ROZDZIAŁ XI

ZASADY WARIACYJNE MECHANIKI

§ 1. Wariacja bez wariacji czasu. W tym paragrafie podamy niektóre wiadomości z rachunku wariacyjnego potrzebne do zrozumienia następnych rzeczy.

Wariacja funkcji. Weźmy pod uwagę ruch punktu po osi x, określony funkcją

$$x = x(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{1}$$

Niech dana będzie funkcja

$$T = F(x, \dot{x}, t), \tag{2}$$

ciągła i mająca pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu ciągłe w pewnym obszarze D zmiennych $x, \dot{x}, t$.

Weźmy następnie pod uwagę dowolny ruch po osi x, określony funkcją

$$\bar{x} = \bar{x}(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{3}$$

Załóżmy, że można dobrać taką liczbę $\varepsilon > 0$, że jeżeli:

$$|\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon, \qquad |\dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t)| < \varepsilon \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{4}$$

to funkcja T i jej pochodne cząstkowe będą funkcjami ciągłymi w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$, gdy za x i $\dot{x}$ podstawić w (2) odpowiednio $\bar{x}(t)$ i $\dot{\bar{x}}(t)$.

Połóżmy:

$$\delta x = \bar{x} - x, \qquad \delta \dot{x} = \dot{\bar{x}} - \dot{x}, \tag{5}$$

gdzie x i $\bar{x}$ oznaczają funkcje $x(t)$ i $\bar{x}(t)$. Zatem δx i $\delta \dot{x}$ są funkcjami czasu t, określonymi w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$.

Należy zwrócić uwagę na różnicę w znaczeniu symbolu δx w rozdziałach IX i X a obecnie. Poprzednio symbol δx oznaczał liczbę, obecnie zaś funkcję czasu t.

Na mocy (5) mamy:

$$\delta\dot{x} = \frac{d(\delta x)}{dt}, \tag{I}$$

$$\bar{x} = x + \delta x, \qquad \dot{\bar{x}} = \dot{x} + \delta\dot{x}. \tag{6}$$

Niech

$$\bar{T} = F(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) = F(x + \delta x, \dot{x} + \delta\dot{x}, t),$$

gdzie x oznacza funkcję (1), zaś δx określone jest przez (5). Ze wzoru Tylora dostaniemy

$$\bar{T} - T = F(x + \delta x, \dot{x} + \delta\dot{x}, t) - F(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial T}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\,\delta\dot{x} + R. \tag{7}$$

Resztę R możemy napisać w postaci

$$R = (|\delta x| + |\delta\dot{x}|)\eta, \tag{8}$$

gdzie η jest funkcją czasu t i zależy od $x, \delta x, \delta\dot{x}$, przyczem η dąży jednostajnie do 0, gdy funkcje δx i $\delta\dot{x}$ również dążą jednostajnie do 0. Jeżeli więc $|\delta x|$ i $|\delta\dot{x}|$ są małe, to $|\eta|$ jest małe, a zatem $|R|$ jest małe w wyższym jeszcze stopniu. Wyrażamy to krócej, mówiąc, że R jest *„nieskończenie małe"* w porównaniu z $|\delta x| + |\delta\dot{x}|$.

Połóżmy

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\,\delta\dot{x}. \tag{II}$$

Na mocy więc (7)

$$\bar{T} - T = \delta T + R. \tag{9}$$

Wyrażenie δT nazywamy *wariacją funkcji $T = F(x, \dot{x}, t)$ w miejscu $x = x(t)$* lub *dla funkcji $x = x(t)$*.

We wzorze (II) funkcja δx jest dowolną funkcją czasu, mającą pierwszą i drugą pochodną ciągłą w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$. Wynika to z (5), gdzie $\bar{x}$ jest dowolną funkcją, mającą pierwszą i drugą pochodną ciągłą. Symbol $\delta\dot{x}$ oznacza na mocy (I) pochodną funkcji δx względem czasu t.

Wariacja δT zależy więc od funkcyj x i δx.

Dla odróżnienia będziemy nazywali δx *wariacją zmiennej (lub funkcji) x niezależnej*, a δT *wariacją zmiennej (lub funkcji) T zależnej*.

Ruch zaś $\bar{x} = \bar{x}(t) = x + \delta x$ nazywać będziemy *ruchem porównawczym*.

Wariacja δT oznacza więc w przybliżeniu przyrost funkcji T, gdy od punktu w chwili t w ruchu danym przechodzimy do punktu w tejże chwili t w ruchu porównawczym. Różnica R między wariacją δT a przyrostem prawdziwym $\overline{T}-T$ jest na mocy (8) „nieskończenie małą“ w porównaniu z sumą $|\delta x|+|\delta \dot{x}|$.

Ponieważ badamy przyrost funkcji T w ruchu danym i porównawczym w tej samej chwili t, więc wariację δT nazywamy również *wariacją bez wariacji czasu*, dla odróżnienia od innego rodzaju wariacji, którą poznamy później.

Wariację δT otrzymujemy, tworząc formalnie różniczkę funkcji $F(x,\dot{x},t)$ przy założeniu $t=\text{const.}$ (t.zn. $dt=0$) i pisząc następnie δ zamiast d. Często zamiast δT piszemy $\delta F(x,\dot{x},t)$ lub krótko δF.

Przykład 1. Niech

$$T=\alpha x^2+\beta \dot{x}^2 t+\gamma t^2,$$

gdzie α, β, γ są stałymi. Mamy:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=2\alpha x, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=2\beta \dot{x} t,$$

zatem na mocy (II)

$$\delta T=2\alpha x\,\delta x+2\beta \dot{x} t\,\delta \dot{x},$$

gdzie δx jest funkcją dowolną.

Wariacja całki. Weźmy pod uwagę całkę

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F(x,\ \dot{x},\ t)\,dt \tag{10}$$

i niech

$$\overline{I}=\int_{t_0}^{t_1} F(x+\delta x,\ \dot{x}+\delta \dot{x}, t)\,dt.$$

Mamy

$$\overline{I}-I=\int_{t_0}^{t_1}[F(x+\delta x, \dot{x}+\delta \dot{x}, t)-F(x,\dot{x},t)]\,dt,$$

na mocy więc (7) i (II)

$$\overline{I}-I=\int_{t_0}^{t_1}\delta F\,dt+\int_{t_0}^{t_1} R\,dt. \tag{11}$$

Wyrażenie $\int_{t_0}^{t_1}\delta F\,dt$ nazywamy *wariacją całki* (10) i oznaczamy przez δI.

A więc, w myśl określenia

(III) $$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} F\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta F\,dt.$$

Podobnie jak poprzednio wariacja całki (10) przedstawia w przybliżeniu przyrost całki, gdy od ruchu danego przechodzimy do ruchu porównawczego. Różnica między przyrostem prawdziwym a wariacją δI jest „nieskończenie małą“ w porównaniu z $|\delta x| + |\delta \dot{x}|$.

Wariacja pochodnej. Niech dana będzie funkcja

(12) $$x = \Phi(q, t).$$

Załóżmy, że q jest pewną funkcją czasu t, więc

(13) $$q = q(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Uważając q we wzorze (12) za zmienną funkcję niezależną, otrzymamy na wariację zmiennej zależnej x wzór

(14) $$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q}\,\delta q,$$

gdzie δq oznacza dowolną funkcję ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$.

Utwórzmy pochodną (12). Dostaniemy

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t};$$

wariacja $\delta \dot{x}$ tej funkcji wynosi więc

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}\,\delta \dot{q}.$$

Z uwagi na to, że na mocy (12) pochodne $\partial x/\partial q$ i $\partial x/\partial t$ nie zależą od $\dot{q}$, gdyż x nie zależy od $\dot{q}$, otrzymamy

(15) $$\delta \dot{x} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\,\dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t}\right)\delta q + \frac{\partial x}{\partial q}\,\delta \dot{q}.$$

Tworząc pochodną (14) względem t, dostaniemy

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\,\dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t}\right)\delta q + \frac{\partial x}{\partial q}\,\delta \dot{q},$$

skąd na mocy (15)

(16) $$\delta \dot{x} = \frac{d(\delta x)}{dt}.$$

Porównując (16) ze wzorem (I), widzimy, że oba wzory mają tę samą postać. Różnica leży w tym, że we wzorze (I) x jest zmienną niezależną, zaś w (16) zależną.

Wzór (I) zachodzi więc niezależnie od tego, czy x jest zmienną zależną, czy niezależną. Wynika stąd, że *wariacja jest przemienna z pochodną*, t.zn. że otrzymamy jeden i ten sam wynik, tworząc najpierw wariację, a potem pochodną, lub na odwrót.

