Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales*

§ 1. THÉORÈME. *Soit $\{f_n(t)\}$ une suite complète de fonctions orthogonales et normées par rapport à l'intervalle $a \leqslant t \leqslant b$; autrement dit, une suite dont les termes satisfont à la condition*

$$(1) \qquad \int_a^b f_i(t) f_k(t)\,dt = \begin{cases} 1 & \textit{pour } i = k \\ 0 & \textit{pour } i \neq k \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n, \ldots),$$

sans qu'il soit possible de trouver une fonction $f_0(t)$ telle que la condition (1) *soit remplie pour tous les entiers $k \geqslant 0$. On aura*

$$(2) \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \to 0 \qquad (\textit{pour } n \to \infty)$$

pour presque tous les t de l'intervalle $\langle a, b\rangle$.

Explication. Il s'agit de fonctions qui sont intégrables ainsi que leurs carrés dans $\langle a, b\rangle$ au sens de M. Lebesgue. „Presque tous les t de l'intervalle“ signifie que les t appartenant à $\langle a, b\rangle$ et n'ayant pas la propriété (2) forment un ensemble de mesure lebesguienne nulle.

Démonstration. Écrivons

$$(3) \qquad \begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(t), \\ \Delta_n(t) = s_{n+1}(t) - s_n(t) &= \frac{-\sum_{n}^{1} f_k(t) + n f_{n+1}(t)}{n(n+1)}; \end{aligned}$$

je dis que la suite $\{\Delta_n\}$ a la propriété d'orthogonalité; en effet, pour $n > m$, on a (tenant compte de (1))

---

* Commenté sur p. 312.

$$\int_a^b \Delta_n(t)\,\Delta_m(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{(n^2+n)(m^2+m)} \int_a^b \Big[nf_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} f_i\Big]\Big[mf_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} f_k\Big]\,dt$$

$$= \frac{1}{(n^2+n)(m^2+m)} \Big[\int_a^b \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f_i f_k\,dt - n\int_a^b \sum_{k=1}^{m} f_{n+1} f_k\,dt -$$

$$- m\int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_{m+1} f_i\,dt + mn\int_a^b f_{n+1} f_{m+1}\,dt\Big]$$

$$= \frac{1}{(n^2+n)(m^2+m)} [m - 0 - m\cdot 1 + 0] = 0.$$

Considérons le cas $m = n$; nous obtiendrons:

$$\int_a^b \Delta_n^2(t)\,dt = \frac{1}{(n^2+n)^2}[n - n\cdot 0 - n\cdot 0 + n^2\cdot 1] = \frac{1}{n^2+n}.$$

En définissant

$$(4) \qquad \Gamma_n(t) = \sqrt{n(n+1)}\,\Delta_n(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

nous aurons donc une suite $\{\Gamma_n\}$ de fonctions orthogonales et normées. Pour démontrer qu'elle est aussi complète, supposons que $\Gamma_0(t)$ soit une fonction intégrable avec son carré et telle que l'on ait:

$$(5) \qquad \int_a^b \Gamma_0(t)\Gamma_n(t)\,dt = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \text{ in inf.}$$

et par suite

$$(6) \qquad \int_a^b \Gamma_0(t)\,\Delta_n(t)\,dt = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots \text{ in inf.};$$

en désignant par a_n l'intégrale

$$\int_a^b \Gamma_0(t) f_n(t)\,dt$$

et en tenant compte de (3) on déduit de (6):

$$\int_a^b \Gamma_0(t)\,\frac{nf_{n+1} - \sum_1^n f_k}{n(n+1)}\,dt = \frac{na_{n+1} - \sum_1^n a_k}{n(n+1)} = 0,$$

donc

$$a_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}. \tag{7}$$

Pour $n = 1$ (7) donne

$$a_1 = a_2$$

et l'hypothèse $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ et (7) impliquent

$$a_{n+1} = a_n,$$

donc, par induction,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \ldots \quad \text{in inf.} \tag{8}$$

