

Über analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen*

Einleitung

Seien X und Y zwei metrische Räume. Der Raum Y sei außerdem separabel. Wir betrachten Operationen

$$y = f(x),$$

welche jedem Elemente $x \in X$ ein bestimmtes Element $y \in Y$ zuordnen.

Zwei Arten dieser Operationen werden gewöhnlich betrachtet. Die erste bilden die (mittels stetiger Operationen) analytisch darstellbaren Operationen; wir bezeichnen ihre Gesamtheit mit B . Die zweite Art bilden die im Sinne von Borel meßbaren Operationen; sie sei mit L bezeichnet.

Die zu B gehörenden Operationen werden folgendermaßen erklärt:

Eine stetige Operation zählen wir zur nullten Klasse B^0 . Die Grenzwerte der Folgen stetiger Operationen bilden die erste Klasse B^1 . Allgemein besteht die ξ -te Klasse B^ξ (wobei ξ eine beliebige endliche oder unendliche Ordnungszahl $< \Omega$ bedeutet) aus denjenigen Operationen, welche als Grenzwerte von Folgen von Operationen niedrigerer Klassen darstellbar sind.

Die Vereinigungsmenge aller Klassen B^ξ bildet die Gesamtheit B der (mittels stetiger Operationen) analytisch darstellbaren Operationen.

Um die im Sinne von Borel meßbaren Operationen zu erklären, definieren wir zunächst die zwei Borelschen Mengenklassen P^ξ und Q^ξ .

Die Klasse P^1 besteht aus allen abgeschlossenen, die Klasse Q^1 aus allen offenen Mengen. Die Klasse P^ξ ist die Gesamtheit der in der Form

$\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ darstellbaren Mengen, wobei $A_n \subset Q^{\xi_n}$ ($\xi_n < \xi$, $n = 1, 2, \dots$) ist.

Die Klasse Q^ξ ist die Gesamtheit der in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ darstellbaren Mengen, wobei $A_n \subset P^{\xi_n}$ ($\xi_n < \xi$, $n = 1, 2, \dots$) ist.

* Commenté sur p. 347.

Eine Operation $f(x)$ heißt *meßbar im Sinne von Borel von der Klasse $\xi \geq 0$* , wenn für jede offene Menge $G \subset Y$ die Menge $E[f(x) \in G]$ ⁽¹⁾ der Klasse $Q^{\xi+1}$ angehört. Wir bezeichnen die im Sinne von Borel meßbaren Operationen der Klasse ξ mit L^ξ und mit L die Gesamtheit aller derartigen Operationen.

Die Operationen B wurden zuerst von Herrn Borel definiert, die Operationen L von Herrn Lebesgue. Von Herrn Hausdorff ⁽²⁾ wurde das Problem gestellt, die Beziehungen zu finden, welche zwischen den Mengen B und L bestehen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Beziehungen untersucht.

Wir erklären jetzt eine neue Art von Operationen, nämlich die mit Hilfe von Operationen der Klasse L^1 analytisch darstellbaren Operationen. Man erhält sie auf folgende Weise:

Die Klasse b^1 sei mit L^1 identisch. Zur Klasse b^2 zählen wir die Grenzwerte von Folgen aus b^1 ; allgemein besteht die Klasse b^ξ aus Grenzwerten von Folgen, deren Operationen den Klassen niedrigerer Ordnung angehören.

Wir beschäftigen uns im folgenden mit den Beziehungen, welche zwischen den Klassen B , L und b bestehen.

Ist Y die Menge aller reellen Zahlen, so ist $B^\xi \equiv L^\xi$ ($\xi \geq 0$), woraus offenbar $B^\xi \equiv b^\xi \equiv L^\xi$ ($\xi \geq 1$) folgt.

Wenn Y ein anderer Raum ist, so finden die obigen Identitäten im allgemeinen nicht statt, wie das folgende Beispiel von Herrn Hausdorff ⁽³⁾ zeigt:

Es bezeichne X die Gesamtheit der reellen Zahlen und Y eine aus nur zwei Elementen y_1, y_2 bestehende Menge. Jede stetige Operation ist also von der Form $f(x) = y_1$, oder $f(x) = y_2$. Das sind zugleich alle Operationen B .