Wariacja funkcji złożonej. Niech będą dane funkcje:

$$T = F(x, \dot{x}, t), \tag{17}$$

$$x = \Phi(q, t). \tag{18}$$

Przyjmijmy, że q jest funkcją zmiennej t:

$$q = q(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{19}$$

Tworząc pochodną (18), otrzymamy

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}. \tag{20}$$

Podstawiając w (17) zamiast x i $\dot{x}$ ich wartości z (18) i (20), otrzymamy T jako funkcję zmiennych $q, \dot{q}, t$ czyli

$$T = \Psi(q, \dot{q}, t), \tag{21}$$

a więc jako jej wariację

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}. \tag{22}$$

Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}, \tag{23}$$

a na mocy (18):

$$\frac{\partial x}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{24}$$

Podstawiając (24) w (23), a następnie w (22), otrzymamy

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\right)\delta q + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} = \frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\delta q\right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right).$$

Łatwo stwierdzić, że wyrażenia w ostatnich dwóch nawiasach są wariacjami funkcyj (18) i (20), równają się więc δx i $\delta \dot{x}$. Zatem

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\delta x + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}. \tag{25}$$

Wzór (25) przedstawia wariację funkcji złożonej (21), przyczem δx i $\delta\dot{x}$ oznaczają wariacje funkcji (18) i (20). Zauważmy, że (25) przedstawia również wariację funkcji (17). Widzimy stąd, że wzór (25), t. j. wzór (II), str. 511, zachodzi niezależnie od tego, czy x jest zmienną funkcją zależną, czy niezależną.

Podobnie dla różniczki przy $t=\text{const.}$ wzór

$$dT=\frac{\partial T}{\partial x}\,dx+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\,d\dot{x}$$

zachodzi niezależnie od tego, czy x i $\dot{x}$ są zmiennymi zależnymi, czy nie.

Zauważmy, że we wzorze (25) $\delta\dot{x}$ jest na mocy (16) pochodną δx.

Układy punktów. Określimy teraz wariację w przypadku układu punktów.

Niech będzie dany układ n punktów materialnych

$$A_1(x_1,y_1,z_1),\quad\ldots,\quad A_n(x_n,y_n,z_n).$$

Weźmy pod uwagę dowolny ruch układu (zgodny z więzami lub nie), określony funkcjami:

$$x_i=x_i(t),\quad y_i=y_i(t),\quad z_i=z_i(t),\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ i=1,2,\ldots,n). \tag{26}$$

Niech będzie dana funkcja

$$T=F(x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_n,\ z_1,\ldots,z_n,\ \dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,\ \dot{y}_1,\ldots,\dot{y}_n,\ \dot{z}_1,\ldots,\dot{z}_n,t). \tag{27}$$

Wariacją funkcji (27) dla ruchu określonego funkcjami (26) nazywamy wyrażenie

$$\begin{aligned}\delta T=&\frac{\partial T}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial x_n}\delta x_n+\frac{\partial T}{\partial y_1}\delta y_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial y_n}\delta y_n+\frac{\partial T}{\partial z_1}\delta z_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial z_n}\delta z_n+\\&+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_1}\delta\dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_n}\delta\dot{x}_n+\frac{\partial T}{\partial\dot{y}_1}\delta\dot{y}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial\dot{y}_n}\delta\dot{y}_n+\frac{\partial T}{\partial\dot{z}_1}\delta\dot{z}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial\dot{z}_n}\delta\dot{z}_n,\end{aligned} \tag{28}$$

co piszemy krócej

$$\delta T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial T}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial T}{\partial z_i}\delta z_i+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i+\frac{\partial T}{\partial\dot{y}_i}\delta\dot{y}_i+\frac{\partial T}{\partial\dot{z}_i}\delta\dot{z}_i\right), \tag{IV}$$

gdzie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są dowolnymi funkcjami ciągłymi wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0,t_1\rangle$, przyczem:

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt}=\delta\dot{x}_i,\qquad \frac{d(\delta y_i)}{dt}=\delta\dot{y}_i,\qquad \frac{d(\delta z_i)}{dt}=\delta\dot{z}_i\qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{V}$$

33*

Pochodne $\partial T/\partial x_1, \ldots, \partial T/\partial \dot{z}_n$ są pochodnymi cząstkowymi funkcji (27), w których zamiast $x_1, \ldots, \dot{z}_n$ podstawiono odpowiednio funkcje (26) i ich pochodne.

Podobnie jak poprzednio wariacja δT oznacza w przybliżeniu przyrost funkcji T, gdy od położenia układu w chwili t w ruchu danym przechodzimy do położenia układu w tej samej chwili t w ruchu porównawczym:

$$\bar{x}_i = x_i + \delta x_i, \quad \bar{y}_i = y_i + \delta y_i, \quad \bar{z}_i = z_i + \delta z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Różnica między przyrostem prawdziwym a wariacją jest — jak łatwo okazać — „nieskończenie małą“ w porównaniu z sumą

$$\sum_{i=1}^{n} (|\delta x_i| + |\delta y_i| + |\delta z_i| + |\delta \dot{x}_i| + |\delta \dot{y}_i| + |\delta \dot{z}_i|).$$

Zauważmy, że wariację δT otrzymamy, tworząc różniczkę funkcji T przy założeniu $t = \text{const.}$ (t. j. przy $dt = 0$) i pisząc następnie δ zamiast d.

Niech teraz dana będzie całka

$$I = \int_{t_0}^{t_1} T\, dt, \tag{29}$$

gdzie T oznacza funkcję (27).

Wariacją całki (29) dla ruchu określonego przez (26) nazywamy wyrażenie

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta T\, dt. \tag{30}$$

A więc

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta T\, dt. \tag{VI}$$

Przykład 2. Wyznaczyć wariację energii kinetycznej

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Mamy:

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial z_i} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i,$$

zatem

$$\delta E = \sum m_i (\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \delta \dot{z}_i).$$

Przykład 3. Wyznaczyć wariację funkcji $\sqrt{T}$, gdzie T jest funkcją określoną przez wzór (27).

Tworząc różniczkę przy założeniu $t=\text{const.}$, mamy

$$d\sqrt{T}=dT/2\sqrt{T}, \qquad \text{skąd} \qquad \delta\sqrt{T}=\delta T/2\sqrt{T}.$$

Załóżmy, że współrzędne naturalne $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ określone są przy pomocy parametrów $q_1, \ldots, q_k$ funkcjami:

$$x_i=f_i(q_1,\ldots,q_k,t),\quad y_i=\varphi_i(q_1,\ldots,q_k,t),\quad z_i=\psi_i(q_1,\ldots,q_k,t)\quad (i=1,\ldots,n). \tag{31}$$

Nie zakładamy przy tym, że parametry są zależne, ani że są niezależne. Niech

$$q_1=q_1(t),\quad \ldots,\quad q_k=q_k(t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1) \tag{32}$$

będą dowolnymi funkcjami ciągłymi wraz z ich pierwszymi i drugimi pochodnymi w przedziale $\langle t_0, t_1\rangle$. Funkcje (32) łącznie z (33) określają pewien ruch układu, który może być zgodny z więzami lub nie. Różniczkując (31), otrzymamy

$$\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t}, \tag{33}$$

i podobne wzory dla $\dot{y}_i$ oraz $\dot{z}_i$. Podstawmy w (27) zamiast x_i, y_i, z_i funkcje (31), zaś zamiast $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ funkcje (33). Otrzymamy T w postaci funkcji zmiennych $q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t$:

$$T=\overline{F}(q_1,\ldots,q_k,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k,t). \tag{34}$$

Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia o wariacji funkcji złożonej (p. wzór (25), str. 514), można okazać, że wariacja funkcji (34) również wyraża się wzorem (28) lub (IV), gdzie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są wariacjami funkcyj (31), zaś $\delta\dot{x}_i, \delta\dot{y}_i, \delta\dot{z}_i$ wariacjami funkcyj (33) i analogicznych dla $\dot{y}_i, \dot{z}_i$.

Ponadto, podobnie jak w dowodzie twierdzenia o wariacji pochodnej (p. wzór (16), str. 513) można dowieść, że zachodzić będą również wzory (V), w których x_i, y_i, z_i oznaczają funkcje (31).

Utwórzmy wariacje funkcyj (31). Otrzymamy:

$$\begin{gathered}\delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k,\qquad \delta y_i=\frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k,\\ \delta z_i=\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_k.\end{gathered} \tag{35}$$

Porównując (35) ze wzorami (III), str. 477, określającymi przesunięcia przygotowane, widzimy, że mają one tę samą postać formalną.

