ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XXX (1993)

Refleksje polskich mistrzów — wywiad ze Stanisławem Ulamem i Markiem Kacem przeprowadzony przez Mitchella Feigenbauma *, **

Jestem tak zwanym fizykiem matematycznym. Dla mnie zwrot ten oznacza wykorzystywanie — a czasem towarzyszące temu konstruowanie — matematyki w kontekście tworzonym przez rzeczywistość fizyczną. Wydaje mi się, że stwierdzenie to zaciera różnice między fizyką matematyczną a matematyką i fizyką; bądź co bądź liczby i geometria, sam miąższ matematyki,

* Wywiad, opublikowany w *Los Alamos Science* 3, No. 3, 54 (1982), został opublikowany za zgodą Autorów i Wydawcy w *Postępach Fizyki* 35 (1984), 495–513. [Translated with permission]. Przedruk za zgodą Redakcji *Postępów* (Przyp. Red.).

** Mitchell Feigenbaum, fizyk matematyczny, jeden z twórców teorii chaosu, dumnie przyznaje, że on też jest na pół Polakiem. Urodzony w Nowym Jorku, on także od wczesnych lat głęboko interesował się zrozumieniem zagadek przyrody. I, podobnie jak jego polscy seniorzy Kac i Ulam, nieustannie interesuje się zarówno naturą ludzkich doświadczeń, jak i naturą ludzkiego umysłu. Żywi też odległą nadzieję, że jego nowe podejście do zjawisk chaotycznych może dostarczyć wskazówek, jak modelować skomplikowane procesy zachodzące w mózgu. Ale niezależnie od spekulacji i fantastycznych pomysłów, prace jego są odbiciem głębokiego zrozumienia tego, co stanowi o rzeczywistym postępie, a nie są tylko zabawą w matematykę. W wielkim skrócie: odkrył on uniwersalne ilościowe rozwiązanie, wyrażone poprzez pewne mierzalne stałe, które opisuje przejście od prostego do chaotycznego zachowania w wielu złożonych układach. Wraz z pierwszym doświadczalnym potwierdzeniem tych przewidywań dla powstawania turbulencji w cieczach, stało się jasne, że pojawiła się nowa metodologia traktowania zagadnień, których dotąd nie można było ruszyć. Idea tej metody polega na tym, że bardzo niskowymiarowy, dyskretny, nieliniowy model, który zawiera tylko najbardziej podstawowe jakościowe cechy, może, z uwagi na uniwersalność, przewidzieć poprawnie dokładne ilościowe szczegóły wysoce złożonych układów. Skłonni jesteśmy więc traktować bardzo poważnie — a nie tylko jako matematycznie sugestywną zabawkę — badanie czegoś, co skądinąd wygląda na naiwny i zbyt uproszczony model. Istotnie, te badania niskowymiarowych, dyskretnych układów rozkwitły w dużą doświadczalną i teoretyczną gałąź wiedzy. A więc Feigenbaum uważany jest za jednego z twórców nowoczesnych badań nad chaosem i doczekał się kilku nowych matematyczno-fizycznych stałych nazwanych jego imieniem. W 1980 otrzymał on za swoje zapładniające prace Nagrodę za Wybitne Osiągnięcia w Los Alamos. Pracuje w Los Alamos od 1974 r., a od 1981 r. — jako Laboratory Fellow. (Redakcja *Los Alamos Science*).

zostały wyabstrahowane z fizycznego świata. W dodatku fizyka jest nauką ścisłą, wyciągającą ilościowe wnioski właśnie dzięki jej matematycznemu językowi. Chociaż Newton musiał wynaleźć analizę matematyczną, aby zawrzeć algebraiczną kinematykę Galileusza w ogólnych ramach, to jednak zawsze uważamy go za fizyka. Granica między tymi dyscyplinami, oczywiście, w końcu się rozmywa, choć na danym etapie rozwoju uwidacznia się w postawach różnych praktyków.

Przedstawiwszy mój pogląd o braku wyraźnej granicy między fizyką a matematyką, wyjawiłem również główny nurt rozważań, jaki miałem na uwadze prowadząc przedstawiony poniżej wywiad. Chciałem bowiem wydobyć osobiste, "filozoficzne" poglądy na temat związków, które tkwią na dnie umysłów teoretyków i stanowią siłę napędową wykonywanej przez nich pracy. Jest przecież, łagodnie mówiąc, tak trudno pojąć, na czym polega wewnętrzny punkt widzenia twórcy, na podstawie technicznego drukowanego produktu końcowego.

Los Alamos ma szczęście gościć — chwilowo bądź na stałe — kilka wielkich indywidualności. Uważam za szczęśliwe zrządzenie losu, że obecności mej tutaj zawdzięczam możliwość poznania Marka Kaca i Stana Ulama. Wspólne upodobanie do dyskusji nad tymi problemami umożliwiło przeprowadzenie wywiadu. W dodatku panowie ci reprezentują tradycje wykształcenia i spojrzenie na naukę powstałe pół wieku temu w "innym świecie". Odbiegają one na swój sposób od tradycji bardziej współczesnej. Ponad wszystko zaś chciałbym zgłębić, na czym właśnie mogłyby te różnice polegać.

Zacznę od krótkiego tła biograficznego — moi rozmówcy sami dostarczą dalszych szczegółów — Kac i Ulam są obaj matematykami światowej sławy o wybitnych osiągnięciach. I, co będzie widoczne w tym wywiadzie, obaj objawiają też duży entuzjazm dla nauki. Kac był pionierem w rozwijaniu matematycznej teorii prawdopodobieństwa, jak również jej zastosowań (głównie w fizyce statystycznej). W szczególności, nowoczesna metoda kwantowania posiłkuje się tworem zwanym często całką po drogach Feynmana-Kaca. Podobnie Ulam przyczynił się do rozwoju wielu dwudziestowiecznych gałęzi matematyki biorąc też równocześnie udział, na szeroką skalę, w teoretycznych i technologicznych zastosowaniach nauki. W szczególności, nazwisko jego związane jest z metodą Monte Carlo symulacji numerycznych.

Czytelnik nastawiony technicznie poczuje się rozczarowany, jeśli spodziewa się usłyszeć o jakichś szczegółach prac, z których są oni znani. Zamiast tego przedstawione tu są refleksje tych ludzi z późniejszego okresu ich kariery naukowej o tym, jak widzą oni rozwój ducha edukacji, matematyki i nauk przyrodniczych w ciągu całego ich zawodowego życia. Ukazane będą również ich postawy wobec istoty i zakresu przedmiotu ich zainteresowań. Jest godne ubolewania, że w użytej formie przekazu, jakim jest słowo pisane, nie jest dostępna czytelnikowi ani bogata modulacja głosu, ani gestykulacja, które tak *często ubarwiają i wzmacniają słowa tych ludzi. Mimo to mam nadzieję, że trochę ich osobistego uroku i humoru udało mi się przekazać.*

Mitchell Feigenbaum

Mitchell Feigenbaum [MF] — Czy mógłby każdy z Was podać krótki szkic biograficzny? Stan, czy zechciałbyć zacząć?

Stanisław Ulam [SU] — Nazywam się Ulam, Stan Ulam. Prawdziwe imię brzmi Stanisław. Urodziłem się w Polsce. Otrzymałem doktorat z matematyki na Politechnice we Lwowie, przed wiekami. Na początku lat trzydziestych odwiedzałem niektóre zagraniczne ośrodki matematyczne. W 1935 otrzymałem zaproszenie na parę miesięcy do Princeton, do Instytutu Badań Zaawansowanych. Prawdę mówiąc, nie byłem na tyle bystry, by przewidzieć nadchodzące wypadki. Przez głupotę nie robiłem nawet żadnych planów. Ale wtedy dostałem zaproszenie od sławnego, wielkiej światowej sławy matematyka, jednego z największych matematyków stulecia, Johna von Neumanna, który naprawdę był tylko sześć lub siedem lat ode mnie starszy, więc zdecydowałem się na trzymiesięczną wizytę w Stanach Zjednoczonych. Nie było, oczywiście, samolotów. Musiałem udać się do jakiegoś portu we Francji, by złapać statek do Nowego Jorku. Spędziłem parę tygodni w Princeton i pewnego dnia na herbacie u von Neumannów spotkałem G. D. Birkhoffa, który był "dziekanem" amerykańskiej matematyki. Wiedział on trochę o mojej pracy, widocznie od swojego syna, który był mniej więcej w moim wieku i spytał, kiedy mógłbym przyjechać do Uniwersytetu Harvarda. Wróciłem wtedy do Polski. Ale następnej jesieni powróciłem do Cambridge [1] jako członek tak zwanego "Society of Fellows", nowej instytucji Uniwersytetu Harvarda. Miałem tylko dwadzieścia sześć lat, czy coś takiego. Zacząłem od razu wykładać: najpierw elementarne, a potem całkiem zaawansowane przedmioty. A potem, w 1940 zostałem wykładowcą Uniwersytetu Harvarda. Ale każdego roku w tym czasie podróżowałem między Polską a Stanami Zjednoczonymi. Latem odwiedzałem moją rodzinę, przyjaciół i matematyków. W Polsce życie matematyczne było bardzo intensywne. Matematycy spotykali się często w kawiarniach takich jak "Szkocka" czy "Roma". Siadywaliśmy tam godzinami i uprawialiśmy matematykę. W ciągu tych kilku wakacji stale do tego wracałem. Aż wreszcie, w 1939 opuściłem na dobre Polskę mniej więcej na miesiąc przed wybuchem II wojny światowej. W pewnym sensie było to bardzo szczęśliwe. Matka moja umarła na rok przed wojną i mój brat o trzynaście lat młodszy był właściwie sam. Mój ojciec, prawnik, był zapracowany. Ojciec sądził, że byłoby dobre dla mojego brata, gdyby też pojechał do Stanów Zjednoczonych, by studiować tam na uniwersytecie. Brat mój miał w tym czasie siedemnaście lat, przybył tu ze mną w 1939.

