ROZDZIAŁ X

DYNAMIKA UKŁADÓW HOLONOMICZNYCH

§ 1. Układy holonomiczne. W tym rozdziale zajmiemy się dynamiką pewnych układów nieswobodnych. Wyprowadzimy dla nich równania ruchu, w których nie będą występowały reakcje.

Niech dany będzie układ n punktów materialnych. Niech więzy układu polegają na tym, że w każdej chwili pewne tylko położenia układu są możliwe. Nie zakładamy (jak w rozdz. IX), że w każdej chwili możliwe są jedne i te same położenia: zbiór możliwych położeń układu może się zmieniać wraz z czasem.

Przykładem jest punkt mogący pozostawać na płaszczyźnie ruchomej lub linii ruchomej, np. kulka nawinięta na drut, który się porusza lub zmienia kształt.

Jeżeli w chwili t więzy są obustronne (str. 421), wówczas współrzędne $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ punktów układu muszą w chwili t spełniać pewne równania (str. 423):

$$(1) \qquad F_1(x_1, \ldots, z_n, t) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m(x_1, \ldots, z_n, t) = 0,$$

które zapisujemy krócej:

$$(\mathrm{I}) \qquad F_j(x_1, \ldots, z_n, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Jeżeli w chwili t więzy są jednostronne, to oprócz (I) zachodzą związki ((9), str. 422)

$$(\mathrm{II}) \qquad \Phi_r(x_1, \ldots, z_n, t) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Układ, którego więzy dają się przedstawić przy pomocy związków postaci (I) i (II) nazywamy *holonomicznym*.

Jeżeli funkcje F_j i Φ_r nie zależą od czasu t, mówimy, że *więzy są niezależne od czasu*, układ zaś nazywamy *skleronomicznym*.

W rozdz. IX, badaliśmy warunki równowagi układów holonomicznych skleronomicznych. Więzy takich układów dają się określić związkami postaci (I), str. 423, i (9), str. 422:

(I') $$F_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

(II') $$\Phi_r(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Jeżeli choć jedna z funkcyj w (I) lub (II) zależy od czasu t, mówimy, że więzy *zależne są od czasu*, układ zaś nazywamy *reonomicznym*.

Łatwo zauważyć, że układ skleronomiczny jest szczególnym przypadkiem reonomicznego; innymi słowy równania (I') i (II') są szczególnym przypadkiem równań (I) i (II).

O funkcjach F_j, Φ_r zakładamy na ogół, że są ciągłe i że mają pochodne cząstkowe ciągłe w pewnym obszarze zmiennych

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t.$$

O równaniach (I), (I'), (II), (II') mówimy, że przedstawiają *więzy w postaci skończonej*.

Podobnie jak w układach skleronomicznych (str. 423), zakładamy, że funkcje (I) są od siebie niezależne i że $m < 3n$, a liczbę $k = 3n - m$ nazywamy *liczbą stopni swobody* danego układu.

Przykład. Niech punkt materialny $A(x, y, z)$ ma pozostawać na powierzchni pewnej kuli, poruszającej się ruchem postępowym jednostajnym.

Oznaczmy przez r promień kuli, przez ξ_0, η_0, ζ_0 współrzędne środka kuli w chwili $t = 0$, przez ξ, η, ζ w chwili t, a przez a, b, c rzuty prędkości ruchu postępowego na osie współrzędnych. W chwili t mamy $\xi = \xi_0 + at$, $\eta = \eta_0 + bt$ i $\zeta = \zeta_0 + ct$. Kula ma więc w chwili t równanie $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - r^2 = 0$ czyli

(2) $$(x - \xi_0 - at)^2 + (y - \eta_0 - bt)^2 + (z - \zeta_0 - ct)^2 - r^2 = 0.$$

Współrzędne punktu A muszą tedy spełniać w każdej chwili równanie (2); jest ono postaci $F(x, y, z, t) = 0$, zatem więzy są obustronne, zależne od czasu, a więc układ jest holonomiczny reonomiczny.

Jeżeli założymy, że punkt A ma pozostawać wewnątrz lub na powierzchni kuli, wówczas więzy wyrażą się nierównością

(3) $$(x - \xi_0 - at)^2 + (y - \eta_0 - bt)^2 + (z - \zeta_0 - ct)^2 - r^2 \leqslant 0,$$

a więc będą w tym przypadku jednostronne.

§ 2. **Układy anholonomiczne.** Nie zawsze więzy obustronne układu dają się przedstawić w postaci skończonej (I) lub (I').

Przypuśćmy np. że każdemu punktowi A przestrzeni przyporządkowany jest wektor $\bar{H}$, którego rzuty są zależne od współrzędnych x, y, z punktu A. Zatem:

(1) $$H_x = \alpha(x,y,z), \qquad H_y = \beta(x,y,z), \qquad H_z = \gamma(x,y,z),$$

gdzie α, β, γ są danymi funkcjami.

Załóżmy, że punkt materialny może się poruszać tylko w taki sposób, że prędkość jego w każdym położeniu jest prostopadła do $\bar{H}$. Oznaczmy przez $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ rzuty prędkości $\bar{v}$ punktu materialnego. W każdej chwili będzie więc musiał zachodzić związek $\bar{H}\bar{v} = 0$ czyli

(2) $$\alpha(x,y,z)\dot{x} + \beta(x,y,z)\dot{y} + \gamma(x,y,z)\dot{z} = 0.$$

Jeżeli istnieje taka funkcja $F(x,y,z)$, że jej pochodne cząstkowe są równe odpowiednim funkcjom α, β, γ, to równanie (2) możemy napisać w postaci $dF/dt = 0$ czyli $F = \text{const.} = c$ lub

(3) $$F(x,y,z) - c = 0.$$

Na odwrót, jeżeli zachodzi równanie (3), to różniczkując je, otrzymamy (2). Równania (2) i (3) są więc w tym przypadku równoważne, a zatem więzy są holonomiczne, ponieważ dają się przedstawić w postaci skończonej (3).

Jeżeli jednak funkcje α, β, γ nie są pochodnymi cząstkowymi jednej funkcji, to równanie (2) może nie być równoważne żadnemu równaniu postaci (3). W tym przypadku więzy nie dadzą się więc przedstawić w postaci skończonej i układ nie jest układem holonomicznym. Mówimy wówczas, że układ jest *anholonomiczny*.

Równanie (2) piszemy zazwyczaj w postaci

(4) $$\alpha(x,y,z)\,dx + \beta(x,y,z)\,dy + \gamma(x,y,z)\,dz = 0.$$

Ogólniejszą postać mają równania

(5) $$\alpha(x,y,z,t)\,dx + \beta(x,y,z,t)\,dy + \gamma(x,y,z,t)\,dz + \varepsilon(x,y,z,t)\,dt = 0.$$

Równanie (5) jest równoważne równaniu

(6) $$\alpha\dot{x} + \beta\dot{y} + \gamma\dot{z} + \varepsilon = 0,$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ są danymi funkcjami zmiennych x, y, z i t. Stanowi ono warunek konieczny, jakiemu muszą czynić zadość prędkości punktów układu. Układami anholonomicznymi zajmować się bliżej nie będziemy.

§ 3. Przesunięcia przygotowane. Na str. 428 określiliśmy przesunięcie przygotowane układów holonomicznych skleronomicznych. Zajmiemy się teraz układami reonomicznymi.

Punkt na powierzchni. Niech punkt $A(x,y,z)$ ma pozostawać na powierzchni ruchomej S, której równanie w chwili t jest

$$F(x,y,z,t)=0. \tag{1}$$

Współrzędne punktu A spełniają więc w chwili t równanie (1).

Przesunięciem przygotowanym nazywamy każde przesunięcie $\overline{\delta s}$ punktu A o rzutach $\delta x, \delta y, \delta z$, spełniające równanie

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0. \tag{2}$$

Widzimy stąd, że przesunięcie przygotowane jest takie, jak gdyby powierzchnia S była nieruchoma i miała położenie, które zajmuje w chwili t. Zatem przesunięciem przygotowanym jest dowolny wektor, styczny w chwili t do powierzchni S w punkcie A (str. 425).

Nadajmy punktowi A dowolny ruch zgodny z więzami. Współrzędne punktu będą więc spełniały równanie (1). Tworząc pochodną względem czasu t, otrzymamy z (1)

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial F}{\partial t}=0. \tag{3}$$

Oznaczając przez $\bar{v}$ prędkość punktu A, otrzymamy z (3)

$$\frac{\partial F}{\partial x}v_x+\frac{\partial F}{\partial y}v_y+\frac{\partial F}{\partial z}v_z+\frac{\partial F}{\partial t}=0. \tag{4}$$

Porównując (2) i (4), widzimy, że nie możemy przyjąć $\delta x=v_x$, $\delta y=v_y$ i $\delta z=v_z$, czyli $\overline{\delta s}=\bar{v}$, chyba że $\partial F/\partial t=0$.

A więc, w układach reonomicznych przesunięcia przygotowane nie są na ogół proporcjonalne do prędkości możliwych (jak w układach skleronomicznych), t. zn. wyrażają się innymi wektorami niż prędkości możliwe.

W szczególności przesunięciem przygotowanym jest na mocy (2) przesunięcie $\overline{\delta s}=0$ (t. j. $\delta x=0$, $\delta y=0$, $\delta z=0$); z (4) zaś wynika, że jeżeli $\partial F/\partial t\neq 0$, to $\bar{v}=0$ nie jest prędkością możliwą.

Uwaga. Różniczka zupełna funkcji (1) wynosi

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

Jeżeli utworzymy różniczkę przy założeniu, że $t = \text{const.}$, wówczas $dt = 0$, zatem

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz.$$

A więc równanie (2) otrzymamy, różniczkując obustronnie (1) przy założeniu, że czas $t = \text{const.}$, a następnie pisząc zamiast dx, dy, dz odpowiednio δx, δy, δz.

W przykładzie na str. 471 przesunięcie przygotowane spełnia równanie, jakie otrzymamy, różniczkując równanie (2), str. 471, przy założeniu, że $t = \text{const.}$ Dostaniemy:

$$(x - \xi_0 - at)\,\delta x + (y - \eta_0 - bt)\,\delta y + (z - \zeta_0 - ct)\,\delta z = 0.$$

Obierając dowolnie $\delta y, \delta z$, możemy wyznaczyć δx z powyższego wzoru.

Punkt na linii. Niech punkt materialny A ma pozostawać na linii ruchomej C, która w chwili t ma równania:

$$F_1(x, y, z, t) = 0, \qquad F_2(x, y, z, t) = 0. \tag{7}$$

Przesunięciem przygotowanym punktu A w chwili t nazywamy każde przesunięcie $\overline{\delta s}$ (o rzutach δx, δy, δz), które spełnia równania:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_1}{\partial z} \delta z = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F_2}{\partial z} \delta z = 0. \tag{8}$$

Zatem przesunięcie przygotowane jest takie, jak gdyby linia C była nieruchoma i miała to położenie, które zajmuje w chwili t. Przesunięciem przygotowanym jest więc dowolny wektor styczny w chwili t do krzywej C w punkcie A (str. 426).

