Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables*

Le but de cette Note est de démontrer que *les fonctions dérivées de Dini d'une fonction $f(x)$ mesurable (L) sont mesurables (L)*. Notre démonstration permettra en même temps de prouver que *les fonctions dérivées d'une fonction $f(x)$ bornée de classe α de Baire sont toujours de classes $\leqslant \alpha+2$* [1].

Lemme. Prémisses. *$f(x)$ est une fonction quelconque d'une variable réelle (mesurable ou non), δ — un nombre positif, $F(x)$ — la borne supérieure de tous les nombres*

$$f(x+h) \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant h \leqslant \delta.$$

Thèse. *$F(x)$ est une fonction n'admettant que des discontinuités ordinaires (donc $F(x)$ est de classe $\leqslant 1$ de M. Baire).*

Démonstration. Désignons par $B(\alpha, \beta)$ la borne supérieure des nombres $f(x)$ pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Soit x_0 un nombre réel donné, x — un nombre réel, tel que

$$0 < x - x_0 < \delta.$$

L'intervalle $(x, x+\delta)$ est donc une somme d'intervalles $(x, x_0+\delta)$ et $(x_0+\delta, x+\delta)$; par conséquent

$$F(x) = B(x, x+\delta) = \operatorname{Max}[B(x, x_0+\delta), B(x_0+\delta, x+\delta)], \tag{1}$$

$\operatorname{Max}[a, b]$ désignant le plus grand de deux nombres a, b (ou leur valeur commune).

Or, quand x décroit, $B(x, x_0+\delta)$ ne peut évidemment diminuer et $B(x_0+\delta, x+\delta)$ ne peut augmenter: donc $B(x, x_0+\delta)$ et $B(x_0+\delta, x+\delta)$ ont des limites quand x tend en décroissant vers x, donc, d'après (1), aussi $F(x)$. Donc la limite $F(x_0+0)$ est déterminée. De même on démontre que la limite $F(x_0-0)$ est déterminée. Notre lemme est ainsi démontré.

---

* Commenté sur p. 317.

[1] Ce théorème a été signalé (pour les fonctions $f(x)$ bornées ou non, de classe α) par M. Sierpiński, v. Fundamenta Mathematicae 1 (1920), p. 127.

COROLLAIRE I. *Soit* $F(x, a, b)$ $(b > a > 0)$ *la borne supérieure de tous les nombres*

$$f(x+h) \quad \textit{pour} \quad a \leqslant h \leqslant b.$$

Thèse. $F(x, a, b)$ *est une fonction de* x *de classe* $\leqslant 1$.

Démonstration. Nous avons évidemment $F(x, a, b) = B(x+a, x+b)$. Or nous avons démontré (lemme I) que la fonction $\varphi(x) = B(x, x+b-a)$ est de classe $\leqslant 1$; donc aussi la fonction $F(x, a, b) = \varphi(x+a)$ est de classe $\leqslant 1$, c. q. f. d.

COROLLAIRE II. *Soit* $f(x)$ *une fonction de classe* $\alpha > 0$ *de M. Baire,* $b > a > 0$, $\varphi(x, a, b)$ *la borne supérieure des nombres*

$$f(x+h)-f(x) \quad \textit{pour} \quad a \leqslant h \leqslant b.$$

Thèse. $\varphi(x, a, b)$ *est une fonction de classe* $\leqslant \alpha$.

Pour démontrer notre corollaire il suffit de remarquer que $\varphi(x, a, b) = F(x, a, b)-f(x)$ et de faire appel au corollaire I et à la proposition qu'une différence de deux fonctions de classes $\leqslant \alpha$ est une fonction de classe $\leqslant \alpha$.

Pareillement on établit le

COROLLAIRE III. *Soit* $f(x)$ *une fonction mesurable* (L); $\varphi(x, a, b)$ *ayant même signification qu'au corollaire* II, $\varphi(x, a, b)$ *est une fonction mesurable* (L).