[1] Cambridge koło Bostonu, gdzie mieści się Uniwersytet Harvarda (przyp. tłum.).

Umieściłem go na Uniwersytecie Browna w Providence, który był niezbyt daleko od Cambridge.

Potem, w 1940 zostałem młodszym profesorem na Uniwersytecie Stanu Wisconsin w Madison. Podczas pobytu tam — było to wiosną lub latem 1943 — John von Neumann zapytał mnie, czy byłbym zainteresowany w prowadzeniu pewnej bardzo ważnej pracy związanej z wojną, w miejscu, którego nazwy nie wolno mu było wymienić. Miałem spotkać się z nim w Chicago na jakiejś stacji kolejowej, by dowiedzieć się o tym czegoś więcej. Pojechałem tam. Nie mógł mi powiedzieć, dokąd się udaje. Byli z nim dwaj faceci, coś w rodzaju strażników, wyglądający jak goryle. Rozmawialiśmy o matematyce, o jakichś interesujących problemach fizyki i o znaczeniu tej pracy. I to był sam początek Los Alamos. Parę miesięcy później przyjechałem z żoną, ale to już inna historia. Mógłbym godzinami mówić o wrażeniach z podróży, o przybyciu po raz pierwszy do bardzo dziwnego miejsca. To jednak jest już w niektórych książkach, również w mojej autobiografii [2]. Co jeszcze chciałbyś wiedzieć?

MF — Może powiedziałbyś krótko coś o swojej pracy?

SU — Publikowałem prace matematyczne od osiemnastego roku życia. Jakkolwiek nie jest to zbyt powszechne, nie jest to też bardzo niezwykłe, bo matematycy bardzo często zaczynają bardzo wcześnie. Doktorat otrzymałem, jak już wspomniałem, w Polsce. W Stanach Zjednoczonych publikowałem artykuły jako wykładowca w Harvardzie i w Wisconsin, ale praca tu w Los Alamos dotyczyła, oczywiście, głównie fizyki. Fizyką interesowałem się zawsze, czytałem wiele z teorii względności, teorii kwantów itp. Było to w pewnym sensie zainteresowanie platoniczne, gdyż większość moich wczesnych prac dotyczyła czystej matematyki.

MF — Marku, może powiedziałbyś teraz coś jako, jak sam to określiłeś, młodszy kolega Stana?

Marek Kac [MK] — Urodziłem się także w Polsce, choć nie było jasne, że była to Polska. W rzeczywistości bowiem, wtedy gdy się urodziłem, była tam carska Rosja, a tam gdzie Stan się urodził — Austria. W dodatku do innych nieokreśloności dotyczących mojego urodzenia, moja data urodzenia też nie jest całkiem poprawna, gdyż w czasach carskich używano kalendarza juliańskiego. Tak więc moja metryka urodzenia podaje, że urodziłem się 3 sierpnia i ja utrzymuję tę fikcję, choć naprawdę urodziłem się 16. Urodziłem się 170 km — to jest 100 mil — niemal wprost na wschód od miejsca, gdzie urodził się Stan. Mimo to, w odległości tych 100 mil istniały dwa zupełnie różne światy, gdyż Polska przez 150 lat nie istniała jako niepodległe państwo. Podzielona była między Austrię, Niemcy i Rosję i kultury

[2] S. M. Ulam, *Adventures of a Mathematician*, Charles Scribner's Sons, New York 1976 (przyp. Red.).

okupujących potęg wycisnęły ogromne piętno. W mojej części świata nikt nie mówił po polsku; moja matka nigdy nie nauczyła się mówić po polsku. W każdym razie urodziłem się. Po ewakuacji w 1915 gdzieś w głąb Rosji wróciliśmy do Polski w 1921 i wtedy rozpocząłem moją pierwszą regularną naukę po polsku. Polski był w istocie czwartym językiem, którego się nauczyłem. Najpierw mówiłem po rosyjsku, gdyż był to język, którym wszyscy mówili; potem, gdy powróciliśmy do domu po ewakuacji, moi rodzice zaangażowali dla mnie francuską guwernantkę, francuską damę, wdowę po rosyjskim białogwardyjskim oficerze. Przez trzy lata przychodziła na pół dnia i odmienialiśmy francuskie czasowniki, czego nie cierpiałem. Potem mój ojciec był przez krótki czas dyrektorem świeckiej szkoły hebrajskiej. Nie była to szkoła religijna, ale wszystkich przedmiotów uczono po hebrajsku, nauczyłem się więc hebrajskiego i szybko go zapomniałem. W końcu, w 1925, mając jedenaście lat wstąpiłem do polskiej szkoły, słynnej szkoły polskiej, do Liceum Krzemienieckiego. Miasto, w którym się urodziłem, ma swoje miejsce w historii Polski. Jednym z powodów jest to, że jeden z dwóch wielkich polskich poetów romantycznych, Juliusz Słowacki, urodził się tam (niemal każde polskie dziecko zna to nazwisko). W dodatku, innym bardzo sławnym obywatelem tego miasta jest Izaak Stern [3], którego rodzice byli na tyle przewidujący, że wywieźli go z Polski, gdy miał zaledwie dziewięć miesięcy. Po ukończeniu szkoły średniej wstąpiłem na Uniwersytet w tym samym mieście, gdzie Stan urodził się i studiował, z tą różnicą, że on był na Politechnice, która miała, co jest godne podkreślenia, wydział poświęcony czystej nauce, tzn. matematyce i fizyce.

Wstąpiłem na regularny uniwersytet i byłem, i wciąż jestem, o pięć lat od Ulama młodszy. W owym czasie Stan był już legendą i w moich oczach wydawał się nieskończenie stary. Miał on zaledwie dwadzieścia dwa lata, a ja siedemnaście. Spotkałem go po raz pierwszy, na krótko, gdy otrzymywał doktorat w 1933. W przyszłym roku minie pięćdziesiąta rocznica tego wydarzenia. (W rzeczywistości, to mnie się zdawało, że w tym roku, ale on mnie poprawił, a powinien chyba lepiej wiedzieć, kiedy dostał doktorat.) Ukończyłem Uniwersytet, otrzymałem doktorat w 1937 i w przeciwieństwie do Stana bardzo chciałem wyjechać z Polski. Nie wiedziałem, że katastrofa będzie takich rozmiarów, jak to się potem okazało, ale było dla mnie oczywiste, że Europa, a w szczególności wschodnia Europa, nie jest dobrym miejscem do pozostania. W tych czasach jednak wyjechać nie było bardzo łatwo. Teraz, gdy razem z Mitchellem rekonstruowaliśmy część autobiograficzną, przypomniałem sobie dwa epizody. W 1936, przed samym otrzymaniem doktoratu, próbowałem rozpaczliwie wydostać się z Polski. Czytywałem *Nature*, gdyż w *Nature* zamieszczano ogłoszenia o różnych posadach. Większość stanowisk

[3] Znany amerykański skrzypek (przyp. tłum.).

wymagała posiadania obywatelstwa brytyjskiego, ale jedno (w tym czasie, *nota bene*, nie znałem ani słowa po angielsku) było stanowiskiem młodszego wykładowcy w Imperial College of Science and Technology z pensją 150 funtów rocznie, co w owych czasach wynosiło około 750 dolarów. Nawet wtedy to nie było bardzo dużo pieniędzy, więc myślałem, że żaden szanujący się obywatel brytyjski nie będzie nawet ubiegał się o taką pracę. Zwróciłem się więc do mego profesora Hugona Steinhausa i spytałem, czy był by to dobry pomysł, gdybym się o to ubiegał, a on pół żartem, pół serio odpowiedział: „Dobrze, oceńmy Pana szansę otrzymania tej pracy. Powiedziałbym, że jest ona jak 1 do 5000. Pomnóżmy to przez roczną pensję. Jeśli wynik będzie większy niż koszt pocztowego znaczka, wtedy nie powinien Pan się ubiegać. Jeśli będzie mniejszy — powinien Pan". Okazało się, że był trochę mniejszy od kosztu znaczka, więc napisałem. Otrzymałem później od nich list donoszący, że niestety posada już jest zajęta. A więc znalazł się jednak obywatel brytyjski, który chciał 150 funtów rocznie. Wiele, wiele lat później, gdy byłem w Anglii, zostałem zaproszony na odczyt w tymże Imperial College of Science and Technology i powiedziałem im: „Wiecie, mogliście mnie mieć za 150 funtów rocznie". Zdaje mi się, że oni rzeczywiście sprawdzili i znaleźli tę korespondencję. Anegdota ta przypomniała mi, że gdy ostatecznie zdecydowałem się na przyjazd do Stanów Zjednoczonych, było bardzo trudno otrzymać wizę, bo już zaczęli przybywać niemieccy uchodźcy. Były to okropne czasy i udało mi się dostać tylko turystyczną wizę na okres sześciu miesięcy. Konsul zmusił mnie do wykupienia biletu powrotnego, żeby upewnić się, że wyjadę. Do dziś zachowałem na pamiątkę tę część powrotną biletu. Była ona wystawiona na statek, który utonął w pierwszych dniach drugiej wojny światowej.