Die Operation, welche durch

$$\begin{aligned} f(0) &= y_1, \\ f(x) &= y_2 \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Diese von Herrn Lebesgue eingeführte Bezeichnung bedeutet die Menge derjenigen x , welche die in der Klammer angegebene Eigenschaft besitzen; im obigen Falle die Menge derjenigen x , für welche $f(x)$ in G enthalten ist.

⁽²⁾ Vgl. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 2 Aufl., p. 268. Es ist zu beachten, daß Herr Hausdorff unsere Operationen L mit (M^ξ, N^ξ) und unsere Operationen B mit f^ξ bezeichnet.

Zwischen unseren und den Hausdorff'schen Bezeichnungen bestehen folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} L^\xi &= (M^\xi, N^\xi), & B^\xi &= f^\xi \quad (\xi < \omega), \\ L^\xi &= (M^{\xi+1}, N^{\xi+1}), & B^\xi &= f^{\xi+1} \quad (\xi \geq \omega). \end{aligned}$$

⁽³⁾ Vgl. l. c. ⁽²⁾, p. 268 ff.

definiert ist, gehört, wie leicht zu sehen, zu L^1 . In diesem Falle ist also $L^1 \neq E^1$.

Man bemerkt leicht, daß

$$B^\xi \subset b^\xi \subset L^\xi \quad (\xi \geq 1).$$

Das folgt aus $B^0 \equiv L^0$, $b^1 \equiv L^1$ und aus der Tatsache, daß die Grenzwerte der Folgen von im Sinne von Borel meßbaren Operationen von Klasse $< \xi$ alle der Klasse L^ξ angehören.

In dieser Arbeit beweise ich die Sätze:

1. Wenn der Raum Y separabel ist, so hat man

$$b^\xi \equiv L^\xi \quad (\xi \geq 1).$$

2. Wenn sich zwei beliebige Punkte des Raumes Y stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen, so ist

$$B^\xi \equiv L^\xi \quad (\xi \neq 1)$$

(für $\xi = 1$ hat man $B^1 \subset L^1 \subset B^2$).

In diesen Sätzen wird über den Raum X lediglich vorausgesetzt, daß er metrisch ist.

Es wäre interessant festzustellen, unter welchen Voraussetzungen bezüglich des Raumes Y die Identität $B^\xi \equiv L^\xi$ für jedes ξ stattfindet. Wie man zeigen kann, ist das der Fall für gewisse vektorielle Räume, insbesondere solche vom Typus (B) ⁽¹⁾.

Ich erwähne noch, daß, wie Herr Kuratowski bewiesen hat (s. Kuratowski [3], S. 281), für jeden metrischen Raum Y ein ihn enthaltender metrischer Raum H definiert werden kann, in welchem

$$B^\xi \equiv L^\xi \quad (\xi \geq 0)$$

stattfindet, wobei in Y die frühere Metrik beibehalten wird.

In § 1 beweise ich eine Reihe von Hilfssätzen. Der § 2 enthält die Beweise der Sätze 1 und 2.

§ 1

HILFSSATZ 1. *Wenn die Mengen G, H so beschaffen sind, daß $G \supset H$, $G \subset Q^\xi$, $H \subset P^\xi$, so gibt es eine Menge $K \subset P^\xi \cdot Q^\xi$, derart daß $G \supset K \supset H$.*

Beweis. Vgl. W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ambigus*, Fund. Math. 6.

(1) D. h. vektorielle, normierte und vollständige Räume.

HILFSSATZ 2. Wenn $A \subset P^\xi \cdot Q^\xi$, so gibt es eine Folge von Mengen $\{A_j\}$ ($A_j \subset P^{a_j} \cdot Q^{a_j}$, $a_j < \xi$), für welche

$$A = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j$$

ist ⁽¹⁾.

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$(1) \quad A = \sum_{j=1}^{\infty} H_j = \prod_{j=1}^{\infty} G_j$$

wobei

$$\begin{aligned} H_j &\subset H_{j+1} & \text{und} & & H_j &\subset P^{\xi_j} & (\xi_j < \xi), \\ G_j &\supset G_{j+1} & \text{und} & & G_j &\subset Q^{\eta_j} & (\eta_j < \xi) \end{aligned}$$

angenommen werden kann.

