cette fonction aux points où elle n'a pas de dérivée finie est de mesure nulle. La condition plus faible qui diffère de (V) par les mots „finie ou infinie" remplaçant le mot „finie" se montra équivalente à (T_1) pour les fonctions continues (voir le livre [6] de Saks, p. 278).

Or dans le travail qui est l'objet de ce commentaire, Banach et Saks montrèrent que la condition (S), introduite par Banach dans son travail [*18*] (voir aussi le commentaire à ce travail, ce volume, p. 331), caractérise également les fonctions continues qui sont des superpositions de deux fonctions absolument continues et en déduisirent le théorème précité de Bary et Menchoff moyennant l'équivalence entre (S) et la réunion de (N) et (T_1). Le théorème de Banach et Saks entraîne comme corollaire évident l'équivalence entre (V) et (S) pour les fonctions continues. Les démonstrations s'appuient essentiellement sur le théorème de Banach concernant son indicatrice (voir [*14*]). Les auteurs signalèrent dans un *post scriptum* que Nina Bary parvint indépendamment au même résultat par une voie essentiellement différente.

Plus tard, Bary montra (voir Bary [2]) que toute fonction continue f est somme de trois (mais pas toujours de deux!) fonctions dont chacune est une superposition de deux fonctions absolument continues. Deux sommandes de ce genre suffisent si f a la propriété (N). Dans le même travail, elle donna une nouvelle interprétation de la condition (T_1) en montrant que cette condition se trouve satisfaite par toute fonction absolument continue d'une fonction à variation bornée et seulement dans ce cas. Un autre résultat remarquable de Bary dans cet ordre d'idées (voir Bary [1]) est la caractérisation des fonctions absolument continues par la propriété (N) unie à la condition que la dérivée soit intégrable dans l'ensemble de tous les points où elle existe et n'est pas négative.

S. Hartman et *W. Nitka*

— et C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), p. 127-131*.

Ce travail concerne le problème suivant:

(*) Etant donné un ensemble E de puissance du continu, existe-t-il une mesure finie, définie dans le corps $S(E)$ de tous les sous-ensembles de E et s'annulant pour tous ceux qui se composent d'un seul point sans être identiquement nulle?

---

* Voir p. 182.

Dans le texte original de ce travail, E est l'intervalle $0 < x < 1$, ce qui n'est pas essentiel. Au lieu de la mesure, c'est-à-dire d'une fonction d'ensemble dénombrablement additive et non-négative, il y sont considérées des fonctions d'ensemble dénombrablement additives et prenant des valeurs réelles quelconques (donc aussi négatives), ce qui n'est non plus une généralisation essentielle, vu l'existence de la décomposition de Hahn.

C'est la solution négative du problème (*) ayant recours à l'hypothèse du continu (théorème I) qui est le résultat principal du travail. Cette hypothèse y intervient notamment dans la construction d'une suite double singulière $\{A_j^i\}$ de sous-ensembles de E (théorème II) qui sera dite ici *décomposition de Banach et Kuratowski.* L'existence d'une pareille décomposition entraîne la réponse négative au problème (*) déjà sans l'hypothèse du continu.

Le théorème II sur l'existence d'une décomposition de Banach et Kuratowski peut être formulé dans le langage de l'algèbre de Boole comme il suit (cf. Sikorski [7], p. 105):

1. Si $\overline{\overline{E}} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et I est un vrai idéal dénombrablement additif de sous-ensembles de E contenant tous les sous-ensembles composés d'un point, l'algèbre de Boole $S(E)/I$ (1) n'est pas dénombrablement distributive au sens faible (2).

Or on a le théorème:

2. Si m est une mesure finie, définie dans un corps dénombrablement additif K de sous-ensembles de E et I est l'idéal composé de tous les sous-ensembles de E de mesure m nulle, l'algèbre de Boole K/I est dénombrablement distributive au sens faible.

Le théorème I du travail commenté résulte aussitôt des théorèmes 1 et 2. C'est la méthode dont se servirent les auteurs de ce travail sans employer le langage de l'algèbre de Boole. Le théorème 2 fut formulé explicitement plus tard par Horn et Tarski dans leur travail [1], mais il est contenu implicitement dans la démonstration du théorème I de Banach et Kuratowski et il en est, au fond, un extrait.