To Hugo Steinhaus, mój nauczyciel i przyjaciel, bardzo znany matematyk polski, był tym, który bardzo usilnie starał się pomóc mi w wyjeździe. I ostatecznie udało mu się to w bardzo prosty sposób, pomógł mi bowiem w otrzymaniu skromnego stypendium na wyjazd do Uniwersytetu Johnsa Hopkinsa. To zadziwiające, jak drobne rzeczy zmieniają ludzkie życie, a w rezultacie prawdopodobnie ratują to życie. Starałem się o to stypendium w 1937 zaraz po otrzymaniu doktoratu i nie dostałem go. Myślałem, że to ogromna niesprawiedliwość. Dostałem je jednak rok później i to uratowało mi życie, bo gdybym był dostał je rok wcześniej, zmuszony byłbym wrócić. A w ten sposób wojna zastała mnie w tym kraju i dosłownie uratowała mi życie. Byłem w Uniwersytecie Johnsa Hopkinsa, gdy wojna wybuchła, a potem dostałem ofertę z Uniwersytetu Cornella, gdzie spędziłem dwadzieścia dwa szczęśliwe lata (Mitchell będzie tam moim następcą). W istocie, cała moja rodzina, to znaczy moja rodzina założona w Stanach Zjednoczonych, moja żona i dwoje dzieci to urodzeni Ithakanie [4]. A ja w Ithace żyłem dłużej

---

[4] Uniwersytet Cornella znajduje się w miejscowości Ithaca w stanie Nowy Jork (przyp. tłum.).

niż w jakimkolwiek miejscu na świecie.

SU — A więc całkiem przeciwnie niż Odyseusz.

MK — Gdy opuszczałem Uniwersytet Cornella, zmuszony byłem wygłosić małe przemówienie i powiedziałem: „Jak Ulisses opuszczam również Ithakę z tą tylko różnicą, że biorę ze sobą Penelopę". Tak to było. Potem przez dwadzieścia lat pracowałem na Uniwersytecie Rockefellera w Nowym Jorku, aż wreszcie zdecydowałem się spędzić moje schyłkowe lata tam, gdzie jest więcej słońca, a mniej lodu. Jestem więc teraz na Uniwersytecie Południowej Kalifornii, trochę na zachód stąd.

MF — Myślę, że już czas, by przerwać Ci te wspomnienia. Stan, może powiedziałbyś coś o tym, jak zainteresowałeś się matematyką?

SU — Jako młody chłopiec, w wieku dziesięciu lat, interesowałem się bardzo astronomią, a potem fizyką. Czytywałem popularne książki z astronomii; nie było ich tak dużo i nie były tak piękne jak obecne, z tymi nieprawdopodobnymi ilustracjami, ale była to zawsze moja pasja. Wuj ofiarował mi małą lunetę na urodziny, gdy miałem jedenaście czy dwanaście lat. W tym czasie próbowałem zrozumieć szczególną teorię względności Einsteina i myślę, że miałem niezłe jakościowe pojęcie o tym, na czym ona polega. A później doszedłem do wniosku, że muszę poznać trochę matematyki, więc wyszedłem poza to, co przerabiano w szkole średniej, zwanej gimnazjum. Uczniowie wstępowali do gimnazjum w wieku dziesięciu lat i uczęszczali do osiemnastego roku życia. Gdy miałem czternaście lat, zdecydowałem się nauczyć więcej matematyki sam. Miałem szesnaście lat, gdy rzeczywiście nauczyłem się analizy matematycznej całkowicie sam z książki Kowalewskiego, Niemca, którego nie należy mylić z Sonią Kowalewską, sławną dziewiętnastowieczną matematyczką rosyjską. Potem studiowałem również teorię mnogości z książki Sierpińskiego i myślę, że ją rozumiałem. Miałem w szkole średniej dobrego nauczyciela, Zawirskiego, który był wykładowcą logiki na Uniwersytecie. Rozmawiałem z nim o tym wtedy i potem, gdy wstąpiłem na Politechnikę.

ME — Czyżby uczył on w szkole średniej?

SU — Tak, uczył w szkole średniej dla pieniędzy, bo wykładowcy na Uniwersytecie prawie żadnych pieniędzy nie otrzymywali. Gdy wstąpiłem na Uniwersytet, uczęszczałem na wykład Kuratowskiego, młodego profesora, który właśnie przybył z Warszawy. Miał on tylko trzydzieści jeden lat, ja miałem osiemnaście. Prowadził elementarny wykład teorii mnogości. Zadałem mu kilka pytań, a potem rozmawiałem z nim po wykładach. Zainteresował się młodym studentem, który najwidoczniej interesował się matematyką i miał jakieś pomysły. Miałem szczęście rozwiązać pewien nierozwiązany problem, który postawił.

MF — Stan, czy czułeś w tym momencie, że Twoje zainteresowania przesuwają się z astronomii, fizyki i teorii względności w stronę matematyki?

SU — Nie, naprawdę, nawet teraz nie myślę, by moje zainteresowania się zmieniły. Interesuję się wszystkimi trzema. Oczywiście, wykonałem dużo więcej prac z czystej matematyki niż z zastosowań czy z fizyki teoretycznej, ale główne zainteresowania pozostały. Muszę coś wyznać: obecnie nie czytam wielu fachowych matematycznych czasopism, czytam raczej o tym, co się dzieje w astronomii i astrofizyce lub w fizyce technicznej, w *Astrophysical Journal* i w *Physics Today*. To wydaje mi się zawsze bardziej zrozumiałe. Wiecie, ta specjalizacja w każdej nauce, szczególnie w matematyce, postąpiła bardzo daleko w ciągu ostatnich paru lat. Matematyka jest teraz strasznie wyspecjalizowana, bardziej niż, powiedzmy, fizyka. W fizyce istnieją główne problemy jaśniej sprecyzowane, niż w samej matematyce. Oczywiście, matematyka wciąż ma wiele ważnych problemów, podstawowych problemów.

MF — Czy w Twoim odczuciu ta specjalizacja jest niefortunna?

SU — O, tak. Okazuje się, że my obaj mamy podobne poglądy na naukę w ogóle, a na matematykę i fizykę w szczególności.

MF — Marku, a jakie były Twoje początki w matematyce?

MK — Stan i ja rozwijaliśmy się równolegle. Moje zainteresowanie matematyką rzeczywiście również zaczęło się, gdy byłem bardzo młody, a może trochę romantyzuję. (Mówiłem Mitchellowi, że gdy staramy się przypomnieć coś, co zdarzyło się sześćdziesiąt lat temu, to nie zawsze jest to nieskończenie wiarogodne). Mój ojciec ukończył filozofię na Uniwersytecie w Lipsku i znał matematykę. Otrzymał on później również tytuł naukowy w Moskwie z historii i filologii, znał więc m.in. wszystkie języki starożytne. W każdym razie, w czasie wojny zarabiał na życie udzielając prywatnych lekcji w jednopokojowym mieszkaniu i m.in. uczył elementarnej geometrii. Słyszałem wszystkie te niewiarogodne rzeczy: z punktu poza prostą można wystawić prostopadłą oraz wyznaczyć jedną i tylko jedną równoległą i takie a takie kąty są równe. Miałem cztery lata, może pięć i wszystkie te cudowne, niezrozumiałe dźwięki w czymś, co przypominało zwykły język, robiły na mnie wrażenie. Zamęczałem go wprost, by spróbował powiedzieć mi, co to jest; w obronie własnej zaczął uczyć mnie trochę elementarnej geometrii i jakoś ta struktura, to że istnieje taki fantastycznie ścisły system dedukcyjny, wywarły na mnie wrażenie, gdy byłem bardzo młodym chłopcem. W istocie, w tym czasie mój ojciec rozpaczał, bo równocześnie byłem wyjątkowo zły w nauce tabliczki mnożenia. To, że ktoś umie udowodnić twierdzenia z elementarnej geometrii nie wiedząc, ile jest siedem razy dziewięć, wydawało mu się trochę więcej niż dziwne. To był początek moich zainteresowań matematyką, ale tak jak u Stana, zainteresowanie naukami ścisłymi przyszło prawie równocześnie głównie poprzez lekturę popularnych książek. Jedna książka, dostępna w rosyjskim tłumaczeniu, nosiła tytuł *Krótka historia nauki* i była napisana przez angielską damę o nazwisku Arabella Buckley czy coś w tym rodzaju. To było fascynujące! Później czytałem Faradaya *Dzieje* *świecy*, która jest jedną ze wspanialszych książek. W szkole, gdy w końcu wstąpiłem do gimnazjum, byłem w równej mierze zainteresowany i w równej mierze dobry w matematyce i w fizyce, lecz ostatecznie zdecydowałem się na matematykę.

