

Sur une classe de fonctions continues*

Introduction

Le but de cette Note est d'établir quelques relations qui subsistent entre certaines classes de fonctions continues.

Précisons d'abord les notations.

E désignant un ensemble, $|E|$ désigne sa mesure extérieure.

$y = f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et E désignant un ensemble quelconque situé dans cet intervalle, E_y désigne l'ensemble de valeurs de $f(x)$ pour $x \in E$.

On dit, d'après M. Lusin⁽¹⁾, que $f(x)$ vérifie dans (a, b) la condition (N) , lorsque $|E| = 0$ implique toujours $|E_y| = 0$.

Je prouve dans ce travail que toute fonction continue satisfaisant à la condition (N) admet la dérivée unique et finie dans un ensemble de points de mesure positive. Or, M. Ruziewicz a montré que cet ensemble n'est pas nécessairement d'épaisseur pleine: en effet, il a construit une fonction continue vérifiant la condition (N) et n'admettant pas de dérivée dans un ensemble de mesure non-nulle⁽²⁾.

Nous dirons qu'une fonction $y = f(x)$ continue dans (a, b) satisfait à la condition (S) , lorsque à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ de manière que $|E| < \eta$ entraîne $|E_y| < \varepsilon$.

On voit de suite que la propriété (S) implique la propriété (N) . La question réciproque ne paraît pas être résolue. L'exemple cité de M. Ruziewicz prouve de même qu'il y a de fonctions continues satisfaisant à la condition (S) et n'admettant pas de dérivée dans un ensemble de points de mesure positive.

* Commenté sur p. 331.

⁽¹⁾ *L'intégrale et série trigonométrique* (en russe), Moscou 1915, p. 109. La même propriété a été traitée par M. Rademacher qui a prouvé (*Monatshefte für Mathematik* 27 (1916), p. 183) que la condition (N) est nécessaire et suffisante pour que la mesurabilité de E entraîne toujours celle de E_y .

⁽²⁾ voir *Fundamenta Mathematicae* 8 (1926), p. 173.

Soit maintenant A_1 , respectivement A_2 , l'ensemble de valeurs que la fonction $y = f(x)$ admet une infinité resp. une infinité non dénombrable de fois dans l'intervalle (a, b) . Nous dirons qu'elle jouit de la propriété (T_1) , respectivement (T_2) lorsque $|A_1| = 0$, resp. $|A_2| = 0$.

Je prouve que $f(x)$ étant continue dans (a, b) , l'ensemble de conditions (N) et (T_1) est équivalent à la condition (S) et que la condition (N) entraîne la propriété (T_2) .

On peut remarquer encore que toute fonction à *variation bornée* jouit des propriétés (T_1) et (T_2) ⁽¹⁾, mais ne vérifie pas, en général, la condition (N) et, à plus forte raison, (S) . Inversement, toute fonction *absolument continue* satisfait évidemment à la condition (S) , donc aussi à tous les autres conditions ici considérées.

Nous commencerons par prouver un théorème dû à M. Mazurkiewicz.

THÉORÈME 1 ⁽²⁾. *$f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et H désignant un ensemble F_σ situé dans cet intervalle, l'ensemble H^* de points $x \in H$, tels que*

$$f(x') \neq f(x) \quad \text{pour} \quad x' \in H, \quad x' < x,$$

est un ensemble F_{σ_0} ⁽³⁾.

Démonstration. H étant un F_σ , on peut le mettre sous la forme:

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} F_n,$$

$\{F_n\}$ désignant une suite d'ensembles fermés non décroissants.

Soit P_n ($n = 1, 2, \dots$) l'ensemble de points $x \in F_n$ tels que, pour chacun d'eux, il y a des points x' vérifiant les relations:

$$x' \in P_n, \quad x' \leq x - \frac{1}{n}, \quad f(x') = f(x).$$

⁽¹⁾ voir mon travail [14], p. 229.

⁽²⁾ ce théorème n'a pas été publié; il m'a été communiqué obligeamment par M. Mazurkiewicz.

⁽³⁾ on appelle F_σ tout ensemble — somme d'une suite infinie d'ensembles fermés (Hausdorff); F_{σ_0} désigne tout ensemble qui est une différence de deux ensembles F_σ . Remarquons que, dans le cas où H est un ensemble fermé, H^* est un ensemble G_δ (ensemble produit d'une suite infinie d'ensembles ouverts).

$f(x)$ étant continue et F_n fermés, on voit de suite que les ensembles P_n ainsi déterminés sont aussi fermés; or, d'autre part,

$$H^* = H - \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n - \sum_{n=1}^{\infty} P_n,$$

ce qui revient à notre énoncé.