§ 2. Zasada Hamiltona. Ruch rzeczywisty. Niech na punkty $A_1(x_1,y_1,z_1),\ldots,A_n(x_n,y_n,z_n)$ układu n punktów materialnych działają odpowiednio siły $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$. Załóżmy, że układ jest holonomiczny (bez tarcia) i że więzy są obustronne, określone związkami:

$$(1) \qquad F_j(x_1,y_1,z_1,\ldots,z_n,t)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m).$$

Weźmy pod uwagę dowolny układ funkcyj:

$$(2) \qquad x_i=x_i(t), \qquad y_i=y_i(t), \qquad z_i=z_i(t) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

ciągłych wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi w przedziale $\langle t_0,t_1\rangle$. Funkcje (2) określają pewien ruch układu.

Jeżeli równości (1) spełnione są w każdej chwili t, gdy za $x_1,\ldots,z_n$ podstawić funkcje (2), mówimy, że funkcje (2) określają *ruch* układu *zgodny z więzami* czyli *ruch możliwy*.

Ruch układu, jaki odbędzie się w rzeczywistości pod działaniem sił $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$, nazywamy *ruchem rzeczywistym*.

Ruchy rzeczywiste mogą być rozmaite, gdyż zależy to od warunków początkowych.

Ruch rzeczywisty jest oczywiście zawsze możliwym, gdyż spełnia związki (1). Na odwrót jednak, nie każdy ruch możliwy jest ruchem rzeczywistym.

Jeżeli np. punkt ciężki ma znajdować się stale na prostej pionowej l (bez tarcia), to ruchem rzeczywistym jest ruch, w którym przyśpieszenie jest skierowane pionowo w dół i równa się co do wielkości przyśpieszeniu ziemskiemu. Natomiast ruchem zgodnym z więzami jest każdy ruch, w którym punkt pozostaje na prostej l, w szczególności ruch jednostajny oraz ruch, w którym przyśpieszenie nie jest stałe; ruchy te nie są oczywiście ruchami rzeczywistymi.

Z zasady d'Alemberta wynika, że spośród ruchów zgodnych z więzami ten tylko jest ruchem rzeczywistym, który spełnia w każdej chwili równanie (II'), str. 480:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i]=0,$$

gdzie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są przesunięciami przygotowanymi.

Zasada d'Alemberta wyraża więc *cechę charakterystyczną ruchów rzeczywistych*, wyróżniającą je spośród wszystkich ruchów zgodnych z więzami.

Podobnie, równania Lagrange'a (str. 485 i 488) i Hamiltona (str. 504), wyodrębniają ruchy rzeczywiste ze zbioru wszystkich ruchów zgodnych z więzami. Poznamy jednak w tym rozdziale inne jeszcze cechy charakterystyczne ruchów rzeczywistych, wyrażone przy pomocy całek i wariacji. Są to t. zw. *zasady wariacyjne (całkowe)*.

Ruch porównawczy. Weźmy pod uwagę dowolny ruch układu zgodny z więzami, określony funkcjami (2), oraz ruch porównawczy:

$$(4)\qquad x_i+\delta x_i,\qquad y_i+\delta y_i,\qquad z_i+\delta z_i\qquad (i=1,2,\dots,n).$$

Obierzmy wariacje $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ tak, by wariacje funkcyj (1) dla danego ruchu (2) były zerami:

$$(5)\qquad \delta F_j=\frac{\partial F_j}{\partial x_1}\delta x_1+\dots+\frac{\partial F_j}{\partial z_n}\delta z_n=0,\qquad (j=1,2,\dots,m).$$

Porównując równania (5) z równaniami (I), str. 475, widzimy, że $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi układu.

Jeżeli $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są bardzo małe, to z (5) wynika, że w przybliżeniu

$$(6)\qquad F_j(x_1+\delta x_1,\dots,z_n+\delta z_n,t)=0\qquad (j=1,2,\dots,m),$$

czyli że ruch porównawczy jest w przybliżeniu ruchem zgodnym z więzami. Wyrażamy to, mówiąc, że ruch porównawczy (4) dla „nieskończenie małych“ wariacyj $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, spełniających równania (5), jest zgodny z więzami (por. str. 430).

Załóżmy, że współrzędne naturalne określone są przy pomocy parametrów $q_1,\dots,q_k$ funkcjami:

$$(7)\qquad x_i=f_i(q_1,\dots,q_k,t),\quad y_i=\varphi_i(q_1,\dots,q_k,t),\quad z_i=\psi_i(q_1,\dots,q_k,t)\quad (i=1,2,\dots,n).$$

Załóżmy dalej, że parametry, określające zgodne z więzami położenia układu, spełniać muszą związki:

$$(8)\qquad \Phi_r(q_1,\dots,q_k,t)=0\qquad (r=1,2,\dots,s).$$

Weźmy pod uwagę dowolny układ funkcyj ciągłych wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi w przedziale $\langle t_0,t_1\rangle$:

$$(9)\qquad q_1=q_1(t),\quad \dots,\quad q_k=q_k(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1).$$

Załóżmy wreszcie, że funkcje (8) stają się tożsamościowo zerami, gdy za $q_1, \ldots, q_k$ podstawimy funkcje (9).

Przy tych założeniach, podstawiając w funkcje (7) funkcje (9), otrzymamy funkcje czasu t, określające ruch zgodny z więzami.

Weźmy pod uwagę ruch porównawczy $q_1+\delta q_1, \ldots, q_k+\delta q_k$ i obierzmy $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ tak, by dla danego ruchu (9) wariacje funkcyj (8) były zerami:

$$\delta \Phi_r = \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_1}\delta q_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_k}\delta q_k = 0 \qquad (r=1,2,\ldots,s). \tag{10}$$

Porównując (10) ze wzorami (IV), str. 477, widzimy, że wariacje $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ są w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi.

Jeżeli $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ są bardzo małe, to na mocy (10) otrzymujemy w przybliżeniu

$$\Phi_r(q_1+\delta q_1, \ldots, q_k+\delta q_k, t) = 0 \qquad (r=1,2,\ldots,s). \tag{11}$$

Ruch (11) będzie więc w przybliżeniu również zgodny z więzami. W myśl przyjętego na str. 519 sposobu wyrażania się, możemy zatem powiedzieć, że jeżeli $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ są „nieskończenie małe" i spełniają równania (10), to ruch porównawczy jest zgodny z więzami.

Zasada Hamiltona dla współrzędnych naturalnych. Niech na układ n punktów materialnych $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ o masach $m_1, \ldots, m_n$ działają siły $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ zależne od zmiennych $x_1, \ldots, z_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n, t$.

A więc:

$$P_{i_x} = F_i(x_1, \ldots, z_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n, t), \quad P_{i_y} = \Phi_i, \quad P_{i_z} = \Psi_i. \tag{12}$$

Załóżmy, że układ jest holonomiczny (bez tarcia) i że więzy są obustronne. Weźmy pod uwagę dowolne funkcje:

$$x_i = x_i(t), \qquad y_i = y_i(t), \qquad z_i = z_i(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{13}$$

określające ruch układu zgodny z więzami.

Energia kinetyczna ruchu (13) wynosi

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \tag{14}$$

Utwórzmy wariację energii kinetycznej dla ruchu (13) (por. przykład 2, str. 516):

$$\delta E = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \delta \dot{z}_i). \tag{15}$$

Ale

$$\dot{x}_i \delta \dot{x}_i = \dot{x}_i \frac{d\,\delta x_i}{dt} = \frac{d(\dot{x}_i \delta x_i)}{dt} - \ddot{x}_i \delta x_i \tag{16}$$

i podobne wzory zachodzą dla $\dot{y}_i \delta \dot{y}_i$ oraz $\dot{z}_i \delta \dot{z}_i$. Podstawiając te wartości w (15), dostaniemy więc

$$\delta E = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) - \sum_{i=1}^{n} m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i). \tag{17}$$

Przyjmijmy

$$\delta' L = \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x} \delta x_i + P_{i_y} \delta y_i + P_{i_z} \delta z_i), \tag{18}$$

gdzie $P_{i_x}, P_{i_y}, P_{i_z}$ oznaczają funkcje (12), w których zamiast x_i, y_i, z_i i $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ podstawiono odpowiednio funkcje (13) i ich pochodne. Ze wzorów (17) i (18) otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta' L + \delta E = {} & \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) + \\ & + \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i]. \end{aligned} \tag{19}$$

Całkując obustronnie od t_0 do t_1, otrzymamy stąd

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} [\delta' L + \delta E]\, dt = {} & \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) \Big|_{t_0}^{t_1} + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i]\, dt. \end{aligned} \tag{20}$$

Symbol $\Big|_{t_0}^{t_1}$ oznacza tu, jak zwykle, że należy podstawić za t najpierw t_1, a następnie t_0, i odjąć od siebie otrzymane wartości.

Dotychczas nie opieraliśmy się na zasadach mechaniki. Wzór (20) zachodzi więc dla dowolnego ruchu (zgodnego z więzami lub nie), określonego funkcjami (13), o ile tylko funkcje (12) są określone dla tego ruchu.