Faktycznie, pewne wydarzenie podczas lata poprzedzającego mój ostatni rok w gimnazjum wpłynęło m.in. na tę decyzję. A było to tak. Moja matka wyobrażała sobie, że zajmę się czymś rozsądnym, takim jak inżynieria, ale w lecie 1930 zaczął prześladować mnie problem rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Znałem wprawdzie rozwiązanie, które Cardano opublikował w 1545, ale nie mogłem znaleźć takiego wyprowadzenia, które by zaspokoiło moją potrzebę zrozumienia. Gdy ogłosiłem, że zamierzam podać moje własne wyprowadzenie, ojciec obiecał mi nagrodę w wysokości pięciu złotych polskich (dużą sumę, która bez wątpienia była miarą jego sceptycyzmu). Spędziłem wiele dni i niektóre noce tego lata zapisując gorączkowo wzorami stosy papieru. Nigdy nie pracowałem ciężej. I oto pewnego poranka to było to — wzór Cardana czarno na białym. Ojciec zapłacił mi bez gadania i tej jesieni mój nauczyciel matematyki przesłał manuskrypt do publikacji w *Młodym Matematyku*. Miesiącami nie było odpowiedzi, ale jak się okazało, to opóźnienie było spowodowane gruntownym przeszukiwaniem literatury w celu ustalenia, czy przypadkiem nie "odkryłem ponownie" wyprowadzenia. Stwierdzono, że moje wyprowadzenie było jednak oryginalne, więc zostało opublikowane. Gdy dyrektor mojego gimnazjum, pan Rusiecki, usłyszał, że zamierzam studiować inżynierię, powiedział: „Nie, powinieneś studiować matematykę, masz do niej wyraźny talent". Więc widzicie: miałem bardzo dobrych doradców.

Na Uniwersytecie myślałem przez chwilę o studiowaniu fizyki, ale fizyka we Lwowie była bardzo marna, szczególnie fizyka teoretyczna. Matematyka była wybitnie dobra i bardzo żywa, a więc było bardzo łatwo włączyć się w wielce podniecający i energicznie rozwijający się przedmiot zamiast zmagać się z przedmiotem, w którym tak mało się działo. Uczestniczyłem, naturalnie, w wykładach prowadzonych przez Wydział Fizyki i zdałem kilka egzaminów z fizyki teoretycznej, ale moje zainteresowanie, prawdziwe zainteresowanie fizyką rozbudziło się znacznie później.

MF — Odnoszę wrażenie, że nauki ścisłe i matematyka jakoś w podobny sposób nawzajem się zapładniają w Waszych umysłach i że macie — myślę, że przekazaliście mi to odczucie — pewnego rodzaju intuicję, która jest bardzo ważna dla Waszego sposobu widzenia matematyki.

MK — Tak, to może zainteresować współczesnych czytelników i jestem pewny, że Stan potwierdzi to, co mówię. Należymy do naukowego pokolenia, które było tylko odrobinę opóźnione w porównaniu z heroicznymi czasami w potężnych ośrodkach matematyki, Getyndze i Paryżu. A tam rozdział na matematykę i fizykę nie był przeprowadzony tak formalnie i ostro jak teraz.

Obaj wielcy matematycy tej ery, Poincaré i Hilbert, wnieśli niezwykle ważny wkład do fizyki, szczególnie Poincaré. Nasi nauczyciele uczyli fizyki i znali ją. Banach, który jest znany głównie jako twórca szkoły analizy funkcjonalenej i który jest prawdopodobnie największym polskim matematykiem wszystkich czasów, uczył mechaniki. Napisał bardzo dobry jej podręcznik. To całe rozróżnienie, że ty jesteś fizykiem, więc robisz to, a ty jesteś matematykiem, więc robisz tamto, było pojęciowo rozmyte. Byli, oczywiście, ludzie bardziej zajęci konkretem i inni bardziej abstrakcyjni, ludzie bardziej zainteresowani tym lub tamtym. Ale nie było tego typu profesjonalizmu, ani tego niemal cechowego rozgraniczenia, które teraz panuje. A więc było to łatwe nie tylko dlatego, że z natury byliśmy do tego skłonni, lecz również dlatego, iż nikt mi nie powiedział, że nie powinienem studiować fizyki, bo jeśli nie będę studiował wyłącznie matematyki, to nigdy nie nadążę. Ta idea łapania czegoś, czegoś uciekającego, w ogóle nie istniała. Czy tak nie jest?

SU — Absolutnie. Mówisz o bardzo odległych czasach, pięćdziesiąt lat temu i wiesz co, kiedyś przyszło mi do głowy, że moje życie, i Marka też, zajmuje mniej więcej dwa procent udokumentowanej historii ludzkości. Widzicie, pięćdziesiąt lub sześćdziesiąt lat tyle właśnie wynosi. To dziwna i przerażająca myśl, że to stanowi znaczną część całej znanej nam historii. Dużo rzeczy zmieniło się pod różnymi względami, nie tylko w technologii, również w dziedzinie postaw.

MF — Mam pytanie. Gdy tak wspominacie, że macie jakieś negatywne odczucia w stosunku do specjalizacji i że w Waszych umysłach odczuwacie ten związek między fizyką a matematyką, to ciekaw jestem, czy istnieje jakiś szczególny rodzaj intuicji, który w Waszym mniemaniu wynika ze współdziałania tych dwóch rzeczy? Czy czujecie, że to jest ważny czynnik?

SU — Widzisz, to bardzo zależy od osoby. Niektórzy matematycy interesują się bardziej formalną strukturą rzeczy. Faktycznie, wśród ludzi w ogóle istnieją dwa typy pamięci, które dominują, albo pamięć wzrokowa, albo pamięć słuchowa i podobno siedemdziesiąt pięć procent (ten Mendlowski ułamek) ma pamięć wzrokową. W każdym razie niektórzy ludzie mają czysto werbalną pamięć, bardziej ukierunkowaną w stronę logicznych podstaw i operowania symbolami niż w kierunku wyobrażania fizycznych zjawisk. Gdy ktoś wypowie przy mnie słowo ciśnienie, to jakbym widział coś w rodzaju zamkniętej gorącej czy też wzburzonej substancji.

MK — A ja się kulę.

SU — Zgoda, ale inni ludzie, np. von Neumann, są bardziej logicznie nastawieni. Dla niego ciśnienie było, że tak powiem, członem w równaniu. Przypuszczam raczej, że on nie wyobrażał sobie sytuacji, w których ciśnienie mogłoby zrobić to czy tamto, ale on też był bardzo, bardzo dobry w fizyce. Z pewnością różne są postawy, gdy mowa o sposobach myślenia. Niektórzy matematycy mają większą skłonność do widzenia fizycznego. Nie wiemy o tym zresztą zbyt wiele. Może być to wynikiem jakichś przypadkowych wydarzeń w dzieciństwie lub tego, jak zdobywało się wiedzę.

MF — Jak myślicie, czy ten rodzaj intuicji, który macie, jest specyficznie Wasz? Rozumiem przez to, że gdy wracacie myślą do czasów, gdy zaczynaliście uprawiać matematykę, czy było więcej ludzi takich jak Wy, czy raczej więcej formalnie myślących?

SU — Nie, nie. Tak nie było. Wielu matematyków, których znałem w tamtych czasach różniło się od Marka Kaca i ode mnie w swoim stosunku do fizyki. Oceniam, że nawet teraz, w tym kraju, dziewięćdziesiąt procent lub więcej matematyków mniej od nas interesuje się fizyką.

MK — Oczywiście, jest to częściowo związane z wykształceniem. Myślę, że kształcenie w tym kraju było i jest, szczególnie na poziomie średnim, wyjątkowo złe. Na przykład, jest zupełnie możliwe, że młody człowiek uzyska doktorat z matematyki w uczelni o dobrej reputacji, jak Uniwersytet Harvarda, nie słysząc nigdy o newtonowskich prawach ruchu.

SU — Byłem w komitecie Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego, gdy odkryłem, że można uzyskać doktorat na Uniwersytecie Harvarda i innych miejscach bez znajomości newtonowskich praw ruchu, które, można powiedzieć, były w istocie głównym motywem rozwoju analizy matematycznej. Tak to teraz jest.

