Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*

Par

S. Banach et **A. Tarski**

Nous étudions dans cette Note les notions de *l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie*, resp. *dénombrable*. Deux ensembles de points situés dans un espace métrique sont dits *équivalents* par décomposition finie (ou dénombrable), lorsqu'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal (ou une infinité dénombrable) de parties disjointes respectivement congruentes.

Les principaux résultats contenus dans le présent article sont les suivants:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 3$ dimensions deux ensembles arbitraires, bornés et contenant des points intérieurs (p. ex. deux sphères à rayons différents), sont équivalents par décomposition finie.

Un théorème analogue subsiste pour les ensembles situés sur la surface d'une sphère; mais le théorème correspondant concernant l'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions est faux.

D'autre part:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 1$ dimensions deux ensembles arbitraires (bornés ou non), contenant des points intérieures, sont équivalents par décomposition dénombrable.

La démonstration des théorèmes précédents s'appuie sur les résultats de MM. Hausdorff, Vitali et Banach [1], qui concernent le problème général de mesure; elle fait donc usage de *l'axiome du choix* de M. Zermelo. Le rôle que joue cet axiome dans nos raisonnements nous semble mériter l'attention.

---

* Commenté sur p. 325.

[1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 401 et 469; G. Vitali, *Sul problema della mesura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna 1905, et Banach [*9*].

Envisageons, en effet, les deux théorèmes suivants, qui résultent de nos recherches:

I. *Deux polyèdres arbitraires sont équivalents par décomposition finie.*

II.(1) *Deux polygones différents, dont l'un est contenu dans l'autre, ne sont jamais équivalents par décomposition finie.*

Or, on ne sait démontrer aucun de ces deux théorèmes sans faire appel à l'axiome du choix: ni le premier, qui semble peut-être paradoxal, ni le second, qui est en plein accord avec l'intuition. De plus, en analysant leurs démonstrations, on peut constater que l'axiome du choix intervient dans la démonstration du premier théorème sous une forme bien plus restreinte que dans le cas du second.

§ 1. Les propriétés générales de l'équivalence par décomposition finie ou dénombrable

Les raisonnements de ce § sont valables pour les ensembles de points situés dans un espace quelconque, sur lequel est faite l'hypothèse unique qu'à tout couple de points (a, b) correspond un nombre réel $\varrho(a, b)$ appelé *distance des points* a et b. Seuls les corollaires 14-15′ concernent l'espace euclidien.

Définition 1. Les ensembles de points A et B sont *congruents*,

$$A \cong B,$$

s'il existe une fonction φ, qui transforme d'une façon biunivoque A en B et satisfait à la condition: a_1 et a_2 étant deux points arbitraires de l'ensemble A, on a

$$\varrho(a_1, a_2) = \varrho[\varphi(a_1), \varphi(a_2)].$$

Dans ce qui suit nous supposons connues les propriétés élémentaires de la notion de congruence.

Définition 2. Les ensembles de points A et B sont *équivalents par décomposition finie*:

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B,$$

s'il existe des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$, qui remplissent les conditions suivantes:

I. $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$ et $B = \sum_{k=1}^{n} B_k$;

II. $A_k \times A_l = 0 = B_k \times B_l$, lorsque $1 \leqslant k < l \leqslant n$;

III. $A_k \cong B_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

(1) Ce théorème peut être regardé comme une généralisation du théorème connu de la Géométrie Elémentaire, appelé parfois *axiome de De Zolt*. Cf. A. Tarski, *Sur l'équivalence des polygones*, Przegląd mat.-fiz. 2-3, Warszawa 1924.

Définition 2.′ Les ensembles de points A et B sont *équivalents par décomposition dénombrable*:

$$A \underset{\mathrm{d}}{=} B,$$

s'il existe des ensembles, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, et $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$, qui remplissent les conditions suivantes:

I. $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ et $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$;

II. $A_k \times A_l = 0 = B_k \times B_l$, lorsque $k \neq l$;

III. $A_k \cong B_k$ pour tout k naturel.

Dans les théorèmes 1-15′ qui vont suivre nous établissons les propriétés élémentaires des notions introduites ci-dessus, en ne nous bornant d'ailleurs qu'à celles qui nous seront utiles dans la suite. A tout théorème concernant l'équivalence par décomposition finie correspond un théorème sur l'équivalence par décomposition dénombrable; les démonstrations des théorèmes correspondants étant tout-à-fait analogues, nous nous bornons à n'en donner qu'une seule.

Théorème 1. *Si $A = B$ ou bien $A \cong B$, on a $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$.*

C'est une conséquence immédiate de la définition 2. En tenant compte que $0 \cong 0$, on en déduit le

Théorème 1′. *Si $A = B$, $A \cong B$ ou bien $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$, on a $A \underset{\mathrm{d}}{=} B$.*

Théorème 2. *Si $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$, on a $B \underset{\mathrm{f}}{=} A$.*

Théorème 2′. *Si $A \underset{\mathrm{d}}{=} B$, on a $B \underset{\mathrm{d}}{=} A$.*

Ces théorèmes résultent aussitôt des définitions 2 et 2′.

Théorème 3. *Si $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$ et $B \underset{\mathrm{f}}{=} C$, on a $A \underset{\mathrm{f}}{=} C$.*

Démonstration. Soient:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=1}^{n} B_k, \tag{1}$$

$$B = \sum_{l=1}^{m} B'_l \quad \text{et} \quad C = \sum_{l=1}^{m} C_l \tag{2}$$

les décompositions des ensembles A et B, resp. B et C, qui satisfont aux conditions I-III de la définition 2.

Posons:

$$B_{k,l} = B_k \times B'_l \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant l \leqslant m; \tag{3}$$

de (1)-(3) il résulte aussitôt que

$$B_k = \sum_{l=1}^{m} B_{k,l} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{4}$$

$$B'_l = \sum_{k=1}^{n} B_{k,l} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant l \leqslant m. \tag{5}$$

Suivant (3) et la condition II de la définition citée, on obtient encore:

$$B_{k,l} \times B_{k_1,l_1} = 0, \text{ lorsque } k \neq k_1 \text{ ou bien } l \neq l_1. \tag{6}$$

Les ensembles A_k et B_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ étant congruents, on en déduit selon (4) et (6) l'existence des ensembles $A_{k,1}, A_{k,2}, \ldots, A_{k,m}$, qui vérifient les formules:

$$A_k = \sum_{l=1}^{m} A_{k,l} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n; \tag{7}$$

$$A_{k,l} \times A_{k_1,l_1} = 0, \text{ lorsque } k \neq k_1 \text{ ou bien } l \neq l_1; \tag{8}$$

$$A_{k,l} \cong B_{k,l} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant l \leqslant m. \tag{9}$$

De même la congruence des ensembles B'_l et C_1 $(1 \leqslant l \leqslant m)$ implique en raison de (5) et (6) qu'il existe des ensembles $C_{1,l}, C_{2,l}, \ldots, C_{n,l}$ tels que l'on ait:

$$C_l = \sum_{k=1}^{n} C_{k,l} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant l \leqslant m; \tag{10}$$

$$C_{k,l} \times C_{k_1,l_1} = 0, \text{ lorsque } k \neq k_1 \text{ ou bien } l \neq l_1; \tag{11}$$

$$B_{k,l} \cong C_{k,l} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant l \leqslant m. \tag{12}$$

En vertu de (1), (2), (7) et (10) on conclut que

$$A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} A_{k,l}; \tag{13}$$

$$C = \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} C_{k,l} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} C_{k,l}; \tag{14}$$

de (9) et (12) on obtient enfin

$$A_{k,l} \cong C_{k,l} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant l \leqslant m. \tag{15}$$

Les formules (13) et (14) nous fournissent une décomposition des ensembles A et C en un nombre fini (égal à n, m) de parties; suivant (8), (11) et (15) cette décomposition remplit les conditions de la définition 2. On a donc

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} C, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

D'une façon tout-à-fait analogue on peut démontrer le suivant

THÉORÈME 3′. *Si* $A \underset{\mathrm{d}}{=} B$ *et* $B \underset{\mathrm{d}}{=} C$, *on a* $A \underset{\mathrm{d}}{=} C$.

Conformément aux théorèmes 1-3′ les relations de l'équivalence par décomposition finie et dénombrable sont *reflexives*, *symétriques* et *transitives*.

