

An example of an orthogonal development whose sum is everywhere different from the developed function, Proceedings of the London Mathematical Society 2 (21) (1922), p. 95-97*.

C'est un simple exemple d'une singularité intéressante, basé sur l'existence d'un système orthogonal, normal et complet dans L^2 , mais incomplet dans L^1 . En ajoutant des constantes convenablement choisies aux fonctions $\sin x$ et $\cos x$, une fonction intégrable positive arbitraire étant donnée, on obtient un système dans lequel tous les coefficients du développement de cette fonction sont nuls. En orthogonalisant ce système, on parvient au système requis, composé de certains polynômes trigonométriques.

Le développement ultérieur du problème conduisit à un résultat plus général, connu sous le nom du théorème de Banach et Fichtenholz (voir Fichtenholz [2] et Saks [4], p. 174-178). D'après ce théorème, quelle que soit la fonction f intégrable dans un ensemble E mesurable et situé dans l'espace euclidien à k dimensions, il existe un système de fonctions continues φ_n , orthogonal dans E et tel que toute fonction orthogonale à toutes les fonctions φ_n est de la forme $c \cdot f$ où c est une constante. Par un choix convenable de la fonction f , ce théorème permet de former des systèmes orthogonaux qui sont complets dans certaines classes choisies de fonctions sans l'être dans des classes plus vastes contenant la fonction f . La démonstration procède par une construction plus générale du système de fonctions φ_n .

On trouve des généralisations directes de l'idée de Banach dans les travaux d'Orlicz [1] et [2]. Dans le second de ces travaux, l'auteur déduit du théorème de Banach une conséquence d'après laquelle, dans tout espace fonctionnel X assujéti à certaines conditions, il existe un tel système orthonormal que le développement d'une certaine fonction $f \in X$ suivant ce système diverge presque partout. Cela met en relief le rôle que le travail de Banach joue dans divers domaines de la théorie des séries orthogonales, même si éloignés en apparence que celui des problèmes concernant la convergence presque partout de ces séries.

Z. Zahorski

Sur le problème de la mesure, Fundamenta Mathematicae 4, (1923), p. 7-33**.

Ce travail apporta la célèbre solution du problème de la mesure simplement additive et invariante sur la droite et sur le

* Voir p. 63.

** Voir p. 66.

plan, c'est-à-dire la construction de la mesure dite *de Banach* ou *universelle*.

On savait depuis la publication [1] de Hausdorff qu'une telle mesure n'existe pas dans l'espace E^n pour $n > 2$ ni sur la sphère S^n pour $n > 1$. Ces faits sont rappelés au début du travail commenté. Le problème de Ruziewicz qui y est mentionné reste ouvert jusqu'à présent, de même que le problème assez voisin dû à Marczewski: existe-t-il une mesure invariante, définie pour tous les ensembles bornés à propriété de Baire situés dans E^n ou S^n et qui soit un prolongement de la mesure de Jordan? Marczewski aperçut que la méthode de Banach permet de définir dans E^1, E^2 et sur S^1 des mesures universelles invariantes, coïncidant avec celle de Jordan et s'annulant pour les ensembles de I^{re} catégorie de Baire, ce qui résout les problèmes de Ruziewicz et de Marczewski pour ces espaces. Tarski montra (voir Tarski [4], p. 65) que s'il existe dans E^n pour un $n > 2$ ou dans S^n pour un $n > 1$ une mesure satisfaisant aux conditions de Ruziewicz (ou de Marczewski respectivement), elle s'annule nécessairement pour les ensembles de mesure lebesgienne nulle (ou de I^{re} catégorie respectivement).

Le travail commenté donna naissance à une longue série de travaux apportant des généralisations des mesures universelles dans diverses directions et des applications de ces mesures. En voici une revue succincte:

Le problème représentatif est le suivant: en admettant que

(1) G est un groupe de transformations d'un ensemble S , \mathbf{B} est un anneau G -invariant de sous-ensembles de S (c'est-à-dire tel que $A, B \in \mathbf{B}$ et $g \in G$ entraînent $A \cup B \in \mathbf{B}$, $A \setminus B \in \mathbf{B}$, et $g(A) \in \mathbf{B}$) et \mathbf{B}_0 est un sous-anneau G -invariant de \mathbf{B} tel que, pour tout $A \in \mathbf{B}$, il existe un $A_0 \in \mathbf{B}_0$ contenant A ;

(2) m_0 est une mesure G -invariante dans \mathbf{B}_0 (c'est-à-dire telle que $m_0(A) = m_0(g(A))$ pour tout $A \in \mathbf{B}_0$ et tout $g \in G$),

trouver des conditions suffisantes pour que

(*) il existe une mesure G -invariante m dans \mathbf{B} et telle que $m(A) = m_0(A)$ pour tout $A \in \mathbf{B}_0$.