Załóżmy teraz, że ruch (13) jest ruchem rzeczywistym i że wariacje $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi.

Z zasady d'Alemberta wynika, że w każdej chwili t będzie wówczas

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0.$$

Ze wzoru (20) otrzymamy

$$(22) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta' L + \delta E)\,dt = \sum_{i=1}^{n}{}' m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Załóżmy ponadto, że w ruchu (13) i w ruchu porównawczym układ zajmuje to samo położenie w chwilach t_0 i t_1; t. zn. że $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są zerami dla $t = t_0$ i $t = t_1$.

Przy tym założeniu prawa strona równości (22) staje się zerem i otrzymamy

$$(\mathrm{I}) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta' L + \delta E)\,dt = 0.$$

A więc: *dla ruchu rzeczywistego zachodzi równość* (I), *jeżeli wariacje* $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ *są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi i równają się zeru dla* $t = t_0$ *i* $t = t_1$.

Twierdzenie to nazywamy *zasadą Hamiltona.*

Zasada Hamiltona podaje więc pewną cechę ruchów rzeczywistych. Udowodnimy, że *cecha ta jest charakterystyczna,* t. zn. że spośród ruchów zgodnych z więzami tylko ruchy rzeczywiste spełniają zasadę Hamiltona. Wystarczy w tym celu dowieść, że ruch zgodny z więzami i spełniający zasadę Hamiltona spełnia również zasadę d'Alemberta.

Dowód. Załóżmy, że ruch zgodny z więzami, określony funkcjami (13), spełnia zasadę Hamiltona (I). Gdyby ruch ten nie spełniał zasady d'Alemberta w pewnej chwili t' (gdzie $t_0 < t' < t_1$), to możnaby było znaleźć takie liczby $\overline{\delta x_i}, \overline{\delta y_i}, \overline{\delta z_i}$, określające w chwili t' przesunięcie przygotowane układu, że byłoby

$$(23) \qquad \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i)\overline{\delta x_i} + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i)\overline{\delta y_i} + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i)\overline{\delta z_i}] \neq 0 \text{ dla } t = t'.$$

Obierzmy wariacje $\delta' x_i, \delta' y_i, \delta' z_i$ tak, żeby w każdej chwili t określały przesunięcie przygotowane układu i żeby w chwili t' było:

$$\delta' x_i = \overline{\delta x_i}, \qquad \delta' y_i = \overline{\delta y_i}, \qquad \delta' z_i = \overline{\delta z_i};$$

stąd na mocy (23)

$$\sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}) \delta' x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i) \delta' y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i) \delta' z_i] = A \neq 0 \tag{24}$$

dla $t = t'$.

Przypuśćmy np., że $A > 0$ dla $t = t'$. Z ciągłości ruchu wynika, że w pewnym małym przedziale $\langle t', t'' \rangle$ jest także $A > 0$.

Zatem

$$A > 0, \qquad \text{gdy} \qquad t' \leqslant t \leqslant t''. \tag{25}$$

Niech $\alpha(t)$ będzie dowolną funkcją ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$, dodatnią dla $t' < t < t''$, a poza tym równą 0. Połóżmy:

$$\delta x_i = \alpha(t) \delta' x_i, \qquad \delta y_i = \alpha(t) \delta' y_i, \qquad \delta z_i = \alpha(t) \delta' z_i.$$

Stąd na mocy (24) i (25)

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] \, dt = \\ &\qquad = \int_{t_0}^{t_1} A \alpha(t) \, dt = \int_{t'}^{t''} A \alpha(t) \, dt > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Ponieważ wariacje $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ przedstawiają w każdej chwili t przesunięcia przygotowane i z założenia są zerami dla $t = t_0$ i $t = t_1$, więc ze wzoru (20) otrzymujemy na mocy (26)

$$\int_{t_1}^{t_0} (\delta' L + \delta E) \, dt > 0,$$

wbrew założeniu, że ruch dany spełnia zasadę Hamiltona.

Udowodniliśmy w ten sposób, że *zasady d'Alemberta i Hamiltona są równoważne.*

Przykład. Punkt ciężki o masie m ma pozostawać na kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$. Mamy (przyjmując oś z skierowaną pionowo w górę):

$$\delta' L = -mg\,\delta z, \qquad \delta E = m(\dot{x}\,\delta\dot{x}+\dot{y}\,\delta\dot{y}+\dot{z}\,\delta\dot{z}),$$

zatem na mocy zasady Hamiltona (I), str. 522,

$$\int_{t_0}^{t_1} [-g\,\delta z+\dot{x}\,\delta\dot{x}+\dot{y}\,\delta\dot{y}+\dot{z}\,\delta\dot{z}]\,dt=0.$$

Wzór ten zachodzi dla ruchu rzeczywistego przy założeniu, że $\delta x, \delta y, \delta z$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi, t. zn. spełniającymi równanie

$$x\,\delta x+y\,\delta y+z\,\delta z=0,$$

a ponadto, że stają się zerem w chwilach $t=t_0$ i $t=t_1$.

Zasada Hamiltona dla współrzędnych uogólnionych. Niech współrzędne naturalne określone będą parametrami $q_1,\dots,q_k$ przy pomocy funkcyj:

$$(27) \quad x_i=f_i(q_1,\dots,q_k,t),\ \ y_i=\varphi_i(q_1,\dots,q_k,t),\ \ z_i=\psi_i(q_1,\dots,q_k,t),\ \ i=1,2,\dots,n.$$

Załóżmy, że parametry, określające położenia układu zgodne z więzami, spełniają równania

$$(28) \qquad \Phi_r(q_1,\dots,q_k,t)=0 \qquad (r=1,2,\dots,s)$$

i weźmy pod uwagę dowolny ruch rzeczywisty układu określony funkcjami:

$$(29) \qquad q_i=q_i(t) \qquad (i=1,2,\dots,k).$$

Wariacje funkcyj (27) dla powyższego ruchu wynoszą

$$(30) \qquad \delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\dots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

i podobnie δy_i oraz δz_i.

Załóżmy dalej, że δq_i są w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi, t.zn. że spełniają równania (IV), str. 477:

$$(31) \qquad \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_1}\delta q_1+\dots+\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_k}\delta q_k=0 \qquad (r=1,2,\dots,s);$$

zatem $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są również przesunięciami przygotowanymi (str. 477).

Załóżmy wreszcie, że δq_i są zerami dla $t=t_0$ i $t=t_1$; z (30) wynika, że również $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ będą zerami dla $t=t_0$ i $t=t_1$. Ponieważ zaś wariacja jest przemienna z pochodną (str. 513), więc wariacje pierwszych pochodnych funkcyj (27), t. j. $\delta\dot{x}_i, \delta\dot{y}_i, \delta\dot{z}_i$, równe są pochodnym funkcyj $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$.

Na mocy (15) i (18), str. 521, możemy zasadę Hamiltona (I), str. 522, napisać w postaci:

$$(32)\qquad \int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\delta x_i+P_{i_y}\delta y_i+P_{i_z}\delta z_i)+\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i\delta\dot{x}_i+\dot{y}_i\delta\dot{y}_i+\dot{z}_i\delta\dot{z}_i)\Big]dt=0,$$

gdzie x_i, y_i, z_i są funkcjami określającymi ruch rzeczywisty, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi, przyjmującymi wartość 0 w chwilach $t=t_0$ i $t=t_1$, zaś $\delta\dot{x}_i, \delta\dot{y}_i, \delta\dot{z}_i$ są pochodnymi funkcyj $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$. Jak wynika z rozważań przykładu 3, str. 517, równanie (32) będzie również spełnione, jeżeli założymy, że funkcje x_i, y_i, z_i, dane wzorami (27) i (29), określają ruch rzeczywisty, zaś δx_i i $\delta\dot{x}_i$ są wariacjami funkcyj (27) i ich pochodnych, przyczem δq_i są przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 dla $t=t_0$ i $t=t_1$.

Przy tych założeniach mamy ((4), str. 488)

$$(33)\qquad \delta' L=\sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\delta x_i+P_{i_y}\delta y_i+P_{i_z}\delta z_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j,$$

gdzie Q_j oznaczają składowe siły uogólnionej. Ponadto z twierdzenia o wariacji funkcji złożonej (str. 514) mamy

$$(34)\qquad \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\delta\dot{x}_i+\dot{y}_i\delta\dot{x}_i+\dot{z}_i\delta\dot{z}_i)=\delta\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)\Big)=\delta E,$$

gdzie funkcje x_i, y_i, z_i dane są wzorami (27) i (29), określającymi ruch rzeczywisty, $\delta\dot{x}_i, \delta\dot{y}_i, \delta\dot{z}_i$ są wariacjami pochodnych funkcyj (27), zaś E energią kinetyczną, wyrażoną przy pomocy parametrów $q_1, \dots, q_k$. Na mocy (32), (33) i (34) zasadę Hamiltona możemy więc napisać w postaci (I), str. 522, gdzie $\delta' L$ określone jest wzorem (33), zaś energia kinetyczna E wyrażona jest przy pomocy współrzędnych uogólnionych $q_1, \dots, q_k$.