THÉORÈME 4. *Si les ensembles A et B peuvent être décomposés en des sous-ensembles disjoints:*

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} B_k$$

de sorte que

$$A_k \underset{\mathrm{f}}{=} B_k \quad \textit{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

on a

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B.$$

Démonstration. L'hypothèse du théorème implique qu'il existe pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant n$, une décomposition des ensembles A_k et B_k,

$$(1) \qquad A_k = \sum_{l=1}^{m_k} A_{k,l}, \qquad B_k = \sum_{l=1}^{m_k} B_{k,l},$$

qui satisfait aux conditions:

$$(2) \qquad A_{k,l} \times A_{k_1,l_1} = 0 = B_{k,l} + B_{k_1,l_1}, \text{ lorsque } k \neq k_1 \text{ ou bien } l \neq l_1;$$

$$(3) \qquad A_{k,l} \cong B_{k,l} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant m_k.$$

De (1) on obtient:

$$(4) \qquad A = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} A_{k,l} \qquad B = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m_k} B_{k,l}.$$

Conformément à la définition 2, les formules (2)-(4) donnent aussitôt:

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

THÉORÈME 4'. *Si les ensembles A et B peuvent être décomposés en des sous-ensembles disjoints,*

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \qquad (\textit{resp. } A = \sum_{k=1}^{n} A_k, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} B_k),$$

de sorte que

$$A_k \underset{\mathrm{d}}{=} B_k \textit{ pour tout } k \textit{ naturel } (\textit{resp. pour } 1 \leqslant k \leqslant n),$$

on a

$$A \underset{\mathrm{d}}{=} B.$$

THÉORÈME 5. *$A \underset{\mathrm{f}}{=} B$, il existe une fonction φ définie pour tous les points de l'ensemble A et remplissant les conditions:*

I. *la fonction φ transforme A en B d'une façon biunivoque;*

II. *C étant un sous-ensemble arbitraire de A, on a $C \underset{\mathrm{f}}{=} \varphi(C)$* [1].

---

[1] φ étant une fonction définie pour tous les points de l'ensemble A, si $C \subset A$, $\varphi(C)$ désigne l'ensemble de tous les éléments $\varphi(p)$, où $p \in C$.

Démonstration. Soit

$$(1)\qquad A = \sum_{k=1}^{n} A_k, \quad B = \sum_{k=1}^{n} B_k$$

une décomposition des ensembles A et B satisfaisant aux conditions de la définition 2.

Les ensembles A_k et B_k étant congruents, il en résulte conformément à la définition 1 l'existence des fonctions φ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, qui transforment A_k en B_k sans altérer les distances des points transformés. Posons:

$$(2)\qquad \varphi(p) = \varphi_k(p), \text{ lorsque } p \in A_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

On en conclut sans peine, en vertu des propriétés de la décomposition (1), que

(3) la fonction φ transforme d'une façon biunivoque A en B.

Soit maintenant:

$$(4)\qquad C \subset A;$$

posons:

$$(5)\qquad C_k = C \times A_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

De (1), (4) et (5) on obtient aussitôt:

$$(6)\qquad C = \sum_{k=1}^{n} C_k;$$

$$(7)\qquad C_k \times C_l = 0, \quad \text{lorsque} \quad 1 \leqslant k < l \leqslant n;$$

$$(8)\qquad C_k \subset A_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Selon (3), (4), (6) et (7) on déduit:

$$(9)\qquad \varphi(C) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(C_k),$$

$$(10)\qquad \varphi(C_k) \times \varphi(C_l) = 0, \quad \text{lorsque} \quad 1 \leqslant k < l \leqslant n.$$

Il résulte enfin de (2) et (8), conformément à la propriété indiquée des fonctions φ_k:

$$(11)\qquad C_k \cong \varphi(C_k) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Les formules (6) et (9) nous fournissent une décomposition des ensembles C et $\varphi(C)$, qui remplit suivant (7), (10) et (11) toutes le conditions de la définition 2. On a donc

$$(12)\qquad C \underset{\mathrm{f}}{=} \varphi(C).$$

Les conditions (7) et (12) prouvent que φ est la fonction cherchée.

Théorème 5'. *Si $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$, il existe une fonction φ définie pour tous les points de l'ensemble A et remplissant les conditions:*

I. *la fonction* φ *transforme d'une façon biunivoque* A *en* B;

II. C *étant un sous-ensemble arbitraire de* A, *on a* $C \underset{\mathrm{d}}{=} \varphi(C)$.

Les théorèmes 5 et 5′ impliquent aussitôt les corollaires suivants:

Corollaire 6. *Si* $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$ *et s'il existe une décomposition de l'ensemble* A *en des sous-ensembles disjoints*:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k \quad (resp.\ A = \sum_{k=1}^{n} A_k),$$

il existe aussi une décomposition de l'ensemble B *en des sous-ensembles disjoints*:

$$B = \sum_{k=1}^{n} B_k \quad (resp.\ B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k)$$

tels que

$$A_k \underset{\mathrm{f}}{=} B_k \ pour\ 1 \leqslant k \leqslant n \quad (resp.\ pour\ tout\ k\ naturel).$$

Corollaire 6′. *Si* $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$ *et s'il existe une décomposition de l'ensemble* A *en des sous-ensembles disjoints*:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k \quad (resp.\ A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k),$$

il existe aussi une décomposition de l'ensemble B *en des sous-ensembles disjoints*:

$$B = \sum_{k=1}^{n} B_k \quad (resp.\ B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k)$$

tels que

$$A_k \underset{\mathrm{d}}{=} B_k \ pour\ 1 \leqslant k \leqslant n \quad (resp.\ pour\ tout\ k\ naturel).$$

Corollaire 7. *Si* $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$, *à tout sous-ensemble* C *de* A *correspond un sous-ensemble* D *de* B *assujetti aux conditions*:

I. $C \underset{\mathrm{f}}{=} D$;

II. *si* $C \neq A$, *on a* $D \neq B$.

Corollaire 7′. *Si* $A \underset{\mathrm{d}}{=} B$, *à tout sous-ensemble* C *de* A *correspond un sous-ensemble* D *de* B *assujetti aux conditions*:

I. $C \underset{\mathrm{d}}{=} D$;

II. *si* $C \neq A$, *on a* $D \neq B$.

Les théorèmes 8 et 8′ que nous allons établir maintenant vont jouer un rôle important dans les raisonnements des §§ suivants.

Théorème 8. *Si* $A_1 \subset A, B_1 \subset B$, $A \underset{\mathrm{f}}{=} B_1$ *et* $B \underset{\mathrm{f}}{=} A_1$, *on a*

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B.$$

Théorème 8′. *Si* $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, $A \underset{\mathrm{d}}{=} B_1$ *et* $B \underset{\mathrm{d}}{=} A_1$, *on a*

$$A \underset{\mathrm{d}}{=} B.$$

Démonstration. Conformément aux théorèmes 4-5′, les deux relations envisagées dans cet ouvrage — l'équivalence par décomposition finie et dénombrable — possèdent les propriétés (α) et (β) que Banach a définies dans la Note [*12*]. Donc les théorèmes 8 et 8′ ne présentent qu'une conséquence immédiate du théorème 3 établi dans la Note citée, qui concerne toutes les relations possédant ces deux propriétés.

Corollaire 9. *Si* $A \supset B \supset C$ *et* $A \underset{\mathrm{f}}{=} C$, *on a* $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$ *et* $B \underset{\mathrm{f}}{=} C$.

Corollaire 9′. *Si* $A \supset B \supset C$ *et* $A \underset{\mathrm{d}}{=} C$, *on a* $A \underset{\mathrm{d}}{=} B$ *et* $B \underset{\mathrm{d}}{=} C$.

On déduit ces corollaires directement des théorèmes précédents, si l'on y remplace A_1 par B ainsi que B_1 par C et si l'on applique ensuite les théorèmes 1 et 3, resp. 1′ et 3′.

Théorème 10. *Si* $A \underset{\mathrm{f}}{=} A+B_k$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant n$, *on a*

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A+\sum_{k=1}^{n} B_k.$$

Démonstration. Nous envisageons deux cas.

(a) Les ensembles $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont disjoints.

Nous allons procédér par l'induction. Le théorème étant évident pour $n=1$, supposons qu'il est vrai pour $n=n'$ et prouvons qu'il subsiste encore pour $n=n'+1$.