Soit maintenant $f(x)$ une fonction bornée, a et $b > a$ deux nombres positifs. Désignons par $\Phi(x, a, b)$ la borne supérieure des nombres

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{pour} \quad a \leqslant h \leqslant b$$

et par $\varphi(x, a, b)$ — la borne supérieure des nombres

$$f(x+h)-f(x) \quad \text{pour} \quad a \leqslant h \leqslant b.$$

Soit n un nombre naturel donné et posons

$$a_k = a + \frac{k}{n}(nb-a) \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

$\Phi(x, a, b)$ sera évidemment le plus grand des nombres

$$\Phi(x, a_{k-1}, a_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Nous avons, pour $\beta > \alpha > 0$:

$$\left.\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &\leqslant \varphi(x, \alpha, \beta), \\ \frac{1}{\beta} \leqslant \frac{1}{h} &\leqslant \frac{1}{\alpha}, \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant h \leqslant \beta$$

donc, pour $\varphi(x, \alpha, \beta) \geqslant 0$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant h \leqslant \beta$$

et, pour $\varphi(x, \alpha, \beta) \leqslant 0$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\beta} \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant h \leqslant \beta.$$

Par conséquent:

$$\Phi(x, \alpha, \beta) \leqslant \begin{cases} \dfrac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha} & \text{pour} \quad \varphi(x, \alpha, \beta) \geqslant 0, \\ \dfrac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\beta} & \text{pour} \quad \varphi(x, \alpha, \beta) \leqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Or

$$f(x+h)-f(x) \leqslant h\Phi(x, \alpha, \beta) \quad \text{pour} \quad \alpha \leqslant h \leqslant \beta,$$

par suite

$$\varphi(x, \alpha, \beta) \leqslant \begin{cases} \beta\Phi(x, \alpha, \beta) & \text{pour} \quad \Phi(x, \alpha, \beta) \geqslant 0, \\ \alpha\Phi(x, \alpha, \beta) & \text{pour} \quad \Phi(x, \alpha, \beta) \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Les formules (4) et (5) démontrent que $\Phi(x, \alpha, \beta)$ et $\varphi(x, \alpha, \beta)$ ont toujours le même signe et que

$$\frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\beta} \leqslant \Phi(x, \alpha, \beta) \leqslant \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha} \quad \text{pour} \quad \varphi(x, \alpha, \beta) \geqslant 0$$

et

$$\frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha} \leqslant \Phi(x, \alpha, \beta) \leqslant \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\beta} \quad \text{pour} \quad \varphi(x, \alpha, \beta) \leqslant 0.$$

La fonction $f(x)$ étant bornée et M désignant un nombre tel que $|f(\xi)| \leqslant M$ (pour tout ξ réel), nous avons $|f(x+h)-f(x)| \leqslant 2M$, donc

$$\left|\Phi(x, \alpha, \beta) - \frac{\varphi(x, \alpha, \beta)}{\alpha}\right| \leqslant |\varphi(x, \alpha, \beta)| \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta} \leqslant 2M \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta},$$

par conséquent, d'après (2):

$$\left|\Phi(x, a_{k-1}, a_k) - \frac{\varphi(x, a_{k-1}, a_k)}{a_{k-1}}\right| \leqslant 2M \frac{b-a}{na^2} \quad \text{pour} \quad k = 1,2, \ldots, n. \tag{6}$$

Soit $G(x, a, b, n)$ le plus grand des nombres

$$\frac{\varphi(x, a_{k-1}, a_k)}{a_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

D'après (6) ($\Phi(x, a, b)$ étant le plus grand des nombres (3)) nous aurons évidemment

$$|\Phi(x, a, b)-G(x, a, b, n)| \leqslant \frac{2M(b-a)}{na^2}.$$

Par conséquent

$$\Phi(x, a, b) = \lim_{n\to\infty} G(x, a, b, n), \tag{8}$$

la suite à droite étant de plus convergente uniformément. Or nous avons évidemment

$$\bar{f}'_+(x) = \lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty} \Phi\left(x, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right). \tag{9}$$