I w tym przypadku przesunięcie przygotowane nie jest na ogół proporcjonalne do prędkości możliwej. Na mocy bowiem (7) prędkość możliwa $\bar{v}$ spełnia równania (które otrzymujemy, tworząc pochodną równań (7)):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x} v_x + \frac{\partial F_1}{\partial y} v_y + \frac{\partial F_1}{\partial z} v_z + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x} v_x + \frac{\partial F_2}{\partial y} v_y + \frac{\partial F_2}{\partial z} v_z + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Jeżeli $\partial F_1/\partial t \neq 0$ lub $\partial F_2/\partial t \neq 0$, to na mocy (8) i (9) nie możemy przyjąć $\delta x = v_x$, $\delta y = v_y$, $\delta z = v_z$ czyli $\overline{\delta s} = \bar{v}$.

Zauważmy jeszcze, że równania (8) otrzymamy, tworząc przy założeniu $t=\text{const.}$ różniczkę równań (7) i pisząc δx, δy, δz zamiast dx, dy, dz.

Przykład 1. Punkt materialny A ma pozostawać na paraboli obracającej się około osi z ze stałą prędkością kątową ω (dodatnią, jeżeli obrót odbywa się od ręki prawej ku lewej). W chwili $t=0$ parabola znajduje się w płaszczyźnie xz i ma równanie $z=x^2$.

Parabola zatoczy paraboloidę obrotową $z=x^2+y^2$. Położenie paraboli w chwili t otrzymamy jako przekrój paraboloidy płaszczyzną $x\sin\omega t+y\cos\omega t=0$. Współrzędne punktu A spełniają zatem równania:

$$(11)\qquad x^2+y^2-z=0, \qquad x\sin\omega t+y\cos\omega t=0.$$

Przesunięcie przygotowane δx, δy, δz spełnia równości, które otrzymamy, różniczkując (11) przy założeniu $t=\text{const.}$ Zatem:

$$2x\delta x+2y\delta y-\delta z=0, \qquad \delta x\sin\omega t+\delta y\cos\omega t=0.$$

Jeżeli $\omega t \neq \pi/2$ i $\omega t\neq 3\pi/2$, to:

$$\delta y=-\delta x \operatorname{tg}\omega t, \qquad \delta z=2(x-y\operatorname{tg}\omega t)\delta x,$$

gdzie δx jest dowolne.

Układy punktów. Niech dany będzie układ holonomiczny, którego więzy określone są równaniami

$$(12)\qquad F_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t)=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, m).$$

Przesunięciem przygotowanym układu w chwili t w położeniu $(x_1, \ldots, z_n)$ zgodnym z więzami, nazywamy każde przesunięcie $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, spełniające równania:

$$(\mathrm{I})\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, m).$$

O równaniach (I) zakładamy, że w każdej chwili t są od siebie liniowo niezależne; innymi słowy zakładamy, że spośród niewiadomych $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ możemy obrać $k=3n-m$ niewiadomych dowolnie, a pozostałych m wyznaczyć z równań (I).

Równania (I) mają postać podobną jak dla układów skleronomicznych (por. (1), str. 428). Przesunięcia przygotowane układu w chwili t są więc takie, jak gdyby więzy nie zależały od czasu i były stale takimi, jak w chwili t.

Równania (I) otrzymamy, tworząc przy założeniu $t=\text{const.}$ różniczkę z równań (12) i pisząc następnie zamiast $dx_1, \ldots, dz_n$ odpowiednio $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$.

W przypadku układów reonomicznych nie możemy powiedzieć, że przesunięcia przygotowane są proporcjonalne do prędkości możliwych. Nadajmy bowiem układowi dowolny ruch zgodny z więzami. Różniczkując (12), otrzymamy

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1}\dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial F_j}{\partial z_n}\dot{z}_n+\frac{\partial F_j}{\partial t}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{13}$$

Oznaczając przez $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ prędkości punktów, możemy napisać (13) w postaci

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}v_{i_x}+\frac{\partial F_j}{\partial y_i}v_{i_y}+\frac{\partial F_j}{\partial z_i}v_{i_z}\right)+\frac{\partial F_j}{\partial t}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{14}$$

Porównując (14) z (I) widzimy, że nie możemy na ogół przyjąć $\delta x_1=v_{1_x}, \ldots, \delta z_n=v_{n_z}$, jak w przypadku układów skleronomicznych.

Jeżeli oprócz równań (12) zachodzą jeszcze związki ((II), str. 470)

$$\Phi_r(x_1, \ldots, z_n, t)\leqslant 0 \qquad (r=1,2,\ldots,s), \tag{15}$$

to przesunięcie przygotowane musi oprócz (I) spełniać te ze związków

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i}\delta z_i\right)\leqslant 0, \qquad (r=1,2,\ldots,s), \tag{II}$$

dla których w danym położeniu układu w chwili t zachodzą równości $\Phi_r=0$ (por. (II), str. 434).

W s p ó ł r z ę d n e u o g ó l n i o n e. Niech położenia układu holonomicznego określone będą przy pomocy parametrów $q_1, \ldots, q_k$ (str. 455).

Jeżeli układ jest reonomiczny, to funkcje, które określają współrzędne naturalne $x_1, \ldots, z_n$, odpowiadające parametrom $q_1, \ldots, q_k$, są zależne od czasu. Zatem ((I), str. 456):

$$x_i=f_i(q_1,\ldots,q_k,t), \quad y_i=\varphi_i(q_1,\ldots,q_k,t), \quad z_i=\psi_i(q_1,\ldots,q_k,t) \quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{16}$$

Jeżeli parametry są niezależne, to każdemu układowi zmiennych $q_1, \ldots, q_k$ pewnego obszaru tych zmiennych (który może zależeć od t) odpowiada położenie układu zgodne z więzami. Jeżeli zaś parametry są zależne, to w przypadku więzów obustronnych muszą być spełnione pewne równania (2), str. 457:

$$\Phi_r(q_1, \ldots, q_k, t) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s), \tag{17}$$

a w przypadku więzów jednostronnych parametry muszą czynić zadość nierówności (3), str. 457:

$$\Psi_r(q_1, \ldots, q_k, t) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, \varrho). \tag{18}$$

W szczególności, gdy funkcje (16)-(18) nie zależą od czasu t, układ jest skleronomiczny.

Jeżeli układ się porusza, to parametry $q_1, \ldots, q_k$ zależą od czasu t. Ruch układu będzie więc wyznaczony przez podanie funkcyj:

$$q_1 = q_1(t), \quad \ldots, \quad q_k = q_k(t), \tag{19}$$

określających w każdej chwili t wartości parametrów układu. Współrzędne naturalne otrzymamy, podstawiając funkcje (19) w funkcje (16). Jeżeli parametry są zależne i spełniają równania (17), ewentualnie również nierówności (18), wówczas funkcje (19) muszą także spełniać te związki.

Niechaj położenia układu holonomicznego określone będą parametrycznie przy pomocy funkcyj (16). Przesunięcie przygotowane układu w chwili t w pewnym położeniu zgodnym z więzami otrzymamy, przyjmując, że więzy są niezależne od czasu i takie, jakimi były w chwili t. Na mocy więc (III), str. 458, dostaniemy:

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta y_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{III}$$

Wzory (III) otrzymamy, tworząc przy założeniu $t = \text{const.}$ różniczkę z (16) i pisząc następnie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i, \delta q_j$ zamiast dx_i, dy_i, dz_i, dq_j.

Jeżeli parametry są niezależne, to δq_j są w (III) dowolne. Jeżeli zaś parametry, określające położenia układu zgodne z więzami, spełniają związki (17), to δq_j w (III) nie są dowolne, lecz muszą czynić zadość równaniom ((IV), str. 459)

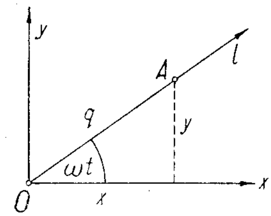
$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{IV}$$

Jeżeli wreszcie parametry muszą spełniać oprócz równań (17) pewne nierówności (18), to δq_j muszą oprócz (IV) spełniać te ze związków

$$\text{(V)} \qquad \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Psi_r}{\partial q_j} \delta q_j \leq 0 \qquad (r=1,2,\ldots,\varrho),$$

dla których w danym położeniu układu w chwili t zachodzą równania $\Psi_r=0$ ((V), str. 459).

Przykład 2. Punkt materialny A ma pozostawać na prostej l leżącej w płaszczyźnie xy i przechodzącej przez początek układu O. Prosta l obraca się około O ze stałą prędkością kątową ω.



Przyjmijmy punkt O za początek układu współrzędnych i nadajmy prostej l zwrot dowolny. Oznaczmy przez q współrzędną punktu A względem osi l; załóżmy wreszcie, że w chwili t oś l pokrywała się z osią x. Na współrzędne x, y punktu A otrzymamy wtedy wzory:

$$(20) \qquad x=q\cos\omega t, \qquad y=q\sin\omega t.$$

Zmienna q określa położenie punktu w chwili t, jest więc parametrem. Różniczkując równania (20) przy założeniu, że $t=\text{const.}$, dostaniemy:

$$(21) \qquad \delta x=\delta q\cos\omega t, \qquad \delta y=\delta q\sin\omega t.$$

§ 4. Zasada d'Alemberta. Równowaga sił. Dotychczas pojęcie równowagi sił działających określiliśmy dla układów skleronomicznych. Wedle podanej definicji (str. 438) siły działające są w równowadze, jeżeli układ punktów, mimo działania tych sił, może pozostawać w spoczynku.

To określenie równowagi nie nadaje się jednak dla układów reonomicznych.

Jeżeli np. układ punktów materialnych ma stale pozostawać na pewnej płaszczyźnie poziomej, poruszającej się pionowo w górę ruchem jednostajnym, to oczywiście układ w żadnym razie nie może pozostawać w spoczynku. W myśl poprzedniej definicji nie moglibyśmy więc o żadnym układzie sił powiedzieć, że jest w równowadze.

Zasada prac przygotowanych (str. 439) podaje warunek konieczny i wystarczający równowagi sił dla układów skleronomicznych (jeżeli nie ma tarcia). Otóż dla układów reonomicznych (gdy nie ma tarcia) przyjmujemy zasadę prac przygotowanych za definicję równowagi sił działających: powiemy więc, że *siły działające na układ holonomiczny reonomiczny (w którym nie występuje tarcie) są w równowadze w pewnej chwili t, jeżeli na każdym przesunięciu przygotowanym w chwili t praca przygotowana sił jest zerem lub liczbą ujemną.*

Przy tej definicji zasada prac przygotowanych stosuje się więc do układów holonomicznych zarówno skleronomicznych jak i reonomicznych.

Zasada d'Alemberta. Niech na układ holonomiczny utworzony z n punktów materialnych $A(x_1, y_1, z_1), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ działają siły $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_n$. Oznaczmy przez $m_1, \dots, m_n$ masy, a przez $\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_n$ przyśpieszenia tych punktów.