On a donc:

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A+\sum_{k=1}^{n'} B_k, \tag{1}$$

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A+B_{n'+1}, \tag{2}$$

$$A \times B_{n'+1} = 0 = B_{n'+1} \times \sum_{k=1}^{n'} B_k. \tag{3}$$

Conformément au théorème 4, on obtient de (1) et (3):

$$A+B_{n'+1} \underset{\mathrm{f}}{=} A+\sum_{k=1}^{n'+1} B_k. \tag{4}$$

De (2) et (4) il résulte aussitôt, en vertu du théorème 3:

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A+\sum_{k=1}^{n'+1} B_k, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

(b) Le cas général. Posons:

$$B_1' = B_1 - A, \qquad B_k' = B_k - \Big(A+\sum_{l=1}^{k-1} B_l\Big) \text{ pour } 2 \leqslant k \leqslant n; \tag{5}$$

on en conclut sans peine:

$$(6) \qquad A+\sum_{k=1}^{n} B_k' = A+\sum_{k=1}^{n} B_k,$$

$$(7) \qquad A+B_k' \subset A+B_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Appliquons maintenant le corollaire 9, en y remplaçant A par $A+B_k$, B par $A+B_k'$ et C par A. On obtient suivant (7) et l'hypothèse du théorème:

$$(8) \qquad A \underset{\mathrm{f}}{=} A+B_k' \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

En raison de (5), les ensembles $A, B_1', B_2', \ldots, B_n'$ sont disjoints. Le cas (a) étant déjà établi, on déduit de (8) et (6):

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A+\sum_{k=1}^{n} B_k' = A+\sum_{k=1}^{n} B_k.$$

Le théorème 10 est donc complètement démontré.

Théorème 10'. *Si* $A \underset{\mathrm{d}}{=} A+B_k$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant n$, *on a*

$$A \underset{\mathrm{d}}{=} A+\sum_{k=1}^{n} B_k.$$

Le théorème 10' peut être étendu au cas d'une infinité dénombrable de sommandes; mais cela demanderait une démonstration spéciale, bien plus compliquée.

Le théorème auquel nous passons à présent est surtout important dans les raisonnements du § 2, C.

Théorème 11. *Si* $A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} A_2$, $B_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_2$, $A_1+A_2 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1+B_2$ *et* $A_1 \times A_2 = 0 = B_1 \times B_2$, *on a*

$$A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1.$$

Démonstration. M. Kuratowski a établi dans sa Note *Une propriété des correspondances biunivoques* (Fund. Math. VI, p. 243) un théorème général concernant des relations reflexives, symétriques et transitives, qui possèdent les propriétés (α) et (β) [1]. Le théorème 11 en résulte aussitôt au cas où $A_1+A_2 = B_1+B_2$.

Pour passer au cas général remarquons qu'en vertu du corollaire 6 l'ensemble A_1+A_2 se décompose en deux sous-ensembles disjoints:

$$A_1+A_2 = B_1'+B_2'$$

tels que

$$(1) \qquad B_1' \underset{\mathrm{f}}{=} B_1, \qquad B_2' \underset{\mathrm{f}}{=} B_2.$$

[1] Cf. la démonstration des théorèmes 8 et 8'.

Comme $B_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_2$, on obtient de (1) suivant le théorème 3:

$$B_1' \underset{\mathrm{f}}{=} B_2';$$

en raison du cas précédent, on peut donc conclure que

$$A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1'. \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) donnent aussitôt:

$$A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 11′. *Si* $A_1 \underset{\mathrm{d}}{=} A_2$, $B_1 \underset{\mathrm{d}}{=} B_2$, $A_1+A_2 \underset{\mathrm{d}}{=} B_1+B_2$ *et* $A_1 \times A_2 = 0 = B_1 \times B_2$, *on a*

$$A_1 \underset{\mathrm{d}}{=} B_1.$$

Dans les corrollaires 12 et 12′ nous allons donner une généralisation facile des théorèmes précédents.

Corollaire 12. $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ *ainsi que* $B_1, B_2, \ldots, B_{2^n}$ *étant des ensembles disjoints, si*

I. $A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} A_k$ *et* $B_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_k$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant 2^n$,

II. $\sum\limits_{k=1}^{2^n} A_k \underset{\mathrm{f}}{=} \sum\limits_{k=1}^{2^n} B_k$,

on a $A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1$.

Démonstration. En vertu du théorème 11, le corollaire est vrai, lorsque $n = 1$. Pour appliquer le principe d'induction, supposons que le corrollaire subsiste pour $n = n'$ et prouvons qu'il subsiste encore pour $n = n'+1$.

On a donc:

$$A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} A_k \text{ et } B_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant 2^{n_1+1}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{2^{n_1+1}} A_k \underset{\mathrm{f}}{=} \sum_{k=1}^{2^{n_1+1}} B_k. \tag{2}$$

Posons:

$$A' = \sum_{k=1}^{2^{n_1}} A_k, \quad A'' = \sum_{k=2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}} A_k, \quad B' = \sum_{k=1}^{2^{n_1}} B_l, \quad B'' = \sum_{2^{n_1}+1}^{2^{n_1+1}} B_k. \tag{3}$$

Suivant le théorème 4, de (1)-(3) on conclut aussitôt:

$$A' \underset{\mathrm{f}}{=} A'', \quad B' \underset{\mathrm{f}}{=} B'', \quad A'+A'' \underset{\mathrm{f}}{=} B'+B''. \tag{4}$$

Les ensembles A' et A'' ainsi que B' et B'' étant disjoints, on déduit selon (4) du théorème 11:

$$A' \underset{\mathrm{f}}{=} B'. \tag{5}$$

Les formules (1), (3) et (5) prouvent que les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ et $B_1, B_2, \ldots, B_{2^n}$ remplissent l'hypothèse du théorème. Conformément à notre supposition, on obtient donc:

$$A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire 12'. *$A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ ainsi que $B_1, B_2, \ldots, B_{2^n}$ étant des ensembles disjoints, si*

I. *$A_1 \underset{\mathrm{d}}{=} A_k$ et $B_1 \underset{\mathrm{d}}{=} A_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2^n$,*

II. *$\sum_{k=1}^{2^n} A_k \underset{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{2^n} B_k$,*

on a $A_1 \underset{\mathrm{d}}{=} B_1$.

Théorème 13. *Si $A \underset{\mathrm{f}}{=} B$ et si A appartient à une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$, qui remplit les conditions suivantes:*

I. *lorsque $X \in \boldsymbol{K}$ et $Y \in \boldsymbol{K}$, on a $X+Y \in \boldsymbol{K}$;*

II. *lorsque $X \in \boldsymbol{K}$ et $Y \subset X$, on a $Y \in \boldsymbol{K}$;*

III. *lorsque $X \in \boldsymbol{K}$ et $Y \cong X$, on a $Y \in \boldsymbol{K}$,*

alors l'ensemble B appartient à la classe $\boldsymbol{K}$ aussi.

Démonstration. Soit, conformément à la définition 2,

$$(1) \qquad A = \sum_{k=1}^{n} A_k, \quad B = \sum_{k=1}^{n} B_k$$

une décomposition des ensembles A et B en parties disjointes respectivement congruentes.

La condition II de l'hypothèse du théorème implique selon (1):

$$A_k \in \boldsymbol{K} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

il en résulte suivant la condition III:

$$(2) \qquad B_k \in \boldsymbol{K} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Comme la condition I peut être étendue par une induction facile au cas de somme d'un nombre fini quelconque d'ensembles, on conclut en vertu de (1) et (2):

$$B \in \boldsymbol{K}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 13'. *Si $A \underset{\mathrm{d}}{=} B$ et si A appartient à une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$, qui remplit les conditions suivantes:*

I. *lorsque $X_n \in \boldsymbol{K}$ pour tout n naturel, on a $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \in \boldsymbol{K}$;*

II. *lorsque $X \in \boldsymbol{K}$ et $Y \subset X$, on a $Y \in \boldsymbol{K}$;*

III. *lorsque $X \in \boldsymbol{K}$ et $Y \cong X$, on a $Y \in \boldsymbol{K}$,*

alors l'ensemble B appartient à la classe $\boldsymbol{K}$ aussi.