THÉORÈME 2. $f(x)$ étant une fonction continue dans un intervalle (a, b) et E désignant un ensemble quelconque situé dans cet intervalle, il existe toujours un ensemble A_E vérifiant les conditions suivantes:

- 1° A_E est mesurable,
- 2° $A_E \subset E$,
- 3° $(A_E)_y = E_y$,
- 4° $x_1, x_2 \in A_E$ et $x_1 \neq x_2$ impliquent $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Démonstration. On peut mettre E sous la forme

$$E = H + R,$$

H étant un ensemble F_σ et R étant de mesure nulle. D'après le théorème de M. Mazurkiewicz il existe un ensemble $H^* = A_H$ qui vérifie relativement à H tous les conditions de la proposition précédente, donc, à plus forte raison, du théorème à prouver. On voit, d'autre part, que R contient un sous-ensemble R_E satisfaisant par rapport à R , aux conditions 1°, 2°, 3°, 4°. Supprimons de R_E les points où la fonction $f(x)$ admet des valeurs contenues déjà dans H_y , et désignons par S l'ensemble de points restant. L'ensemble

$$A_E = H^* + S$$

vérifie évidemment les conditions de notre théorème.

Remarque 1. Dans ce qui suit nous aurons besoin du théorème suivant qui résulte immédiatement des théorèmes démontrés par M. Saks⁽¹⁾. Si E est l'ensemble dans lequel une fonction $f(x)$, définie dans (a, b) a en tout point tous les quatre dérivés du même signe, il existe presque dans tous les points de E une dérivée finie.

(1) Fundamenta Mathematicae 5 (1923), p. 98-104. Ce sont les théorèmes 1 (p. 102) et 3 (p. 104). Pour en déduire notre théorème, il suffit de remarquer, qu'en désignant par E_1 la partie de l'ensemble, où les nombres dérivés sont ≥ 0 , les dérivés inférieures gauche et droite seront en tout point de E_1 distinctes de $-\infty$, d'où résulte que les nombres dérivés opposés sont dans E_1 presque partout égaux et finis, et par suite, il existe presque partout dans E_1 la dérivée. Le même peut être démontré pour le complémentaire de E_1 par rapport à E , d'où résulte notre théorème.

THÉORÈME 3. Si une fonction continue $f(x)$, définie dans un intervalle (fermé) (a, b) satisfait à la condition (N) ⁽¹⁾, alors

- 1) $f(x)$ jouit de la propriété (T_2) ,
- 2) $f(x)$ a dans un ensemble de mesure positive une dérivée finie.

Démonstration. Faisons correspondre à tout ensemble mesurable E contenu dans (a, b) un ensemble A_E satisfaisant aux conditions du théorème 2. Or, faisons correspondre à tout nombre ordinal ξ de la première ou de la deuxième classe un ensemble mesurable M_ξ comme il suit:

- a) $M_1 = A_\delta$ (δ désigne l'intervalle (a, b)),
- b) pour $\xi > 1$: $M_\xi = A_E$, où $E = \delta - \sum_{\xi' < \xi} M_{\xi'}$

(si E était un ensemble vide, M_ξ serait aussi vide).

On démontre sans peine par l'induction transfinitive qu'une telle correspondance est possible.

Les ensembles M_ξ étant mesurables, disjoints, en quantité non dénombrable, il existe nécessairement un nombre ordinal ξ_0 , tel que $|M_{\xi_0}| = 0$. La fonction $f(x)$ jouissant, d'après l'hypothèse, de la condition (N) , nous en concluons que

$$(1) \quad |(M_{\xi_0})_y| = 0.$$

Si, maintenant, l'ensemble A_2 (c'est-à-dire l'ensemble de valeurs que notre fonction prend une infinité non dénombrable de fois) est non vide, nous avons, pour tout $\xi < \Omega$, $(M_\xi)_y \supset A_2$, donc aussi $(M_{\xi_0})_y \supset A_2$, ce qui prouve, d'après (1), que $|A_2| = 0$.

La première partie de notre théorème est ainsi démontré. Pour prouver la seconde, désignons par B l'ensemble de valeurs de $f(x)$ n'appartenant pas à A_2 . Nous aurons donc $B = \delta_y - A_2$ et, d'après $|A_2| = 0$:

$$(2) \quad |B| = |\delta_y| > 0.$$

Toute valeur z de l'ensemble B la fonction $f(x)$ prend dans un ensemble fermé $C(z)$ au plus dénombrable, donc dans un ensemble possédant des points isolés. Désignons par $D(z)$ l'ensemble de tous les points isolés de l'ensemble $C(z)$. Posons $D = \sum_z D(z)$, la sommation s'étendant à tous les points z de l'ensemble B . Il est évident qu'aucun des ensembles $D(z)$ n'est vide, donc $D_y = B$. Donc, de (3) et de l'hypothèse que $f(x)$ satisfait à la condition (N) résulte que l'ensemble D ne peut être de mesure nulle. Supprimons dans D tous les points dans lesquels $f(x)$ atteint son maximum ou son minimum propre. Soit E l'ensemble qui restera. L'ensemble

(1) Quant aux définitions des conditions (N) , (S) , (T_1) , (T_2) — voir l'introduction.

