$(19)\qquad z_1-z_2+z_3-z_4=0.$$

Z równań (16)-(19) możemy już wyznaczyć niewiadome reakcje. Otrzymamy:

$$(20)\qquad \begin{aligned} z_1&=l+\frac{1}{4m}Q\left[-3+2\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\right], & z_2&=l+\frac{1}{4m}Q\left[-1-2\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\right],\\ z_3&=l+\frac{1}{4m}Q\left[1-2\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\right], & z_4&=l+\frac{1}{4m}Q\left[-1+2\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\right], \end{aligned}$$

$$(21)\qquad \begin{aligned} R_1&=\frac{1}{4}\,Q\left[3-2\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\right], & R_2&=\frac{1}{4}\,Q\left[1+2\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\right],\\ R_3&=\frac{1}{4}\,Q\left[-1+2\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\right], & R_4&=\frac{1}{4}\,Q\left[1-2\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)\right]. \end{aligned}$$

Na to, by wzory (21) dawały na $R_1, \ldots, R_4$ wartości nieujemne, muszą zachodzić związki następujące:

$$(22)\qquad \frac{1}{2}\leqslant\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\leqslant\frac{3}{2},\qquad -\frac{1}{2}\leqslant\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Wynika stąd, że rzut środka ciężkości na płaszczyznę poziomą, t. j. punkt $S'(x_0, y_0, 0)$, musi leżeć w obrębie równoległoboku $EFGH$, którego wierzchołki są środkami boków prostokąta $A_1A_2A_3A_4$.

Przypuśćmy, że punkt S' wypada w obrębie trójkąta A_1EH (poza bokiem EH). Wówczas byłoby

$$\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}<\frac{1}{2} \quad \text{czyli} \quad 1-2\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)>0,$$

skąd na mocy (20) $z_3>l$; znaczy to, że noga A_3B_3 się wydłużyła, co oczywiście niemożliwe.

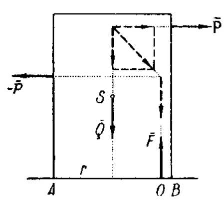
Musimy zatem przyjąć, że *stół opiera się tylko na trzech nogach*, mianowicie w punktach A_1, A_2, A_4. Kładąc $R_3=0$, otrzymamy więc z równań (17):

$$R_4=Qy_0/b, \qquad R_2=Qx_0/a,$$

z równania zaś (16)

$$R_1=Q\left[1-\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\right].$$

Przykład 7. Walec ciężki opiera się na płaszczyźnie poziomej gładkiej. Na walec działa para sił $\bar{P}$ i $-\bar{P}$ leżących w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez środek ciężkości S. Jaka może być maksymalna wielkość momentu pary, gdy walec jest w równowadze?



Oznaczmy przez $\bar{M}$ moment pary, przez $\bar{Q}$ ciężar walca, przez $\bar{F}$ wypadkową sił reakcyjnych, zaczepioną w O, a przez r promień podstawy walca.

Jeżeli walec jest w równowadze, to suma sił jest zerem, więc $\bar{F}+\bar{Q}=0$ czyli $\bar{F}=-\bar{Q}$.

Zakładając, że S leży na osi walca i kładąc $d=AO$, dostaniemy z obliczenia momentu względem A:

$$|\bar{M}|+|\bar{Q}|r-|\bar{F}|d=0.$$

Ponieważ, $|\bar{Q}|=|\bar{F}|$, więc

$$|\bar{M}|=Q(d-r),$$

gdzie $Q=|\bar{Q}|$. Ponieważ maksymalną wartością d jest $d=2r$, więc maksymalną wartością $|\bar{M}|$ jest Qr.

Jeżeli więc $|\bar{M}|>Qr$, równowaga jest niemożliwa. Jeżeli zaś $|\bar{M}|\leqslant Qr$, to, jak łatwo stwierdzić, wypadkowa sił $\bar{Q}$, $\bar{P}$ i $-\bar{P}$ jest równa $\bar{Q}$ i trafia płaszczyznę poziomą w obrębie podstawy walca. Walec może więc pozostawać w równowadze.

§ 13. Siły wewnętrzne. Przeprowadźmy przez dowolny punkt O osi obranej w danym ciele sztywnym, np. w belce, płaszczyznę Π, prostopadłą do tej osi. Płaszczyzna podzieli ciało na dwie części I i II. Załóżmy, że ciało poddane jest działaniu pewnych sił i że jest w równowadze. W wielu zagadnieniach mechaniki technicznej dogodnym jest rozpatrywać części I i II tak, jak gdyby tworzyły odrębne ciała sztywne, stykające się wzdłuż płaszczyzny przekroju Π.

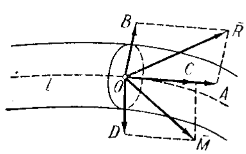
Z takiego ujęcia wynika, że część II działa na część I z pewnymi siłami. Siły te nazywamy *napięciami*.