A więc: *Zasada Hamiltona zachodzi również dla współrzędnych uogólnionych przy założeniu, że δq_i są przesunięciami przygotowanymi, równymi* 0 *dla* $t=t_0$ *i* $t=t_1$.

Zasada Hamiltona w polu potencjalnym. Załóżmy, że siły posiadają potencjał V. Zatem ((1), str. 437)

$$\delta' L = \delta V. \tag{35}$$

Z zasady Hamiltona otrzymamy więc

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta V + \delta E]\, dt = 0 \qquad \text{czyli} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta(V+E)\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (V+E)\, dt = 0.$$

Wyrażenie $W = E + V$ nazwaliśmy potencjałem kinetycznym (str. 493). Zatem

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} W\, dt = 0. \tag{II}$$

A więc: *wariacja całki z potencjału kinetycznego jest równa zeru dla ruchu rzeczywistego, jeżeli wariacje* $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ *przedstawiają w każdej chwili przesunięcie przygotowane układu oraz są zerami w chwilach* $t = t_0$ *i* $t = t_1$.

Wzór (35) zachodzi dla współrzędnych uogólnionych (por. (39), str. 467). Ponieważ zasada Hamiltona również zachodzi dla współrzędnych uogólnionych, więc (II) jest spełnione dla ruchu rzeczywistego przy założeniu, że potencjał kinetyczny W wyrażony jest przy pomocy parametrów $q_1, \dots, q_k$, zaś wariacja została utworzona dla ruchu rzeczywistego, przyczem δq_i są przesunięciami przygotowanymi, równymi zeru dla $t = t_0$ i $t = t_1$.

Układy holonomiczne skleronomiczne w polu potencjalnym. Niech dany będzie układ holonomiczny skleronomiczny, w którym siły posiadają potencjał

$$V = V(x_1, \dots, z_n). \tag{36}$$

Załóżmy, że ruch układu określony funkcjami:

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad z_i = z_i(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \; i = 1, 2, \dots, n) \tag{37}$$

jest ruchem rzeczywistym, dla którego energia kinetyczna w $\langle t_0, t_1 \rangle$ nie znika, t. zn.:

$$E \neq 0 \qquad \text{dla} \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{38}$$

Na mocy zasady Hamiltona (I), str. 522, i (35) mamy

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right) + \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \delta \dot{z}_i) \right] dt = 0, \tag{39}$$

gdzie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi i równają się zeru w chwilach $t=t_0$ i $t=t_1$. Niech

$$(40) \qquad t=\vartheta(\tau) \qquad (\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1)$$

będzie dowolną funkcją zmiennej τ, ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle \tau_0, \tau_1 \rangle$ i spełniającą warunki:

$$(41) \qquad \vartheta(\tau_0)=t_0, \qquad \vartheta(\tau_1)=t_1, \qquad \vartheta'(\tau)>0 \qquad (\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1),$$

gdzie ϑ' oznacza pochodną względem τ. Podstawiając (40) w (37), otrzymamy:

$$(42) \quad x_i=x_i(\vartheta(\tau))=\xi_i(\tau), \quad y_i=\eta_i(\tau), \quad z_i=\zeta_i(\tau), \quad (\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1;\, i=1,2,\dots,n).$$

Funkcje (42) przedstawiają parametrycznie tory punktów układu przy pomocy parametru τ.

Oznaczając przez x'_i, y'_i, z'_i pochodne funkcyj (42), zaś przez t' pochodną funkcji (40) względem parametru τ, otrzymamy:

$$(43) \qquad \dot{x}_i=x'_i/t', \qquad \dot{y}_i=y'_i/t', \qquad \dot{z}_i=z'_i/t',$$

skąd dla energii kinetycznej

$$(44) \qquad E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)}{t'^2}.$$

Z zasady zachowania energii całkowitej mamy

$$(45) \qquad E-V=h, \qquad \text{gdzie} \qquad h=\text{const.},$$

skąd na mocy (44)

$$(46) \qquad t'=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)}{h+V}}.$$

Wzór (46) zachodzi, gdyż $h+V=E$ na mocy (45), zaś $E \neq 0$ na mocy (38).

Przyjmujemy, że współrzędne x_i, y_i, z_i występujące w V (por. wzór (36)) wyrażone są we wzorze (46) przez funkcje (42). Wariacje $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, które są funkcjami zmiennej t, możemy uważać na mocy (40) za funkcje zmiennej τ.

Oznaczając przez $\delta x_i', \delta y_i', \delta z_i'$ pochodne względem τ, otrzymamy:

$$\delta \dot{x}_i = \delta x_i'/t', \qquad \delta \dot{y}_i = \delta y_i'/t', \qquad \delta \dot{z}_i = \delta z_i'/t'. \tag{47}$$

Wyrażając w (39) zmienną t przez τ przy pomocy funkcji (40), dostaniemy na mocy (41), (43) i (47)

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (x_i' \delta x_i' + y_i' \delta y_i' + z_i' \delta z_i')}{t'^2} \right] t' d\tau = 0, \tag{48}$$

gdzie x_i, y_i, z_i, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są funkcjami zmiennej τ. Wzór (48) możemy napisać w postaci

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\delta V \cdot t' + \frac{1}{t'} \delta \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \right] d\tau = 0, \tag{49}$$

przyczem pojęcie wariacji należy rozumieć jak poprzednio, lecz zamiast t występuje obecnie τ. Podstawiając (46) w (49), otrzymamy

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\frac{\delta V}{\sqrt{h+V}} \sqrt{\frac{1}{2} \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)} + \sqrt{h+V} \cdot \frac{\delta \sum \frac{1}{2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)}{\sqrt{\sum \frac{1}{2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)}} \right] d\tau = 0. \tag{50}$$

Łatwo stwierdzić, że wyrażenie pod całką równe jest wariacji $2\delta \left[\sqrt{h+V} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)} \right]$, skąd na mocy (50)

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\sqrt{h+V} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)} \right] d\tau = 0. \tag{I}$$

Z założeń co do $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ wynika, że wzór (I) zachodzi dla dowolnych funkcyj $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ parametru τ, które dla każdej wartości τ są przesunięciami przygotowanymi w położeniu układu, określonym funkcjami (42), i które są zerami dla $\tau = \tau_0$ oraz $\tau = \tau_1$. Wariacja utworzona jest dla funkcyj (42), określających tory punktów układu w ruchu rzeczywistym.

Ponieważ we wzorze (I) nie występuje czas t, więc wzór ten wyraża pewną własność torów ruchu rzeczywistego.

Niech w szczególności układ redukuje się do jednego punktu x, y, z o masie m, poruszającego się bez działania sił. Zatem $V = 0$. Z (I) otrzymamy

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\tau = 0.$$

Ponieważ element łuku jest $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,d\tau$, więc

(51) $$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} ds=0.$$

Przyjmijmy, że punkt ma pozostawać na powierzchni S. Krzywe o własności (51) są to t. zw. *linie geodetyczne*. W geometrii różniczkowej dowodzi się, że najkrótszą linią na powierzchni, łączącą dwa dostatecznie bliskie punkty linii geodetycznej, jest łuk tej linii. Z (51) wynika zatem, że *ruch punktu na powierzchni bez działania sił odbywa się zawsze po liniach geodetycznych.*

Uwaga. Wzór (I) wyprowadza się zwykle łatwiej z t. zw. *zasady Maupertuis* (str. 537). Trzeba się jednak oprzeć wówczas na pewnych twierdzeniach z rachunku wariacyjnego, o których nie zakładamy, że są czytelnikowi znane.