Wektory $-m_1\overline{p}_1, \dots, -m_n\overline{p}_n$ nazwaliśmy *siłami bezwładności* (str. 74). Jeżeli układ jest swobodny, to w myśl zasady d'Alemberta (str. 192) siły działające równoważą się z siłami bezwładności. Otóż doświadczenie okazuje, że zasada d'Alemberta sprawdza się również dla układów nieswobodnych holonomicznych, w których nie występuje tarcie. Możemy więc ją wypowiedzieć, jak następuje:

Siły działające na punkty układu holonomicznego (w którym nie ma tarcia) *równoważą się w każdej chwili z siłami bezwładności.*

Siły $\overline{P}_i - m_i\overline{p}_i$ (gdzie $i = 1, 2, \dots, n$) są przeto w równowadze. Oznaczając przez $\overline{\delta s}_i$ przesunięcia przygotowane, otrzymamy ((I), str. 436 i (II), str. 439)

$$\text{(I)} \qquad \sum_{i=1}^{n} (\overline{P}_i - m_i \overline{p}_i)\overline{\delta s}_i \leqslant 0.$$

W przypadku więzów obustronnych (lub przesunięć odwracalnych) mamy

$$\text{(I')} \qquad \sum_{i=1}^{n} (\overline{P}_i - m_i \overline{p}_i)\overline{\delta s}_i = 0.$$

Oznaczając przez $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ rzuty przyśpieszenia $\overline{p}_i$, zaś przez $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ rzuty przesunięcia $\overline{\delta s}_i$, wzory (I) i (I') możemy napisać w postaci ((II), str. 439)

$$\text{(II)} \qquad \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] \leqslant 0,$$

a w przypadku więzów obustronnych mamy ((III), str. 439)

$$(\mathrm{II}') \qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i]=0.$$

Zasada d'Alemberta sprowadza więc zagadnienia dynamiki do zagadnień statyki. Zasadę tę udowodnić możemy w wielu przykładach. W przypadkach, gdy tarcie jest zdefiniowane, przyjmujemy ją za prawo stwierdzone doświadczalnie. W przypadku zaś ogólnym mówimy, że tarcia nie ma, jeżeli do danego układu stosuje się zasada d'Alemberta.

Uwaga. Załóżmy, że układ jest swobodny. Zatem $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są liczbami dowolnymi. Ponieważ równanie (II') ma zachodzić dla każdego układu liczb $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, więc współczynniki przy tych liczbach muszą być zerami. Zatem:

$$P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i=0, \qquad P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i=0, \qquad P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i=0$$

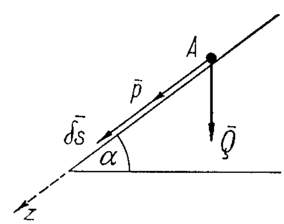
czyli

$$m_i\ddot{x}_i=P_{i_x}, \qquad m_i\ddot{y}_i=P_{i_y}, \qquad m_i\ddot{z}_i=P_{i_z} \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Równania powyższe są oczywiście równaniami ruchu Newtona ((II), str. 190).

Przykład 1. Punkt materialny ciężki A o masie m spada (bez tarcia) po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem α. Wyznaczyć ruch punktu.

Oznaczając przez $\bar{p}$ przyśpieszenie, przez $\bar{Q}$ ciężar punktu A, zaś przez $\overline{\delta s}$ przesunięcie przygotowane, otrzymamy z zasady d'Alemberta (I)



$$(1) \qquad (\bar{Q}-m\bar{p})\,\overline{\delta s}\leqslant 0.$$

Przyjmijmy za oś z linię największego spadku na równi, nadając jej zwrot ku dołowi. Niech $\overline{\delta s}$ ma kierunek osi z. Oznaczając rzuty $\overline{\delta s}$ i $\bar{p}$ na oś z przez δs i p oraz biorąc pod uwagę, że $\overline{\delta s}$ jest przesunięciem odwracalnym, otrzymamy

$$(\bar{Q}-m\bar{p})\,\overline{\delta s}=0 \qquad \text{czyli} \qquad \bar{Q}\,\overline{\delta s}-m\bar{p}\,\overline{\delta s}=0,$$

skąd $mg\,\delta s\sin\alpha-mp\,\delta s=0$, a więc

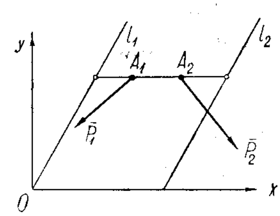
$$(2) \qquad m(g\sin\alpha-p)\,\delta s=0.$$

Ponieważ równanie (2) zachodzi dla każdego δs, więc mamy $g\sin\alpha - p = 0$ czyli

(3) $$p = g\sin\alpha.$$

Równanie (3) określa przyśpieszenie punktu. Łatwo okazać, że przy tym przyśpieszeniu związek (1) zachodzi dla każdego $\overline{\delta s}$ (leżącego na równi lub nie).

Przykład 2. Dwa punkty materialne A_1, A_2 o masach m_1, m_2 nasunięte są na drut sztywny (bez masy), którego końce pozostawać mają na dwóch prostych równoległych l_1, l_2. Na punkty działają siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ leżące w płaszczyźnie prostych l_1, l_2. Wyznaczyć ruch punktów przy założeniu, że nie ma tarcia.



Łatwo zauważyć, że pręt będzie miał kierunek stały. Obierzmy osie x, y w płaszczyźnie prostych l_1, l_2, nadając osi x kierunek pręta, i oznaczmy współrzędne punktów przez x_1, y_1 i x_2, y_2. Więzy będą zatem określone równaniem

(4) $$y_1 - y_2 = 0.$$

Na mocy zasady d'Alemberta ((II'), str. 480), otrzymamy

(5) $$(P_{1_x} - m_1\ddot{x}_1)\delta x_1 + (P_{1_y} - m_1\ddot{y}_1)\delta y_1 + (P_{2_x} - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 + (P_{2_y} - m_2\ddot{y}_2)\delta y_2 = 0.$$

Z równania (4) mamy $\delta y_1 - \delta y_2 = 0$ czyli $\delta y_1 = \delta y_2$. Podstawiając tę wartość w (5), dostaniemy

(6) $$(P_{1_x} - m_1\ddot{x}_1)\delta x_1 + (P_{2_x} - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 + (P_{1_y} - m_1\ddot{y}_1 + P_{2_y} - m_2\ddot{y}_2)\delta y_1 = 0.$$

Ponieważ δx_1, δx_2, δy_1 są liczbami dowolnymi, więc ich współczynniki w równaniu (6) muszą być zerami. Zatem:

(7) $$m_1\ddot{x}_1 = P_{1_x}, \qquad m_2\ddot{x}_2 = P_{2_x},$$

(8) $$m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 = P_{1_y} + P_{2_y}.$$

Z (4) mamy $\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0$ czyli $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2$. Równanie (8) możemy więc napisać w postaci

(9) $$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 = P_{1_y} + P_{2_y}.$$

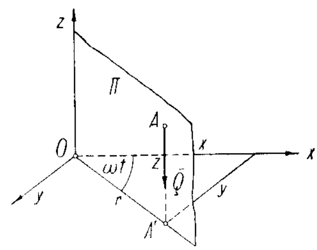
Równania (7), (9) i (4) wyznaczają ruch punktów.

Przykład 3. Płaszczyzna pionowa Π, przechodząca przez oś z skierowaną pionowo w górę, obraca się około z ze stałą prędkością kątową ω. Na płaszczyźnie Π ma pozostawać punkt ciężki A o masie m. Wyznaczyć ruch tego punktu, przyjmując, że nie ma tarcia.

Załóżmy, że w chwili $t=0$ płaszczyzna Π miała położenie płaszczyzny xz. Równaniem płaszczyzny Π w chwili t będzie więc

(10) $$y\cos\omega t - x\sin\omega t = 0.$$

Współrzędne x, y punktu A muszą więc spełniać równanie (10). Ponieważ siła ciężkości ma rzuty na osie układu: $0, 0, -mg$, więc z zasady d'Alemberta wynika, że



(11) $$-m\ddot{x}\,\delta x - m\ddot{y}\,\delta y + (-mg - m\ddot{z})\,\delta z = 0.$$

Przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$ spełnia na mocy (10) równanie

(12) $$\delta y\cos\omega t - \delta x\sin\omega t = 0.$$

Zatem δz jest dowolne, zaś δx i δy spełniają równanie (12).

Przyjmując w (11) $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, otrzymamy $(-mg - m\ddot{z})\delta z = 0$. Ponieważ δz jest dowolne, więc $-mg - m\ddot{z} = 0$ czyli

(13) $$\ddot{z} = -g,$$

skąd $z = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + c'$, gdzie c i c' są pewnymi stałymi.

Z (11) i (13) otrzymamy $\ddot{x}\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y = 0$ czyli

(14) $$\ddot{x}\,\delta x\cos\omega t + \ddot{y}\,\delta y\cos\omega t = 0,$$

skąd na mocy (12) $(\ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\sin\omega t)\delta x = 0$, a ponieważ δx jest dowolne, więc

(15) $$\ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\sin\omega t = 0.$$

Połóżmy $r = OA'$, gdzie A' oznacza rzut A na płaszczyznę xy. Zatem:

(16) $$x = r\cos\omega t, \qquad y = r\sin\omega t,$$

skąd

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\omega t - 2\dot{r}\omega\sin\omega t - r\omega^2\cos\omega t, \quad \ddot{y} = \ddot{r}\sin\omega t + 2\dot{r}\omega\cos\omega t - r\omega^2\sin\omega t$$

i przez podstawienie w (15) $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$, a więc (por. przykład 4, str. 141) $r = c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t}$ czyli na mocy (16):

$$x = (c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t})\cos\omega t, \qquad y = (c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t})\sin\omega t.$$

Stałe c, c', c_1, c_2 wyznaczamy z danych początkowych.

§ 5. Praca i energia kinetyczna w układach skleronomicznych. Niech układ holonomiczny skleronomiczny, złożony z n punktów materialnych o masach $m_1, \dots, m_n$ i o współrzędnych $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$, poddany będzie działaniu sił $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$.

Załóżmy na razie, że więzy są obustronne.

Z zasady d'Alemberta mamy dla każdego przesunięcia przygotowanego $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i)\,\delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i)\,\delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i)\,\delta z_i] = 0.$$

Ponieważ układ jest skleronomiczny, więc prędkości punktów możemy przyjąć za przesunięcia przygotowane (str. 427). Kładąc zatem $\dot{x}_i = \delta x_i$, $\dot{y}_i = \delta y_i$, $\dot{z}_i = \delta z_i$, otrzymamy z (1)

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i)\,\dot{x}_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i)\,\dot{y}_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i)\,\dot{z}_i] = 0$$

czyli

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\dot{x}_i + P_{i_y}\dot{y}_i + P_{i_z}\dot{z}_i) - \sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i\dot{x}_i + \ddot{y}_i\dot{y}_i + \ddot{z}_i\dot{z}_i) = 0.$$

Energia kinetyczna układu wyraża się wzorem

$$E = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

skąd $\dot{E} = \sum m_i(\ddot{x}_i\dot{x}_i + \ddot{y}_i\dot{y}_i + \ddot{z}_i\dot{z}_i)$. Na mocy zatem (3) jest

$$\dot{E} = \sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\dot{x}_i + P_{i_y}\dot{y}_i + P_{i_z}\dot{z}_i).$$

Całkując to równanie obustronnie od t_0 do t, otrzymamy

$$(4) \qquad \int_{t_0}^{t} \dot{E}\,dt = \int_{t_0}^{t} dt \sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\dot{x}_i + P_{i_y}\dot{y}_i + P_{i_z}\dot{z}_i).$$

Lewa strona wzoru (4) równa jest $E - E_0$, gdzie E oznacza energię kinetyczną w chwili t, a E_0 w chwili t_0, prawa zaś strona wyraża pracę $L_{t_0,t}$ sił działających od chwili t_0 do t ((II), str. 211). Zatem

$$(5) \qquad E - E_0 = L_{t_0,t}.$$

Równanie (5) wyraża *zasadę równowartości pracy sił działających i energii kinetycznej*.