Soit $f(x)$ une fonction bornée de classe $a>0$; d'après le corollaire II les fonctions (7) seront de classes $\leqslant a$, donc aussi $G(x, a, b, n)$. La suite (8) étant uniformément convergente, nous en concluons que $\Phi(x, a, b)$ est une fonction de classe $\leqslant a$, donc, d'après (9), $\bar{f}'_+(x)$ est de classe $\leqslant a+2$.

Si $f(x)$ (supposée bornée) était mesurable (L), il en serait de même, d'après le corollaire III, avec les fonctions (7), et les formules (8) et (9) prouveraient que $\bar{f}'_+(x)$ est mesurable (L).

Soit maintenant $f(x)$ une fonction non bornée mesurable (L), $f_p(x)$ — la fonction égale à $f(x)$ si $-p \leqslant f(x) \leqslant p$, à p si $f(x) > p$ et à $-p$ si $f(x) < -p$; $f_p(x)$ sera évidemment bornée et mesurable (L) et il est aisé de voir que

$$\bar{f}'_+(x) = \lim_{p\to\infty} \bar{f}'_{p+}(x),$$

d'où il résulte que $\bar{f}'_+(x)$ est mesurable (L), c. q. f. d.

Pour les fonctions non mesurables (L) les dérivées de Dini peuvent être aussi bien mesurables (L, même B) que non mesurables, comme on le voit sans difficulté.

Nous terminerons par deux théorèmes suivants:

Théorème I. *Si la dérivée $f'_+(x)$ d'une fonction $f(x)$ est finie sauf dans un ensemble au plus dénombrable de points, $f(x)$ est une fonction mesurable (B) (de classe $\leqslant 2$).*

Démonstration. Soit D l'ensemble (au plus dénombrable) où la derivée $f'_+(x)$ est infinie. Considérons l'ensemble $E = \mathrm{E}\big(f(x) \geqslant A\big)$, A étant un nombre réel donné quelconque. Soit x une limite d'une suite décroissante x_n de nombres de E et supposons que x n'appartient pas à E. Nous aurons donc $f(x_n) \geqslant A$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et $f(x) < A$, d'où il résulte tout de suite que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x} = +\infty,$$

donc que $f'_+(x) = +\infty$, c'est-à-dire que x appartient à D.

Les points x n'appartenant pas à E qui sont points d'accumulation de E de côté droit (c'est-à-dire qui sont limites de suites décroissantes de points de E) forment donc un ensemble au plus dénombrable D_1 (contenu dans D). Or les points qui sont points d'accumulation de E de gauche, sans l'être de droite, forment, comme on sait, un ensemble au plus dénombrable D_2. L'ensemble $E+D_1+D_2$ sera évidemment fermé. Il en résulte (D_1+D_2 étant au plus dénombrable) que E est un G_δ. Les ensembles $\mathrm{E}(f(x) \geqslant A)$ sont donc des G_δ, d'où il résulte, comme on sait, que $f(x)$ est une fonction de classe $\leqslant 2$, c. q. f. d.

Théorème II. *Si la dérivée $f'_+(x)$ est presque partout finie, $f(x)$ est une fonction mesurable (L).*

La démonstration est tout à fait analogue à la précédente: on prouve que l'ensemble $\mathrm{E}(f(x) \geqslant A)+$un ensemble de mesure nulle est fermé, d'où il résulte que $f(x)$ est mesurable (L).

Comme conséquences immédiates nous obtenons les propositions:

Une fonction non mesurable (B) a une dérivée de Dini infinie dans un ensemble non dénombrable de points.

Une fonction non mesurable (L) a une dérivée de Dini infinie dans un ensemble de mesure positive ou dans un ensemble non mesurable (L).