§ 3. Wariacja z wariacją czasu. Wariacja funkcji. Niech będzie dany ruch punktu po osi x, określony funkcją

(1) $$x=x(t) \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1).$$

Weźmy pod uwagę dowolny ruch porównawczy

(2) $$\bar{x}=\bar{x}(t) \qquad (t_0'\leqslant t\leqslant t_1'),$$

gdzie chwile t_0' i t_1' mogą być inne niż t_0 i t_1. Oznaczmy przez Δt dowolną funkcję czasu t, ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0, t_1\rangle$ i spełniającą nierówność

(3) $$t_0'\leqslant t+\Delta t\leqslant t_1' \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1).$$

Niech wreszcie

(I) $$\Delta x=\bar{x}(t+\Delta t)-x(t);$$

Δx jest więc funkcją czasu t i oznacza przyrost współrzędnej x, gdy od punktu A w ruchu danym w chwili t przechodzimy do punktu A' w ruchu porównawczym w chwili $t+\Delta t$. Tworząc pochodną (I), otrzymamy

$$\frac{d(\Delta x)}{dt}=[\dot{\bar{x}}(t+\Delta t)]\left(1+\frac{d(\Delta t)}{dt}\right)-\dot{x}(t),$$

skąd

$$\dot{\bar{x}}(t+\Delta t)=\left[\frac{d(\Delta x)}{dt}+\dot{x}(t)\right]\Big/\left(1+\frac{d(\Delta t)}{dt}\right).$$

Odejmując obustronnie $\dot{x}(t)$, dostaniemy stąd po łatwych przekształceniach

$$(4)\qquad \dot{\overline{x}}(t+\Delta t)-\dot{x}(t)=\frac{d(\Delta x)}{dt}-\dot{x}(t)\frac{d(\Delta t)}{dt}+\varepsilon,$$

gdzie

$$(5)\qquad \varepsilon=\eta\frac{d(\Delta t)}{dt},\qquad \eta=-\left(\frac{d(\Delta x)}{dt}-\dot{x}(t)\frac{d(\Delta t)}{dt}\right)\Big/\left(1+\frac{d(\Delta t)}{dt}\right).$$

Jeżeli więc Δx, Δt i ich pochodne dążą do 0 jednostajnie, to η dąży do 0 jednostajnie. Zatem R jest „nieskończenie małą“ w porównaniu z $|d(\Delta x)/dt|+|d(\Delta t)/dt|$.

Niech

$$(\mathrm{II})\qquad \Delta\dot{x}=\frac{d(\Delta x)}{dt}-\dot{x}\frac{d(\Delta t)}{dt}.$$

Na mocy więc (4)

$$(6)\qquad \dot{\overline{x}}(t+\Delta t)-\dot{x}(t)=\Delta\dot{x}+\varepsilon.$$

Lewa strona równości (6) oznacza przyrost prędkości punktów A i A', t. j. przyrost prędkości, gdy od punktu A w chwili t w ruchu danym przechodzimy do punktu A' w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym. Zatem $\Delta\dot{x}$ przedstawia nam ten przyrost w przybliżeniu, z różnicą „nieskończenie małą“ w porównaniu z sumą $|d(\Delta x)/dt|+|d(\Delta t)/dt|$.

Zauważmy, że na mocy (6) jest na ogół

$$(\mathrm{II}')\qquad \Delta\dot{x}\neq\frac{d(\Delta x)}{dt}.$$

Niech będzie dana funkcja

$$(7)\qquad T=F(x,\dot{x},t).$$

Oznaczmy przez T wartość funkcji (7) w ruchu danym w chwili t, zaś przez $\overline{T}$ wartość tej funkcji w ruchu porównawczym w chwili $t+\Delta t$. Zatem różnica tych wartości wynosi

$$(8)\qquad \overline{T}-T=F\left(\overline{x}(t+\Delta t),\dot{\overline{x}}(t+\Delta t),t+\Delta t\right)-F\left(x(t),\dot{x}(t),t\right).$$

Ze wzoru Tylora otrzymamy

$$(9)\qquad \overline{T}-T=\frac{\partial T}{\partial x}\left(\overline{x}(t+\Delta t)-x(t)\right)+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\left(\dot{\overline{x}}(t+\Delta t)-\dot{x}(t)\right)+\frac{\partial T}{\partial t}\Delta t+R,$$

gdzie reszta R jest „nieskończenie małą“ wyższego rzędu, niż przyrosty $\overline{x}(t+\Delta t)-x(t)$, $\dot{\overline{x}}(t+\Delta t)-\dot{x}(t)$ i Δt.

Na mocy (I), (6) i (9) otrzymamy

$$\overline{T}-T=\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\Delta \dot{x}+\frac{\partial T}{\partial t}\Delta t+R', \tag{10}$$

gdzie $R'=R+\varepsilon\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$, a więc gdzie R' jest „nieskończenie małe“ w porównaniu z

$$|\Delta x|+|\Delta t|+|d(\Delta x)/dt|+|d(\Delta t)/dt|. \tag{11}$$

Połóżmy

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\Delta \dot{x}+\frac{\partial T}{\partial t}\Delta t. \tag{III}$$

Na mocy (10) mamy $\overline{T}-T=\Delta T+R'$; zatem ΔT oznacza w przybliżeniu przyrost funkcji T, gdy od punktu A w chwili t w ruchu danym przechodzimy do punktu A' w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym, przyczem popełniony błąd jest „nieskończenie mały“ w porównaniu z (11).

Wyrażenie ΔT nazywamy *wariacją wraz z wariacją czasu* funkcji T dla ruchu $x=x(t)$, zaś funkcję Δt nazywamy *wariacją czasu*.

Dla $\Delta t=0$ będziemy mieli na mocy (I) i (5), str. 510, $\Delta x=\delta x$, a na mocy (II) i (I), str. 511, $\Delta\dot{x}=\delta\dot{x}$. Z (III) dostaniemy więc

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial x}\delta x+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}$$

czyli $\Delta T=\delta T$.

W przypadku więc, gdy $\Delta t=0$, wariacja wraz z wariacją czasu przechodzi w wariację zwykłą.

Przykład. Utworzyć wariację wraz z wariacją czasu dla funkcji

$$T=\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+axt,$$

gdzie a i m są stałymi.

Mamy

$$\Delta T=at\Delta x+m\dot{x}\Delta\dot{x}+ax\Delta t,$$

na mocy więc (II)

$$\Delta T=at\Delta x+m\dot{x}\frac{d\Delta x}{dt}+ax\Delta t-m\dot{x}^2\frac{d(\Delta t)}{dt}.$$

Układy punktów. Niech ruch układu n punktów materialnych określony będzie funkcjami:

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad z_i = z_i(t), \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1;\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

i niech dana będzie funkcja

$$T = F(x_1, \ldots, z_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n, t). \tag{13}$$

Weźmy pod uwagę dowolny ruch porównawczy

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(t), \quad \bar{y}_i = \bar{y}_i(t), \quad \bar{z}_i = \bar{z}_i(t), \quad (t_0' \leqslant t \leqslant t_1';\ i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Niech Δt będzie dowolną funkcją czasu t, ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$ i spełniającą warunek

$$t_0' \leqslant t + \Delta t \leqslant t_1' \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{15}$$

Połóżmy:

$$\Delta x_i = \bar{x}_i(t + \Delta t) - x_i(t), \quad \Delta y_i = \bar{y}_i(t + \Delta t) - y_i(t), \quad \Delta z_i = \bar{z}_i(t + \Delta t) - z_i(t), \tag{IV}$$

$$\Delta \dot{x}_i = \frac{d(\Delta x_i)}{dt} - \dot{x}_i \frac{d(\Delta t)}{dt}, \quad \Delta \dot{y}_i = \frac{d(\Delta y_i)}{dt} - \dot{y}_i \frac{d(\Delta t)}{dt}, \quad \Delta \dot{z}_i = \frac{d(\Delta z_i)}{dt} - \dot{z}_i \frac{d(\Delta t)}{dt}. \tag{V}$$

Wyrażenia $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ oznaczają przyrosty współrzędnych, zaś $\Delta \dot{x}_i, \Delta \dot{y}_i, \Delta \dot{z}_i$ przybliżone przyrosty pochodnych tych współrzędnych, gdy od położenia układu w chwili t w ruchu danym przechodzimy do położenia układu w chwili $t + \Delta t$ w ruchu porównawczym. Przy tym przybliżeniu błąd jest „nieskończenie mały“ w porównaniu z

$$\left| \frac{d(\Delta x_1)}{dt} \right| + \left| \frac{d(\Delta y_1)}{dt} \right| + \ldots + \left| \frac{d(\Delta z_n)}{dt} \right| + \left| \frac{d(\Delta t)}{dt} \right|. \tag{16}$$

Oznaczmy przez T wartość funkcji (13) w ruchu danym w chwili t, a przez $\bar{T}$ jej wartość w chwili $t + \Delta t$ w ruchu porównawczym. Kładąc

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial T}{\partial y_i} \Delta y_i + \frac{\partial T}{\partial z_i} \Delta z_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \Delta \dot{x}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \Delta \dot{y}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \Delta \dot{z}_i \right) + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t \tag{VI}$$

i postępując jak poprzednio, otrzymamy

$$\bar{T} - T = \Delta T + R, \tag{17}$$

gdzie R jest „nieskończenie małą“ w porównaniu z sumą

$$\sum_{i=1}^{n} \left(|\Delta x_i| + |\Delta y_i| + |\Delta z_i| + \left| \frac{d(\Delta x_i)}{dt} \right| + \left| \frac{d(\Delta y_i)}{dt} \right| + \left| \frac{d(\Delta z_i)}{dt} \right| \right) + |\Delta t| + \left| \frac{d(\Delta t)}{dt} \right|. \tag{18}$$

Wyrażenie ΔT nazywamy *wariacją wraz z wariacją czasu* funkcji T dla ruchu (12) układu punktów.