Odrzućmy teraz założenie obustronności więzów. Przyjmijmy, że oprócz związków wyrażających się równościami, współrzędne punktów układu mają spełniać nierówności ((15), str. 476):

$$(6) \qquad \Phi_r(x_1, \dots, z_n) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, \varrho).$$

Zasada d'Alemberta ma w tym przypadku postać

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i]\leqslant 0.$$

Załóżmy, że prędkość zmienia się podczas ruchu w sposób ciągły.

Jeżeli w pewnej chwili t' (gdzie $t_0\leqslant t'\leqslant t$) położenie układu nie jest brzeżne t. zn. że w nierównościach (6) zachodzą znaki $<$, wówczas nierówności (6) nie dają żadnych warunków na przesunięcia przygotowane (str. 476). Przesunięcia przygotowane są w tym przypadku odwracalne; zachodzi zatem równanie (1), a następnie (2). Jeżeli zaś w chwili t' (gdzie $t_0<t'<t$) układ zajmuje położenie brzeżne, t. zn. że dla pewnego r zachodzi równość

$$\Phi_r(x_1,\ldots,z_n)=0,$$

to wobec założenia, że funkcje $x_1,\ldots,z_n$ mają pochodne ciągłe względem czasu t, funkcja Φ_r będzie miała również pochodną ciągłą. Ponieważ zaś jest stale $\Phi_r\leqslant 0$, więc w chwili t' funkcja Φ_r osiąga maximum. Wynika stąd, że dla $t=t'$ jest $\dot{\Phi}_r=0$, więc

$$(8) \qquad \frac{\partial\Phi_r}{\partial x_1}\dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_n}\dot{z}_n=0.$$

Na mocy (8) przesunięcie przygotowane $\delta x_1=\dot{x}_1,\ldots,\delta z_n=\dot{z}_n$ jest przesunięciem odwracalnym. Dla przesunięcia tego zachodzi przeto równanie (1), a tym samym i (2).

Udowodniliśmy zatem, że w każdej chwili t' (gdzie $t_0<t'<t$) spełnione jest równanie (2), z którego — rozumując jak poprzednio, wyprowadzimy wzór (4).

A więc: *do układów holonomicznych skleronomicznych stosuje się zasada równowartości pracy sił działających i energii kinetycznej* (przyczem dla więzów jednostronnych zachodzi to wtedy, gdy prędkości punktów zmieniają się w sposób ciągły).

Jeżeli siły działające mają potencjał V, to $L_{t_0,t}=V-V_0$, gdzie V i V_0 oznaczają odpowiednio potencjały w chwilach t i t_0. Z (5) mamy zatem $E-E_0=V-V_0$ czyli $E-V=E_0-V_0$. Oznaczając stałą E_0-V_0 przez h, otrzymamy

$$(9) \qquad E-V=h.$$

Wyrażenie $-V$ nazwaliśmy energią potencjalną i oznaczyliśmy przez U (str. 220). Zatem

$$(10) \qquad E+U=h.$$

Sumę $E+U$ nazwaliśmy *energią całkowitą układu* (str. 220).

A więc: *do układów holonomicznych skleronomicznych stosuje się zasada zachowania energii całkowitej* (przy założeniu, że w przypadku więzów jednostronnych prędkości zmieniają się w sposób ciągły).

Uwaga. W układach reonomicznych zasada równowartości pracy i energii kinetycznej na ogół nie zachodzi.

Jeżeli np. punkt ma pozostawać na krzywej ruchomej i na punkt nie działają żadne siły, to energia kinetyczna punktu może się pomimo to zmieniać zależnie od ruchu krzywej.

W układach reonomicznych przyrost energii kinetycznej zależy również od pracy sił reakcyjnych, która na ogół nie jest zerem.

§ 6. Równania Lagrange'a pierwszego rodzaju. Niech dany będzie układ holonomiczny n punktów materialnych $A_1(x_1,y_1,z_1),\ldots,A_n(x_n,y_n,z_n)$. Oznaczmy przez $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$ siły działające na punkty układu, a przez $m_1,\ldots,m_n$ masy tych punktów. Załóżmy, że więzy są obustronne, określone równaniami ((I), str. 470):

$$F_j(x_1,y_1,z_1,\ldots,x_n,y_n,z_n,t)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{1}$$

Przesunięcia przygotowane układu spełniają równania:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{2}$$

Na mocy zasady d'Alemberta ((II'), str. 480) mamy:

$$\sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i]=0. \tag{3}$$

Równanie (3) zachodzi dla każdego układu liczb $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$, spełniającego układ równań (2). Z rozważań na str. 450 wynika, że dla każdej chwili t istnieją takie liczby $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, że będą spełnione równania (I), str. 451 (gdzie zamiast P_{i_x} należy podstawić $P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i$ i t. d.):

$$\begin{aligned}
&P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i}=0,\\
&P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial y_i}=0,\\
&P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial z_i}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n).
\end{aligned} \tag{4}$$

Liczby $\lambda_1, \dots \lambda_m$ zależą od t, są więc funkcjami czasu; zatem $\lambda_1 = \lambda_1(t), \dots, \lambda_m = \lambda_m(t)$. Z (4) dostajemy:

$$
\text{(I)} \qquad
\begin{aligned}
m_i \ddot{x}_i &= P_{i_x} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \\
m_i \ddot{y}_i &= P_{i_y} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial y_i}, \\
m_i \ddot{z}_i &= P_{i_z} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial z_i}
\end{aligned}
\qquad (i = 1, 2, \dots n).
$$

Równania (I) noszą nazwę *równań Langrange'a pierwszego rodzaju.*

Niech siły $\bar{P}_i$ dane będą jako funkcje zmiennych $x_1, \dots, z_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_n, t$ określających położenie układu w chwili t. Z równań (I) i (1) możemy zatem wyznaczyć niewiadome funkcje czasu $x_1, \dots, z_n$, określające ruch układu, oraz funkcje $\lambda_1 = \lambda_1(t), \dots, \lambda_m = \lambda_m(t)$. Funkcyj niewiadomych jest tyle, ile równań, t. j. $3n + m$.

Oznaczmy przez $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_n$ siły, których rzuty określone są równościami:

$$
\text{(II)} \quad R_{i_x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad R_{i_y} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial y_i}, \quad R_{i_z} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).
$$

Na mocy (I) i (II) mamy:

$$
\text{(5)} \quad m_i \ddot{x}_i = P_{i_x} + R_{i_x}, \quad m_i \ddot{y}_i = P_{i_y} + R_{i_y}, \quad m_i \ddot{z}_i = P_{i_z} + R_{i_z} \quad (i = 1, 2, \dots, n).
$$

Oznaczając przez $\bar{p}_i$ przyśpieszenie punktu A_i, możemy (5) napisać w postaci

$$
\text{(6)} \qquad m_i \bar{p}_i = \bar{P}_i + \bar{R}_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n).
$$

Z (6) wynika, że siły $\bar{R}_i$ są reakcjami. Jeżeli bowiem dołożymy je do sił działających, to będziemy mogli na mocy (6) uważać układ za swobodny. A więc reakcje są określone związkami (II).

Przykład 1. Niech punkt o masie m, poddany działaniu siły $\bar{P}$, ma pozostawać na powierzchni o równaniu

$$
\text{(7)} \qquad F(x, y, z) = 0.
$$

Równania (I) Lagrange'a przyjmą postać:

$$
\text{(8)} \quad m\ddot{x} = P_x + \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = P_y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = P_z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z}.
$$

Z równań (7) i (8) możemy otrzymać niewiadome funkcje czasu x, y, z i λ.

Równania (8) otrzymaliśmy na innej drodze (por. (I), str. 129).

Niechaj teraz punkt ma pozostawać na powierzchni ruchomej o równaniu

(9) $$F(x, y, z, t) = 0.$$

Równania (I) Lagrange'a będą miały wówczas również postać (8).

Przykład 2. Niech punkt materialny o masie m ma pozostawać na kuli, której środek jest początkiem układu współrzędnych, a promień r zmienia się wraz z czasem t. Niech

(10) $$r = at + r_0,$$

gdzie liczby a i r_0 są dane. Współrzędne punktu spełniają zatem równanie

(11) $$x^2 + y^2 + z^2 - (at + r_0)^2 = 0.$$

Załóżmy, że na punkt nie działają żadne siły. Równania (8) przyjmą wtedy postać:

(12) $$m\ddot{x} = 2\lambda x, \qquad m\ddot{y} = 2\lambda y, \qquad m\ddot{z} = 2\lambda z.$$

Z równań (12) wynika, że kierunek przyśpieszenia przechodzi przez początek układu współrzędnych. Zatem ruch będzie ruchem środkowym (str. 86) i będzie się przeto odbywał w płaszczyźnie przechodzącej przez początek układu współrzędnych (str. 87).

Przyjmijmy, że płaszczyzną ruchu jest płaszczyzna xz. Zatem

(13) $$y = 0.$$

Wprowadźmy w płaszczyźnie xz współrzędne biegunowe r, φ:

(14) $$x = r\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi.$$

Ponieważ prędkość polowa jest stała, więc na mocy (I), str. 48,

(15) $$r^2\dot{\varphi} = \text{const.} = c,$$

skąd na mocy (10) $\dot{\varphi} = c/(at + r_0)^2$. Całkując, dostaniemy

(16) $$\varphi = -c/(at + r_0)a + c_1.$$

Zakładając, że dla $t = 0$ jest $\varphi = 0$, otrzymamy z (16) $c_1 = c/r_0 a$ czyli

(17) $$\varphi = ct/r_0(at + r_0).$$

Równania (14), (10) i (17) określają ruch punktu. Stałą c otrzymamy z (15), znając np. dla $t = 0$ prędkość kątową $\dot{\varphi}$.

§ 7. Równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Zajmiemy się obecnie równaniami ruchu, w których występować będą tylko współrzędne uogólnione.

Niech dany będzie układ holonomiczny n punktów materialnych, których współrzędne naturalne $x_1, \ldots, z_n$, określone są parametrami $q_1, \ldots, q_k$ przy pomocy funkcyj:

$$(1) \quad x_i = f_i(q_1, \ldots, q_k, t), \quad y_i = \varphi_i(q_1, \ldots, q_k, t), \quad z_i = \psi_i(q_1, \ldots, q_k, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Oznaczmy przez $m_1, \ldots, m_n$ masy punktów układu.

Załóżmy, że siły działające $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ zależne są od położenia układu, prędkości punktów i czasu t.

Na mocy zasady d'Alemberta mamy

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] \leqslant 0.$$

Zauważmy, że

$$(3) \quad \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i)] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x}\delta x_i + P_{i_y}\delta y_i + P_{i_z}\delta z_i) - \sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i). \end{aligned}$$

Pierwsza suma po prawej stronie równania (3) przedstawia pracę przygotowaną $\delta' L$ sił działających. Możemy ją na mocy (VII), str. 460, napisać w postaci

$$(4) \quad \delta' L = \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x}\delta x_i + P_{i_y}\delta y_i + P_{i_z}\delta z_i) = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j,$$

gdzie Q_j (dla $j = 1, 2, \ldots, k$) są składowymi siły uogólnionej. Na mocy (VI'), str. 460, mamy więc

$$(5) \quad Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Tworząc pochodną równań (1) względem czasu t, otrzymamy

$$(6) \quad \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

i podobne wzory dla $\dot{y}_i, \dot{z}_i$.