Les deux théorèmes précédents impliquent immédiatement les corollaires suivants:

A et B étant des ensembles situés dans un espace euclidien à un nombre fini quelconque de dimensions, on a:

Corollaire 14. *Si* $A \underset{f}{=} B$ *et A est non-dense* (1), *B est non-dense aussi.*

Corollaire 14'. *Si* $A \underset{d}{=} B$ *et A est de* 1^{re} *catégorie au sens de Baire, B est de* 1^{re} *catégorie aussi.*

Corollaire 15. *Si* $A \underset{f}{=} B$ *et A est un ensemble mesurable au sens de Peano-Jordan de mesure nulle, B est aussi un ensemble mesurable au même sens de mesure nulle.*

Corollaire 15'. *Si* $A \underset{d}{=} B$ *et A est un ensemble mesurable (L) de mesure nulle, B est aussi un ensemble mesurable (L) de mesure nulle.*

D'une façon analogue on prouve que, *A étant un ensemble borné, si* $A \underset{f}{=} B$, *B est borné aussi.*

§ 2. Les théorèmes fondamentaux sur l'équivalence par décomposition finie

Dans les raisonnements de ce § ainsi que du suivant nous considérons des ensembles de points situés dans un espace euclidien à un nombre fini arbitraire de dimensions.

A. L'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions. Le plus important théorème de ce § est le théorème 16, qui établit une condition nécessaire pour que deux ensembles de points linéaires ou plans mesurables (L) soient équivalents par décomposition finie.

Théorème 16. *A et B étant des ensembles linéaires ou plans, bornés, mesurables (L), si* $A \underset{f}{=} B$, *on a* $m(A) = m(B)$ (2).

Démonstration. D'après un théorème de Banach (3), on peut attribuer à tout ensemble borné A, situé dans un espace euclidien à 1 ou 2 dimensions, un nombre réel non-négatif $f(A)$ de façon que les conditions suivantes soient remplies:

I. si $A \simeq B$, on a $f(A) = f(B)$;

II. si $A \times B = 0$, on a $f(A+B) = f(A)+f(B)$;

III. si A est mesurable (L), on a $f(A) = m(A)$.

---

(1) L'ensemble (de points) A est dit *ensemble-frontière*, lorsqu'il ne contient aucun point intérieur.

L'ensemble A est dit *non-dense*, lorsque l'ensemble composé de tous les points de A ainsi que de points d'accumulation de A est un ensemble-frontière.

L'ensemble A est dit *de* 1^{re} *catégorie au sens de Baire*, lorsqu'il est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles non-denses.

(2) $m(A)$ désigne la *mesure lebesguienne* de l'ensemble A (la mesure *linéaire*, si l'on envisage l'espace à 1 dimension, la mesure *superficielle* au cas de 2 dimensions etc.).

(3) Voir [*9*], p. 30-31.

Conformément à la définition 2, l'hypothèse du théorème implique l'existence des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$, qui vérifient les formules:

(1) $$A = \sum_{k=1}^{n} A_k, \quad B = \sum_{k=1}^{n} B_k;$$

(2) $$A_k \cong B_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

(3) $$A_k \times A_l = 0 = B_k \times B_l \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k < l \leqslant n.$$

En vertu de I et (2) on obtient:

(4) $$f(A_k) = f(B_k) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

La condition II peut être étendue par une induction facile au cas d'un nombre fini quelconque de sommandes disjoints. On peut donc conclure selon (1) et (3):

(5) $$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(A_k), \quad f(B) = \sum_{k=1}^{n} f(B_k).$$

Les formules (4) et (5) donnent aussitôt:

(6) $$f(A) = f(B).$$

Suivant l'hypothèse du théorème on déduit enfin de III et (6):

$$m(A) = m(B), \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème précédent ne se prête pas à l'inversion. Cela résulte directement du corollaire 14: deux ensembles de points A et B, dont l'un est non-dense et l'autre ne l'est pas, peuvent posséder la même mesure lebesguienne, bien qu'ils ne soient pas équivalents par décomposition finie. Toutefois cette inversion a lieu dans un cas particulièrement simple, notamment dans le cas des polygones. Pour s'en convaincre démontrons d'abord le suivant

LEMME 17. *A étant un ensemble plan, qui n'est pas ensemble-frontière*[1], *et B un ensemble-somme d'un nombre fini de segments, on a*

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A + B.$$

Démonstration. Considérons deux cas.

(a) $A \times B = 0$.

Soit C un cercle vérifiant la formule:

(1) $$C \subset A.$$

[1] Cf. la note [1], p. 129.

L'ensemble B peut être évidemment décomposé en un nombre fini de segments (qui ne sont pas nécéssairement disjoints):

$$B = \sum_{k=1}^{n} B_k, \tag{2}$$

dont chacun est de longueur inférieure à celle du rayon de C.

Envisageons un segment arbitraire B_k ($1 \leqslant k \leqslant n$). Soit D_1 un segment congruent à B_k et situé sur un rayon du centre C, mais ne contenant pas le centre du cercle. Choisissons un angle α incommesurable avec l'angle droit et désignons par D_{n+1} (pour tout n naturel) le segment qu'on obtient en faisant tourner de l'angle $n\alpha$ le segment D_1 autour du centre du cercle (dans un sens fixe).

Posons:

$$E = \sum_{n=0}^{n} D_n, \tag{3}$$

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} D_n, \tag{4}$$

$$G = A - E. \tag{5}$$

Comme $E \subset C$, on obtient aussitôt selon (1) et (3)-(5) la décomposition suivante des ensembles A et $A+B_k$:

$$A = G+F+D_1, \qquad A+B_k = G+E+B_k. \tag{6}$$

On a évidemment

$$G \cong G, \qquad F \cong E, \qquad D_1 \cong B_k, \tag{7}$$

car F s'obtient de E par une rotation de l'angle α.

Enfin on déduit facilement de (3)-(5) ainsi que de la propriété indiquée de l'angle α (l'incommesurabilité avec l'angle droit) que les formules (6) effectuent une décomposition des ensembles A et $A+B_k$ en des sous-ensembles disjoints. Conformément à (6), (7) et à la définition 2 on a donc:

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A+B_k. \tag{8}$$

Le même raisonnement étant valable pour tout segment B_k ($1 \leqslant k \leqslant n$), on peut appliquer le théorème 10. On obtient selon (2):

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A+B.$$

(b) Le cas général. L'ensemble $A-B$ évidemment n'est pas ensemble-frontière. Comme $(A-B)\times B = 0$, on conclut en vertu de (a):

$$A-B \underset{\mathrm{f}}{=} (A-B)+B = A+B.$$

Cette formule et l'inclusion évidente:

$$A+B \supset A \supset A-B$$

impliquent, suivant le corollaire 9, que

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A+B, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Grâce à une remarque dûe à M. Lindenbaum, on peut énoncer un théorème analogue au lemme précédent pour les ensembles linéaires, en remplaçant le terme „segment" par „point".

Théorème 19. *Si les polygones A et B ont la même aire, on a*

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B.$$

Démonstration. Les polygones A et B sont, comme on sait, équivalents par décomposition au sens de la Géométrie Elémentaire, c'est-à-dire on peut les décomposer en un nombre fini et égal de polygones respectivement congruents sans points intérieurs communs. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les intérieurs de ces polygones partiels; on a évidemment:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \underset{\mathrm{f}}{=} \sum_{k=1}^{n} B_k. \tag{1}$$

Comme les ensembles $A - \sum_{k=1}^{n} A_k$ ainsi que $B - \sum_{k=1}^{n} B_k$ se composent d'un nombre fini de segments, on conclut en appliquant le lemme précédent:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \underset{\mathrm{f}}{=} \sum_{k=1}^{n} A_k + \left(A - \sum_{k=1}^{n} A_k\right) = A \quad \text{et de même} \quad \sum_{k=1}^{n} B_k \underset{\mathrm{f}}{=} B. \tag{2}$$

Suivant le théorème 3, on obtient aussitôt de (1) et (2):

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Les théorèmes 17 et 19 impliquent directement le

Corollaire 20. *Pour que deux polygones soient équivalents par décomposition finie, il faut et il suffit qu'ils aient la même aire.*

B. L'espace euclidien à 3 (et plus) dimensions. Les raisonnements de cette partie concernent l'espace à 3 dimensions. Pour étendre les résultats obtenus à l'espace à $n > 3$ dimensions, il faudra considérer au lieu des sphères les ensembles de tous les points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dont les coordonnées (réctilignes) satisfont aux conditions:

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2 = \varrho^2, \quad b \leqslant x_k \leqslant c \text{ pour } 3 < k \leqslant n,$$

$a_1, a_2, a_3, \varrho, b$ et c étant constants.