Wariacja ΔT przedstawia zatem w przybliżeniu przyrost funkcji T, gdy od położenia układu w chwili t w ruchu danym przechodzimy do położenia układu w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym, przyczem różnica między przyrostem prawdziwym a ΔT jest „nieskończenie mała" w porównaniu z (18).

Dla $\Delta t = 0$ jest na mocy (IV), (V), (5), str. 510, i (I), str. 511:

$$\Delta x_i = \delta x_i, \quad \Delta y_i = \delta y_i, \quad \Delta z_i = \delta z_i, \quad \Delta \dot{x}_i = \delta \dot{x}_i, \quad \Delta \dot{y}_i = \delta \dot{y}_i, \quad \Delta \dot{z}_i = \delta \dot{z}_i,$$

skąd na mocy (VI) $\Delta T = \delta T$.

W przypadku więc, gdy $\Delta t = 0$, wariacja wraz z wariacją czasu przechodzi w wariację zwykłą.

Wariacja wraz z wariacją czasu całki. Niech dana będzie całka

$$I = \int_{t_0}^{t_1} T\,dt, \tag{19}$$

gdzie T oznacza funkcję (13). Oznaczmy przez Δt_0 i Δt_1 wartości funkcji Δt w chwilach t_0 i t_1.

Niech I będzie wartością całki (19) dla ruchu danego, zaś $\bar{I}$ wartością tejże całki dla ruchu porównawczego, wziętej w granicach od $t_0 + \Delta t_0$ do $t_1 + \Delta t_1$, t. j.

$$\bar{I} = \int_{t_0+\Delta t_0}^{t_1+\Delta t_1} T_1\,dt, \tag{20}$$

gdzie T_1 oznacza wartość funkcji T w chwili t w ruchu porównawczym. Podstawiając w (20) $t+\Delta t$ zamiast t, otrzymamy

$$\bar{I} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{T}\left(1 + \frac{d(\Delta t)}{dt}\right) dt, \tag{21}$$

gdzie $\bar{T}$ oznacza wartość funkcji T w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym.

Na mocy (19) i (21) otrzymamy

$$\bar{I} - I = \int_{t_0}^{t_1} \left[(\bar{T} - T) + \bar{T}\frac{d(\Delta t)}{dt}\right] dt;$$

skąd na mocy (17) po łatwych przekształceniach

(22) $$\bar{I}-I=\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta T+T\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt+R',$$

gdzie

(23) $$R'=\int_{t_0}^{t_1}\left[(\Delta T+R)\frac{d(\Delta t)}{dt}+R\right]dt.$$

Łatwo stwierdzić, że R' jest „nieskończenie małe“ w porównaniu z (18). Połóżmy

(VII) $$\Delta I=\Delta\int_{t_0}^{t_1}T\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta T+T\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt.$$

Wyrażenie ΔI nazywamy *wariacją wraz z wariacją czasu całki I*.

Na mocy (22) i (VII) mamy

(24) $$\bar{I}-I=\Delta I+R',$$

ΔI przedstawia więc w przybliżeniu przyrost całki (19), gdy od danego ruchu przechodzimy do ruchu porównawczego, przyczem w ruchu porównawczym obliczamy całkę w granicach $t_0+\Delta t_0$, $t_1+\Delta t_1$. Różnica między ΔI a przyrostem prawdziwym jest „nieskończenie mała“ w porównaniu z (18).

W przypadku, gdy $\Delta t=0$, wariacja wraz z wariacją czasu przechodzi — jak łatwo zauważyć — w wariację zwykłą.

§ 4. Zasada Maupertuis (najmniejszego działania). Przekształcenie Höldera. Niech układ punktów materialnych $A_1(x_1,y_1,z_1)$, ..., $A_n(x_n,y_n,z_n)$ o masach m_1, ..., m_n poddany będzie działaniu sił $\bar{P}_1$, ..., $\bar{P}_n$, zależnych od x_1, ..., z_n, $\dot{x}_1$, ..., $\dot{z}_n, t$. A więc:

(1) $$P_{i_x}=F_i(x_1,\ldots,z_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{z}_n,t),\qquad P_{i_y}=\Phi_i,\qquad P_{i_z}=\Psi_i.$$

Załóżmy, że układ jest holonomiczny bez tarcia i że więzy są obustronne.

Weźmy pod uwagę dowolny ruch układu zgodny z więzami lub nie, określony funkcjami:

(2) $$x_i=x_i(t),\quad y_i=y_i(t),\quad z_i=z_i(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1;\ i=1,2,\ldots,n).$$

Energia kinetyczna wynosi

(3) $$E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2).$$

Utwórzmy wariację energii kinetycznej wraz z wariacją czasu dla ruchu (2):

$$\Delta E = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i \Delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \Delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \Delta \dot{z}_i). \tag{4}$$

Wyrażając $\Delta \dot{x}_i, \Delta \dot{y}_i, \Delta \dot{z}_i$ przy pomocy wzorów (V), str. 532, dostaniemy

$$\Delta E = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\dot{x}_i \frac{d(\Delta x_i)}{dt} + \dot{y}_i \frac{d(\Delta y_i)}{dt} + \dot{z}_i \frac{d(\Delta z_i)}{dt} \right] - 2E \frac{d(\Delta t)}{dt}. \tag{5}$$

Przenosząc ostatni wyraz z prawej strony na lewą i całkując, otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta E + 2E \frac{d(\Delta t)}{dt} \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\dot{x}_i \frac{d(\Delta x_i)}{dt} + \dot{y}_i \frac{d(\Delta y_i)}{dt} + \dot{z}_i \frac{d(\Delta z_i)}{dt} \right] dt. \tag{6}$$

Całkując przez części, otrzymamy $\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_i \frac{d(\Delta x_i)}{dt} = \dot{x}_i \Delta x_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}_i \Delta x_i \, dt$ i podobne wzory otrzymamy dla y_i i z_i. Stosując je do prawej strony równania (6), otrzymamy

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta E + 2E \frac{d(\Delta t)}{dt} \right] dt = \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \Delta x_i + \dot{y}_i \Delta y_i + \dot{z}_i \Delta z_i) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{n} m_i (\ddot{x}_i \Delta x_i + \ddot{y}_i \Delta y_i + \ddot{z}_i \Delta z_i) \right] dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Połóżmy

$$\Delta' L = \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x} \Delta x_i + P_{i_y} \Delta y_i + P_{i_z} \Delta z_i). \tag{8}$$

Całkując wzór (8) i dodając do obu stron równania (7), dostaniemy

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta' L + \Delta E + 2E \frac{d(\Delta t)}{dt} \right] dt = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i \Delta x_i + \dot{y}_i \Delta y_i + \dot{z}_i \Delta z_i) \Big|_{t_0}^{t_1} + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i) \Delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i) \Delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i) \Delta z_i] \, dt. \end{aligned} \tag{I}$$

Wzór (I) nosi nazwę *przekształcenia Höldera*.

Zachodzi on dla każdego ruchu zgodnego z więzami lub nie (o ile tylko funkcje (1) są dla tego ruchu określone).

Jeżeli zamiast wariacji Δ wraz z wariacją czasu przyjmiemy wariację zwykłą δ, t.zn. jeżeli położymy $\Delta t = 0$, to — jak łatwo widzieć — otrzymamy wzór (20), str. 521.

Postać ogólniejsza zasady Hamiltona. Załóżmy, że funkcje (2) określają ruch rzeczywisty. Załóżmy ponadto, że funkcje $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ są w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi układu.