MK — Byliśmy poddawani chemii, fizyce, biologii, nie było przedmiotów do wyboru w szkołach średnich. Szkoły średnie w Europie, w Polsce, we Francji były w pewnym sensie cięższe niż uniwersytet, gdyż należało przerobić z góry ustalony program. Nie było żadnych głupstw. Jeśli byłeś w szkole określonego typu, musiałeś przerobić sześcioletni kurs łaciny i czteroletni greki i żadnych tam głupstw z wyborem "wykładów dla duszy" czy muzyki ludowej albo czegoś podobnego. Nie mam nic przeciw przerabianiu takich przedmiotów, poza tym, że stały się one namiastką. Musiałeś przerobić fizykę, musiałeś nauczyć się pewnej porcji chemii, biologii, a jeśli tego nie lubiłeś, to trudno. Ale jeśli był w tobie jakiś rezonujący ton, to zapoznawałeś się z tym wcześnie. Na uniwersytecie następowała rzeczywiście specjalizacja, ale nie całkowita; każdy student matematyki musiał np. zdać egzamin z fizyki, a nawet przy Bożej pomocy przejść przez pracownię fizyczną. Było to dla mnie jedno z najbardziej kosztownych przeżyć, gdyż będąc raczej niezgrabny rozbiłem więcej rur Kundta, niż było mnie na to stać. Stan zrobił niezwykle ważną uwagę. Mogę rzucić na to trochę więcej światła. Wysłuchałem pewnie jednego z ostatnich przemówień von Neumanna. Było to w maju 1955. (W październiku tego roku, gdy przebywałem w Genewie na urlopie, stwierdzono, że ma on nieuleczalnego raka; umarł trochę później w 1957.) Był on głównym mówcą na bankiecie w czasie zjazdu, zdaje mi się, Amerykańskiego Towarzystwa Fizycznego w Waszyngtonie. Byłem tam, poszedłem na zjazd, a po przemówieniu poszliśmy razem się napić. Było to przemówienie "Dlaczego nie jestem fizykiem" lub coś w tym rodzaju. Wyjaśnił, że jego wkład do fizyki był raczej techniczny. Na przykład, każdy wie, co to jest macierz gęstości, a to właśnie von Neumann wynalazł macierz gęstości, jak również setki innych rzeczy, które stanowią materiał podręcznikowy dla fizyków-teoretyków. Mimo to wygłosił on urocze i na swój sposób wzruszające przemówienie o tym, dlaczego nie jest on w istocie fizykiem i m.in. wspomniał o tym, że myśli raczej w języku symboli niż konkretów. Przypomniano mi, że jego przyjaciel, Eugene Wigner, trafił w sedno mówiąc, że chętnie dałby doktorat z fizyki każdemu, kto naprawdę potrafiłby uczyć fizyki na pierwszym roku. Wiem dokładnie, co przez to rozumiał. Mógłbym spróbować, nie byłbym bardzo w tym dobry, ale mógłbym spróbować prowadzić pierwszy semestr wykładu mechaniki kwantowej i uczyłbym jej pewnie całkiem dobrze. Ale nie wiedziałbym, jak uczyć fizyki na pierwszym roku, bo matematyki używa się, tak naprawdę, jak kuli, na której można się oprzeć. Gdy czujemy się niepewnie z czymś, z jakimś pojęciem, mówimy: "No dobrze, wyprowadźmy to". Mam rację? Oto jest równanie i jeśli pomanipulujesz nim, to w końcu uda się je zinterpretować i jesteś w porządku. Ale jeśli musisz powiedzieć to ludziom, którzy nie znają symboli, musisz myśleć przy użyciu pojęć. I tu właśnie występuje zasadnicza przepaść między dwiema, jakby to powiedzieć, dwiema liniami rozumowania. Jest się albo takim jak von Neumann, i ja jestem w tym sensie mu bliższy, albo jest się takim jak Ulam, który, gdy ktoś mówi ciśnienie, to je czuje. To nie jest pochodna cząstkowa energii swobodnej względem objętości; to jest rzeczywiście coś, co czujesz, można rzec, palcami.

MF — Ale czy mimo to nie jest prawdą, że każdy dobry matematyk rozumie dobrze pojęciowo rzeczy, nad którymi pracuje? On przecież nie przeprowadza tylko jakiegoś ciągu dowodzików.

MK — Tak, ci rzeczywiście dobrzy, tak. Ale jednak, wiesz, jest cała gama, widmo ciągłe. Rzeczywiście, pozwól mi to wstawić, gdyż chcę, by było to zanotowane dla potomności. Myślę, że są dwa akty twórcze w matematyce. Jest zdolność dowodzenia i zdolność rozumienia. A czynności rozumienia i dowodzenia nie są identyczne. W istocie często się zdarza, że coś się rozumie bez możności dowiedzenia tego. Otóż, oczywiście, szczytem szczęścia jest rozumieć to i móc to udowodnić. Następne stadium jest wtedy, gdy nie rozumiesz tego, ale możesz to udowodnić. Zdarza się to ciągle i ciągle i czasopisma matematyczne pełne są takiego materiału. Lecz zdarza się też coś przeciwnego, to znaczy rozumiesz coś, ale nie możesz tego udowodnić. Na szczęście, może to trafić wtedy do czasopisma fizycznego. A w końcu przychodzi skrajna nędza, która jest zresztą normalną sytuacją, gdy ani tego nie rozumiesz, ani nie możesz udowodnić. Sposób, w jaki matematyki się teraz uczy i w jaki się ją uprawia, podkreśla bardziej stronę logiczną niż intuicyjną, związaną z rozumieniem. Myślę, że zgodzicie się ze mną, bo szczególnie w takich dziedzinach jak geometria, której Stan jest niezrównanym mistrzem, widzenie rzeczy — nie zawsze prowadzące zgrabnie do dowodu, lecz z pewnością prowadzące do zrozumienia — daje w rezultacie prawidłową hipotezę. I wtedy, oczywiście, ostateczny akt musi być również dokonany, z uwagi na przepisy cechowe, trzeba tę hipotezę także udowodnić.

SU — Pozwólcie mi coś powiedzieć. Tak się zdarzyło, że napisałem artykuł do jubileuszowego tomu na cześć obecnego tu dżentelmena, Marka Kaca, na jakąś jego rocznicę, do książki, która jeszcze się nie ukazała. Ale artykuł jest o analogii oraz sposobach myślenia i rozumowania w matematyce i w niektórych innych naukach. A więc jest to rodzaj próby rzucenia światła na to, o czym on właśnie mówił. Rzeczy te splecione są w tajemniczy sposób. Wydaje mi się, że wielka nadzieja na postęp, nawet w samej matematyce, wiązać się będzie z lepszym sformalizowaniem lub przynajmniej zrozumieniem procesu, który prowadzi zarówno do intuicji jak też do późniejszego wypracowania nie tylko szczegółów, ale też prawidłowego sformułowania samej rzeczy. A więc jest to bardzo, bardzo głęboki problem i poświęcono mu nie dość uwagi, uczyniono tylko pobieżne obserwacje.

MF — Czy masz nadzieję, że ludzie będą w stanie sformalizować te rzeczy, te istotne składniki?

SU — Teraz to jest przedwczesne, ale pewne częściowe zrozumienie tego, jak funkcjonuje mózg, może wyłonić się w ciągu najbliższych dwudziestu lat lub nawet wcześniej — jakieś słabe pojęcie o tym, więcej niż wiemy teraz. Jest to wspaniała perspektywa. Wiecie, gdybym był bardzo młodym człowiekiem, może pracowałbym więcej w biologii lub neurologii, to znaczy, że tak powiem, anatomii mózgu, próbując zrozumieć jego procesy. Mark i ja, jadąc tego ranka z Santa Fe do Laboratorium, dyskutowaliśmy o tym jak dzieci uczą się mówić i używają zwrotów, które słyszą — uczą się używać ich poprawnie w różnych kontekstach ze zmiennymi elementami. To rzeczywiście jest tajemnicza sprawa.

MF — Skupmy się na tej ostatniej rzeczy, którą powiedziałeś — że, być może, istnieje szansa zrozumienia, jak pracuje mózg. Kiedy to mówiłeś, przyszło mi na myśl, że są takie problemy, o których *w zasadzie* można pomyśleć, jak np. rozwinięta w pełni turbulencja w cieczy lub może mózg. Może tak się zdarzyć, że problemy te będą polegać na ogromnej liczbie szczegółów i że może nie będzie żadnej ładnej teorii, takiej, jakie dotychczas umieliśmy formułować i że rzeczywiście trzeba będzie wsadzić te wszystkie szczegóły do komputera. Czy macie jakiś pogląd na to, czy pociągnie to w przyszłości ograniczenie matematycznego podejścia?

SU — No tak, istotnie, komputery są cudownym narzędziem i nie ma powodu ich się bać. Można by powiedzieć, że początkowo matematyk powinien obawiać się ołówka i papieru, gdyż stanowią one dość ordynarne narzędzie w porównaniu z czystą myślą. Rzeczywiście, powiedzmy trzydzieści lat temu, zawodowi matematycy byli trochę przestraszeni, jakby nie było, komputerami, ale wydaje mi się, że dla eksperymentowania i heurystycznych wskazówek i sugestii to jest cudowne narzędzie. W samej rzeczy, to spotkanie [5], które teraz się właśnie odbywa, w dużej mierze możliwe jest dlatego, że tak wiele odkryto doświadczalnie.

MF — Jest to absolutna prawda.

SU — Tak samo w fizyce, doświadczenia prowadzą w końcu do problemów i do teorii. Doświadczenia w matematyce mogą, oczywiście, być czysto myślowe i tak było w dużej mierze przez wieki, ale teraz istnieje dodatkowe cudowne narzędzie. A więc odpowiadając na Twoje pytanie o rozumienie mózgu, to tak; wydaje mi się, że tak jest istotnie.

MF — Na pewno nauczyliśmy się już lub jesteśmy w pierwszym stadium prawdziwego uczenia się, jak przeprowadzać na komputerze doświadczenia, które mogą zacząć dostarczać intuicji o problemach nie nadających się do przeniknięcia w inny sposób. Nowa intuicja pozwala sformułować bardziej analityczną teorię. Czy myślicie, że istnieją problemy, które są tak złożone, że nie będzie można w ten sposób sobie z nimi radzić? Na przykład, może pamięć w mózgu nie ma globalnej struktury. Może nie zawiera nic więcej poza milionem różnych oddzielnie przechowywanych składników i wtedy nie można by sformułować żadnej teorii pamięci, a raczej tylko symulowałoby się taki układ na komputerze. Czy myślicie, że może być jakieś ograniczenie, co do rodzaju rzeczy, jakie można analizować?