Wir bezeichnen mit ε_j die größere der Ordnungszahlen ξ_j, η_j .

Wegen $G_j \supset A \supset H_j$ gibt es nach Hilfssatz 1 eine Menge $A_j \subset P^{\varepsilon_j} \cdot Q^{\varepsilon_j}$, für welche $G_j \supset A_j \supset H_j$.

Wie leicht zu sehen, folgt aus (1)

$$A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j.$$

HILFSSATZ 3. Damit eine Operation $f(x)$, deren Wertmenge isoliert ist, der Klasse L^ξ angehört, ist notwendig und hinreichend, daß sie jeden ihrer möglichen Werte in einer Menge annimmt, welche in $P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$ enthalten ist.

Beweis. Sei $\{y_i\}$ die Wertmenge von $f(x)$. Da sie isoliert ist, gibt es zu jedem y_i ein $\varepsilon_i > 0$ derart daß $(y_i, y_j) > \varepsilon_i$ ($j \neq i$) ist. Die Elemente y , welche der Ungleichung $(y, y_i) < \varepsilon_i$ genügen, bilden eine offene Menge; sie sei mit K_i bezeichnet.

Offenbar ist

$$E_x[f(x) = y_i] = E_x[f(x) \subset K_i] = X - E_x\left[f(x) \subset \sum_{j \neq i} K_j\right].$$

Da $\sum_{j \neq i} K_j$ ebenfalls offen ist, so folgt aus $f(x) \subset L^\xi$, daß $E_x[f(x) = y_i] \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$.

Die Bedingung ist also notwendig.

Sei G eine beliebige offene Menge und $\{y_{i_n}\}$ die darin enthaltene Teilfolge von $\{y_i\}$.

⁽¹⁾ D. h. es ist

$$A = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} A_j = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=n}^{\infty} A_j.$$

Dann ist

$$E_x[f(x) \in G] = \sum_{n=1}^{\infty} E_x[f(x) = y_{i_n}].$$

Hieraus folgt, daß unsere Bedingung zugleich hinreichend ist.

Bemerkung. Aus der letzten Gleichung folgt, daß, wenn die Wertmenge von $f(x)$ abzählbar ist und $f(x)$ jeden dieser Werte in einer Menge aus $P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$ annimmt, die Operation $f(x)$ von der Klasse L^{ξ} ist.

HILFSSATZ 4. Jede Operation $f(x)$ aus L^{ξ} ($\xi \geq 1$) ist die Grenze einer gleichmäßig konvergenten Folge von Operationen der Klasse L^{ξ} , deren jede eine isolierte Wertmenge besitzt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da der Raum Y separabel ist, gibt es eine abzählbare und isolierte Menge $\{y_n\}$ von der Eigenschaft, daß zu jedem y aus Y ein y_n existiert derart, daß $(y_n, y) < \varepsilon$ ist.

Sei

$$(1) \quad G_n = E_x[(f(x), y_n) < 2\varepsilon],$$

$$H_n = E_x[(f(x), y_n) \leq \varepsilon].$$

Wegen $G_n \subset Q^{\xi+1}$, $H_n \subset P^{\xi+1}$ und $G_n \supset H_n$, gibt es nach Hilfssatz 1 eine Menge $K_n \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$, für welche $G_n \supset K_n \supset H_n$ ist.

Man hat

$$(2) \quad X = \sum_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Zu jedem $x_0 \in X$ gibt es nämlich ein y_n derart, daß $(f(x_0), y_n) < \varepsilon$ ist. Daher ist $x_0 \in H_n \subset K_n \subset \sum_{n=1}^{\infty} K_n$.

Wir setzen

$$S_n = \sum_{i=1}^n K_i$$

und erklären eine Operation $\varphi(x)$ wie folgt:

$$(3) \quad \varphi(x) = \begin{cases} y_1 & \text{für } x \in K_1, \\ y_n & \text{für } x \in S_n - S_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Da $S_n \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$, gilt dasselbe für $S_n - S_{n-1}$. Auf Grund von Hilfssatz 3 folgt hieraus, daß $\varphi(x)$ der Klasse L^{ξ} angehört.