Na mocy założenia, rzuty P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} są funkcjami czasu t oraz zmiennych $x_1, \ldots, z_n$, $\dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n$, które możemy wyrazić na mocy (1) i (6) przy pomocy zmiennych $q_1, \ldots, q_k$, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$. Z (5) wynika więc, że Q_j możemy również uważać za funkcje zmiennych $q_1, \ldots, q_k$, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$, t:

$$Q_j = Q_j(q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{7}$$

Pierwszą sumę po prawej stronie równania (3) możemy więc na mocy (4) i (7) wyrazić przy pomocy współrzędnych uogólnionych.

Zajmiemy się teraz drugą sumą, stojącą po prawej stronie równania (3). Z (1) otrzymujemy ((III), str. 477):

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta y_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Zatem

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{x}_i \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + \ddot{y}_i \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j + \ddot{z}_i \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{k} \delta q_j \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Na mocy (6) możemy $\dot{x}_i$ (i podobnie $\dot{y}_i, \dot{z}_i$) uważać za funkcje zmiennych $q_1, \ldots, q_k$, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$ oraz czasu t. Przyjmując, że $\dot{x}_i$ oznacza prawą stronę równości (6) i że $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$ są odrębnymi zmiennymi, utwórzmy pochodne cząstkowe względem $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$. Otrzymamy:

$$\partial \dot{x}_i / \partial \dot{q}_1 = \partial x_i / \partial q_1, \quad \ldots, \quad \partial \dot{x}_i / \partial \dot{q}_k = \partial x_i / \partial q_k \tag{10}$$

czyli

$$\partial \dot{x}_i / \partial \dot{q}_j = \partial x_i / \partial q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{11}$$

Tworząc pochodne cząstkowe równań (6) względem q_j (i uważając przytem $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$ za odrębne zmienne), otrzymamy

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_j}. \tag{12}$$

Z drugiej strony mamy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}. \tag{13}$$

Ponieważ porządek różniczkowania nie wpływa na wynik, więc z (12) i (13) dostajemy

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right). \tag{14}$$

Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)=\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\dot{x}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right); \tag{15}$$

na mocy więc (11) i (14) otrzymujemy stąd wzór

$$\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \tag{16}$$

i podobne wzory dla zmiennych y_i, z_i. Ze wzorów tych dostaniemy dla dowolnego j:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}{}' m_i\left(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\ddot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)=\\&=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}{}' m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\sum_{i=1}^{n}{}' m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Energia kinetyczna układu wynosi

$$E=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{}' m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2). \tag{18}$$

Podstawmy do (18) za $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ prawe strony równości (6) i analogicznych równości dla $\dot{y}_i, \dot{z}_i$. Przedstawimy w ten sposób E jako funkcję zmiennych $q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t$:

$$E=E(q_1,\ldots,q_k,\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k,t). \tag{19}$$

Uważając $q_j, \dot{q}_j, t$ za odrębne zmienne, otrzymamy z (19) i (18)

$$\frac{\partial E}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n}{}' m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j}\right), \tag{20}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j}\right). \tag{21}$$

Z (17) dostaniemy na mocy (20) i (21)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\ddot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}, \tag{22}$$

skąd na mocy (9)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i\delta x_i+\ddot{y}_i\delta y_i+\ddot{z}_i\delta z_i)=\sum_{j=1}^{k}\delta q_j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}\right]. \tag{23}$$

Z równań (3), (4) i (23) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i]=\\&=\sum_{j=1}^{k}\delta q_j\left[Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}\right].\end{aligned} \tag{24}$$

Z zasady d'Alemberta (2) wynika więc, że

$$\sum_{j=1}^{k}\delta q_j\left[Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}\right]\leqslant 0. \tag{I}$$

Związki (24) i (I) zachodzą zarówno wtedy, gdy parametry $q_1,\ldots,q_k$ są zależne lub nie, jak i wtedy, gdy więzy są jednostronne lub obustronne.

W przypadku więzów obustronnych nierówność (I) przybiera postać równości:

$$\sum_{j=1}^{k}\delta q_j\left[Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}\right]=0. \tag{I'}$$

Załóżmy, że parametry są niezależne. Zatem $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ są liczbami dowolnymi. Wynika stąd, że współczynniki przy δq_j w (I') są zerami, a więc że

$$Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,k), \tag{25}$$

czyli

(II) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Równania (II) noszą nazwę równań *Lagrange'a drugiego rodzaju*. Występują w nich tylko współrzędne uogólnione.

Z równań (II) możemy wyznaczyć $q_1,\ldots,q_k$ jako funkcje czasu t; pozwalają więc one wyznaczyć ruch bez przechodzenia do współrzędnych naturalnych.

Załóżmy teraz, że parametry nie są niezależne, lecz że muszą spełniać związki (17), str. 477:

(25) $$\Phi_r(q_1,\ldots,q_k,t)=0 \qquad (r=1,2,\ldots,s).$$

Przesunięcia przygotowane δq_j spełniają zatem równości (IV), str. 477,

(26) $$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_j}\delta q_j=0 \qquad (r=1,2,\ldots,s).$$

Równości (I') zachodzą dla każdego układu liczb δq_j spełniających (26). Z rozważań podobnych jak na str. 450 wynika, że do każdej chwili t można dobrać liczby $\lambda_1,\ldots\lambda_s$, spełniające równania:

$$Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}+\sum_{r=1}^{s}\lambda_r\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,k)$$

czyli

(II') $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}=Q_j+\sum_{r=1}^{s}\lambda_r\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_j} \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Mnożniki Lagrange'a λ_r są zależne od czasu, są więc funkcjami zmiennej t; zatem $\lambda_r=\lambda_r(t)$.

Równania (II') łącznie z (25) pozwalają wyznaczyć niewiadome funkcje czasu $q_1,\ldots,q_k$ i $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_s(t)$. Równań tych jest razem $k+s$, t. j. tyleż co funkcyj niewiadomych.

Uwaga. Przy układaniu równań (II) należy najpierw przedstawić E i Q_j jako funkcje zmiennych $q_1,\ldots,q_k$, $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k,t$.

Aby otrzymać Q_j, podstawiamy we wzorze na pracę przygotowaną $\delta' L=\Sigma(P_{i_x}\delta x_i+P_{i_y}\delta y_i+P_{i_z}\delta z_i)$ zamiast $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ wyrażenia, jakie dostajemy z (1), a następnie porządkujemy według $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$. Współczynniki przy $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ będą składowymi Q_j siły uogólnionej.

Podstawiając następnie we wzorze na energię kinetyczną $E=\frac{1}{2}\Sigma m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)$ zamiast $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ pochodne, jakie dostajemy, różniczkując (1) względem t, otrzymamy E jako funkcję zmiennych $q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t$.

Wyznaczywszy E i Q_j jako funkcje zmiennych $q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t$, tworzymy pochodne: $\partial E/\partial q_j$ oraz $\partial E/\partial \dot{q}_j$ i wreszcie $\frac{d}{dt}(\partial E/\partial \dot{q}_j)$. Podstawiając w (II), dostajemy równania Lagrange'a.

Równania Lagrange'a w polu potencjalnym. Załóżmy, że siły działające $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n$ posiadają potencjał V w każdej chwili t. Potencjał V jest więc funkcją zmiennych $x_1, \ldots, z_n, t$; ponadto:

(27) $$P_{i_x}=\partial V/\partial x_i, \quad P_{i_y}=\partial V/\partial y_i, \quad P_{i_z}=\partial V/\partial z_i, \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

skąd na mocy (5)

(28) $$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right), \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Wyrażając w V współrzędne $x_1, \ldots, z_n$ przez $q_1, \ldots, q_k$ przy pomocy (1), możemy V uważać za funkcję zmiennych $q_1, \ldots, q_k$ i czasu t. Z (28) dostaniemy więc

(29) $$Q_j=\partial V/\partial q_j \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Z (29) i (27) widzimy, że składowe Q_j siły uogólnionej wyrażają się podobnie jak składowe sił $\bar{P}_i$. Możemy więc V uważać za *potencjał uogólniony* sił Q_j.

Z (II) i (29) dostaniemy $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}=\frac{\partial V}{\partial q_j}$ czyli

(30) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial(E+V)}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Ponieważ V nie zależy od pochodnych $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$, więc $\partial V/\partial \dot{q}_j=0$. Zatem

(31) $$\partial E/\partial \dot{q}_j=\partial(E+V)/\partial \dot{q}_j \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Z (30) i (31) dostaniemy

(32) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(E+V)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial(E+V)}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\ldots k).$$

Sumę energii kinetycznej i potencjału, t.j. $E+V$, nazywamy *potencjałem kinetycznym*.

Kładąc

$$W = E + V, \tag{33}$$

otrzymamy na mocy (32)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{III}$$

Równania Lagrange'a drugiego rodzaju przyjmują więc postać (III) w przypadku, gdy siły posiadają w każdej chwili potencjał (lub — co na jedno wychodzi — potencjał kinetyczny).

Współrzędne cykliczne. Współrzędną q_j (gdzie j jest pewną liczbą) nazywamy *cykliczną*, jeżeli potencjał kinetyczny W nie zależy od q_j, t.zn. jeżeli

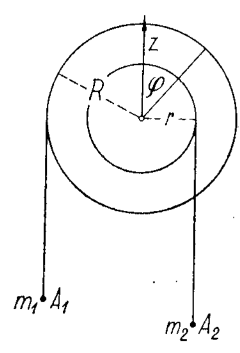
$$\partial W / \partial q_j = 0. \tag{34}$$

Jeżeli q_j jest współrzędną cykliczną, wówczas z równań (III) i (34) otrzymamy $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$, skąd

$$\partial W / \partial \dot{q}_j = \text{const.} = c. \tag{35}$$

Równanie (35) jest równaniem różniczkowym rzędu pierwszego. Jeżeli więc jakaś współrzędna q_j jest cykliczna, to odpowiednie jej równanie w równaniach (III) Lagrange'a możemy zastąpić równaniem różniczkowym (35) rzędu pierwszego.

Przykład 1. Dwa krążki o promieniach R i r osadzone są na wspólnej osi. Na krążkach tych zawieszone są na niciach nierozciągliwych dwa punkty materialne ciężkie A_1 i A_2 o masach m_1 i m_2. Wyznaczyć ruch układu, przyjmując, że nie ma tarcia.



Załóżmy, że ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej. Nadajmy osi z kierunek pionowy w górę. Oznaczmy przez z_1 i z_2 współrzędne punktów m_1 i m_2 w chwili t, zaś przez z_1^0 i z_2^0 w chwili początkowej $t = 0$. Niech φ oznacza kąt obrotu krążków, licząc od położenia początkowego. Przyjmując kąt obrotu za dodatni przy zwrocie od ręki lewej ku prawej, otrzymamy:

$$z_1 = z_1^0 + R\varphi, \qquad z_2 = z_2^0 - r\varphi. \tag{36}$$

Kąt φ wyznacza więc położenie układu; możemy zatem przyjąć φ za parametr.

