

Szpilrajn (Marczewski) établirent dans [1] par une autre voie, à savoir en le déduisant des théorèmes de Hausdorff (voir Hausdorff [3]) sur l'existence de certaines suites transfinies d'ensembles boréliens.

Le problème analogue à (*) pour les ensembles E de puissance quelconque est envisagé dans le commentaire au travail [30] de Banach (voir ce volume, p. 338) où Banach résolut ce problème par une construction analogue à la décomposition de Banach et Kuratowski, mais adaptée aux puissances plus élevées. Cette construction s'avéra utile aussi dans la théorie des algèbres de Boole (voir Sikorski [8], p. 130). C'est à l'aide de cette construction que Traczyk (voir Traczyk [1]) résolut par un bel exemple un problème concernant les ainsi dites complétions des algèbres de Boole.

Il est à noter qu'en remplaçant dans le problème (*) „mesure” par „fonction additive d'ensemble”, la réponse devient affirmative: quel que soit l'ensemble E , il existe une fonction additive, définie pour tous les sous-ensembles de E , prenant exactement deux valeurs, 0 et 1, et s'annulant pour tout ensemble qui se réduit à un point (voir Ulam [1] et Tarski [2]).

R. Sikorski

Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen, *Studia Mathematica* 2 (1930), p. 207-220*.

Bemerkung zu der Arbeit: „Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen”, *ibidem*, p. 251.

Les deux publications forment un tout, la seconde n'apportant qu'une correction à deux théorèmes de la première.

D'après un théorème dû à Sidon (voir Sidon [1] et [2]), si une fonction bornée mesurable possède la série de Fourier de la forme

$$(*) \quad \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos k_n t + \beta_n \sin k_n t) \quad \text{où} \quad \frac{k_{n+1}}{k_n} > k > 1,$$

cette série est absolument convergente (voir aussi la monographie [6] de Zygmund, volume I, p. 247). D'après un autre théorème, dû à Zygmund [4] (p. 138), si une fonction intégrable possède la série de Fourier de la forme (*), cette fonction est intégrable avec une puissance positive arbitraire (voir aussi Sidon [8], corollaire et théorème II, p. 486).

* Voir p. 187.

Ces deux théorèmes furent le point de départ du travail de Banach, qui y établit, en s'appuyant sur eux, deux théorèmes suivants, concernant le cas où $k_{n+1}/k_n > k > 1$:

1. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + \beta_n^2)$ converge, il existe une fonction $x(t)$ continue et telle que l'on a les égalités $a_{k_n} = a_n$ et $b_{k_n} = \beta_n$.

2. Si les suites $\{a_n\}$ et $\{\beta_n\}$ tendent à zéro, il existe une fonction $x(t)$ intégrable et satisfaisant aux mêmes égalités.

Ici et dorénavant, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $x(t)$ relatifs au système trigonométrique. La démonstration de 1 et 2 est précédée par celle de l'équivalence de certaines trois propriétés des systèmes orthogonaux assujettis à des hypothèses convenablement choisies. Cette équivalence y est établie à l'aide des méthodes de l'analyse fonctionnelle, à savoir en appliquant les théorèmes sur les opérations conjuguées (voir [23], p. 236-238, lemme 9 et théorèmes 5-7; voir aussi [38], p. 99 et 100). Cette équivalence implique entre autres que le théorème précité de Zygmund entraîne 1 et que celui de Sidon entraîne 2. Au moyen des théorèmes 1 et 2, Banach fut à même de montrer sans peine et d'une façon élémentaire que

a. il existe une suite $\{\varepsilon_n\}$ de nombres positifs convergeant vers 0 et une fonction $x(t)$ continue pour laquelle la série

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{2-\varepsilon_n} + |b_n|^{2-\varepsilon_n})$$

diverge (voir le travail commenté, p. 188);

b. il existe une suite $\{\lambda_n\}$ de nombres divergeant vers $+\infty$ et une fonction $x(t)$ intégrable pour laquelle la série

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{\lambda_n} + |b_n|^{\lambda_n})$$

diverge (ibidem, p. 189).

Le théorème a. est une généralisation d'un théorème de Carleman (voir Carleman [1], p. 378) d'après lequel il existe une fonction $x(t)$ continue et telle que la série (i) diverge pour tout $\varepsilon > 0$; on appelle *singularité de Carleman* cette propriété de la fonction $x(t)$.

Le théorème b. est une généralisation d'un théorème d'Orlicz sur les systèmes orthogonaux (voir Orlicz [1], p. 30, théorème 15) qui entraîne en particulier pour le système trigonométrique l'existence d'une fonction $x(t)$ intégrable et telle que la série (ii) diverge pour tout $\lambda > 0$.

Sidon publia plus tard (voir Sidon [8], p. 477) une démonstration du théorème 2 en procédant par construction et sans recourir à l'analyse

fonctionnelle. Ensuite, Webber (voir Webber [1], p. 325, théorème I) généralisa le théorème 2 en montrant que si $\lambda_n/\log n$ tend à zéro, il existe une fonction $x(t)$ intégrable et telle que la série (ii) diverge, tandis que si $\lambda_n/\log n > k > 0$ pour $n = 1, 2, \dots$, une telle fonction $x(t)$ n'existe pas. La démonstration de Webber procède également par construction et s'appuie sur certains résultats de Young. Une simple démonstration constructive du théorème 2 est à trouver dans la monographie [6] de Zygmund, volume II, p. 131, 7.1, ii.