Wenn $x \in S_n - S_{n-1}$, so hat man $x \in K_n \subset G_n$ und daher wegen (1)

$$(f(x), y_n) < 2\varepsilon,$$

d. h. nach (3)

$$(f(x), \varphi(x)) < 2\varepsilon.$$

Aus (2) folgt, daß diese Ungleichung für alle x stattfindet.

Da ε eine beliebige positive Zahl ist, ist damit dieser Hilfssatz bewiesen.

HILFSSATZ 5. *Jede Operation $f(x)$ der Klasse L^ξ ($\xi > 1$), deren Wertmenge isoliert ist, läßt sich als Grenze einer Folge von Operationen von niedrigerer L -Klasse darstellen, deren jede nur endlich viele Werte annimmt.*

Beweis. Sei $\{y_i\}$ die Wertmenge von $f(x)$. Setzt man $A_i = \bigcup_x [f(x) = y_i]$, so ist $A_i \subset P^{\xi+1} \cdot Q^{\xi+1}$ ($i = 1, 2, \dots$). Es gibt also nach Hilfssatz 2 Mengenfolgen $\{A_i^j\}$ aus $P^\xi \cdot Q^\xi$, für welche

$$(1) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} A_i^j = A_i.$$

Wir setzen $\sum_{i=1}^n A_i^j = S_n^j$ und erklären eine Folge von Operationen $\{f_j(x)\}$ ($j > 2$) wie folgt:

$$(2) \quad f_j(x) = \begin{cases} y_1 & \text{für } x \in A_1^j, \\ y_n & \text{für } x \in S_n^j - S_{n-1}^j \quad (j > n > 1), \\ y_j & \text{für } x \in X - S_{j-1}^j. \end{cases}$$

Die Operation $f_j(x)$ nimmt also nur endlich viele Werte an. Da die Mengen A_i^j , S_n^j , $S_n^j - S_{n-1}^j$ und $X - S_{j-1}^j$ in $P^\xi \cdot Q^\xi$ enthalten sind, ist $f_j(x)$ von einer niedrigeren Klasse als L^ξ .

Sei, für ein gewisses x_0 , $f(x_0) = y_n$. Wegen (1) gibt es ein J derart, daß für $j > J$ die Mengen A_i^j ($i \leq n-1$) x_0 nicht enthalten, aber $x_0 \in A_n^j$ ist. Hieraus folgt wegen (2) für $j > n$ und $j > J$:

$$f_j(x_0) = y_n, \quad \text{daher} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x_0) = f(x_0).$$

Es ist also $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x)$ für jedes x .

HILFSSATZ 6. *Wenn*

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= f(x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) &= \varphi(x) \end{aligned} \right\} f_n(x), \varphi_n(x) \in L^{a_n} \quad (a_n \geq 1, n = 1, 2, \dots)$$

und

$$(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon \quad (x \in X)$$

ist, so gibt es eine Folge $\{\psi_n(x)\}$ ($\psi_n(x) \in L^{a_n}$), für welche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \varphi(x)$$

und

$$(f_n(x), \psi_n(x)) < 2\varepsilon \quad (x \in X, n = 1, 2, \dots)$$

stattfindet.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\{\varepsilon_n\}$ eine nach Null konvergierende Folge positiver Zahlen $< \varepsilon$.

Nach Hilfssatz 4 gibt es für jedes n zwei Operationen $\bar{f}_n(x)$, $\bar{\varphi}_n(x)$ aus L^{a_n} , deren Wertmenge isoliert ist und welche den Ungleichungen

$$(1) \quad (f_n(x), \bar{f}_n(x)) < \varepsilon_n, \quad (\varphi_n(x), \bar{\varphi}_n(x)) < \varepsilon_n$$

genügen.