E diffère de D dans un ensemble au plus dénombrable de points ⁽¹⁾: donc E n'est pas de mesure nulle. De la définition de l'ensemble E résulte que pour tout point x de E existe un nombre positif ε_x , tel que les inégalités $0 < h < \varepsilon_x$, $0 < k < \varepsilon_x$ entraînent

$$[f(x+h) - f(x)][f(x-k) - f(x)] < 0,$$

ce qui prouve que les nombres dérivés au point x ont même signe, donc, d'après la remarque 1, $f(x)$ a en presque tous les points de E une dérivée finie. Or, l'ensemble de tous les points où la fonction continue $f(x)$ a une dérivée étant mesurable et contenant E , et l'ensemble E n'étant pas de mesure nulle, nous concluons que l'ensemble de points où $f(x)$ a une dérivée finie est de mesure positive, c. q. f. d.

Il se pose maintenant le problème si dans le théorème 3 l'assertion 2) peut être remplacée par celle-ci: „ $f(x)$ a une dérivée dans une épaisseur pleine“. C'est M. S. Ruziewicz qui a montré que le théorème généralisé ainsi n'est pas vrai.

THÉORÈME 4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue $f(x)$, définie dans un intervalle (fermé) (a, b) jouisse de la propriété (S) est qu'elle jouisse des propriétés (N) et (T_1) .*

Démonstration. La nécessité. Soit $f(x)$ une fonction jouissant de la propriété (S). En conservant la notation utilisée dans la démonstration du théorème 3, nous aurons, comme on voit sans peine, pour tout indice ξ fini:

$$(3) \quad (M_\xi)_y \supset A_1.$$

Les ensembles M_ξ étant mesurables et disjoints, contenus dans l'intervalle fini (a, b) , nous avons

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} |M_\xi| = 0,$$

d'où, d'après l'hypothèse que $f(x)$ jouit de la propriété (S):

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} |(M_\xi)_y| = 0,$$

done, d'après (3), $|A_1| = 0$, ce qui prouve que $f(x)$ jouit de la propriété (T_1) .

Or, il est évident que la propriété (S) entraîne la propriété (N). La nécessité de notre condition est donc démontrée.

⁽¹⁾ Voir p. e. W. Sierpiński, *Analiza*, t. I, 4^{me} partie, p. 218, th. 218 (Varsovie 1925, en polonais); aussi A. Schoenflies *Die Entw. d. Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* (Jahresb. d. deutsch. Math.-Verein. Bd. VIII, 2), p. 158. (La condition de M. Schoenflies que la fonction soit continue, n'est pas nécessaire, comme l'a montré M. Sierpiński).

La suffisance. Supposons que la fonction $f(x)$ jouit des propriétés (N) et (T_2) et admettons qu'elle ne jouit pas de la propriété (S) . Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite infinie d'ensembles $\{E_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) vérifiant les conditions suivantes:

- 1) La somme $|E_1| + |E_2| + |E_3| + \dots$ est finie.
- 2) $|(E_i)_y| \geq \varepsilon$ ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Posons

$$E = \overline{\lim} E_i$$

(en désignant par $\overline{\lim}$ l'ensemble-limite complet de la suite E_1, E_2, \dots). Il est clair que, d'après 1):

$$(4) \quad |E| = 0$$

(ou bien E est vide). Posons

$$(5) \quad E^* = \overline{\lim} (E_i)_y;$$

d'après 2) nous avons

$$(6) \quad |E^*| \geq \varepsilon > 0.$$

Je dis que $E_y \supset E^* - A_1$. En effet, si $z \in (E^* - A_1)$, l'ensemble $C(z)$ des points de (a, b) en lesquels $f(x)$ prend la valeur z est fini. Or, de $z \in E^*$ résulte, d'après (5), que z appartient à une infinité des ensembles $(E_i)_y$ ($i = 1, 2, 3, \dots$); par conséquent une infinité d'ensembles E_i ($i = 1, 2, \dots$) contient des points de $C(z)$; l'ensemble $C(z)$ étant fini, il en résulte l'existence d'un nombre x de $C(z)$ qui appartient à une infinité des ensembles E_i ($i = 1, 2, \dots$), et par suite appartient à E . Donc $z \in E_y$, c. q. f. d.

Or, de $E_y \supset E^* + A_1$ résulte que $E^* \subset E_y + A_1$. La fonction $f(x)$ jouissant de la propriété (T_1) , nous avons $|A_1| = 0$; la fonction $f(x)$ satisfaisant à la condition (N) , nous trouvons, d'après (4), $|E_y| = 0$. La formule $E^* \subset E_y + A_1$ donne donc $|E^*| = 0$, ce qui est incompatible avec (6).

La fonction $f(x)$ jouit donc de la propriété (S) et notre théorème est démontré.