Pour établir le principal résultat de cet ouvrage — le théorème 24 nous allons démontrer au préalable quelques lemmes.

LEMME 21. *Toute sphère S contient deux sous-ensembles disjoints A_1 et A_2 tels que l'on ait:*

$$S \underset{\mathrm{f}}{=} A_1 \quad \textit{et} \quad S \underset{\mathrm{f}}{=} A_2.$$

Démonstration. Suivant le théorème fâmeux, connu sous le nom *paradoxe de Hausdorff* (1), on peut décomposer la surface de la sphère S en quatre sous-ensembles disjoints: B', C', D' et E', dont E' est un ensemble dénombrable et les ensembles B', C' et D' vérifient les formules:

$$B' \cong C'+D', \qquad B' \cong C' \cong D'.$$

Soit p le centre de la sphère S. Désignons par B, C, D et E les ensembles-sommes de tous les rayons de la sphère S, le centre p exclu, dont les points extérieurs appartiennent respectivement à B', C', D' et E'.

On obtient évidemment de cette façon la décomposition de la sphère S en cinq parties disjointes:

(1) $$S = B+C+D+E+(p) \text{ (2)},$$

assujetties aux conditions:

(2) $$B \cong C+D,$$

(3) $$B \cong C \cong D.$$

En ce qui concerne l'ensemble E, nous n'en allons utiliser que la propriété suivante, indiquée déjà par M. Hausdorff:

(4) il existe un vrai sous-ensemble F de $B+C+D$ tel que $E \cong F$;

on peut s'en convaincre facilement, en faisant tourner convenablement la sphère S autour d'une de ses axes.

De (2) et (3) on obtient sans peine:

$$B \underset{\mathrm{f}}{=} B+C, \qquad B+C \underset{\mathrm{f}}{=} B+C+D,$$

d'où en vertu du théorème 3

(5) $$B \underset{\mathrm{f}}{=} B+C+D.$$

Posons:

(6) $$A_1 = B+E+(p);$$

les formules (1), (5) et (6) donnent, suivant le théorème 4:

(7) $$S \underset{\mathrm{f}}{=} A_1.$$

---

(1) F. Hausdorff, op. cit., p. 469.

(2) Le symbole (p) désigne l'ensemble composé d'un seul élément p.

D'autre part, de (3) et (5) il résulte aussitôt:

(8) $$C \underset{\mathrm{f}}{=} B+C+D,$$

(9) $$D \underset{\mathrm{f}}{=} B+C+D;$$

en appliquant le corollaire 7, on déduit de (4) et (8) l'existence d'un ensemble G, qui vérifie les formules:

(10) $$F \underset{\mathrm{f}}{=} G, \quad \text{d'où} \quad E \underset{\mathrm{f}}{=} G;$$

(11) $$G \subset C \quad \text{et} \quad G \neq C.$$

Soit, conformément à (11):

(12) $$q \in C-G;$$

posons encore:

(13) $$A_2 = D+G+(q).$$

Les ensembles C et D étant disjoints, on déduit de (11) et (12) que les ensembles D, G et (q) sont disjoints aussi. Or, les ensembles (p) et (q) étant évidemment congruents, on conclut selon (1), (9), (10) et (13):

(14) $$S \underset{\mathrm{f}}{=} A_2.$$

On obtient enfin facilement:

(15) $$A_1+A_2 \subset S \quad \text{et} \quad A_1 \times A_2 = 0.$$

Les formules (7), (14) et (15) prouvent que A_1 et A_2 sont des ensembles cherchés.

LEMME 22. *S_1 et S_2 étant des sphères congruentes, on a*

$$S_1 \underset{\mathrm{f}}{=} S_1+S_2.$$

Démonstration. Conformément au lemme précédent, soient A_1 et A_2 des ensembles assujettis aux conditions:

(1) $$S_1 \underset{\mathrm{f}}{=} A_1, \quad S_1 \underset{\mathrm{f}}{=} A_2;$$

(2) $$A_1+A_2 \subset S_1 \quad \text{et} \quad A_1 \times A_2 = 0.$$

En vertu de (1) et de l'hypothèse du lemme on a

$$S_2 \underset{\mathrm{f}}{=} A_2;$$

le corollaire 7 implique donc l'existence d'un ensemble B tel que

(3) $$B \subset A_2,$$

(4) $$B \underset{\mathrm{f}}{=} S_2-S_1.$$

Suivant le théorème 4, on conclut facilement de (1)-(4):

(5) $$A_1+B \underset{\mathrm{f}}{=} S_1+(S_2-S_1) = S_1+S_2,$$

(6) $$A_1+B \subset S_1 \subset S_1+S_2.$$

Les formules (5) et (6) donnent aussitôt, en vertu du corollaire 9:

$$S_1 \underset{\mathrm{f}}{=} S_1+S_2, \quad \text{c. q. f. d.}$$

LEMME 23. *Si l'ensemble borné A, situé dans un espace euclidien à 3 dimensions, contient la sphère S, on a $A \underset{\mathrm{f}}{=} S$.*

Démonstration. A étant un ensemble borné, on peut le décomposer manifestément en n sous-ensembles (non nécessairement disjoints):

(1) $$A = \sum_{k=1}^{n} B_k,$$

qui remplissent la condition:

(2) tout ensemble B_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, est contenu dans une sphère S_k congruente à S.

En vertu du lemme précédent, on a

$$S \underset{\mathrm{f}}{=} S+S_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

d'où, conformément au théorème 10,

(3) $$S \underset{\mathrm{f}}{=} S+\sum_{k=1}^{n} S_k.$$

D'autre part, on obtient selon (1), (2) et l'hypothèse du lemme:

(4) $$S \subset A \subset S+\sum_{k=1}^{n} S_k.$$

En raison du corrollaire 9, les formules (3) et (4) impliquent directement:

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} S, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le lemme démontré tout-à-l'heure nous permet d'établir déjà le

THÉORÈME 24. *Si deux ensembles arbitraires A et B, situés dans un espace euclidien à 3 dimensions, sont bornés et ne sont pas ensembles-frontières, on a*

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B.$$

Démonstration. Soient S_1 et S_2 des sphères contenues dans A et B respectivement; on peut évidemment supposer que

(1) $$S_1 \cong S_2.$$

En vertu du lemme 23 on obtient:

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} S_1 \quad \text{et} \quad B \underset{\mathrm{f}}{=} S_2. \tag{2}$$

Suivant les théorèmes 1 et 3, on conclut immédiatement de (1) et (2):

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Ainsi on voit qu'en particulier deux sphères de rayons différents sont équivalentes par décomposition finie, tandis que, comme nous l'avons prouvé auparavant, deux cercles ne sont équivalents que lorsque leurs rayons sont égaux. Cette différence essentielle entre les espaces à 2 et à 3 dimensions est intimement liée au fait que le problème de la mesure trouve la solution positive dans le premier cas et négative dans le second.

C. La surface de la sphère. Le théorème 31, qui est fondamental dans cette partie de nos recherches, prouve que la surface de la sphère se comporte au point de vue de l'équivalence par décomposition finie d'une façon tout-à-fait analogue à l'espace à 3 dimensions.

LEMME 25. *A et B étant des ensembles, situés sur la surface de la même sphère, si A n'est pas ensemble-frontière (par rapport à cette sphère) et B est composé des arcs des grands cercles en nombre fini, on a*

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} A+B.$$

La démonstration en est tout-à-fait analogue à celle du lemme 17.

LEMME 26. *Si les polygones sphériques A et B, situés sur la surface de la même sphère, ont les aires égales, on a*

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B$$

La démonstration se base sur le lemme précédent et ne diffère pas de celle du théorème 19; on utilise le théorème connu, suivant lequel deux polygones sphériques, situés sur la surface de la même sphère et possédant les aires égales, sont équivalents par décomposition au sens de la Géométrie Elémentaire [1].