Wir setzen

$$(2) \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \bar{\varphi}_n(x), & \text{wenn } (\bar{\varphi}_n(x), \bar{f}_n(x)) < \varepsilon, \\ \bar{f}_n(x), & \text{wenn } (\bar{\varphi}_n(x), \bar{f}_n(x)) \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort

$$(\psi_n(x), \bar{f}_n(x)) < \varepsilon.$$

Daher ist

$$(f_n(x), \psi_n(x)) \leq (f_n(x), \bar{f}_n(x)) + (\bar{f}_n(x), \psi_n(x)) < \varepsilon + \varepsilon_n < 2\varepsilon.$$

Wir zeigen jetzt, daß $\psi_n(x)$ der Klasse L^{a_n} angehört.

Sei $\{y_i\}$ die Menge der Werte, welche $\bar{f}_n(x)$ und $\bar{\varphi}_n(x)$ annehmen.

Man hat für jedes k

$$\begin{aligned} & E_x[\psi_n(x) = y_k] \\ &= E_x[\bar{\varphi}_n(x) = y_k] \cdot E_x[(\bar{f}_n(x), y_k) < \varepsilon] + E_x[\bar{f}_n(x) = y_k] \cdot E_x[(\bar{\varphi}_n(x), y_k) \geq \varepsilon]. \end{aligned}$$

Die Mengen $E_x[\bar{\varphi}_n(x) = y_k]$ und $E_x[\bar{f}_n(x) = y_k]$ sind nach Hilfssatz 3 in $P^{a_{n+1}} \cdot Q^{a_{n+1}}$ enthalten. Dasselbe ist der Fall für die beiden anderen Mengen. Denn man hat z. B.

$$E_x[(\bar{f}_n(x), y_k) < \varepsilon] = \sum_s E_x[\bar{f}_n(x) = y_s],$$

wobei die Summe über diejenigen s erstreckt ist, für welche $(y_s, y_k) < \varepsilon$ ist. Da, wie soeben bemerkt, alle $E_x[\bar{f}_n(x) = y_s]$ in $P^{a_{n+1}} \cdot Q^{a_{n+1}}$ enthalten sind, gilt das gleiche für ihre Summe.

Hieraus folgt, das $E_x(\psi_n(x) = y_k)$ ebenfalls in $P^{a_{n+1}} \cdot Q^{a_{n+1}}$ enthalten ist. Da die Wertmenge von $\psi(x)$ abzählbar ist, ist diese Operation nach der Bemerkung zu Hilfssatz 3 von der Klasse L^{a_n} .

Wir beweisen schließlich, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = \varphi(x)$.

Für ein beliebiges $x_0 \in X$ ist

$$(f(x_0), \varphi(x_0)) < \varepsilon.$$

Nach (1) ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n(x) = f(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\varphi}_n(x) = \varphi(x).$$

Es gibt also ein N , so daß für $n > N$

$$(\bar{f}_n(x_0), \bar{\varphi}_n(x_0)) < \varepsilon$$

ist.

Hieraus folgt auf Grund von (2), daß $\psi_n(x_0) = \varphi_n(x_0)$ und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x_0) = \varphi(x_0)$ ist.

Bemerkung. Wenn jede der Operationen f_n und φ_n nur endlich viele Werte annimmt, so können wir, indem wir $\bar{f}_n = f_n$ und $\bar{\varphi}_n = \varphi_n$ setzen, ähnlich wie oben Operationen φ_n erhalten, deren jede nur endlich viele Werte annimmt.

Wir werden diese Bemerkung beim Beweise des nächsten Hilfssatzes benutzen.

HILFSSATZ 7. Jede Operation $f(x)$ der Klasse L^ξ ($\xi > 1$) ist die Grenze einer Folge von Operationen aus L von Klasse $< \xi$, deren jede nur endlich viele Werte annimmt.

Beweis. Nach Hilfssatz 4 gibt es eine gegen $f(x)$ gleichmäßig konvergierende Folge $\{f_m(x)\}$ von Operationen der Klasse L^ξ , deren jede eine isolierte Wertmenge besitzt.

Es bezeichne $\{\varepsilon_m\}$ eine den Bedingungen $\varepsilon_m > 0$ und $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m < +\infty$ genügende Zahlenfolge.