SU — To zależy od tego, co nazywasz teorią. Zauważyłem, że powiedziałeś metoda analityczna, co oznacza, że z przyzwyczajenia i tradycji myślisz, że jest to jedyna metoda osiągnięcia postępu w czystej matematyce. A to tak nie jest. Mogą w końcu wyniknąć jakieś nadzwyczajne skutki z używania komputerów. Byłem związany od początku z komputerami i z pierwszymi doświadczeniami przeprowadzonymi w Los Alamos. Nawet w czystej teorii liczb już od początku pojawiały się małe zabawne rzeczy. Przerost specjalizacji w matematyce postępuje tak szybko, że nie można teraz znać więcej niż jej małą cząstkę; nadejdzie więc może czas, gdy powstanie inny format, sposób matematycznego myślenia w dodatku do istniejącego i inny stosunek do publikacji. Być może, zamiast publikowania twierdzeń i wyszczególniania ich, będzie jakieś szersze ujęcie całej teorii, a poszczególne twierdzenia pozostawi się komputerom lub studentom do opracowania, co jest do pomyślenia.

MK — Niewolnikom.

SU — Matematyka, która w ciągu ostatnich 2000 lat nie zmieniła się zbytnio w swoim formalnym aspekcie, zmienia się teraz. Wielkie odkrycia

---

[5] "Porządek w chaosie", konferencja na temat matematyki zjawisk nieliniowych, zorganizowana przez Centrum Studiów Nieliniowych w Narodowym Laboratorium w Los Alamos, 24–28 maja, 1982.

tego wieku, odkrycia Gödla, mają ogromne filozoficzne znaczenie dla podstaw matematyki. Gödel udowodnił, że istnieją twierdzenia, które są sensowne, ale nie można wykazać czy są one prawdziwe czy fałszywe, przy danym układzie aksjomatów. Hilbert, oczywiście, był wielkim wyznawcą formalnego systemu dla całej matematyki. Powiedział: "Zrozumiemy każdą rzecz, ale wszystko zależy od tego, na jakiej podstawie". Teraz już tak nie jest. Jak wiecie, układy aksjomatów same ulegają zmianie w wyniku tego, czego uczymy się przez doświadczenia fizyczne lub przez doświadczenia myślowe. Myślę, że Mark może mieć inny pogląd.

MK — Nie chcę posuwać się za daleko, bo jestem wyznawcą jednego z przykazań Wittgensteina: że o rzeczach, o których nic się nie wie, nie powinno się mówić. Chciałbym, żeby więcej ludzi stosowało się do tego przykazania. No dobrze, komputery odgrywają różne role: są one doskonałe jako narzędzia, ale również oferują pole dla nowego rodzaju eksperymentowania. Mitchell wie o tym najlepiej. Są pewne doświadczenia, których nie można przeprowadzić w umyśle. Jest to niemożliwe. Są doświadczenia, które można przeprowadzić w umyśle i są inne, których po prostu nie można, i jeszcze istnieje trzeci rodzaj doświadczeń, kiedy tworzy się swoją własną rzeczywistość. Podam Wam problem z prostej fizyki: gaz złożony z twardych kul. Otóż przyroda nie dostarcza gazu złożonego z twardych kul. Argon jest bliski tego, ale zawsze można argumentować, że z powodu niewielkiego przyciągającego "ogona" coś może się zmienić. Nie ma takiej substancji — przyroda jest taka złośliwa, że nie ma gazu twardych kul. A wiąże się z nim bardzo wiele interesujących problemów. Jest dziecinną igraszką stworzenie na komputerze gazu twardych kul. To prawda, pamięć jest ograniczona, a więc w rezultacie nie możemy mieć 10^{23} twardych kul, ale możemy mieć ich tysiące, a w istocie czułość na liczbę Avogadro nie jest znowu taka wielka. Można rzeczywiście dowiedzieć się czegoś o rzeczywistości tworząc imitację rzeczywistości, co może zrobić tylko komputer. To jest zupełnie nowy wymiar w eksperymentowaniu. W końcu, bardzo sławny współczesny biolog, Sidney Brenner, który wygłosił wykład na Uniwersytecie Rockefellera, gdy tam jeszcze byłem, powiedział (może go źle cytuję), że być może teoria w biologii nie będzie taka jak teoria fizyczna. Zamiast być wprost dedukcyjną, czysto matematyczną, analityczną teorią, może być bardziej podobna do odpowiedzi na następujące pytanie. Mamy komputer i nie znamy jego schematu, ale możemy zadawać mu różnego rodzaju pytania. Na podstawie tego dialogu mamy odkryć schemat. W pewnym sensie Brenner czuł, że informatyka — języki, teoria programowania i co tam jeszcze jest — może być lepszym modelem dla teoretyzowania w biologii niż zapisywanie analitycznych równań i ich rozwiązywanie.

MF — Pojęcie bardziej syntetyczne?

MK — Tak. W istocie, myślę, że pójdziemy nawet dalej w tym kierunku, jeśli wprowadzimy jakoś możliwość ewolucji w maszynach, bo nie można zrozumieć biologii bez ewolucji. Rzeczywiście, mój kolega, Gerry Edelman, którego bardzo dobrze znacie i który jest laureatem Nobla z biochemii, obecnie "wszedł w mózg" i próbuje zbudować komputer, który miałby wbudowany w sobie proces ewolucji, tak by programy mogły ewoluować: zaczynasz od jakiegoś programu, który przekształca się w inny itd. Jest to próba oderwania się od statycznego, nadającego się do wszystkiego Craya [6], lub czegoś podobnego i do wyposażenia komputera w ten wyjątkowy, ważny element życia jakim jest ewolucja. Ja też tak czuję, jak Stan; gdybym był młodszy — *Si la jeunesse savait; si la vieillesse pouvait* [7] — jak się mówi po francusku, ja też zająłbym się biologią.

To jest fantastyczne wyzwanie. I są to problemy, które wymagają sformułowania, nie tylko rozwiązania. Być obecnym przy tworzeniu, formułować problem, to też jest podniecające.

SU — Mogę coś do tego dodać. Rzeczywiście, do pewnego stopnia różnice między matematykami i fizykami, o których mówiliśmy, czy skłonności umysłu, są tego rodzaju. Opisałem też z grubsza obraz następującego układu: matematycy zaczynają od aksjomatów i wyprowadzają wnioski, twierdzenia. Fizycy mają twierdzenia lub fakty zaobserwowane w doświadczeniu i poszukują aksjomatów, że tak powiem, praw fizyki, od tyłu. Tak właśnie, jak powiedziałeś, idea polega na wykryciu takiego układu praw czy aksjomatów, z których wynikałyby zaobserwowane fakty. W istocie tak zwana metoda Monte Carlo jest trochę tego typu, nawet w bardzo prozaicznych zagadnieniach, bardzo przyziemnej natury. Tworzysz swój własny świat, jak mówisz, twardych kul, lub co tam masz.

MF — Marku, chciałbym wrócić do czegoś, o czym wspomniałeś wczoraj. Przytoczyłeś cytat, że "Aksjomatyzacja to nekrolog wielkiej idei". Mówiłeś to w kontekście tego, jak to czasem można zamęczyć matematykę i porzucić martwą zamiast pozwolić jej mówić za siebie i być żywą. Czy rozwinąłbyś myśl o duszy matematyki?

MK — Spróbuję. Oczywiście, jest aksjomatyzacja i aksjomatyzacja. Jeśli istotnie myślimy o rozwoju nauk przyrodniczych jako o odkrywaniu tego, co nyzywamy prawami natury, o których można powiedzieć, że są jej aksjomatami, to wtedy przeciwnie, takie odkrycie jest zawiadomieniem o narodzinach. Ale weź, np., geometrię: jest to jedna z najstarszych, najlepiej znanych gałęzi ludzkiej wiedzy i w rzeczy samej jedno z wielkich osiągnięć Greków. Najwięcej zasług przypisuje się chyba Euklidesowi, ale to była sprawa zespołowa, ta aksjomatyzacja (aksjomatyzacja w tym sensie, że z małej liczby

[6] Cray — nazwa amerykańskiego superszybkiego komputera (przyp. Red.).

[7] "Gdyby tylko młodość potrafiła; gdyby tylko starość mogła".

z wyglądu oczywistych twierdzeń można wyprowadzić cały świat faktów). Okazało się potem, że istnieją pęknięcia w tej budowli; nagle pojawiły się pewne pojęcia, które nie były w pełni zaksjomatyzowane. Ostateczna aksjomatyzacja geometrii przyszła z Hilbertem w 1895 r., 2000 lat po Euklidesie. W pewnym sensie to był nekrolog, bo wtedy można by to (aksjomatyzację lub geometrię) odesłać w istocie do komputera. Gdy tylko przedmiot staje się tak dobrze zorganizowany, że każda oddzielna rzecz może być zredukowana do programu, nie pozostaje już nic więcej do zrobienia. W rzeczywistości Gödel przywrócił nam nadzieję udowadniając, że ta redukcja jest niemożliwa w ramach w pewnym sensie szerszego systemu matematycznego, że zawsze, bez względu na to jak duży, jak złożony jest ten system, będą istnieć twierdzenia, których prawdziwości lub nieprawdziwości nie będzie można udowodnić. Oznacza to, że zawsze jest możliwość tworzenia, zmiany aksjomatu lub czegoś w tym rodzaju. Istnieje taka tendencja wśród matematyków do rozumienia przez aksjomatyzację.

SU — A w fizyce jest to nonsens.