Quant aux cas particuliers des théorèmes 1 et 2, il y eut, outre le théorème précité de Carleman, certains résultats de Gronwall, de Verblunsky et de Sidon qui méritent d'être mentionnés.

Gronwall montra (voir Gronwall [1], p. 320) que si $\varphi(u)$ tend à l'infini avec u , il existe une fonction $x(t)$ continue et telle que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cdot \varphi[(a_n^2 + b_n^2)^{-1/2}]$$

diverge. Ce théorème de Gronwall est une généralisation de celui de Carleman; il résulte aussitôt du théorème 1 (voir Zygmund [6], volume II, p. 132, 7.5). La démonstration de Gronwall est basée sur un lemme numérique de Hardy et Littlewood. Les recherches de Gronwall furent poursuivies par Paley (voir Paley [1], en particulier p. 126, théorème I).

Verblunsky généralisa (voir Verblunsky [1], p. 33 et 42, théorème V) au cas du système orthogonal borné le théorème d'après lequel il existe une suite $\{k_n\}$ d'indices telle que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + \beta_n^2)$ converge, il existe une fonction $x(t)$ bornée pour laquelle on a les égalités $a_{k_n} = a_n$ et $b_{k_n} = \beta_n$. La suite $\{k_n\}$ fut définie par induction.

Sidon établit, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute suite $\{k_n\}$ d'indices, l'existence d'une fonction $x(t)$ continue et telle que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_{k_n}|^{2-\varepsilon} + |b_{k_n}|^{2-\varepsilon})$$

diverge. Tous ces théorèmes furent démontrés par construction. Enfin Sidon démontra par construction (voir Sidon [7], théorème II, p. 538) le théorème 1 et le compléta dans une annexe par la généralisation suivante: si la suite $\{k_n\}$ d'indices est telle que le nombre de termes égaux dans chacune des suites doubles $\{k_{mn}\}$ et $\{k'_{mn}\}$ définies par les conditions

$$k_{11} = 2k_1, \quad \dots, \quad k_{nn} = 2k_n, \quad k_{12} = k_1 + k_2, \quad \dots, \quad k_{mn} = k_m + k_n,$$

$$\text{et } k'_{12} = k_2 - k_1, \quad \dots, \quad k'_{mn} = k_n - k_m \quad \text{pour } n > m$$

est borné (indépendamment de m et n) et la série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + \beta_n^2)$ converge, il existe une fonction $x(t)$ continue et satisfaisant aux égalités $a_{k_n} = a_n$ et $b_{k_n} = \beta_n$. Cette généralisation est essentielle, car l'hypothèse sur la suite $\{k_n\}$ est réalisée non seulement lorsque $k_{n+1}/k_n > k > 1$, mais aussi pour certaines suites où $k_n = O(n^4)$ par exemple.

Une esquisse de la démonstration constructive du théorème 1 se trouve également dans la monographie [6] de Zygmund, volume II, p. 131, 7.1, i. Contrairement à la démonstration du théorème 2, elle y est longue et compliquée.

Une nouvelle démonstration constructive du théorème 1, bien plus succincte, est due à Salem et Zygmund [1]. Elle repose sur un raisonnement semblable à celui de la démonstration du théorème 2 par Sidon, à savoir sur l'emploi des produits analogues à ceux de Riesz

$$\prod_{n=1}^p (1 + a_n \cos k_n t + \beta_n \sin k_n t).$$

L'équivalence entre certaines propriétés des séries orthogonales (voir aussi Kaczmarz et Steinhaus [1], p. 250-255, théorèmes [734]-[737]) fut également le point de départ des recherches ultérieures, entre autres, de celles de Hewitt et Zuckerman (voir Hewitt et Zuckerman [1], p. 2, théorème 2.1 et autres) et de celles de Rudin (voir Rudin [1], partie V), qui s'occupa des équivalences pour les exposants finis $p > 1$ (cf. aussi Semadeni [1], p. 177, lemme 5).

J. Musielak

Über additive Maßfunktionen in abstrakten Mengen, Fundamenta Mathematicae 15 (1930), p. 97-101.*

Ce travail contient une généralisation des résultats de Banach et Kuratowski (voir Kuratowski [5]) et concerne le problème qui ne diffère de (*) formulé ici dans le commentaire au travail [24] de Banach (voir ce volume, p. 331) que par la puissance arbitraire m de l'ensemble E au lieu de celle du continu, la mesure étant entendue comme une fonction non-négative et dénombrablement additive.

Le théorème fondamental de cette publication est qu'en admettant l'hypothèse du continu généralisée, la réponse au problème est négative lorsque le nombre cardinal m est inférieur aux alephs inaccessibles.

* Voir p. 200.