Wir können annehmen, indem wir die ursprüngliche Folge $\{f_m(x)\}$ nötigenfalls durch eine Teilfolge ersetzen, daß

$$(f_m(x), f_{m+1}(x)) < \varepsilon_m \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Nach Hilfssatz 5 gibt es Folgen $\{f_m^n(x)\}$ von Operationen aus L von Klasse $< \xi$, deren jede nur endlich viele Werte annimmt, derart daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_m^n(x) = f_m(x) \quad (x \in X, n = 1, 2, \dots)$$

ist.

Sei $\varphi_1^n(x) = f_1^n(x)$. Nach Hilfssatz 6 und der darauf folgenden Bemerkung gibt es eine Folge $\{\varphi_2^n\}$ von Operationen aus L von Klasse $< \xi$, deren jede nur endlich viele Werte annimmt, für welche $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_2^n(x) = f_2(x)$

und $(\varphi_1^n(x), \varphi_2^n(x)) < 2\varepsilon_1$ ist.

Indem wir ähnlich die Folgen $\{\varphi_3^n(x)\}, \dots, \{\varphi_m^n(x)\}$ erklären, erhalten wir eine Doppelfolge $\{\varphi_m^n(x)\}$, welche für alle m, n folgende Bedingungen erfüllt:

a) $\varphi_m^n(x)$ ist eine im Sinne von Borel meßbare Operation einer Klasse $< \xi$, deren Wertmenge endlich ist.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_m^n(x) = f_m(x)$.

c) $(\varphi_m^n(x), \varphi_{m+1}^n(x)) < 2\varepsilon_m$.

Für ein beliebiges $x_0 \in X$ ist

$$(1) \quad (\varphi_n^n(x_0), f(x_0)) \leq (\varphi_n^n(x_0), \varphi_m^n(x_0)) + (\varphi_m^n(x_0), f_m(x_0)) + (f_m(x_0), f(x_0)).$$

Für $n > m$ ist wegen c)

$$(\varphi_n^n(x_0), \varphi_m^n(x_0)) \leq \sum_{k=m}^{n-1} (\varphi_k^n(x_0), \varphi_{k+1}^n(x_0)) \leq 2 \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Daher folgt mit Hilfe von b)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n^n(x_0), f(x_0)) \leq 2 \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k + (f_m(x_0), f(x_0)).$$

Da m beliebig ist, hat man schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n^n(x_0) = f(x_0).$$

Also besitzt die Folge $\{\varphi_n^n(x)\}$ alle verlangten Eigenschaften.

HILFSSATZ 8. *Wir setzen voraus, daß sich zwei beliebige Punkte von Y stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen. Sind dann F_i ($i = 1, 2, \dots, k$) disjunkte abgeschlossene Mengen aus X und y_i ($i = 1, 2, \dots, k$) beliebige Elemente aus Y , so gibt es eine in X definierte stetige Operation $f(x)$, für welche*

$$f(x) = y_i \quad (x \in F_i, i = 1, 2, \dots, k).$$

Beweis. Wir erklären für beliebige reelle t eine Funktion $\varphi(t)$, deren Wertmenge in Y enthalten ist, wie folgt:

$$\varphi(t) = \begin{cases} y_n & (n = 1, 2, \dots, k), \\ y_k & (t > k), \\ y_1 & (t < 1). \end{cases}$$

In den Intervallen $(1, 2), (2, 3), \dots, (k-1, k)$ sei $\varphi(t)$ beliebig definiert, jedoch stetig. Das letztere ist möglich, da nach unserer Annahme y_i und y_{i+1} sich durch einen stetigen Bogen verbinden lassen.

Es bezeichne $u_i(x)$ die Entfernung des Elementes x von F_i ; es ist also $u_i(x) = 0$ für $x \in F_i$. Die Funktionen $u_i(x)$ sind offenbar stetig.