---

(1) K étant un corps d'ensembles et I un idéal d'ensembles, K/I est le corps de Boole résultant de l'identification des ensembles appartenant à K qui ne diffèrent entre eux que par un ensemble appartenant à I.

(2) Un corps de Boole C dénombrablement additif est dit *dénombrablement distributif* lorsque

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \bigcup_{\{j_i\}} \bigcap_{i=1}^{\infty} a_{i,j_i}$$

pour toute suite double $\{a_{i,j}\}$ de ses éléments. C l'est dit *au sens faible,* lorsqu'on a cette égalité pour toute suite double $\{a_{i,j}\}$ telle que $a_{i,j} \subset a_{i,j+1}$.

On ne sait pas jusqu'à présent démontrer le théorème 1 en y remplaçant l'hypothèse $\overline{\overline{E}} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ par $\overline{\overline{E}} = 2^{\aleph_0}$ ou par $\overline{\overline{E}} = \aleph_1$. De même, on ne sait pas établir le théorème II sans faire intervenir l'hypothèse $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Le problème d'affaiblir l'hypothèse du continu dans les théorèmes I et II fut l'objet de plusieurs publications.

Marczewski remarqua (voir Marczewski [2]) que la réponse négative à $(*)$ résulte de l'existence d'un ensemble de Lusin [1] de puissance du continu. L'hypothèse du continu implique l'existence d'un ensemble de Lusin, mais on ignore si l'implication réciproque est vraie. Sierpiński démontra (voir Sierpiński [10]; cf. aussi Sierpiński [7], p. 53) que l'existence d'un ensemble de Lusin implique (sans l'hypothèse du continu) celle d'une décomposition de Banach et Kuratowski dans un E arbitraire de puissance du continu. Kuratowski montra (voir Kuratowski [4]) que l'existence d'un ensemble de Lusin équivaut à celle d'une modification de cette décomposition. Braun et Sierpiński établirent (voir Braun et Sierpiński [1]) l'équivalence entre l'hypothèse du continu et l'existence de la décomposition suivante de tout ensemble E de puissance du continu (x et y parcourant l'ensemble R de tous les nombres réels):

$$E = \bigcup_{x \in R} B_x^i \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots$$

où $B_x^i \cap B_y^i = 0$ pour $x \neq y$ et l'ensemble $E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{x_i}^i$ est au plus dénombrable quelle que soit la suite $\{x_i\}$ de nombres réels. L'existence d'une telle décomposition de E entraîne aussitôt celle d'une décomposition $\{A_j^i\}$ de Banach et Kuratowski en posant

$$A_j^i = \begin{cases} E \setminus \bigcup_{k=2}^{\infty} B_k^i & \text{pour} \quad j = 1, \\ B_j^i & \text{pour} \quad j = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Sierpiński montra (voir Sierpiński [13]) que l'existence d'une décomposition de Banach et Kuratowski dans tout E de puissance du continu résulte de la conséquence suivante de l'hypothèse du continu: il existe une fonction définie dans un ensemble de puissance du continu de nombres réels qui est continue dans E, mais n'est uniformément continue dans aucun des sous-ensembles indénombrables de E. L'existence d'une telle fonction est également une conséquence de l'existence d'un ensemble de Lusin de puissance du continu. Sierpiński établit aussi (voir Sierpiński [7], p. 52-59, et [14], [3] et [10]) l'équivalence entre l'exis-

[1] c'est-à-dire un ensemble indénombrable de nombres réels qui n'a qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble non-dense de ces nombres (voir Lusin [2]).

tence d'une décomposition de Banach et Kuratowski dans un ensemble E de puissance du continu et chacune des trois propositions suivantes:

(a) Il existe une suite de fonctions réelles de variable réelle qui ne converge uniformément dans aucun ensemble indénombrable de nombres réels.

(b) Il existe une suite double $\{f_{m,n}\}$ de fonctions réelles de variable réelle, telle que la limite $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{m,n}(x)$ existe pour tout m et tout x et que la limite $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)$ s'annule pour tout x, tandis que la limite $\lim\limits_{k\to\infty} f_{m_k,n_k}(x)$ ne s'annule qu'au plus pour une infinité dénombrable des x quelles que soient la suite $\{n_k\}$ de nombres naturels et la suite croissante $\{m_k\}$ de ces nombres.