Or, les a_n étant les coefficients du développement de $\Gamma_0(t)$ suivant le système orthogonal, normé et complet $\{f_n\}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \int_a^b \Gamma_0^2(t)\,dt$$

donc, vu (8),

$$a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots \text{ in inf.}),$$

$$\int_a^b \Gamma_0^2(t)\,dt = 0. \tag{9}$$

Nous voyons que (5) implique (9) ce qui prouve que la suite $\{\Gamma_n\}$ est complète. Développons $-f_1(t)$ suivant $\{\Gamma_n\}$; nous aurons:

$$\int_a^b (-f_1)\Gamma_n dt \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \int_a^b f_1 \Big[\sum_{k=1}^{n} f_k - n f_{n+1}\Big] dt = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \alpha_n \tag{10}$$

d'après (3) et (4), α_n étant une abbréviation pour $1/\sqrt{n(n+1)}$.

La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Gamma_n(t) \tag{11}$$

est convergente pour presque tous les t de $\langle a, b\rangle$ en vertu d'un théorème de M. E. W. Hobson suivant lequel une série de la forme (11), où les Γ_n sont des fonctions orthogonales et normées, est convergente presque partout dans $\langle a, b\rangle$ pourvu qu'il existe un $\varepsilon > 0$ rendant convergente la série numérique

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varepsilon} \alpha_n^2 \text{ [1]}; \tag{12}$$

---

[1] E. W. Hobson, *On the convergence of series of orthogonal functions*, Proceedings of the London Mathematical Society 2.12, Part 4 (1912), p. 297-308. Le théorème moins général de Jerosch-Weyl (voir loc. cit.) suffirait pour notre but.

dans le cas actuel tout $\varepsilon < 1$ satisfait à la condition de M. Hobson. Or, d'après (10), la série (11) est le développement de $-f_1(t)$ suivant un système $\{\Gamma_n\}$ que nous avons reconnu comme orthogonal, normé et complet, et par conséquent elle ne saurait être convergente vers une autre limite que $-f_1(t)$. Il s'ensuit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma_n(t) = -f_1(t) \tag{13}$$

presque partout dans $\langle a, b\rangle$. (4), (10) et (13) donnent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(t) = -f_1(t).$$

Si l'on tient compte de (3), on trouve

$$\lim_{n\to\infty} [s_n(t)-s_1(t)] = -f_1(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = 0,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

pour presque tous les t de $\langle a, b\rangle$, c. q. f. d.

§ 2. Ayant pris connaissance de ce qui précède, M. Steinhaus a remarqué que l'on peut généraliser le théorème et simplifier son énoncé et sa démonstration en levant la restriction d'après laquelle la suite $\{f_n\}$ des fonctions orthogonales et normées doit être *complète*. Cette restriction est formulée dans l'énoncé du théorème dans les terms „sans ... $k \geqslant 0$", qui suivent l'hypothèse (1) et précèdent la thèse (2). Le théorème généralisé affirme donc que (1) implique (2) pour presque tous les t de $\langle a, b\rangle$. Comme cette généralisation est importante pour les applications du § 3, nous allons l'exposer.

Démonstration du théorème généralisé. Nous reprenons la démonstration primitive avec les formules (3) et (4) et nous démontrons que les fonctions $\Gamma_n(t)$ sont orthogonales et normées. Nous quittons maintenant la voie de la première démonstration pour la rejoindre au point où l'on introduit la série (11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma_n(t) \qquad \text{avec} \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Nous nous servons du théorème de M. Hobson pour prouver que cette série est convergente presque partout dans $\langle a, b\rangle$. Nous ne pouvons plus affirmer que sa somme soit $-f_1(t)$; appelons la $\varphi(t)$. (13) sera donc à remplacer par

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Gamma_n(t) = \varphi(t),$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \to f_1(t)+\varphi(t) \qquad \text{(presque partout)}; \tag{14}$$

or, l'inégalité de Schwarz donne (tenant compte de (1)):

$$\int_a^b \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k\right| dt \leqslant \sqrt{\int_a^b 1\cdot dt \cdot \int_a^b \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k\Big)^2 dt} = \sqrt{\frac{b-a}{n}}$$

et par là

$$\int_a^b \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k\right| dt \to 0. \tag{15}$$