LEMME 27. *Toute surface S d'une sphère peut être décomposée en deux sous-ensembles disjoints A_1 et A_2, tels que l'on ait: $S \underset{\mathrm{f}}{=} A_1$ et $S \underset{\mathrm{f}}{=} A_2$.*

Démonstration. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 21, on prouve l'existence des ensembles A_1' et A_2 vérifiant les formules:

$$S \underset{\mathrm{f}}{=} A_1', \quad S \underset{\mathrm{f}}{=} A_2; \tag{1}$$

$$A_1'+A_2 \subset S \quad \text{et} \quad A_1' \times A_2 = 0. \tag{2}$$

---

[1] Gervien, *Zerschneidung jeder beliebigen Menge von verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke,* Crelles Journal 5 (1883).

Posons:

(3) $$A_1 = S - A_2;$$

de (2) et (3) on obtient sans peine:

(4) $$S = A_1 + A_2, \quad A_1 \times A_2 = 0;$$

(5) $$S \supset A_1 \supset A_2.$$

En vertu de (1) et (5) on conclut encore, en appliquant le corollaire 9:

(6) $$S \underset{\mathrm{f}}{=} A_1 \quad \text{et} \quad S \underset{\mathrm{f}}{=} A_2.$$

Les formules (4) et (6) prouvent que A_1 et A_2 sont des ensembles cherchés.

A l'aide du corollaire 6, ce lemme se généralise par une induction facile de la façon suivante:

LEMME 28. *n étant un nombre naturel arbitraire, toute surface S d'une sphère peut être décomposée en n sous-ensembles disjoints: $A_1, A_2, \dots, A_n$ tels que l'on ait: $S \underset{\mathrm{f}}{=} A_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.*

LEMME 29. *n étant un nombre naturel arbitraire, si la surface S d'une sphère est décomposée en 2^n polygones sphériques congruents sans points intérieurs communs: $B_1, B_2, \dots, B_{2^n}$, on a $S \underset{\mathrm{f}}{=} B_1$.*

Démonstration. Posons:

(1) $$B'_1 = B_1, \quad B'_k = B_k - \sum_{l=1}^{k-1} B_l \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant k \leqslant 2^n;$$

on obtient évidemment une décomposition de S en 2^n sous-ensembles disjoints:

(2) $$S = \sum_{k=1}^{2^n} B'_k.$$

Comme tout ensemble B'_k $(1 \leqslant k \leqslant 2^n)$ contient des points intérieurs (par rapport à la surface S) et l'ensemble $B_k - B'_k$ se compose d'un nombre fini des arcs des grands cercles (pouvant se réduire à un seul point), on conclut suivant le lemme 25:

(3) $$B'_k \underset{\mathrm{f}}{=} B'_k + (B_k - B'_k) = B_k.$$

Il en résulte aussitôt en vertu de l'hypothèse du théorème:

(4) $$B'_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B'_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant 2^n.$$

Soit d'autre part, conformément au lemme 28,

(5) $$S = \sum_{k=1}^{2^n} A_k$$

une décomposition de la sphère S en des sous-ensembles disjoints tels que

(6) $$S \underset{\mathrm{f}}{=} A_k, \text{ donc aussi } A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} A_k \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Selon (2) et (4)-(6) les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ et $B_1', B_2', \ldots, B_{2^n}$ remplissent toutes les conditions du corollaire 12; on obtient donc:

(7) $$A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1'.$$

Les formules (1), (6) et (7) impliquent aussitôt que

$$S \underset{\mathrm{f}}{=} B_1, \quad \text{c. q. f. d.}$$

LEMME 30. *Si l'ensemble A, situé sur la surface S d'une sphère, n'est pas ensemble-frontière (par rapport à cette sphère), on a $A \underset{\mathrm{f}}{=} S$.*

Démonstration. On prouve aisément que l'ensemble A contient un polygone sphérique A_1, dont l'aire est $4\pi\varrho^2/2^n$, ϱ désignant la longueur du rayon et n étant un nombre naturel suffisamment grand.

Décomposons S en 2^n polygones congruents sans points intérieurs communs:

$$S = \sum_{k=1}^{2^n} B_k.$$

Suivant le lemme précédent, on obtient:

(1) $$S \underset{\mathrm{f}}{=} B_1.$$

Les polygones sphériques A_1 et B_1 ayant la même aire, on conclut en appliquant le lemme 26:

(2) $$A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1.$$

De (1) et (2) il résulte aussitôt:

(3) $$S \underset{\mathrm{f}}{=} A_1.$$

On a d'autre part:

(4) $$S \supset A \supset A_1.$$

Les formules (3) et (4) donnent conformément au corollaire 9:

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} S, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le lemme 30 établi, la démonstration du théorème fondamental 31 est évidente.

THÉORÈME 31. *Si les ensembles de points A et B, situés sur la surface de la même sphère, ne sont pas ensembles-frontières (par rapport à cette surface), on a*

$$A \underset{\mathrm{f}}{=} B.$$

§ 3. Les théorèmes fondamentaux sur l'équivalence par décomposition dénombrable

Les raisonnements de ce § concernent les espaces euclidiens à un nombre arbitraire n de dimensions; mais pour fixer les idées nous allons opérer dans l'espace à $n = 1$ ou $n = 2$ dimensions.

LEMME 32. *$A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ étant des intervalles à n dimensions* (¹), *disjoints, congruents à un intervalle A, on a*

$$A \underset{\mathrm{d}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Démonstration. Considérons le cas de $n = 1$ dimension.

Comme l'a indiqué M. Hausdorff (²) (en utilisant une idée M. Vitali) on peut décomposer tout segment en une infinité dénombrable de sous-ensembles disjoints équivalents par décomposition finie deux à deux. Soient:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} B_k, \tag{1}$$

$$A_m = \sum_{k=1}^{\infty} B_{m,k} \quad \text{pour tout } m \text{ naturel} \tag{2}$$

les décompositions correspondantes des segments $A, A_1, \ldots, A_m, \ldots$ Tous ces segments étant congruents, on peut évidemment supposer que

$$B_k \cong B_{m,k} \quad \text{pour tous } k \text{ et } m \text{ naturels,}$$

d'où

$$B_k \underset{\mathrm{f}}{=} B_{m,l} \quad \text{pour tous } k, l \text{ et } m \text{ naturels.} \tag{3}$$

On conclut de (2):

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_{m,k}. \tag{4}$$

Comme toute série double peut être transformée par la méthode des diagonales en une série simple, les formules (1) et (4) fournissent une décomposition des ensembles A et $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$ en une infinité dénombrable

---

(¹) L'ensemble de points est dit *intervalle à n dimensions*, s'il se compose de tous les points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ assujettis à la condition: $a \leqslant x_k \leqslant b$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, a et b étant constants.

(²) F. Hausdorff, op. cit., p. 401. Strictement dit, M. Hausdorff décompose non le segment tout entier, mais le segment sans une extrémité. Mais cet inconvénient, que l'on peut d'ailleurs éviter, n'a qu'une influence insignifiante sur les raisonnements qui vont suivre.

de parties disjointes, qui sont selon (3) respectivement équivalentes par décomposition finie. En vertu du théorème 4′ on en déduit que

$$A \underset{\mathrm{d}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} A_m,$$

ce qui prouve le théorème pour le cas d'espace linéaire.

Pour en passer au cas de l'espace à n dimensions, $n > 1$, il suffit de remplacer les points de tout segment décomposé par les intervalles à $n-1$ dimensions perpendiculaires à lui.

LEMME 33. *$A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ étant des intervalles à n dimensions, disjoints, congruents deux à deux, et E désignant l'espace n-dimensionnel tout entier, on a*

$$E \underset{\mathrm{d}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Démonstration. Considérons le cas de $n = 2$.