Przyjmując punkt O za środek redukcji, możemy zastąpić napięcia przez jedną siłę $\bar{R}$ o początku O i parę sił o momencie $\bar{M}$.

Składową $\overline{OA}$ siły $\bar{R}$, prostopadłą do przekroju, nazywamy *ściskaniem* wypadkowym lub *rozciąganiem* w O, zależnie od tego, czy składowa jest skierowana do wewnątrz, czy na zewnątrz części I.

Składową $\overline{OB}$ siły $\bar{R}$, styczną do przekroju, nazywamy siłą wypadkową *zginającą* lub *ścinającą* w O.

Składową $\overline{OC}$ momentu $\bar{M}$, prostopadłą do płaszczyzny przekroju Π, nazywamy *momentem skręcającym* w O, składową zaś $\overline{OD}$ styczną do powierzchni *momentem zginającym* w O.



I.

Moment skręcający możemy uważać za moment pewnej pary sił, leżących w płaszczyźnie przekroju, zaś moment zginający za moment pary sił, leżących w płaszczyźnie stycznej do osi w punkcie O. Działanie tych par, z których pierwsza stara się ciało skręcić, a druga zgiąć, tłumaczą nam nazwy momentów.

Jeżeli ciało jest w równowadze, to siły zewnętrzne działające na część I równoważą się z napięciami. Zatem $-\bar{R}$ i $-\bar{M}$ równają się odpowiednio sumie i momentowi ogólnemu względem O sił zewnętrznych działających na część I. Znając siły zewnętrzne, możemy więc wyznaczyć $\bar{R}$ i $\bar{M}$.

Znajomość siły $\bar{R}$ i momentu $\bar{M}$ ma wielkie znaczenie w nauce o wytrzymałości. Na ogół wytrzymałość ciała jest tym bardziej zagrożona, im $\bar{R}$ i $\bar{M}$ są większe.

Napięcia, z jakimi część I działa na II, dają się zastąpić w myśl prawa akcji i reakcji sumą $-\bar{R}$ o początku O i parą o momencie $-\bar{M}$.

Przykład 1. Belka podparta w punktach A i B obciążona jest siłami $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \dots, \overline{P}_5$ skierowanymi pionowo w dół i zaczepionymi w odległościach $x_1, x_2, \dots, x_5$ od A (str. 257, rys. 1). Zakładając, że podpory są gładkie, otrzymamy (por. wzory (13) i (14), str. 267):

$$R_2=(P_1x_1+P_2x_2+\dots+P_5x_5)/d, \qquad R_1=[P_1(d-x_1)+\dots+P_5(d-x_5)]/d,$$

gdzie $AB=d$, a P_i, R_1 i R_2 oznaczają wartości bezwzględne sił i reakcyj.

Utwórzmy przekrój belki płaszczyzną prostopadłą do osi w punkcie C, odległym o x od A. Oznaczmy przez $\overline{R}$ sumę, a przez $\overline{M}$ moment względem C napięć części CB na część AC. Przyjmując, że przekrój wypada między siłą P_3 a P_4, otrzymamy:

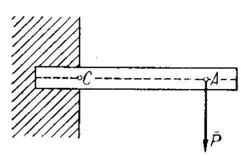
$$-\overline{R}=\overline{R}_1+\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3, \quad -\overline{M}=\mathrm{Mom}_C\,\overline{R}_1+\mathrm{Mom}_C\,\overline{P}_1+\mathrm{Mom}_C\,\overline{P}_2+\mathrm{Mom}_C\,\overline{P}_3.$$

Nadając osi y kierunek pionowy ze zwrotem ku górze, otrzymamy:

$$R_y=R_1-P_1-P_2-P_3, \qquad M=xR_1-(x-x_1)P_1-(x-x_2)P_2-(x-x_3)P_3.$$

Ponieważ $\overline{R}$ i $\overline{M}$ leżą w płaszczyźnie przekroju, więc $\overline{R}$ jest siłą zginającą, $\overline{M}$ zaś momentem zgięcia. Siła ściskająca (lub rozciągająca) i moment skręcający są zerami. Siłę $\overline{R}$ i moment $\overline{M}$ możemy również wyznaczyć przy pomocy wieloboku sznurowego jak na str. 257 i 258.

Przykład 2. Belka, wmurowana jak na rysunku, obciążona jest w A siłą $\overline{P}$. Utwórzmy przekrój belki przez punkt C i oznaczmy przez $\overline{R}$ sumę, a przez $\overline{M}$ moment względem C napięć części lewej na prawą. Mamy zatem:



$$-\overline{R}=\overline{P}, \qquad -\overline{M}=\mathrm{Mom}_C\,\overline{P}.$$

Część prawa działa więc na część lewą (wmurowaną) napięciami o sumie $-\overline{R}$ i momencie $-\overline{M}$. Reakcje muru, równoważące te napięcia, mają tedy sumę $\overline{R}=-\overline{P}$ i moment $\overline{M}=-\mathrm{Mom}_C\,\overline{P}$.