(c) Il existe un ensemble C concentré (1) de puissance du continu de nombres réels.

Poprougénko consacra ses travaux (voir Popruženko [1] et [2]) à l'étude des problèmes se rattachant à la proposition (a) et à la décomposition de Banach et Kuratowski.

Rangeons les termes A_j^i d'une telle décomposition en une suite simple $\{A_n\}$. Cette suite a les propriétés que voici:

μ étant une mesure extérieure de Carathéodory, définie dans $S(E)$, il existe un n naturel et tel que A_n n'appartient pas au corps des ensembles mesurables par μ;

K étant le plus petit corps dénombrablement additif qui contient tous les A_n, toute mesure définie dans K et s'annulant pour tous les atomes de ce corps s'annule identiquement.

L'existence d'une décomposition de Banach et Kuratowski dans un ensemble E indénombrable implique l'existence d'un ensemble indénombrable C de nombres réels de *mesure absolue nulle*, c'est-à-dire tel que, pour toute mesure m définie dans le corps des ensembles boréliens de nombres réels, il existe un ensemble borélien B contenant C et pour lequel $m(B) = 0$.

La plus forte généralisation du théorème I est due à Ulam (voir Ulam [2]) qui montra que l'hypothèse du continu peut être remplacée dans l'énoncé de ce théorème par une hypothèse plus faible, à savoir que le nombre $2^{\aleph_0}$ est inférieur au premier aleph inaccessible au sens large. Il montra en particulier (sans d'autres hypothèses supplémentaires) que toute mesure définie dans le corps de tous les sous-ensembles d'un ensemble de puissance $\aleph_1$ et s'annulant pour tout sous-ensemble qui se réduit à un point est nulle identiquement — résultat que Sierpiński et

(1) c'est-à-dire contenant un sous-ensemble C_0 tel que, pour tout sur-ensemble ouvert G de C_0, l'ensemble $E\setminus G$ est au plus dénombrable (cf. Besicovitch [1]).

Szpilrajn (Marczewski) établirent dans [1] par une autre voie, à savoir en le déduisant des théorèmes de Hausdorff (voir Hausdorff [3]) sur l'existence de certaines suites transfinies d'ensembles boréliens.

Le problème analogue à (*) pour les ensembles E de puissance quelconque est envisagé dans le commentaire au travail [*30*] de Banach (voir ce volume, p. 338) où Banach résolut ce problème par une construction analogue à la décomposition de Banach et Kuratowski, mais adaptée aux puissances plus élevées. Cette construction s'avéra utile aussi dans la théorie des algèbres de Boole (voir Sikorski [8], p. 130). C'est à l'aide de cette construction que Traczyk (voir Traczyk [1]) résolut par un bel exemple un problème concernant les ainsi dites complétions des algèbres de Boole.

Il est à noter qu'en remplaçant dans le problème (*) „mesure" par „fonction additive d'ensemble", la réponse devient affirmative: quel que soit l'ensemble E, il existe une fonction additive, définie pour tous les sous-ensembles de E, prenant exactement deux valeurs, 0 et 1, et s'annulant pour tout ensemble qui se réduit à un point (voir Ulam [1] et Tarski [2]).

R. Sikorski

Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, Studia Mathematica 2 (1930), p. 207-220*.

Bemerkung zu der Arbeit: „*Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen*", ibidem, p. 251.

Les deux publications forment un tout, la seconde n'apportant qu'une correction à deux théorèmes de la première.

D'après un théorème dû à Sidon (voir Sidon [1] et [2]), si une fonction bornée mesurable possède la série de Fourier de la forme

$$(*)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos k_n t+\beta_n\sin k_n t)\qquad \text{où}\qquad \frac{k_n+1}{k_n}>k>1,$$

cette série est absolument convergente (voir aussi la monographie [6] de Zygmund, volume I, p. 247). D'après un autre théorème, dû à Zygmund [4] (p. 138), si une fonction intégrable possède la série de Fourier de la forme (*), cette fonction est intégrable avec une puissance positive arbitraire (voir aussi Sidon [8], corollaire et théorème II, p. 486).

---

* Voir p. 187.