Le plan E peut être facilement décomposé en une infinité dénombrable de carrés (non nécéssairement disjoints):

$$(1) \qquad E = \sum_{m=1}^{\infty} B_m$$

tels que

$$(2) \qquad A_m \cong B_m \quad \text{pour tout } m \text{ naturel.}$$

Posons

$$(3) \qquad C_1 = B_1, \quad C_m = B_m - \sum_{k=1}^{m-1} B_k \quad \text{pour tout } m \geqslant 2.$$

Selon (1) et (3) on obtient sans peine:

$$(4) \qquad E = \sum_{m=1}^{\infty} C_m,$$

$$(5) \qquad B_m \supset C_m \quad \text{pour tout } m \text{ naturel.}$$

Les formules (2) et (5) impliquent évidemment l'existence des ensembles $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ vérifiant les formules:

$$(6) \qquad C_m \cong D_m,$$

$$(7) \qquad A_m \supset D_m \quad \text{pour tout } m \text{ naturel.}$$

Les ensembles $C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$ ainsi que $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ étant disjoints, on conclut de (4) et (6) conformément à la définition 2′:

$$(8) \qquad E \underset{\mathrm{d}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} D_m.$$

De (7) on déduit encore:

$$E \supset \sum_{m=1}^{\infty} A_m \supset \sum_{m=1}^{\infty} D_m. \tag{9}$$

En vertu du corollaire 9′, les formules (8) et (9) donnent aussitôt:

$$E \underset{\mathrm{d}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} A_m, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Lemme 34. *Si l'ensemble A, situé dans l'espace E à n dimensions, n'est pas ensemble-frontière, on a $A \underset{\mathrm{d}}{=} E$.*

Démonstration. Supposons comme auparavant que $n = 2$.

L'ensemble A contient évidemment un carré A'. Soient $A_1, A_2, \ldots A_m, \ldots$ des carrés disjoints, congruents à A' et situés dans le même plan E; l'existence de tels carrés dans le plan est manifeste.

On obtient immédiatement, en appliquant les deux lemmes précédents:

$$A' \underset{\mathrm{d}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \quad \text{et} \quad E \underset{\mathrm{d}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} A_m,$$

d'où, en vertu du théorème 3′,

$$A' \underset{\mathrm{d}}{=} E.$$

Comme en même temps

$$E \supset A \supset A',$$

on conclut, conformément au corollaire 9′:

$$A \underset{\mathrm{d}}{=} E, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le lemme 34 établi, on en déduit immédiatement le théorème fondamental de ce §, notamment le

Théorème 35 [1]. *Si les ensembles A et B, situés dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, ne sont pas ensembles frontières, on a*

$$A \underset{\mathrm{d}}{=} B.$$

Nous allons à présent généraliser la notion d'équivalence par décomposition dénombrable, en introduisant la définition suivante:

Définition 3. Les ensembles de points A et B sont *presque équivalents par décomposition dénombrable*:

$$A \underset{\mathrm{p}}{=} B,$$

---

[1] Un cas particulier de ce théorème a été signalé par M. Sierpiński (*L'axiome du choix et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse,* Bulletin de l'Académie des Sciences, Cracovie 1918, p. 142).

s'il existe des ensembles, A_1, A_2, B_1 et B_2 remplissant les conditions suivantes;

I. $A = A_1+A_2, B = B_1+B_2, A_1\times A_2 = 0 = B_1\times B_2$;

II. $A_1 \underset{\mathrm{d}}{=} B_1$;

III. A_2 et B_2 sont mesurables (L) [1] et $m(A_2) = m(B_2) = 0$.

La relation définie tout-à-l'heure est évidemment *reflexive* et *symétrique*; nous allons prouver qu'elle est aussi *transitive*.

THÉORÈME 36. *Si* $A \underset{\mathrm{p}}{=} B$ *et* $B \underset{\mathrm{p}}{=} C$, *on a* $A \underset{\mathrm{p}}{=} C$.

Démonstration. Soient:

(1) $$A = A_1+A_2, \qquad B = B_1+B_2,$$

(2) $$B = B_1'+B_2', \qquad C = C_1+C_2$$

les décomposition des ensembles A et B, resp. B et C, satisfaisant aux conditions de la définition 3.

De (1) et (2) résultent aussitôt les formules suivantes:

$$B_1 = B_1\times B_1'+B_1\times B_2', \qquad B_1' = B_1'\times B_1+B_1'\times B_2;$$

comme $A_1 \underset{\mathrm{d}}{=} B_1$ et $B_1' \underset{\mathrm{d}}{=} C_1$, on en conclut en raison du corollaire 6 que les ensembles A_1 et C_1 peuvent être décomposés en parties disjointes:

(3) $$A_1 = A'+A_3, \qquad C_1 = C'+C_3$$

de sorte que l'on ait:

(4) $$A' \underset{\mathrm{d}}{=} B_1\times B_1, \qquad C' \underset{\mathrm{d}}{=} B_1'\times B_1,$$

(5) $$A_3 \underset{\mathrm{d}}{=} B_1\times B_2', \qquad C_3 \underset{\mathrm{d}}{=} B_1'\times B_2.$$

Posons:

(6) $$A'' = A_2+A_3, \qquad C'' = C_2+C_3;$$

on obtient selon (1)-(3) et (6):

(7) $$A = A'+A'', \qquad C = C'+C''$$

et on peut s'en convaincre facilement que les ensembles A' et A'' ainsi que C' et C'' sont disjoints.

De (4) on déduit encore:

(8) $$A' \underset{\mathrm{d}}{=} C'.$$

On peut enfin prouver que les ensembles A'' et C'' sont de mesure nulle. On a, en effet, conformément aux propriétés des décompositions (1) et (2):

(9) $$m(A_2) = m(B_2) = m(B_2') = m(C_2) = 0;$$

---

[1] Dans les raisonnements qui vont suivre nous supposons la notion de mesure étendue aux ensembles non-bornés. Cf. F. Hausdorff, op. cit., p. 416.

comme $B_1 \times B_2' \subset B_2'$ et $B_1' \times B_2 \subset B_2$, il en résulte que

(10) $$m(B_1+B_2') = m(B_1' \times B_2) = 0.$$

En appliquant le corollaire 15', on conclut selon (5) et (10):

(11) $$m(A_3) = m(C_3) = 0,$$

et de (6), (9) et (11) on obtient finalement:

(12) $$m(A'') = m(C'') = 0.$$

Suivant la définition 3, les formules (6), (8) et (12) impliquent que

$$A \underset{\mathrm{p}}{=} C, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème fondamental sur l'équivalence dénombrable entraîne manifestement la conséquence suivante:

Si les ensembles A et B, situés dans un espace euclidien, ne sont pas ensembles-frontières, on a $A = B$.

Nous nous proposons de donner dans le théorème 41 une généralisation de cette proposition.

LEMME 37. *A et B étant des ensembles, situés dans un espace euclidien à n dimensions, si A est mesurable (L), B est un ensemble ouvert et $m(A) = m(B)$, alors à tout nombre réel positif δ correspondent deux ensembles fermés A_1 et B_1 tels que l'on ait:*

I. $A_1 \subset A$ *et* $B_1 \subset B$, II. $A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1$, III. $m(A_1) = m(B_1) > m(A)-\delta$.

Démonstration. Soit $n = 2$.

Suivant un théorème connu dans la Théorie de la Mesure, il existe certainement un ensemble fermé borné A' vérifiant les formules

(1) $$A' \subset A \quad \text{et} \quad m(A) > m(A') > m(A)-\delta.$$

Comme $m(A') < m(B)$, on peut prouver l'existence des carrés: $C_1, C_2, \ldots, C_m$ et $D_1, D_2, \ldots, D_m$, qui satisfont aux conditions suivantes (C_k' et D_k' désignant les intérieurs des carrés C_k et D_k respectivement):

(2) les ensembles $C_1', C_2', \ldots, C_m'$ ainsi que $D_1', D_2', \ldots, D_m'$ sont disjoints;

(3) $$C_k \cong D_k \text{ (d'où } C_k' \cong D_k') \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant m;$$

(4) $$A' \subset \sum_{k=1}^{m} C_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{m} D_k \subset B.$$

De (1), (2) et (3) résulte l'existence d'un ensemble fermé A_1 tel que l'on ait:

(5) $$A_1 \subset A' \subset A,$$

(6) $$m(A_1) > m(A)-\delta,$$

(7) $$A_1 \subset \sum_{k=1}^{m} C_k', \quad \text{donc} \quad A_1 = \sum_{k=1}^{m} (A_1 \times C_k').$$

Soient, conformément à (3) et (7), $E_1, E_2, \ldots, E_m$ des ensembles jouissant de propriétés suivantes:

(8) $$E_k \cong A_1 \times C'_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

(9) $$E_k \subset D'_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant m;$$

posons:

(10) $$B_1 = \sum_{k=1}^{m} E_k.$$

Selon (4), (9) et (10) on a évidemment:

(11) $$B_1 \subset B;$$

en vertu de (2), (7), (9) et (10) on obtient:

(12) $$A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1.$$

Enfin, les ensembles $A_1 \times C'_1, A_1 \times C'_2, \ldots, A_1 \times C'_m$ étant fermés (comme produits des ensembles fermés: $A_1 \times C'_k = A_1 \times C_k$), on conclut suivant (8) et (10) que les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_m$ et B_1 sont fermés aussi et que l'on a

(13) $$m(A_1) = m(B_1).$$

Les formules (5), (6) et (11)-(13) prouvent que A_1 et B_1 sont des ensembles cherchés.