Il y a sur ce sujet des résultats de deux genres, dont les premiers concernent les conditions suffisantes imposées au groupe G seul et les seconds — celles portant sur le système $(G, S, \mathbf{B}, \mathbf{B}_0, m_0)$ tout entier.

Premier genre. L'existence d'une mesure invariante à droite (à gauche) dans la classe de tous les sous-ensembles de G , ce qui entraîne déjà l'existence d'une pareille mesure invariante des deux côtés, est une condition suffisante. Cette condition est évidemment le cas particulier de (*) pour $S = G$, \mathbf{B} = classe de tous les sous-ensembles de G , $\mathbf{B}_0 = \{\emptyset, G\}$, $g(A) = \{ga : a \in A\}$, $m_0(\emptyset) = 0$ et $m_0(G) = 1$. Soit MB (lisez: ayant une mesure de Banach) la classe de ces groupes.

On sait que la classe MB

(i) contient tous les groupes abéliens (résultat contenu implicitement dans le travail commenté; cf. aussi von Neumann [1]) et tous les groupes finis (ce qui est trivial),

(ii) est close par rapport aux opérations de passage aux sous-groupes, d'homomorphisme, d'extension d'un groupe de classe MB par un groupe de la même classe et de somme ascendante (voir von Neumann [1] et Følner [1]).

En particulier, MB contient tous les groupes résolubles (voir von Neumann [1]) sans contenir aucun groupe libre non-abélien, donc aussi aucun de leurs sur-groupes (voir von Neumann [1] et la littérature citée dans le commentaire au travail [13]). En désignant donc par K la plus petite classe satisfaisant à (i) et (ii), et par L la classe des groupes dépourvus de sous-groupes libres non-abéliens, on a

$$K \subset MB \subset L.$$

On ignore si $MB = K$, $MB = L$, voire si $K = L$. On peut montrer que la réponse négative au problème de Burnside (existence d'un groupe infini à un nombre fini de générateurs et dont tous les éléments distincts de l'unité soient d'ordre p premier) entraînerait l'inégalité $K \neq L$. Une belle caractérisation de la classe MB fut trouvée par Følner (voir Hulanicki [1]): $G \in MB$ équivaut à l'existence, pour tout sous-ensemble fini A de G et tout $\varepsilon > 0$, d'un sous-ensemble fini E de G satisfaisant pour tout $a \in A$ à l'inégalité

$$\overline{E \setminus aE} < \overline{\varepsilon E}.$$

On en déduit facilement (i), (ii) et même la propriété suivante de la classe MB: tout groupe dont les sous-groupes ayant un nombre fini de générateurs appartiennent à MB appartient lui-même à cette classe.

Les groupes de la classe MB satisfont à diverses conditions plus générales que (*). Au point de vue formel, la plus générale en est celle du théorème de Hahn et Banach sur la possibilité de prolonger toute fonctionnelle linéaire invariante par rapport à un groupe de la classe MB de transformations linéaires, de façon qu'elle soit invariante et conserve une majorante invariante convexe donné d'avance. La démonstration de ce théorème est une conséquence presque évidente (cf. Agnew et Morse [1] pour les groupes résolubles) du théorème classique de Hahn et Banach, car on peut rendre invariant un prolongement quelconque au moyen de l'intégration suivant un groupe de la classe MB par rapport à une mesure de Banach. Le théorème de Markoff et Kakutani (voir Dunford et Schwartz [1], p. 456) est vrai pour tous les groupes de la classe MB et seulement pour eux. Plusieurs travaux furent consacrés à des géné-

realisations de ces théorèmes dans lesquelles on considérait des semigroupes d'opérateurs linéaires au lieu des groupes (voir Day [1] et Silverman [1]). On y trouve également des conditions assez éloignées l'une de l'autre en apparence et pourtant équivalentes (cf. Day [1]). Les travaux [1] de Day, [1] de Deleeuw et Glicksberg et [1] de Silverman contiennent diverses applications de ces recherches.

La généralisation suivante de (*) pour les groupes de la classe MB résulte de la généralisation précitée du théorème de Hahn et Banach (voir [36]): en remplaçant l'hypothèse (2) par

(2') α est une fonction réelle donnée, définie dans le groupe G et telle que $m_0(g(A)) = \alpha(g) \cdot m_0(A)$ pour tout $A \in \mathbf{B}_0$ et tout $g \in G$,

on a pour les groupes $G \in \text{MB}$

(*) l'existence d'un prolongement m de la mesure m_0 dans \mathbf{B} tel que $m(g(A)) = \alpha(g) \cdot m(A)$ pour tout $A \in \mathbf{B}$ et tout $g \in G$.