Niech I_1 i I_2 będą momentami bezwładności krążków względem wspólnej osi. Energia kinetyczna wynosi

$$E=\tfrac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2+\tfrac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2+\tfrac{1}{2}I_1\omega^2+\tfrac{1}{2}I_2\omega^2, \tag{37}$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową krążków. Na mocy (36) mamy $\dot{z}_1=R\dot{\varphi}$ i $\dot{z}_2=-r\dot{\varphi}$, a ponadto $\omega=\dot{\varphi}$. Kładąc $I=I_1+I_2$, otrzymamy z (37)

$$E=\tfrac{1}{2}(m_1R^2+m_2r^2+I)\dot{\varphi}^2.$$

Potencjał siły ciężkości wynosi

$$V=-m_1gz_1-m_2gz_2=-m_1g(z_1^0+R\varphi)-m_2g(z_2^0-r\varphi),$$

a więc potencjał kinetyczny $W=E+V$:

$$W=\tfrac{1}{2}(m_1R^2+m_2r^2+I)\dot{\varphi}^2-m_1g(z_1^0+R\varphi)-m_2g(z_2^0-r\varphi),$$

skąd:

$$\partial W/\partial\varphi=-(m_1R-m_2r)g, \qquad \partial W/\partial\dot{\varphi}=(m_1R^2+m_2r^2+I)\dot{\varphi}. \tag{38}$$

Równanie Lagrange'a (III), str. 494, ma w naszym przypadku postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial W}{\partial\varphi}=0;$$

wobec (38) będzie więc $(m_1R^2+m_2r^2+I)\ddot{\varphi}+(m_1R-m_2r)g=0$ czyli

$$\ddot{\varphi}=(m_2r-m_1R)g/(m_1R^2+m_2r^2+I). \tag{39}$$

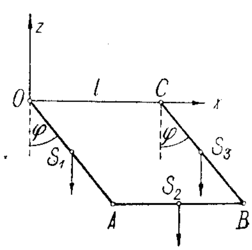
Przyśpieszenie kątowe jest zatem stałe.

Z (36) mamy $\ddot{z}_1=R\ddot{\varphi}$ i $\ddot{z}_2=-r\ddot{\varphi}$; punkty materialne będą się więc poruszały ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

W szczególności, gdy $R=r$, mamy *maszynę Atwooda* (str. 197 i 376).

Przykład 2. Układ złożony z trzech prętów sztywnych OA, AB, BC o równej długości l i równej masie m porusza się pod wpływem siły ciężkości w płaszczyźnie pionowej Π. Pręty są połączone przegubowo w A i B, zaś unieruchomione w O i C, przy czem O i C leżą na prostej poziomej oraz $OC=l$.

Obierzmy w płaszczyźnie Π osie x i z, przyjmując O za początek układu i nadając osi x kierunek poziomy OC, zaś osi z zwrot ku górze. Oznaczmy przez φ kąt, jaki pręty OA i CB tworzą z pionem, a przez S_1, S_2, S_3 środki ciężkości prętów (przyjmując, że leżą one w środkach geometrycznych tych prętów).



Kąt φ określa położenie układu prętów; zatem φ jest parametrem.

Ruch chwilowy prętów OA i BC jest obrotem chwilowym około O i C z prędkością kątową $\dot\varphi$. Pręt AB porusza się ruchem postępowym (por. przykład 1, str. 322) z prędkością $\bar v$ punktu A, przyczem $|\bar v| = l|\dot\varphi|$. Energia kinetyczna układu wynosi zatem

(40) $$E = \tfrac{1}{2}I\dot\varphi^2 + \tfrac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + \tfrac{1}{2}I\dot\varphi^2 = (I + \tfrac{1}{2}ml^2)\dot\varphi^2,$$

gdzie I oznacza moment bezwładności pręta względem końca. Współrzędne z_1, z_2, z_3 środków ciężkości S_1, S_2, S_3 wynoszą:

$$z_1 = -\tfrac{1}{2}l\cos\varphi, \qquad z_2 = -l\cos\varphi, \qquad z_3 = -\tfrac{1}{2}l\cos\varphi,$$

zatem potencjał siły ciężkości

(41) $$V = -mg(z_1 + z_2 + z_3) = 2mgl\cos\varphi.$$

Potencjał kinetyczny $W = E + V$ wyniesie więc na mocy (40) i (41)

(42) $$W = (I + \tfrac{1}{2}ml^2)\dot\varphi^2 + 2mgl\cos\varphi,$$

skąd

(43) $$\partial W/\partial\varphi = -2mgl\sin\varphi, \qquad \partial W/\partial\dot\varphi = 2(I + \tfrac{1}{2}ml^2)\dot\varphi.$$

Równania Lagrange'a (III), str. 494, przyjmą postać

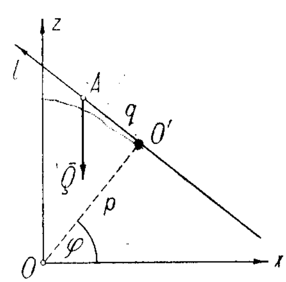
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\dot\varphi}\right) - \frac{\partial W}{\partial\varphi} = 0,$$

na mocy (43) będzie więc $2(I + \tfrac{1}{2}ml^2)\ddot\varphi + 2mgl\sin\varphi = 0$ czyli

(44) $$\ddot\varphi = -\frac{mgl}{I + \tfrac{1}{2}ml^2}\sin\varphi.$$

Porównując równanie (44) z równaniem wahadła matematycznego ((I), str. 132) widzimy, że dany układ prętów będzie się wahał jak wahadło matematyczne o długości $(I + \tfrac{1}{2}ml^2)/ml$.

Przykład 3. Prosta l leży w płaszczyźnie pionowej xz i obraca się około początku układu współrzędnych O ze stałą prędkością kątową ω. Na prostej l ma pozostawać punkt ciężki A o masie m. Wyznaczyć ruch punktu A.



Oznaczmy przez O' rzut punktu O na prostą l, zaś przez φ kąt między OO' a osią x i połóżmy $p = OO' = \text{const.}$ Przyjmijmy, że w chwili $t = 0$ prosta l ma kierunek osi z. Zatem

(45) $$\varphi = \omega t.$$

Nadajmy prostej l zwrot dowolny i oznaczmy przez q współrzędną punktu A na osi l, przyjmując za początek punkt O' tej osi. Współrzędne x i z punktu A wynoszą zatem:

$$x = p\cos\omega t - q\sin\omega t, \qquad z = p\sin\omega t + q\cos\omega t. \tag{46}$$

Układ jest więc reonomiczny, zaś q jest parametrem.

Praca przygotowana wyraża się wzorem $\delta' L = -mg\delta z$ (oś z ma zwrot pionowy ku górze). Ponieważ na mocy (46) jest $\delta z = \delta q \cos\omega t$, więc $\delta' L = -mg\delta q \cos\omega t$. Siła uogólniona wynosi zatem

$$Q = -mg\cos\omega t. \tag{47}$$

Obliczymy teraz energię kinetyczną E. Różniczkując (46), otrzymamy:

$$\dot{x} = -(p\omega + \dot{q})\sin\omega t - q\omega\cos\omega t, \qquad \dot{z} = (p\omega + \dot{q})\cos\omega t - q\omega\sin\omega t,$$

zatem

$$E = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \tfrac{1}{2}m[(p\omega + \dot{q})^2 + q^2\omega^2], \tag{48}$$

skąd

$$\partial E/\partial q = mq\omega^2, \qquad \partial E/\partial \dot{q} = m(p\omega + \dot{q}). \tag{49}$$

Na mocy (II), str. 492, równanie Lagrange'a ma w naszym przypadku postać $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$, skąd na mocy (49) i (47) otrzymamy $m\ddot{q} - mq\omega^2 = -mg\cos\omega t$ czyli

$$\ddot{q} - q\omega^2 = -g\cos\omega t. \tag{50}$$

Równanie jednorodne $\ddot{q} - q\omega^2 = 0$ ma rozwiązanie ogólne $q = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$, gdzie c_1 i c_2 są stałymi dowolnymi. Rozwiązaniem szczególnym równania (50) jest, jak łatwo stwierdzić, $q = g\cos\omega t / 2\omega^2$. Rozwiązaniem ogólnym równania (50) jest więc

$$q = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t. \tag{51}$$

Stałe c_1 i c_2 wyznaczamy z warunków początkowych.

Równania (46) i (51) wyznaczają ruch punktu

Uwaga. Ciężar ma potencjał $V = -mgz$, zatem na mocy (46) $V = -mg(p\sin\omega t + q\cos\omega t)$. Potencjał kinetyczny $W = E + V$ równa się więc na mocy (48)

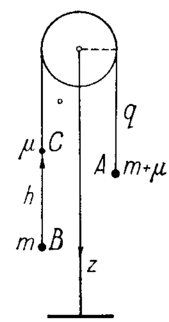
$$W = \tfrac{1}{2}m[(p\omega + \dot{q})^2 + q^2\omega^2] - mg(p\sin\omega t + q\cos\omega t). \tag{52}$$

Na mocy (III), str. 494, mamy $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial W}{\partial q}=0$, skąd na mocy (52) otrzymamy równanie (50).

Przykład 4. Dwa punkty materialne ciężkie A i B o masach $m+\mu$ i m zawieszone są na końcach nici nierozciągliwej i nieważkiej, przewiniętej przez krążek (maszyna Atwooda, str. 197 i 376). Po stronie ciężarka B porusza się wzdłuż nici owad C o masie μ. Oznaczając przez h rzut wektora $\overline{BC}$ na oś z mającą początek w środku krążka i kierunek pionowy w dół, mamy

$$h=f(t), \tag{53}$$

gdzie $f(t)$ jest funkcją daną. Wyznaczyć ruch układu punktów A, B, C.



Niech z_1, z_2, z_3 będą współrzędnymi punktów A, B, C, l długością nici, r promieniem krążka, a I momentem bezwładności krążka względem środka. Przyjmując za parametr q współrzędną z_1, mamy:

$$z_1=q, \quad z_2=l-q-r\pi, \quad z_3=l-q-r\pi+f(t), \tag{54}$$

skąd $\delta z_1=\delta q, \quad \delta z_2=-\delta q, \quad \delta z_3=-\delta q.$

Praca przygotowana sił ciężkości równa jest

$$\delta' L=(m+\mu)g\delta z_1+mg\delta z_2+\mu g\delta z_3=(m+\mu)g\delta q-mg\delta q-\mu g\delta q=0,$$

zatem siła uogólniona jest

$$Q=0. \tag{55}$$

Energia kinetyczna E wynosi

$$E=\tfrac{1}{2}(m+\mu)\dot{z}_1^2+\tfrac{1}{2}m\dot{z}_2^2+\tfrac{1}{2}\mu\dot{z}_3^2+\tfrac{1}{2}I\omega^2, \tag{56}$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową krążka. Z (54) mamy:

$$\dot{z}_1=\dot{q}, \quad \dot{z}_2=-\dot{q}, \quad \dot{z}_3=-\dot{q}+\dot{f}. \tag{57}$$

Ponieważ $r|\omega|=|\dot{z}_1|=|\dot{q}|$, więc $\omega^2=\dot{q}^2/r^2$, skąd na mocy (56) i (57)

$$E=\tfrac{1}{2}(m+\mu)\dot{q}^2+\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2+\tfrac{1}{2}\mu(\dot{q}-\dot{f})^2+\tfrac{1}{2}I\dot{q}^2/r^2.$$

Stąd

$$\frac{\partial E}{\partial q}=0, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}}=(2m+2\mu+I/r^2)\dot{q}-\mu\dot{f}. \tag{58}$$

Równania Lagrange'a (II), str. 492, przyjmą postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q.$$

Na mocy (55) i (58) otrzymujemy stąd

(59) $$(2m+2\mu+I/r^2)\,\ddot q-\mu\ddot f=0$$

i po scałkowaniu

(60) $$(2m+2\mu+I/r^2)q-\mu f(t)=c_1t+c_2.$$

Stałe c_1 i c_2 wyznaczymy z danych początkowych.