Lemme 38. *A et B étant des ensembles de points, situés dans un espace euclidien, si A est mesurable (L), B est ouvert et $m(A) = m(B)$, on a $A \underset{\mathrm{p}}{=} B$.*

Démonstration. Nous allons définir par récurrence deux suites infinies des ensembles $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$ de la façon suivante:

I. A_1 et B_1 sont des ensembles fermés, contenus dans A et B respectivement et remplissant les conditions:

(1) $$A_1 \underset{\mathrm{f}}{=} B_1,$$

(2) $$m(A_1) = m(B_1) \geqslant \frac{1}{2} m(A).$$

II. n étant un nombre naturel arbitraire, A_{n+1} et B_{n+1} sont des ensembles fermés, contenus dans $A - \sum_{k=1}^{n} A_k$ et $B - \sum_{k=1}^{n} B_k$ et vérifiant les formules:

(3) $$A_{n+1} \underset{\mathrm{f}}{=} B_{n+1},$$

(4) $$m(A_{n+1}) = m(B_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2} m\Big(A - \sum_{k=1}^{n} A_k\Big).$$

En se basant sur le lemme 36 on prouve par une induction facile l'existence de tous les termes des suites $\{A_n\}$ et $\{B_n\}$. C'est en effet évident pour $n = 1$; et si les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ existent, on obtient sans peine suivant (2) et (4):

(5) $$A = \sum_{k=1}^{n} A_k \text{ est mesurable } (L), \qquad B = \sum_{k=1}^{n} B_k \text{ est ouvert;}$$

(6) $$m\Big(A - \sum_{k=1}^{n} A_k\Big) = m\Big(B - \sum_{k=1}^{n} B_k\Big).$$

En vertu du lemme mentionné, les conditions (5) et (6) impliquent aussitôt l'existence des ensembles fermés A_{n+1} et B_{n+1} vérifiant (3) et (4).

Il résulte immédiatement de la définition des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ainsi que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ qu'ils sont tous fermés, disjoints et contenus dans A et B respectivement.

On peut donc conclure:

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n) = 0,$$

d'où en raison de (4) et (6)

(7) $$\lim_{n\to\infty} m\Big(A - \sum_{k=1}^{n} A_k\Big) = \lim_{n\to\infty} m\Big(B - \sum_{k=1}^{n} B_k\Big) = 0.$$

Posons:

(8) $$A' = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad A'' = A - A';$$

(9) $$B' = \sum_{k=1}^{\infty} B_k, \qquad B'' = B - B'.$$

On a évidemment:

(10) $$A = A' + A'', \qquad B = B' + B'', \qquad A' \times A'' = B' \times B'' = 0.$$

De (7), (8) et (9) on déduit directement:

$$m(A') = m(A), \qquad m(B') = m(B),$$

d'où

(11) $$m(A'') = m(B'') = 0.$$

En vertu de (4), (8) et (9) on obtient enfin, en appliquant le théorème $4'$:

(12) $$A' \underset{\mathrm{d}}{=} B'.$$

Conformément à la définition 3, les formules (10)-(12) donnent aussitôt:

$$A \underset{\mathrm{p}}{=} B, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

LEMME 39. *Si l'ensemble borné A, situé dans l'espace euclidien E, est mesurable (L) et a la mesure positive, il existe dans le même espace un ensemble C de mesure nulle tel que l'on ait:*

$$A+C \underset{\mathrm{d}}{=} E.$$

Démonstration. Comme $m(A)>0$, il existe évidemment un ensemble ouvert borné B dont la mesure est égale à celle de A. Conformément au lemme précédent, on peut conclure:

$$A \underset{\mathrm{p}}{=} E.$$

Soient donc A_1, A_2, B_1 et B_2 des ensembles remplissant les conditions de la définition 3. On a:

$$(1) \qquad A=A_1+A_2, \quad B=B_1+B_2, \quad A_1\times A_2=B_1\times B_2=0;$$

$$(2) \qquad A_1 \underset{\mathrm{d}}{=} B_1,$$

$$(3) \qquad m(A_2)=m(B_2)=0.$$

Soient encore C et D des ensembles bornés vérifiant les formules:

$$(4) \qquad C\cong B_2 \quad \text{et} \quad D\cong A_2,$$

$$(5) \qquad (C+D)\times(A+B)=0;$$

les ensembles A et B étant bornés, l'existence des ensembles C et D est évidente.

En vertu de (1), (2), (4) et (5) on obtient facilement, en appliquant le théorème 4':

$$(6) \qquad A+C=A_1+A_2+C \underset{\mathrm{d}}{=} B_1+B_2+D=B+D.$$

L'ensemble $B+D$ n'étant pas ensemble-frontière, on déduit du lemme 34:

$$(7) \qquad B+D \underset{\mathrm{d}}{=} E.$$

Les formules (6) et (7) donnent aussitôt en raison du théorème 3':

$$A+C \underset{\mathrm{d}}{=} E.$$

Comme de plus l'ensemble C est, suivant (3) et (4), de mesure nulle, le lemme 39 est complètement démontré.

LEMME 40. *Si l'ensemble A, situé dans l'espace euclidien E, a la mesure lebesguienne intérieure positive (finie ou non), on a $A \underset{\mathrm{p}}{=} E$.*

Démonstration. L'ensemble A contient évidemment un sous-ensemble borné A' mesurable (L) de mesure positive. Soit C l'ensemble de mesure nulle remplissant par rapport à A' les conditions du lemme 39; on a donc

(1) $$A'+C' \underset{\mathrm{d}}{=} E,$$

(2) $$m(C) = 0.$$

Comme

$$A'+C \subset A+C \subset E,$$

on conclut de (1), en vertu du corollaire 9′, que

$$A+C \underset{\mathrm{d}}{=} E.$$

Il en résulte suivant le corollaire 6′ que l'espace E peut être décomposé en deux ensembles disjoints:

(3) $$E = E_1+E_2$$

tels que

(4) $$E_1 \underset{\mathrm{d}}{=} A, \quad E_2 \underset{\mathrm{d}}{=} C-A.$$

De (2) et (4) on déduit facilement, en appliquant le corollaire 15′:

(5) $$m(E_2) = 0.$$

Posons:

(6) $$A_1 = A, \quad A_2 = 0,$$

d'où

(7) $$A = A_1+A_2.$$

Les formules (3) et (7) nous fournissent une décomposition des ensembles A et E, dont on prouve immédiatement en vertu de (4)-(6) qu'elle satisfait aux conditions de la définition 3. On a donc

$$A \underset{\mathrm{p}}{=} E, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème 36 et le lemme démontré tout-à-l'heure impliquent aussitôt le suivant

THÉORÈME 41. *Si les ensembles A et B, situés dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, ont les mesures lebesguiennes intérieures positives (finies ou non), on a*

$$A \underset{\mathrm{p}}{=} B.$$

Il est à remarquer que dans les décompositions fournies par les théorèmes fondamentaux de cet ouvrage se présentent nécessairement des ensembles non-mesurables (L). On voit en effet que deux ensembles ne sont équivalents par décomposition (finie ou dénombrable) en ensembles mesurables (L) qu'à la condition qu'ils aient la même mesure. En ce qui concernent les ensembles presque équivalents, on a le suivant

Théorème 42. *Pour que deux ensembles de points situés dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, soient presque équivalents par décomposition dénombrable en ensembles mesurables (L) (ou même fermés), il faut et il suffit, qu'ils aient la même mesure* [1].

On déduit ce théorème facilement du lemme 38 et du théorème 36, en analysant leurs démonstrations.

---

[1] Dans le même ordre d'idées on peut établir le théorème suivant:

A et B étant des ensembles, situés dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions, si A est mesurable (L), B est ouvert et $m(A) < m(B)$, l'ensemble A est équivalent à un sous-ensemble de B par décomposition dénombrable en ensembles mesurables (L).