MK — Są ludzie, którzy wciąż próbują zaksjomatyzować termodynamikę. Najostateczniejszą rzeczą, którą należałoby zrobić, to aksjomatyzacja termodynamiki. Rozumiem przez to, przede wszystkim, że większość teorii fizycznych jest tylko przejściowa, aczkolwiek muszę przyznać, że termodynamika jest jedną z teorii trwalszych. Zmieniają się one, ewoluują. Po co więc, do licha, aksjomatyzować coś, co następnego dnia stanie się przestarzałe? Ale z drugiej strony, wielu matematyków, którzy zostali wykształceni formalnie, czuje, że nie ma innego sposobu rozumienia przedmiotu niż przez ścisłą aksjomatyzację. I co gorsza, próbują oni w ten sposób uczyć małe dzieci w szkołach. Uczenie geometrii przez pełny układ aksjomatów jest głupotą. Nauczanie geometrii polega na drażnieniu wyobraźni młodych ludzi przez rozwiązywanie tych wszystkich cudownych problemów. Nie powinno to polegać na dowodzeniu, że jeżeli A leży pomiędzy B i C, a D między A i C, to wtedy D leży między B i C. Robisz po prostu rysunek i to jest trywialnie oczywiste.

SU — Weźmy np. tzw. Nową Matematykę.

MK — Mógłbym godzinami przemawiać przeciwko Nowej Matematyce.

SU — Ona już zamiera, prawda?

MK — Tak, to już jest młócenie słomy.

MF — Jak myślicie, czy to, że ludzie są kształceni z czysto aksjomatycznego punktu widzenia, jest zjawiskiem zataczającym coraz szersze kręgi, czy też zawsze tak było wśród matematyków i przyrodników?

MK — Naprawdę nie wiem. Znam tylko bardzo niewielu ludzi.

MF — Zrobiłeś aluzję do tej sytuacji mówiąc, że naucza się teraz w duchu Nowej Matematyki, wspomniałeś jednakże, że Nowa Matematyka zamiera.

MK — Przez jakiś czas to było aktualne, gdyż grupie matematyków udało się sprzedać tę ideę biednym nauczycielom szkół średnich, którzy nie rozumieli nawet, o co tu w ogóle chodzi i którzy uczyli wtedy geometrii i innych przedmiotów wyłącznie poprzez aksjomaty. Są dwie zasady pedagogiczne, których trzeba się trzymać. Jedna głosi: "Mów prawdę, wyłącznie prawdę, ale nie całą prawdę". Tę znam od byłego kolegi, który niestety już nie żyje. Druga brzmi: "Nie próbuj nigdy nikogo uczyć, jak unikać błędów, których prawdopodobnie i tak nigdy by nie popełnił". Otóż, żeby dać przykład. Nowa Matematyka zużywa okropnie dużo czasu w drugiej klasie, Boże uchowaj, na próbach wyjaśnienia małym dzieciom, że gdy piszemy małą trójkę i gdy piszemy dużą trójkę, to jednak mała trójka i duża trójka symbolizują to samo, gdyż jest to liczba kardynalna zbioru trzech elementów. Czy tak? To jest czysty idiotyzm. Jeśli dziecko jest logicznie wyrafinowane i sprawa ta niepokoi je, to wziąłby je na bok i zajął się nim specjalnie, ale żeby stwarzać zamieszanie w umyśle dziecka, które bardzo chce na razie wierzyć, że ta trójka i tamta reprezentują to samo, nawet jeśli jedna wygląda na większą od drugiej — to pozwólmy mu na to! Wiem, że to brzmi trochę zabawnie, ale ja mam na ten temat bardzo zdecydowaną opinię. Potrzeba precyzji, logiki nie może być narzucona z zewnątrz. Musi przychodzić od wewnątrz. Jeśli kogoś naprawdę to niepokoi, to znaczy, że on lub ona ma niezwykle wysoko rozwiniętą wrażliwość na subtelne logiczne aspekty.

SU — Próbuję wymyślać o tym dowcipy. Jeśli zadrukuje się stronę matematyką, lub czymś innym, to nie jest ona niezmiennicza, bo jak się na nią patrzy do góry nogami, to wygląda inaczej. A więc ideałem w Nowej Matematyce byłoby pisać w taki sposób, żeby to wyglądało tak samo, bez względu na to, pod jakim kątem się patrzy. Jest to ultramatematyczny punkt widzenia.

MF — Inne pytanie, nad którym zastanawiałem się wracając myślą do kawiarni "Szkockiej", to: co było podniecające w matematyce? Czy było w tym czasie jakieś poczucie, że istnieje schemat rozumienia rzeczy, który przetrwa w przyszłości?

MK — Stan, jesteś dużo silniej związany z kawiarnią "Szkocką".

SU — Nie sądzę, żeby tak naprawdę było. Ludzie byli tak przecież zatopieni w bieżących zagadnieniach. Od czasu do czasu mogły się zdarzyć jakieś spekulacje na temat dalszej przyszłości. Na przykład we Lwowie, moim mieście rodzinnym, Banach, ów sławny matematyk, o którym zdaje się wcześniej wspomniałeś, postanowił trzymać duży notatnik w kawiarni "Szkockiej", gdzie zbieraliśmy się każdego dnia. Była to księga, do której wpisywane były zagadnienia do rozwiązania, uwagi i pomysły. Przechowywana była w kawiarni i kelner przynosił ją, gdy przychodziliśmy. Mnóstwo interesujących zagadnień zostało tam wpisane. Wspomnieć można, że tę księgę wydaje teraz Birkhäuser. Zdaje się, że zacząłem mówić o tym, że od czasu do czasu mogły pojawiać się pewne spekulacje. Matematyk Mazur powiedział raz, że "Musi istnieć sposób wyprodukowania automatycznych urządzeń, które by się odtwarzały". To było na długo przed tym, zanim von Neumann wszedł rzeczywiście w ten cały kompleks problemów i znalazł jeden sposób, żeby to zrobić. Spekulacje tego typu pojawiały się sporadycznie, ale na ogól był to bardziej przyziemny, matematycznie określony zbiór interesujących nas problemów z różnych dziedzin, takich jak analiza funkcjonalna i teoria mnogości, dziedzin, które w tamtych czasach były jeszcze młode.

MK — Ale już starzejące się.

SU — Być może.

MK — To trudno powiedzieć. Analiza funkcjonalna była, oczywiście, dziełem Banacha i częściowo Steinhausa. Pod koniec mojej studenckiej kariery, to jednak właśnie sam Banach, jak mi się zdawało, i również Mazur zaczęli rozglądać się za nowymi światami do podboju.

SU — Nieliniowy program badań.

MK — Masz rację. Banach także czytał. Pamiętam, bo raz byłem w jego pokoju w jakiejś błahej sprawie, a on czytał wczesne prace Wienera o całkach po drogach. Zgadzam się ze Stanem, choć byłem w mniejszym stopniu bywalcem kawiarni "Szkockiej". Przede wszystkim, mój nauczyciel Steinhaus uczęszczał do bardziej eleganckiego lokalu, gdzie były specjalne rzeczy do jedzenia i w ogóle. Po drugie, byłem mniej zasobny finansowo niż Stan — byłem, jak mawia Michael Cohen, jeden z naszych wspólnych przyjaciół, niezależnie biedny. A wizyty w kawiarni nieco kosztowały. Przede wszystkim odbywało się to tak, że ludzie omawiali interesujące zagadnienia, a potem nad nimi myśleli. Jeśli nic nie wyszło natychmiast z tego problemu, nic, co by wyglądało na interesujące i obiecujące, wtedy notowało się to w księdze. Rzeczywiście, bardzo mało zagadnień z księgi okazało się zupełnie trywialnymi. Wiele z nich ma bardzo szacowną historię. Pisano artykuły o wielu z nich, a niektóre wciąż są nierozwiązane. W rzeczy samej, chciałbym umieścić tu pewnego rodzaju przypisek. Jest godne uwagi, że Polacy nie wydali tej książki. Została ona za to wydana w Stanach Zjednoczonych, w rzeczywistości dzięki wysiłkom naszego bardzo wybitnego młodego przyjaciela o nazwisku Dan Mauldin, który jest profesorem matematyki w zupełnie nieprawdopodobnym miejscu, w stanowym Uniwersytecie Północnego Teksasu w Denton w Teksasie. Jest on pierwszorzędnym matematykiem i w stosunku do problemów matematycznych ma polską duszę. Wywiad z nim byłby ciekawy, gdyż był on na drodze do kariery najlepszego amerykańskiego obrońcy grając w sławnej teksaskiej drużynie Longhorns i porzucił to dla matematyki.

SU — Tak, był on w teksaskiej drużynie piłki nożnej i grał w mistrzostwach.

MK — I wtedy ku niezadowoleniu swojego trenera na ostatnim roku studiów, gdy mógł rzeczywiście dokonać wielkich rzeczy, porzucił piłkę nożną i zaczął myśleć o teorii mnogości.

SU — Ofiarowywano mu samochód i pieniądze.

MK — Dom i wszystko. To ciekawe, jaką pasję może zrodzić matematyka.

SU — Zapomniałeś powiedzieć o jednym — jednym z motywów w matematyce jest poczucie, że możesz zrobić coś sam. Myślę, że tkwi ono we wszystkich matematykach. Jedną z pobudek zajmowania się matematyką jest to, że nagle czujesz, że jesteś w czymś dobry. To bardzo ludzkie. To uczucie nie ma w sobie nic złego.

