Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$*

Le but de cette note est de démontrer que *toute fonction mesurable $f(x)$, satisfaisante à l'équation fonctionnelle*

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \tag{1}$$

est continue (donc, d'après Cauchy, de la forme Ax). Notre démonstration sera fondée sur le théorème de M. Lusin concernant les fonctions mesurables.

Soit $f(x)$ une fonction mesurable (L), satisfaisant pour tous les nombres réels x et y à l'équation (1), et soit x_0 un nombre réel donné, ε — un nombre positif donné quelconque. Soit (a, b) un intervalle donné quelconque, entourant x. D'après le théorème de M. Lusin, il existe pour toute fonction mesurable $f(x)$ et pour tout nombre positif σ — en particulier pour $\sigma = (b-a)/3$ — une fonction $F(x)$, continue (pour tous les x réels) et telle que l'égalité

$$f(x) = F(x) \tag{2}$$

subsiste pour tous les nombres x de l'intervalle (a, b), sauf les nombres x formant un ensemble E de mesure $< \sigma$ [1].

La fonction $F(x)$ étant continue, il existe pour le nombre positif ε un nombre positif $\delta = \delta(\varepsilon) < \sigma$, tel que l'inégalité

$$|h| < \delta \tag{3}$$

entraîne pour les nombres x de (a, b), l'inégalité

$$|F(x+h)-F(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

---

* Commenté sur p. 314.

[1] Comptes Rendus 154, p. 1688. Cf. la note de W. Sierpiński, *Démonstration élémentaire du théorème de M. Lusin sur les fonctions mesurables*, Tohoku Mathematical Journal 10, August 1916. Les démonstrations du théorème de M. Lusin sont fondées sur l'axiome de M. Zermelo. (Voir à ce sujet la mémoire de W. Sierpiński, *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse*, Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Série A, Avril 1918, p. 97). Cependant le théorème qui nous occupe peut être démontré sans l'aide de l'axiome du choix: voir les notes de W. Sierpiński, *Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$* et *Sur les fonctions convexes mesurables*, Fund. Math. 50 (1919), p. 116 et p. 129.

Soit h un nombre réel donné quelconque, satisfaisant à l'inégalité (3).

L'égalité (2) subsistant pour tous les nombres x de (a, b), sauf les nombres de l'ensemble E de mesure $< \sigma$, nous concluons que l'égalité

$$(5) \qquad f(x+h) = F(x+h)$$

subsiste pour les nombres x de l'intervalle (a, b), sauf les nombres x d'un ensemble G de mesure $< \sigma+|h| < \sigma+\delta$.

L'ensemble des nombres x de (a, b), pour lesquels ne subsiste une au moins des formules (2) et (5), a donc une mesure $< m(E+G) < 2\sigma+ +\delta < 3\sigma < b-a$; il en résulte qu'il existe dans (a, b) un point x (dépendant de h) pour lequel subsistent à la fois les formules (2), (4) et (5). Or (4) donne, d'après (2) et (5):

$$(6) \qquad |f(x+h)-f(x)| < \varepsilon.$$

D'autre part, d'après (1) nous avons:

$$f(x+h) = f(x)+f(h) \qquad \text{et} \qquad f(x_0+h) = f(x_0)+f(h),$$

donc

$$f(x+h)-f(x) = f(x_0+h)-f(x_0);$$

l'inégalité (6) donne donc:

$$(7) \qquad |f(x_0+h)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nous avons donc démontré qu'il existe pour tout nombre réel x_0 et tout nombre positif ε un nombre positif δ, tel que l'inégalité (3) entraîne l'inégalité (7), ce qui démontre la continuité de la fonction $f(x)$, c. q. f. d.