Załóżmy, że w chwili początkowej $t=0$ było:

$$f(0)=0,\qquad \dot f(0)=0,\qquad z_1=q=q_0,\qquad \dot z_1=\dot q=0.$$

Z równania (60) i jego pochodnej otrzymamy:

(61) $$c_2=(2m+2\mu+I/r^2)q_0,\qquad c_1=0.$$

Kładąc $k=2m+2\mu+I/r^2$, dostaniemy z (60) i (61) $q=\frac{\mu}{k}f(t)+q_0$, a zatem na mocy (54):

(62) $$z_1=\frac{\mu}{k}f(t)+q_0,\qquad z_3=l-r\pi-q_0+\frac{k-\mu}{k}f(t).$$

Ponieważ $k-\mu>0$, więc z (62) wynika, że jeżeli owad C będzie się wspinał po nici w górę, to ciężarek A będzie również wznosił się w górę. W chwili, gdy owad dojdzie do krążka, t.j. do wysokości $z_3=0$, będzie, jak wynika z (62),

$$z_1=q_0-\frac{\mu}{k-\mu}(l-r\pi-q_0).$$

Przykład 5. Punkt materialny A o masie m porusza się w płaszczyźnie xy pod wpływem siły środkowej $\overline{P}$, której rzut P na promień wodzący $\overline{OA}$ (gdzie O oznacza początek układu współrzędnych) jest funkcją odległości $r=OA$ i wynosi

(63) $$P=f(r).$$

Wprowadźmy współrzędne biegunowe r,φ. Współrzędne x,y punktu A wyrażą się więc wzorami:

(64) $$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi.$$

Współrzędne biegunowe r,φ są zatem parametrami niezależnymi.

Z (64) otrzymamy po zróżniczkowaniu:

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y}=\dot{r}\sin\varphi+r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Energia kinetyczna wynosi więc

$$E=\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2). \tag{65}$$

Ponieważ pole jest środkowe i siła zależy od odległości, więc pole jest potencjalne (str. 102). Zatem na mocy (63) i (3), str. 103, potencjał wyniesie

$$V=\int P dr=\int f(r)dr, \tag{66}$$

a potencjał kinetyczny $W=E+V$, na mocy (65) i (66),

$$W=\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\int P dr. \tag{67}$$

Ponieważ potencjał kinetyczny W nie zależy od φ, więc φ jest współrzędną cykliczną, skąd (str. 494) $\partial W/\partial\dot{\varphi}=\text{const.}$ czyli

$$mr^2\dot{\varphi}=\text{const.} \tag{68}$$

Równanie Lagrange'a dla współrzędnej r ma postać ((III), str. 494, z r zamiast q_j)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial W}{\partial r}=0. \tag{69}$$

Z (67) dostajemy

$$m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2-P=0. \tag{70}$$

Z (68) mamy $\dot{\varphi}=\text{const.}/mr^2=c/r^2$, gdzie c jest pewną stałą. Wstawiając tę wartość $\dot{\varphi}$ w (70), dostaniemy $m(\ddot{r}-c^2/r^3)=P$ czyli

$$\ddot{r}-c^2/r^3=f(r)/m.$$

Z powyższego równania możemy wyznaczyć r jako funkcję czasu t.

Przykład 6. Ruch punktu na powierzchni obrotowej. Krzywa leżąca na płaszczyźnie xz o równaniu

$$z=f(x), \tag{71}$$

zatoczyła obrót około osi z, tworząc powierzchnię obrotową S. Równaniem powierzchni S jest więc równanie

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}). \tag{72}$$

Wprowadźmy współrzędne biegunowe r,φ w płaszczyźnie xy.

Wówczas:

(73) $$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = f(r).$$

Zmienne r, φ są więc parametrami niezależnymi.

Na powierzchni S ma pozostawać punkt materialny o masie m, poddany działaniu siły $\overline{P}$. Wyznaczyć równania Langrange'a drugiego rodzaju.

Wyznaczymy najpierw siły uogólnione. Z równań (73) mamy:

(74) $$\delta x = \delta r\cos\varphi - r\delta\varphi\sin\varphi, \qquad \delta y = \delta r\sin\varphi + r\delta\varphi\cos\varphi, \qquad \delta z = f'(r)\delta r.$$

Praca przygotowana wynosi

(75) $$\delta' L = P_x\delta x + P_y\delta y + P_z\delta z.$$

Podstawiając (74) w (75), otrzymamy

(76) $$\delta' L = (P_x\cos\varphi + P_y\sin\varphi + P_z f'(r))\delta r + (-P_x\sin\varphi + P_y\cos\varphi)r\delta\varphi.$$

Współczynniki stojące przy δr i $\delta\varphi$ są siłami uogólnionymi. Oznaczmy je przez Q_r i Q_φ. Zatem:

(77) $$Q_r = P_x\cos\varphi + P_y\sin\varphi + P_z f'(r), \qquad Q_\varphi = (-P_x\sin\varphi + P_y\cos\varphi)r.$$

Przejdziemy teraz do wyznaczenia energii kinetycznej. Różniczkując (73), dostaniemy:

(78) $$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \dot{z} = f'(r)\dot{r}.$$

Energia kinetyczna E wynosi $E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, skąd na mocy (78)

(79) $$E = \tfrac{1}{2}m[(1 + f'^2(r))\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2],$$

a stąd

(80) $$\partial E/\partial r = m[f'(r)f''(r)\dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2], \qquad \partial E/\partial\varphi = 0,$$

(81) $$\partial E/\partial\dot{r} = m[1 + f'^2(r)]\dot{r}, \qquad \partial E/\partial\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Z równań (II), str. 492, kładąc $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $Q_1 = Q_r$, $Q_2 = Q_\varphi$, otrzymamy na mocy (80) i (81):

(82) $$m\frac{d}{dt}[(1 + f'^2(r))\dot{r}] - m[f'(r)f''(r)\dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2] = Q_r,$$

(83) $$md(r^2\dot{\varphi})/dt = Q_\varphi.$$

Siły uogólnione Q_r i Q_φ podane są wzorami (77).

Przyjmijmy, że ruch odbywa się w polu potencjalnym, np. w polu sił ciężkości. Potencjał będzie wówczas $V = -mgz$ (gdy oś z ma zwrot pionowy ku górze). Na mocy więc (73) mamy

$$V = -mgf(r), \tag{84}$$

skąd dla potencjału kinetycznego $W = E + V$:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial E}{\partial r} - mgf'(r), \qquad \frac{\partial W}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial E}{\partial \dot{r}}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}}.$$

Wynika stąd, że współrzędna φ jest cykliczną. Równania (III), str 494, przyjmą dla współrzędnej r postać

$$\frac{d}{dt}[(1+f'^2(r))\dot{r}] - [f'(r)f''(r)\dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2 - gf'(r)] = 0. \tag{85}$$

Ponieważ φ jest współrzędną cykliczną, więc $\partial W/\partial\dot{\varphi} = \text{const.}$ czyli

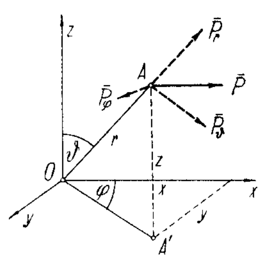
$$r^2\dot{\varphi} = \text{const.} = c. \tag{86}$$

Z twierdzenia o zachowaniu energii całkowitej (str. 107) wynika, że $E - V = \text{const.}$, więc na mocy (79) i (84)

$$[1+f'^2(r)]\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + gf(r) = \text{const.} = c_1. \tag{87}$$

Z równań rzędu pierwszego (86) i (87) możemy wyznaczyć ruch punktu.

Przykład 7. Współrzędne biegunowe. Ruch punktu materialnego swobodnego $A(x, y, z)$, poruszającego się pod wpływem siły $\bar{P}$, zbadamy w układzie biegunowym r, ϑ, φ, gdzie $r = OA$, O oznacza początek układu współrzędnych (x, y, z), ϑ jest kątem między OA a osią z, zaś φ między osią x a rzutem OA' odcinka OA na płaszczyznę xy.



Mamy:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta. \tag{88}$$

Ponieważ punkt materialny jest swobodny, więc parametry r, ϑ, φ są niezależne. Z (88) dostajemy:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta r \sin\vartheta\cos\varphi + r\delta\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi - r\delta\varphi\sin\vartheta\sin\varphi, \\ \delta y &= \delta r\sin\vartheta\sin\varphi + r\delta\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi + r\delta\varphi\sin\vartheta\cos\varphi, \\ \delta z &= \delta r\cos\vartheta - r\delta\vartheta\sin\vartheta. \end{aligned} \tag{89}$$

Praca przygotowana równa się $\delta' L = P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z$, skąd na mocy (89)

$$\begin{aligned}(90)\quad \delta' L = (P_x \sin\vartheta \cos\varphi + P_y \sin\vartheta \sin\varphi + P_z \cos\vartheta)\delta r + r(P_x \cos\vartheta \cos\varphi +\\ + P_y \cos\vartheta \sin\varphi - P_z \sin\vartheta)\delta\vartheta + r\sin\vartheta(-P_x \sin\varphi + P_y \cos\varphi)\delta\varphi.\end{aligned}$$

Współczynniki przy δr, $\delta\vartheta$ i $\delta\varphi$ są składowymi siły uogólnionej. Oznaczmy je przez Q_r, Q_ϑ i Q_φ. Zatem:

$$(91)\quad \begin{aligned} Q_r &= P_x \sin\vartheta \cos\varphi + P_y \sin\vartheta \sin\varphi + P_z \cos\vartheta,\\ Q_\vartheta &= r(P_x \cos\vartheta \cos\varphi + P_y \cos\vartheta \sin\varphi - P_z \sin\vartheta),\\ Q_\varphi &= r\sin\vartheta(-P_x \sin\varphi + P_y \cos\varphi).\end{aligned}$$

Niech Π będzie płaszczyzną przechodzącą przez OA i oś z. Poprowadźmy z punktu A prostopadle do OA osie Θ, Φ: oś Θ w płaszczyźnie Π, zaś oś Φ prostopadle do Π. Nadajmy osiom zwroty w kierunku wzrostu kątów ϑ, φ i oznaczmy przez $P_r, P_\vartheta, P_\varphi$ składowe siły P w kierunku osi $\overline{OA}$, Θ, Φ. Łatwo wykazać, że na mocy (91) jest:

$$(92)\qquad Q_r = P_r, \qquad Q_\vartheta = rP_\vartheta, \qquad Q_\varphi = r\sin\vartheta P_\varphi.$$

Energia kinetyczna wynosi $E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Pochodne $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ otrzymamy z (89), pisząc $\dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$ zamiast $\delta r, \delta\vartheta, \delta\varphi$. Podstawiając otrzymane wartości, dostaniemy

$$(93)\qquad E = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2),$$

skąd:

$$(94)\quad \partial E/\partial r = mr(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2), \quad \partial E/\partial\vartheta = mr^2\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta, \quad \partial E/\partial\varphi = 0,$$

$$(95)\quad \partial E/\partial\dot{r} = m\dot{r}, \qquad \partial E/\partial\dot{\vartheta} = mr^2\dot{\vartheta}, \qquad \partial E/\partial\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta.$$

Przyjmując w równaniach Lagrange'a (II), str. 492:

$$q_1 = r, \qquad q_2 = \varphi, \qquad q_3 = \vartheta,$$

dostaniemy na mocy (94) i (95):

$$(96)\quad \begin{aligned} m\ddot{r} - mr(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) &= Q_r,\\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta) &= Q_\varphi,\\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta &= Q_\vartheta.\end{aligned}$$

Równania (96) są równaniami ruchu we współrzędnych biegunowych przestrzennych.