MK — Rzeczywiście, bardzo ludzkie. Istotnie, myślę, że to ani nie jest dobrze rozumiane, ani może nawet w ogóle nie jest do zrozumienia, w jaki sposób niektóre zagadnienia generują namiętności. Niektóre z nich, swoją drogą, okazują się w końcu względnie mało znaczące. Pamiętam takie jedno w związku ze Stanem. Stan wymyśla zagadnienia i hipotezy w najszybszym chyba tempie na świecie. Trudno jest znaleźć w tym kogoś tej samej klasy. Wiele z nich omawiamy wspólnie. Z jednym przyszedł raz i powiedział: "Popatrz, wymyśliłem następującą modyfikację liczb Fibonacciego". Przy zwykłych liczbach Fibonacciego zaczynasz od 1 i 1, następnie je dodajesz otrzymując 2 jako trzeci wyraz ciągu. Potem dodajesz 2 i 1 otrzymując 3, potem 3 i 2, co daje 5, etc. Innymi słowy, $(n+1)$-szy wyraz ciągu jest sumą n-tego wyrazu i $(n-1)$-go. Symbolicznie, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ przy $a_1 = a_2 = 1$. Ale według pomysłu Stana, wzór na a_{n+1} byłby teraz: $a_{n+1} = a_n +$ któryś z $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ wzięty z prawdopodobieństwem $1/n$. Mój Boże, to jest ciekawe jako rozmowa przy kawie, ale z jakiegoś dziwnego powodu to mnie tak wzięło, że zacząłem nad tym pracować. Znalazłem nawet średnie a_n i nawet wariancję. A wariancja dana jest straszliwym wzorem zawierającym pierwiastek kwadratowy z 17. To się nawet ukazało jako raporcik wydany w Los Alamos. Spędziłem nad tym prawdopodobnie najmniej tydzień ciężkiej pracy. Dlaczego? Nie mam pojęcia, poza tym, że nie mogłem zostawić w spokoju tej przeklętej rzeczy.

SU — To, co zrobiłeś z regułą typu Fibonacciego, jest piękną robotą i ma pewną prostotę, tak jak i sam problem. A rozwiązanie było nieoczekiwane, bo a_n rośnie wykładniczo nie z n, lecz z pierwiastkiem kwadratowym z n.

MK — Z pierwiastkiem kwadratowym z n ze skomplikowanym współczynnikiem. Jest w tym pewna myśl, gdyż budując ciąg na każdym etapie musisz znać wszystkie poprzedzające wyrazy — wysoce niemarkowowskie zagadnienie. W tym czasie, gdy się tym zabawiałem, to było tak, jakbym był alkoholikiem. A jak wiesz, to niezdrowo.

SU — Inny interesujący problem wciąż nie jest rozwiązany — zagadnienie Fermata. Suma dwóch kwadratów może być kwadratem, ale suma dwóch sześcianów nie może być sześcianem i tak dalej. Nikt nie może tego udowodnić dla dowolnej potęgi. Można, oczywiście, dla kwadratów, sześcianów, czwartych potęg i tak dalej, ale ogólnie nikt nie był w stanie tego dokonać. Wygląda to jak mała głupia zagadka, a jednak tak dużo ludzi nad nią pracowało, że w istocie rzeczy próby rozwiązania jej przyczyniły się w dużej mierze do rozwoju znacznej części nowoczesnej algebry. Dziwna to sprawa. Matematyczna teoria ideałów i inne teorie algebraiczne powstały z prób rozwiązania tej głupiej zagadki.

MK — A więc nie można przewidzieć. Nigdy nie można przewidzieć. Zwykle zagadki, te dobre, generują potem niektóre ogromne rzeczy, podczas gdy inne obumierają. Przypomina to bardzo przeżywanie osobników najlepiej przystowanych.

SU — Albo jakiś rodzaj tajemniczego czynnika, który tkwi w problemach i czyni je ważnymi w przyszłości. Nie można tego logicznie przewidzieć.

MF — Powiedziałeś niemal, że zagadnienia mają jakiegoś teleologicznego ducha i że nie zawsze zdajemy sobie sprawę z ich wyjątkowego znaczenia w tym czasie, gdy się je rozwiązuje.

SU — Nie, nie powinniśmy być takimi mistykami, ale kiedyś może trochę się to zrozumie. Musi być jakieś ...

MK — Oh, co Ci zależy, bądźmy mistykami! Czemu nie?

SU — Jak dotąd jesteśmy.

MF — Ostatnie pytanie. Czy kiedykolwiek mieliście sięgającą daleko w przyszłość nadzieję znalezienia właściwego sposobu analizy jakiegoś zagadnienia, a potem obserwowaliście, jak te nadzieje ziszczają się z biegiem lat? Zdaje mi się, że w fizyce bardzo często ustala się programy. Ktoś ma pewien pomysł, jest metoda podejścia do tego zagadnienia i wielu ludzi będzie nad tym pracowało może ponad dziesięć lat; czasem to zaowocuje, czasem nie.

MK — Myślę, że najlepszym przykładem na to jest najnowsze rozwiązanie problemu klasyfikacji wszystkich grup prostych, grup skończonych. Jest to istotnie jedno z nielicznych zespołowych dzieł w matematyce wykorzystujące, nawiasem mówiąc, komputer. I to był również program, gdyż zdarzały się różne przełomy, zrozumienie przychodziło z różnych stron. Otóż, gdy stało się jasnym, że zagadnienie klasyfikacji grup prostych prawdopodobnie może być rozwiązane, wtedy stworzono ogromną ludzką maszynę do jego rozwiązania. Na ogół matematycy, dużo nawet bardziej niż fizycy teoretycy, mają skłonności do samotnictwa. Są oni zdolni do współpracy, ale zasadniczo jest bardzo mało publikacji więcej niż, powiedzmy, trzech autorów. Ciekawe byłoby, gdyby narysować wykres: przy pięciu autorach krzywa osiąga zero.

SU — W matematyce to jest zero. W fizyce to nie jest takie wyjątkowe. Odpowiadając na Twoje pytanie, Mitch, Newton powiedział coś takiego — muszę to sparafrazować — "Jeśli osiągnąłem coś w nauce w moim życiu, to dlatego, że tak długo i tak wiele myślałem o tych zagadnieniach".

MF — On też powiedział, że jeśli był w stanie widzieć dalej niż inni ludzie, to dlatego, że stał na ramionach olbrzymów.

MK — Sidney Coleman sparafrazował to tak: "Byłem w stanie widzieć dalej, gdyż otoczony byłem karłami".

MF — W stosunku do jakich rzeczy, które zrobiliście, żywicie najcieplejsze uczucia?

MK — Należy zacząć od tego, że zawsze bardziej interesowały mnie problemy niż teorie. W retrospekcji, rzeczą, z której jestem najbardziej zadowolony, a zrobiona była ona przy współpracy z Erdösem, który też bywa czasem w Los Alamos, było wprowadzenie metod probabilistycznych do teorii liczb. Żeby ująć to poetycznie: liczby pierwsze uprawiają hazard. Także niektóre moje prace z fizyki matematycznej. Niektóre rzeczy mnie bawią. Czy można usłyszeć kształt bębna? Mam też w sobie, wiecie, żyłkę dziennikarską; lubię dobry tytuł, czemu nie? Zadowolony jestem z tego, co zrobiłem próbując trochę lepiej zrozumieć teorię przejść fazowych. Fascynują mnie też matematyczne problemy, a w szczególności, jak wiesz równie dobrze albo lepiej niż ja, rola wymiarowości; dlaczego niektóre rzeczy zdarzają się od trzech wymiarów w górę, a inne nie. Zawsze czuję, że to właśnie tam związek między przyrodą i matematyką jest najgłębszy. Wiedzieć, dlaczego tylko pewne rzeczy obserwowane w przyrodzie mogą mieć miejsce w przestrzeni o pewnym wymiarze. Wszystko, co pomaga zrozumieć tę zagadkę, jest ważne. Cieszę się, że i ja, w drobny sposób, trochę się do tego przyczyniłem. A Ty, profesorze?

SU — Nie wiem. Myślę, że w wielu wypadkach miałem pewnego rodzaju szczęście, a nie byłem znów taki bystry. Głupim szczęście sprzyja. Początkowo pracowałem w teorii mnogości i niektóre z tych problemów są wciąż intensywnie badane. To jest za bardzo techniczne do opisania: mierzalne kardynały, miara w teorii mnogości, miary abstrakcyjne. Potem miałem trochę wyników w topologii. Niektóre można sformułować popularnie, ale nie mamy na to czasu. Potem pracowałem trochę w teorii ergodycznej. Wspólnie z Oxtobym rozwiązaliśmy pewien stary problem i kilka innych problemów rozwiązanych zostało później w innych dziedzinach. Powiedziałbym ogólnie, że szczęście gra rolę, przynajmniej w moim przypadku. Miałem też szczęście do doskonałych współpracowników w teorii mnogości, w teorii grup, w topologii, w fizyce matematycznej i w innych dziedzinach. Szczęście sprzyjało mi również w przypadku pewnych podejść opartych na zdrowym rozsądku, jak metoda Monte Carlo, która nie jest ogromnym intelektualnym osiągnięciem, ale jest bardzo użyteczna. Parę takich rzeczy.

MK — Muszę przerwać, bo czas na popołudniową sesję, ale chciałbym zakończyć stwierdzeniem, że szczęście spotyka tylko tych, którzy na to zasługują.

Tłumaczyła *Zofia Białynicka-Birula*