Na mocy zasady d'Alemberta wyrażenie pod całką po prawej stronie równości (I) jest zerem. Zatem

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta' L + \Delta E + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right] dt = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i \Delta x_i + \dot{y}_i \Delta y_i + \dot{z}_i \Delta z_i)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Załóżmy, że $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ są zerami dla $t = t_0$ i $t = t_1$. Prawa strona *ostatniej równości będzie więc zerem. Otrzymamy zatem*

$$\text{(II)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta' L + \Delta E + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right] dt = 0.$$

Równanie (II) *zachodzi dla ruchu rzeczywistego przy założeniu, że* $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ *są w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi i równają się* 0 *dla* $t = t_0$ *i* $t = t_1$, *zaś* Δt *jest dowolne.*

W przypadku, gdy $\Delta t = 0$, wariacja Δ zamieni się na wariację δ. Łatwo zauważyć, że (II) przyjmie wówczas postać zasady Hamiltona (I), str. 522. Postać (II) zasady wariacyjnej jest zatem od niej ogólniejsza. Nie przedstawia ona jednak ogólniejszej własności. Na mocy bowiem (5) i (8) możemy napisać (II) w postaci

$$\text{(9)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} (P_{i_x} \Delta x_i + P_{i_y} \Delta y_i + P_{i_z} \Delta z_i) + \\ + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i \frac{d(\Delta x_i)}{dt} + \dot{y}_i \frac{d(\Delta y_i)}{dt} + \dot{z}_i \frac{d(\Delta z_i)}{dt}\right)\Bigg] dt = 0.$$

Ponieważ $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ są to funkcje dowolne, przedstawiające przesunięcia przygotowane i znikające dla $t = t_0$ i $t = t_1$, zaś Δt wcale we wzorze (9) nie występuje, więc pisząc $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ zamiast $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, otrzymamy z (9) zasadę Hamiltona.

Równanie (II) jest więc zasadzie Hamiltona równoważne.

Zasada Maupertuis. Równanie (II) zachodzi dla dowolnego Δt, zaś $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ mają jedynie być w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi, znikającymi dla $t=t_0$ i $t=t_1$.

Załóżmy teraz, że $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ i Δt są tak dobrane, aby spełniony był ponadto warunek

$$\Delta' L = \Delta E. \tag{III}$$

Na mocy (5) i (8) warunek (III) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}{}'(P_{i_x}\Delta x_i + P_{i_y}\Delta y_i + P_{i_z}\Delta z_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}{}' m_i\left(\dot{x}_i\frac{d(\Delta x_i)}{dt} + \dot{y}_i\frac{d(\Delta y_i)}{dt} + \dot{z}_i\frac{d(\Delta z_i)}{dt}\right) - 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}.\end{aligned} \tag{10}$$

Z (II) i (III) otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[2\Delta E + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right] = 0, \tag{11}$$

skąd na mocy wzoru (VII), str. 534,

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} E\,dt = 0. \tag{IV}$$

A więc: *wariacja wraz z wariacją czasu całki z energii kinetycznej jest dla ruchu rzeczywistego zerem, jeżeli $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi, równymi* 0 *dla $t=t_0$ i $t=t_1$, i jeżeli zachodzi warunek* (III) (t. zn. jeżeli praca przygotowana na przesunięciu $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ równa jest wariacji wraz z wariacją czasu energii kinetycznej).

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady Maupertuis* lub *zasady najmniejszego działania.*

Oznaczając przez ds_i element łuku, po którym porusza się punkt m_i, a przez v_i prędkość punktu, mamy $ds_i = v_i\,dt$. Zatem

$$\int_{t_0}^{t_1} E\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{}' m_i v_i^2\right)dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}{}' m_i v_i\,ds_i.$$

Wyrażenie $m_i v_i$ jest *pędem („działaniem")*.

Opierając się na (IV), można dowieść, że przy pewnych założeniach całka z energii kinetycznej ma dla ruchu rzeczywistego najmniejszą wartość pośród ruchów spełniających pewne warunki. Stąd nazwa *zasady najmniejszego działania.*

Załóżmy, że pewien ruch zgodny z więzami spełnia zasadę Maupertuis, i ponadto, że energia kinetyczna nie znika w $\langle t_0, t_1 \rangle$:

$$E \neq 0 \qquad (t_0 \leq t \leq t_1). \tag{12}$$

Niech funkcje $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ będą w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 dla $t=t_0$ i $t=t_1$ a poza tym funkcjami dowolnymi. Obierzmy Δt tak, by zachodziła równość (III), lub — co na jedno wychodzi — równanie (10). Możemy więc na mocy (12) i (10) przyjąć

$$\begin{aligned}\Delta t = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2E}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i \frac{d(\Delta x_i)}{dt} + \dot{y}_i \frac{d(\Delta y_i)}{dt} + \dot{z}_i \frac{d(\Delta z_i)}{dt}\right) - \\ - \sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\Delta x_i + P_{i_y}\Delta y_i + P_{i_z}\Delta z_i)\Bigg] dt.\end{aligned} \tag{13}$$

Dla tak dobranych $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i, \Delta t$ zachodzi wzór (IV), zatem i (11). Na mocy (III) i (11)

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[2\Delta E + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta' L + \left(\Delta' L + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right)\right]dt = 0,$$

skąd na mocy (10) otrzymamy wzór (9), w którym $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ spełniają te same warunki co $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ w zasadzie Hamiltona. Ponieważ, jak udowodniliśmy (str. 536), (9) jest równoważne zasadzie Hamiltona, więc dany ruch jest ruchem rzeczywistym. Widzimy zatem, że spośród ruchów zgodnych z więzami, dla których $E \neq 0$, tylko ruchy rzeczywiste spełniają zasadę Maupertuis.

A więc: *zasada Maupertuis przedstawia własność charakterystyczną tych ruchów rzeczywistych, dla których* $E \neq 0$.

Załóżmy, że ruch odbywa się w polu potencjalnym o potencjale V. Zatem:

$$\partial V/\partial x_i = P_{i_x}, \qquad \partial V/\partial y_i = P_{i_y}, \qquad \partial V/\partial z_i = P_{i_z},$$

$$\Delta' L = \sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\Delta x_i + P_{i_y}\Delta y_i + P_{i_z}\Delta z_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\Delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\Delta z_i\right).$$

Ponieważ V jest funkcją tylko współrzędnych x_i, y_i, z_i, więc $\Delta' L = \Delta V$, a zatem możemy warunek (III) napisać w postaci $\Delta V = \Delta E$ czyli

$$\Delta(E - V) = 0. \tag{III'}$$

Uwaga 1. Założenie $E \neq 0$ jest istotne, t. zn. że jeżeli ruch zgodny z więzami spełnia zasadę Maupertuis, a warunek $E \neq 0$ nie jest spełniony, to ruch może nie być ruchem rzeczywistym.

Niech np. dany będzie jakiś układ skleronomiczny. Weźmy pod uwagę ruch, w którym od chwili t_0 do chwili t_1 układ jest w spoczynku w pewnym położeniu zgodnym z więzami. Mamy zatem stale $E=0$, skąd na mocy (4) również stale $\Delta E=0$. Wynika stąd, że wzór (11), a zatem i wzór (IV), będzie spełniony dla dowolnych $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i, \Delta t$, w szczególności więc również dla tych, które spełniają wzór (III), lub — co na jedno wychodzi — wzór (10). Dany ruch spełnia przeto zasadę Maupertuis. Jest jednak oczywistym, że przy odpowiednim doborze sił, spoczynek nie jest możliwy, t.zn. że spoczynek nie jest ruchem rzeczywistym.

Uwaga 2. Gdybyśmy wariację wraz z wariacją czasu zastąpili w zasadzie Maupertuis przez wariację zwykłą, t. zn. przyjęli $\Delta t=0$, pisząc δ zamiast Δ, to wzory (III) i (IV) przybrałyby postać:

$$\delta' L = \delta E, \tag{14}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E\,dt = 0 \qquad \text{czyli} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta E\,dt = 0. \tag{15}$$

A więc: dla ruchu rzeczywistego zachodzi wzór (15) przy założeniu że $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 dla $t=t_0$ i $t=t_1$ i spełniającymi warunek (14).

Tak wypowiedziana zasada nie przedstawiałaby jednak cechy charakterystycznej ruchów rzeczywistych. Zakładając bowiem np., że na układ nie działają żadne siły, mielibyśmy $\delta' L=0$. Zatem warunek (14) przyjąłby postać $\delta E=0$ i pociągałby przeto wzór (15) dla każdego ruchu zgodnego z więzami. W tym więc przypadku każdy ruch zgodny z więzami, a nie tylko ruch rzeczywisty, spełniałby wzór (15) czyli zasadę Maupertuis, w której wariację Δ zastąpiono wariacją zwykłą δ.

Widzimy stąd, że istotnym w zasadzie Maupertuis jest również i to, że wariację tworzymy wraz z wariacją czasu.

Uwaga 3. Dla ruchu podanego we współrzędnych uogólnionych można udowodnić, że *w układach holonomicznych skleronomicznych zachodzi zasada Maupertuis w postaci* (IV) *przy założeniu, że energia E wyrażona jest również we współrzędnych uogólnionych, a wariacje Δq_j*

są przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 *dla* $t=t_0$ *i* $t=t_1$ *i spełniającymi warunek* (III), *w którym* $\Delta'L=\Sigma Q_j\Delta q_j$ (t.j. wyrażony przy pomocy sił uogólnionych Q_j).

Dla układów reonomicznych i współrzędnych uogólnionych wzór (IV) nie zachodzi i zasadę Maupertuis podaje się dla nich w innej postaci.