§ 8. Równania kanoniczne Hamiltona. Niech $q_1, \ldots, q_k$ będą parametrami niezależnymi. Energia kinetyczna E jest w ogólnym przypadku funkcją zmiennych $q_1, \ldots, q_k$, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$ i czasu t. Uważając te zmienne za niezależne, połóżmy

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} = p_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Wyrażenia (I) nazywamy *impulsami uogólnionymi*.

Na mocy (I), p_j są funkcjami zmiennych $q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t$; możemy więc napisać

$$\text{(1)} \qquad p_j = \Phi_j(q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Można udowodnić przy dość ogólnych założeniach, że równania (1) dają się rozwiązać względem zmiennych $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$. Zatem

$$\text{(2)} \qquad \dot{q}_j = \bar{\Phi}_j(q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_k, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Potencjał kinetyczny $W = E + V$ jest funkcją zmiennych $q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t$:

$$\text{(3)} \qquad W = F(q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t).$$

Podstawiając (2) w (3), dostaniemy

$$\text{(4)} \qquad W = \bar{F}(q_1, \ldots, q_k, p_1, \ldots, p_k, t).$$

Funkcja $\bar{F}$ jest więc funkcją złożoną z funkcji F za pośrednictwem funkcyj $\bar{\Phi}_j$. Z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej otrzymamy:

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Ponieważ V nie zależy od pochodnych $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$, więc $\partial V / \partial \dot{q}_j = 0$; z uwagi na to, że $W = V + E$, mamy

$$\text{(6)} \qquad \partial W / \partial \dot{q}_j = \partial E / \partial \dot{q}_j.$$

Na mocy więc (I) i (3) mamy $\partial F / \partial \dot{q}_j = p_j$. Z (5) dostaniemy zatem:

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Połóżmy

(II) $$H=\sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j - W$$

i przyjmijmy, że $\dot{q}_j$ i W są funkcjami zmiennych $q_1,\ldots,q_k, p_1,\ldots,p_k, t$, t. zn. że oznaczają funkcje (2) i (4). Wówczas

(8) $$H=\sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j - \overline{F}.$$

Tworząc pochodne cząstkowe, otrzymamy z (8):

(9) $$\frac{\partial H}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}-\frac{\partial \overline{F}}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i+\sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}-\frac{\partial \overline{F}}{\partial p_i},$$

na mocy więc (7):

(10) $$\partial H/\partial q_i = -\partial F/\partial q_i, \qquad \partial H/\partial p_i = \dot{q}_i.$$

Równania Lagrange'a (III), str. 494, mają postać

(11) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial W}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Na mocy (1) i (6) jest $\partial W/\partial \dot{q}_j = p_j$. Z równania (11) dostaniemy

(12) $$\dot{p}_j = \partial W/\partial q_j \qquad (j=1,2,\ldots,k),$$

skąd na mocy (3) $\partial F/\partial q_j = \dot{p}_j$, a więc na mocy (10):

(III) $$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\ldots,k).$$

Równania (III) nazywamy *równaniami kanonicznymi Hamiltona*, a funkcję H *funkcją Hamiltona*.

Zmienne p_i czyli impulsy uogólnione są więc określone równaniami (I), a funkcja H równaniami (II). W równaniach (III) funkcja H jest funkcją zmiennych q_i, p_i, t. Równania (III) tworzą zatem układ równań różniczkowych rzędu pierwszego, gdzie funkcjami niewiadomymi są q_i i p_i jako funkcje czasu t.

Badanie ruchu układów posiadających potencjał sprowadza się więc do badania równań różniczkowych postaci (III). Stąd nazwa równań kanonicznych.

Układy skleronomiczne. Załóżmy, że układ jest skleronomiczny. Na mocy (I), str. 504, mamy więc

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \tag{13}$$

Niechaj współrzędne naturalne wyrażone będą funkcjami:

$$x_i = f_i(q_1, \dots, q_k), \quad y_i = \varphi_i(q_1, \dots, q_k), \quad z_i = \psi_i(q_1, \dots, q_k) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{14}$$

Zatem

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k. \tag{15}$$

Tworząc pochodną cząstkową względem $\dot{q}_j$, dostaniemy:

$$\partial \dot{x}_i / \partial \dot{q}_j = \partial x_i / \partial q_j \quad \text{i podobnie} \quad \partial \dot{y}_i / \partial \dot{q}_j = \partial y_i / \partial q_j, \quad \partial \dot{z}_i / \partial \dot{q}_j = \partial z_i / \partial q_j. \tag{16}$$

Mamy

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \tag{17}$$

więc

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} \right),$$

skąd na mocy (16)

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right),$$

a stąd

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j =$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\dot{x}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \dot{y}_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \dot{z}_i \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \right].$$

Na mocy więc (15) jest $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = 2E$,

skąd na mocy (13)

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j = 2E. \tag{18}$$

Z (II), str. 504, i (18) dostaniemy

$$H = 2E - W. \tag{19}$$

W myśl określenia ((33), str. 494), mamy $W=E+V$, gdzie V jest potencjałem. Z (19) wynika więc, że

(20) $$H=E-V.$$

Otóż $E-V$ jest energią całkowitą układu.

A więc: *w układach skleronomicznych funkcja Hamiltona H oznacza energię całkowitą układu.*

Załóżmy, że potencjał V nie zależy od czasu. H jest wtedy funkcją tylko zmiennych $q_1,\dots,q_k, p_1,\dots,p_k$. Zatem

(21) $$\frac{dH}{dt}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right).$$

Z równań (III) otrzymujemy $\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i=-\dot{p}_i\dot{q}_i+\dot{q}_i\dot{p}_i=0$, skąd na mocy (21) $dH/dt=0$ czyli $H=\text{const}$.

Udowodniliśmy więc, że jeżeli układ skleronomiczny porusza się w polu potencjalnym, to podlega zasadzie zachowania energii całkowitej.

Przykład 1. Punkt materialny swobodny o masie m porusza się w polu potencjalnym o potencjale V.

Przyjmijmy za parametry współrzędne naturalne x,y,z. Impulsy uogólnione określone będą związkami (I), str. 504, jeżeli za q_1,q_2,q_3 podstawimy x,y,z. Zatem:

(22) $$p_1=\partial E/\partial\dot{x},\qquad p_2=\partial E/\partial\dot{y},\qquad p_3=\partial E/\partial\dot{z}.$$

Ponieważ $E=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$, więc:

(23) $$p_1=m\dot{x},\qquad p_2=m\dot{y},\qquad p_3=m\dot{z}.$$

Widzimy stąd, że p_1,p_2,p_3 są rzutami pędu na osie układu. Wyznaczając z (23) $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$, otrzymamy

(24) $$E=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2).$$

Ponieważ układ jest skleronomiczny, więc funkcja Hamiltona H oznacza jego energię całkowitą. Zatem $H=E-V$, skąd na mocy (24)

$$H=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)-V.$$

Stąd $\partial H/\partial p_1 = p_1/m$ i t. d., $\partial H/\partial x = -\partial V/\partial x$ i t. d. Równania (III) Hamiltona przyjmą więc postać:

(25) $$\dot{p}_1 = \partial V/\partial x, \qquad \dot{p}_2 = \partial V/\partial y, \qquad \dot{p}_3 = \partial V/\partial z,$$

(26) $$\dot{x} = p_1/m, \qquad \dot{y} = p_2/m, \qquad \dot{z} = p_3/m.$$

Wyznaczając p_1, p_2, p_3 z (26) i wstawiając w (25), otrzymamy równania Newtona:

$$m\ddot{x} = \partial V/\partial x, \qquad m\ddot{y} = \partial V/\partial y, \qquad m\ddot{z} = \partial V/\partial z.$$

Przykład 2. Punkt materialny o masie m ma pozostawać na powierzchni walca obrotowego $x^2 + y^2 = r^2$. Na punkt działa siła sprężysta $\overline{P}$ o rzutach:

(27) $$P_x = -k^2 mx, \qquad P_y = -k^2 my, \qquad P_z = -k^2 mz,$$

gdzie k jest pewną stałą.

Siła sprężysta — jak łatwo stwierdzić — posiada potencjał

(28) $$V = -\tfrac{1}{2}k^2 m(x^2 + y^2 + z^2).$$

Wprowadźmy w płaszczyźnie xy współrzędne biegunowe r, φ. Zatem $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$, skąd wobec $r = \text{const.}$ mamy $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\varphi}^2$.

Energia kinetyczna równa się więc

(29) $$E = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \tfrac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Zmienne φ, z możemy przyjąć za parametry niezależne. Oznaczając przez p_1 i p_2 odpowiednie impulsy uogólnione i pisząc φ, z zamiast q_1, q_2, otrzymamy z (I) $\partial E/\partial\dot{\varphi} = p_1$ i $\partial E/\partial\dot{z} = p_2$, skąd na mocy (29):

(30) $$p_1 = mr^2\dot{\varphi}, \qquad p_2 = m\dot{z}.$$

Wyznaczając $\dot{\varphi}$ oraz $\dot{z}$ z (30) i podstawiając w (29), otrzymamy

$$E = \frac{1}{2m}[p_1^2/r^2 + p_2^2].$$

Na mocy (28) jest $V = -\frac{1}{2}k^2 m(r^2 + z^2)$, więc funkcja Hamiltona ((20), str. 507) przyjmie postać

(31) $$H = E - V = \frac{1}{2m}[p_1^2/r^2 + p_2^2] + \frac{1}{2}k^2 m(r^2 + z^2).$$

Równania Hamiltona (III) są zatem:

$$\dot{p}_1 = -\partial H/\partial\varphi, \qquad \dot{p}_2 = -\partial H/\partial z, \qquad \dot{\varphi} = \partial H/\partial p_1, \qquad \dot{z} = \partial H/\partial p_2,$$

a więc na mocy (31):

$$(32) \qquad \dot{p}_1 = 0, \qquad \dot{p}_2 = -k^2 mz, \qquad \dot{\varphi} = p_1/mr^2, \qquad \dot{z} = p_2/m.$$

Dwa ostatnie z równań (32) równoważne są równaniom (30).

Pierwsze z równań (32) daje $p_1 = \text{const.}$, więc na mocy (30) jest $mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$ czyli $\dot{\varphi} = \text{const.}$ Rzut punktu na płaszczyznę poziomą będzie więc obiegał podstawę walca ruchem jednostajnym.

Drugie z równań (32) daje na mocy (30) $m\ddot{z} = -k^2 mz$ czyli $\ddot{z} + k^2 z = 0$. Porównując je z równaniem (2), str. 112, widzimy, że rzut punktu na oś z będzie wykonywał ruch harmoniczny prosty.