Pour l'établir, on n'a qu'à considérer l'espace linéaire L des fonctions définies dans S tendu sur les fonctions caractéristiques des ensembles appartenant à \mathbf{B} , puis de définir l'action du groupe G sur l'espace L par la formule

$$g(f)(s) = \frac{1}{\alpha(g)} f(g(s))$$

où $g \in G$ et $s \in S$, et enfin d'appliquer la généralisation précitée du théorème de Hahn et Banach.

Voici des corollaires faciles, analogues aux théorèmes du travail commenté et qui résultent des thèses (*), (*)' et de l'appartenance à MB du groupe des similitudes du plan (car il est résoluble):

Il existe des mesures m de Banach dans l'anneau des sous-ensembles bornés du plan, qui sont des prolongements de la mesure de Lebesgue ou bien qui satisfont à la condition de Ruziewicz ou celle de Marczewski citée p. 319 et qui sont telles que

$$m(aX+b) = |a|^2 \cdot m(X) \quad \text{où} \quad aX+b = \{ax+b : x \in X\},$$

a et b étant des nombres complexes quelconques.

Il existe aussi une mesure m bornée, définie dans le corps de tous les sous-ensembles du plan et telle que $m(aX+b) = m(X)$ pour tout $a \neq 0$.

On peut de même prolonger les mesures t -dimensionnelles de Hausdorff (où $0 < t \leq 2$) définies sur le plan en conservant la condition $m(aX+b) = |a|^t \cdot m(X)$ et les mesures généralisées de Hausdorff en conservant la condition $m(aX+b) = m(X)$ pour $|a| = 1$. Une autre application est à trouver dans le travail d'Agnew et Morse [1].

Second genre. Des conditions suffisantes portant sur le système $(G, S, \mathbf{B}, \mathbf{B}_0, m)$ tout entier sont dues à von Neumann (voir von Neumann [1]) et à Tarski (voir Tarski [4] et [9], théorèmes 16.12 et 16.13). Les théorèmes 14.13 (i) et 16.8 (iii) de Tarski (voir Tarski [9]) concernant 16.5 (ii) entraînent le corollaire qui suit.

En admettant que

1° il existe un $A_0 \in \mathbf{B}_0$ tel que $m_0(A_0) > 0$, la mesure m_0 étant assujettie à (2), et que la mesure m_0 est déterminée d'une manière univoque par sa valeur $m_0(A_0)$,

2° \mathbf{B} est un anneau d'ensembles dénombrablement multiplicatif

(c'est-à-dire tel que $A_i \in \mathbf{B}$ pour $i = 1, 2, \dots$ entraîne $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbf{B}$)

et il existe pour tout $A \in \mathbf{B}$ un $g \in G$ tel que $A \cap g(A) = \emptyset$,

la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait (*) est qu'il n'existe pas de $A \in \mathbf{B}_0$ contenant A_0 et susceptible d'une décomposition paradoxale dans \mathbf{B} par rapport à G (c'est-à-dire tel que $A = A_1 \cup \dots \cup A_n = P \cup Q$, $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$, $Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_n$, $A_i \cap A_j = P_i \cap P_j = Q_i \cap Q_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $A_i = f_i(P_i) = g_i(Q_i) \in \mathbf{B}$ pour un $f_i \in G$ et un $f_i, g_i \in G$ où $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$).

Ce corollaire montre que le problème précité de Marczewski équivaut à un autre problème posée par lui et concernant les décompositions paradoxales en sommandes ayant la propriété de Baire (cf. le commentaire au travail [13] de Banach, ce volume, p. 323).

Ryll-Nardzewski [2] établit une série intéressante de théorèmes équivalents d'une manière effective (à savoir sans l'axiome du choix) au théorème de Hahn et Banach. Ces théorèmes sont apparemment plus faibles que l'axiome du choix et même que le théorème de Tychonoff sur la compacité du produit cartésien d'espaces de Hausdorff compacts. Plusieurs conséquences du théorème de Hahn et Banach furent démontrées par voie effective par Morse. D'autres résultats sur les mesures universelles et décompositions paradoxales sont à trouver dans les travaux de Dekker [4], Hadwiger [1], Hadwiger et Kirsch [1], Hadwiger et Nef [1], Kirsch [1], Nef [1], von Neumann [1], Sierpiński [18] et [24], Tarski [4], [5] et [9]; voir aussi la littérature dans le commentaire au travail [13] de Banach, p. 323.

Quant au problème de l'existence des mesures universelles dénombrablement additives, sa nature est tout à fait différente. Il y a des résultats importants sur l'impossibilité de telles mesures (voir le commentaire au travail [13] de Banach, ce volume, p. 323).

Jan Mycielski