Wir bezeichnen mit H den k -dimensionalen Euklidischen Raum und seine Koordinaten mit t_1, t_2, \dots, t_k . Sei G die aus denjenigen Punkten, deren höchstens eine Koordinate verschwindet, bestehende offene Teilmenge von H und $t = F(t_1, \dots, t_k)$ eine in G definierte und stetige Funktion von der Eigenschaft, daß

$$F(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_k) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Da für jedes $x \in X$ höchstens eine der Zahlen $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) gleich Null ist, ist $t = F[u_1(x), \dots, u_k(x)]$ eine in X definierte stetige Funktion, für welche

$$(1) \quad F[u_1(x), \dots, u_k(x)] = i \quad (x \in F_i).$$

Setzt man

$$f(x) = \varphi\{F[u_1(x), \dots, u_k(x)]\},$$

so ist $f(x)$ die gesuchte Operation. Sie ist nämlich stetig und für $x \in F_i$ hat man nach (1)

$$f(x) = \varphi(i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

§ 2

SATZ 1. Jede Operation der Klasse L^ξ ($\xi \geq 1$) ist auch von der Klasse b^ξ und umgekehrt, d. h.

$$L^\xi \equiv b^\xi \quad (\xi \geq 1).$$

Beweis. Für $\xi = 1$ folgt der Satz sofort aus der Definition der Klasse b^1 . Durch transfinite Induktion beweist man leicht mit Hilfe von Hilfssatz 7, daß $L^\xi \subset b^\xi$ ($\xi \geq 1$).

Wir zeigen jetzt, daß $b^\xi \subset L^\xi$ ($\xi \geq 1$), ebenfalls durch transfinite Induktion, indem wir also zunächst annehmen, daß dies für $\alpha < \xi$ richtig ist.

Sei $f(x) \in b^\xi, f_n(x) \in b^{\alpha_n}$ ($\alpha_n < \xi, n = 1, 2, \dots$) und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Es bezeichne K eine beliebige Kugel mit dem Mittelpunkt y_0 und dem Radius r , d. h.

$$K \equiv \bigcup_y [(y_0, y) < r].$$

Wir setzen

$$G_{i,n} \equiv \bigcup_x \left[(f_n(x), y_0) < r - \frac{1}{i} \right].$$

Dann ist

$$\bigcup_x [f(x) \in K] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n>k} G_{i,n}.$$

Wegen $G_{i,n} \subset Q^{\alpha_n+1}$ ist also

$$\bigcup_x [f(x) \in K] \subset Q^{\alpha_n+2} \subset Q^{\xi+1}.$$

Da jede offene Teilmenge von Y als eine abzählbare Summe von Kugeln darstellbar ist, so folgt hieraus $f(x) \in L^\xi$.

SATZ 2. Wenn sich zwei beliebige Elemente von Y stets durch einen stetigen Bogen verbinden lassen, so ist $L^\xi \equiv B^\xi$ ($\xi \neq 1$) und $B^1 \subset L^1$.

Beweis. Ähnlich wie bei Satz 1 zeigt man leicht, daß $B^\xi \subset L^\xi$.
(Offenbar ist $B^0 \equiv L^0$.)

Wir beweisen zunächst, daß, wenn die Wertmenge einer Operation $f(x)$ aus L^1 isoliert ist, diese Operation auch der Klasse B^1 angehört, d. h. die Grenze einer Folge stetiger Operationen ist.

Sei $\{y_i\}$ die Wertmenge von $f(x)$. Wir setzen

$$D_i = \bigcup_x [f(x) = y_i].$$

Da D_i eine Menge Q^2 ist, hat man

$$D_i = \sum_{k=1}^{\infty} D_{ik},$$

wobei die Mengen D_{ik} der Klasse P^1 angehören, d. h. abgeschlossen sind und $D_{ik} \subset D_{ik+1}$ ist.

Nach Hilfssatz 8 gibt es für jedes n eine stetige Operation $f_n(x)$, für welche

$$f_n(x) = y_i \quad (x \in D_{in}, i = 1, \dots, n).$$

Man hat für $x \in D_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = y_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

also für alle x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Daher ist $f(x)$ von der Klasse B^1 .

Nach Hilfssatz 7 ist daher jedes $f(x)$ aus L^2 in B^2 enthalten. Hieraus folgt durch transfinte Induktion mit Hilfe desselben Hilfssatzes, daß $L^\xi \subset B^\xi$ ($\xi \neq 1$) ist.