une remarque de Banach (voir l'article en question, p. 209), on a $B^1 = L^1$ pour certains espaces vectoriels, en particulier pour ceux de type (B), appelés aujourd'hui universellement *espaces de Banach.* On ignore si la dernière égalité subsiste pour les espaces connexes par arcs, mais non-séparables et, plus généralement, pour les espaces Y connexes. Notons que cette égalité entraînerait aussitôt en vertu du théorème 1 que si l'espace Y est séparable, on a $B^\xi = L^\xi$ pour tout ξ.

Rolewicz [1] montra que, l'espace Y étant supposé séparable et connexe par arcs, la condition suffisante pour avoir l'égalité $B^1 = L^1$ est que toute fonction f qui est limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de classe B^1 soit également de cette classe; en d'autres termes, que la classe B^1 de fonctions soit fermée relativement à leur convergence uniforme. Il fut démontré (voir ibidem) que cette condition suffisante est satisfaite en particulier dans les espaces Y rétractifs, c'est-à-dire que toute sphère (intérieur et surface) de rayon suffisamment petit et située dans Y est un rétracte de Y. Or, comme le montra Borsuk, la classe de ces espaces est assez étroite: même parmi les espaces localement connexes par arcs, il y a des Y qui ne sont pas rétractifs.

S. Rolewicz

Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Mathematica 3 (1931), p. 174-179*.

Ce travail contient une démonstration fort simple que l'ensemble des fonctions n'ayant de dérivée finie de droite pour aucun t de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ est résiduel dans l'espace métrique de toutes les fonctions continues $x(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ avec la distance naturelle

$$d(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|.$$

Le même théorème fut établi un peu plus tôt par Mazurkiewicz [1] (en réponse à une question posée par Steinhaus); il peut servir de démonstration qu'il existe des fonctions continues non différentiables en aucun point.

Le théorème de Mazurkiewicz et Banach fut une des premières applications de ce qu'on appelle *la méthode de catégorie* pour établir les théorèmes d'existence. Cette méthode consiste, comme pour l'existence de fonctions continues sans dérivée, dans le choix convenable d'un espace

---

* Voir p. 218.

métrique complet E et dans la démonstration que l'ensemble des points ayant une certaine propriété y est résiduel, donc sûrement pas vide (ce qui prouve l'existence des points qui ont cette propriété).

Les travaux en question de Mazurkiewicz et de Banach inaugurèrent une série des recherches des mathématiciens polonais où la méthode de catégorie, appliquée en diverses variantes, fut employée pour démontrer l'existence des fonctions continues ayant diverses singularités (voir les travaux d'Auerbach et Banach [*35*], commenté ici p. 346, de Kaczmarz [1], d'Orlicz [3] et [4], de Tarnawski [1]-[3]).

Au même cycle de problèmes vint se rattacher le résultat remarquable de Saks (voir Saks [5]) d'après lequel l'ensemble des fonctions non différentiables au sens de Besicovitch, c'est-à-dire n'ayant en aucun point de dérivée ni à droite, ni à gauche, ni finie, ni infinie, est de I^re catégorie dans l'espace des fonctions continues, par opposition à l'ensemble des fonctions non différentiables au sens ordinaire, c'est-à-dire n'ayant de dérivée finie en aucun point.

Les résultats de Banach et de Saks furent développés par Jarník (voir par exemple ses travaux [1] et [2]).

Comme on sait, la méthode de catégorie trouva aussi de nombreuses applications dans d'autres disciplines des mathématiques, notamment dans la topologie, dans la théorie des fonctions analytiques et dans l'analyse fonctionnelle.

W. Orlicz

H. Auerbach et —, *Über die Höldersche Bedingung*, Studia Mathematica 3 (1931), p. 180-184*.

Les résultats établis par Banach dans son travail [*34*] (ce volume, p. 218 et le commentaire p. 348) sont appliqués dans le travail faisant l'objet du présent commentaire pour démontrer que l'ensemble des fonctions continues $x(t)$ où $0 \leqslant t \leqslant 1$ telles que

$$\overline{\lim_{h\to+0}} \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{\omega(h)} \right| = +\infty$$

pour tout t y est résiduel. Ici ω est une fonction quelconque telle que $h > 0$ entraîne $\omega(h) > 0$ et que $h \to +0$ entraîne $\omega(h) \to 0$. Le théorème précité de Mazurkiewicz en est un cas particulier pour $\omega(h) = h$.

* Voir p. 223.