Un lemme connu de la théorie d'intégration [1] donne avec (14) et (15):

$$\int_a^b |f_1(t)+\varphi(t)|\, dt \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_a^b \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k\right| dt = 0,$$

donc

$$f_1(t)+\varphi(t) = 0$$

presque partout dans $\langle a, b\rangle$ et, à cause de (14),

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \to 0$$

pour presque tous les t de $\langle a, b\rangle$, c. q. f. d.

§ 3. Applications. 1. Considérons la suite $\{f_n\}$ de fonctions orthogonales et normées dans $\langle 0, 1\rangle$, définies comme il suit:

$$f_n(t) = (-1)^k \text{ pour } \frac{k}{2^n} \leqslant t < \frac{k+1}{2^n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^n-1,$$

$$f_n(1) = -1 \qquad (n = 1, 2, \ldots \text{ in. inf.}).$$

Soit β un nombre irrationnel, $0 < \beta < 1$, et

$$0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots \qquad (\beta_n = 0 \text{ où } 1)$$

---

[1] Cf. p. ex. H. Steinhaus, *Niektóre własności szeregów trygonometrycznych i szeregów Fouriera*, Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Akad. Um. w Krakowie, T. LVI, Ser. A., pp. 12-13; [184]-[185].

son développement dyadique; on aura

$$f_n(\beta) = (-1)^{\beta_n},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_n(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\beta_n} = 1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[(-1)^{\beta_n}-1] = 1-\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k.$$

La valeur moyenne des $f_n(\beta)$ tendant d'après le § 2 vers zéro pour presque tous les β de $\langle 0, 1\rangle$, il s'ensuit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k \to \frac{1}{2} \qquad (n\to\infty)$$

pour presque tous les β irrationnels de $\langle 0, 1\rangle$. La partie entière de β n'ayant aucune influence sur la limite précédente et les β rationnels formant un ensemble de mesure nulle, on obtient le résultat de M. Borel que voici: pour presque tous les nombres nonnégatifs, le nombre des chiffres 1 du développement dyadique est asymptotiquement égal au nombre des chiffres 0 (¹).

2. La suite $\{n_i\}$ des nombres naturels différents entre eux étant donnée,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n_i v\right\}$$

est une suite de fonctions orthogonales et normées dans l'intervalle $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Il s'ensuit que

$$X_k = \sum_{i=1}^{k}\cos n_i v \to 0$$

avec $1/k$ pour presque tous les v. De même

$$Y_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sin n_i v \to 0$$

pour presque tous les v. Considérons un point se mouvant suivant sur la circonférence du cercle

$$x^2+y^2 = 1$$

dans le sens positif, avec une vitesse constante v; considérons les positions qu'il occupe aux époques

$$n_1, n_2, \ldots, n_k;$$

nous supposons qu'il se trouve à $x = 1$, $y = 0$ à l'époque 0. Attribuons la même masse μ aux points ainsi obtenus et calculons le centre de gravité

(¹) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 420.

de cette repartition de masses; soient X_k et Y_k les coordonnées du centre de gravité. On voit que, pour presque tous les v, ce centre de gravité tend vers le centre du cercle. Ce théorème a été démontré (avec d'autres très généraux) par M. M Hardy et Littlewood (1). Pour $n_i = i$, il résulte des recherches de M. Sierpiński (2) que seulement les multiples de 2π fournissent les vitesses exceptionnelles. Pour $n_i = i^2$ (et i^p, p = nombre naturel $\geqslant 2$) M. Kley (3) a démontré que les vitesses exceptionnelles sont commensurables avec 2π.

---

(1) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of Diophantine approximation*, International Congress of Mathematicians, Cambridge 1912.

(2) Ce Bulletin, 1909, p. 725.

(3) Mathematische Annalen 1916.