

Sur la mesure de Haar *

Cette Note est consacrée à la théorie de la mesure due à Alfred Haar ⁽¹⁾. L'objet de sa belle et importante théorie est la notion de mesure (définie par lui) dans les espaces métriques séparables et localement compacts où la notion d'ensembles congruents est définie. Cette mesure remplit les conditions habituelles de la mesure lebesgienne; les ensembles congruents sont de mesure égale et tous les ensembles boreliens (plus généralement, tous les ensembles analytiques) sont mesurables. La théorie trouve des applications importantes dans celle des groupes continus.

§ 1. Un ensemble E s'appelle *espace métrique*, lorsqu'une fonction réelle non négative $\varrho(a, b)$, dite *distance* de deux points variables a et b de E , est définie de façon que l'on ait toujours $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$, $\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$, $\varrho(a, a) = 0$ et $\varrho(a, b) > 0$ pour $a \neq b$.

La notion de distance dans l'espace E détermine, comme d'ordinaire, celles de *point d'accumulation*, d'ensembles *fermés*, *ouverts*, de *fermeture* d'un ensemble A (que nous désignerons par \bar{A}), etc. Un ensemble $A \subset E$ sera dit *compact*, lorsque chaque sous-ensemble infini de A admet (dans E) au moins un point d'accumulation.

Un espace E s'appellera *localement compact*, lorsque chacun de ses points est contenu dans une sphère ⁽²⁾ compacte. Il est dit *séparable*, lorsqu'il contient un ensemble *dénombrable*, *dense* dans lui.

§ 2. Nous admettrons dans la suite que E est un espace métrique, séparable, localement compact et que pour les ensembles situés dans E la relation de congruence \cong est définie de façon que les conditions suivantes se trouvent satisfaites:

I₁. $A \cong B$ entraîne $B \cong A$. $A \cong B$ et $B \cong C$ entraînent $A \cong C$.

I₂. Si A est un ensemble ouvert compact et $A \cong B$, l'ensemble B est aussi ouvert et compact.

* Commenté sur p. 352.

(1) Voir l'ouvrage de A. Haar [1], dont j'emprunte les méthodes et les principaux résultats.

(2) Le terme *sphère* désigne dans cette Note la *sphère ouverte*.

I₃. Si $A \cong B$ et $\{A_n\}$ est une suite (finie ou infinie) d'ensembles ouverts et compacts tels que $A \subset \sum_n A_n$, il existe aussi une suite d'ensembles $\{B_n\}$ tels que $B \subset \sum_n B_n$ et que $A_n \cong B_n$ pour tout $n = 1, 2, \dots$

I₄. Quel que soit l'ensemble ouvert et compact A , la famille de tous les ensembles congruents avec A couvre l'espace E .

I₅. $\{S_n\}$ étant une suite de sphères compactes concentriques de rayon tendant vers 0, et $\{G_n\}$ une suite d'ensembles tels que $G_n \cong S_n$, les relations $a = \lim_n a_n$ et $b = \lim_n b_n$, où $a_n \in G_n$ et $b_n \in G_n$, entraînent $a = b$.

§ 3. Etant donnés deux ensembles ouverts et compacts A et B , la famille de tous les ensembles congruents avec A couvre, en raison de I₄, l'ensemble \bar{B} . Il existe donc en vertu du théorème de Borel-Lebesgue⁽¹⁾ une famille finie d'ensembles congruents avec A et couvrant B . Soit $h(B, A)$ le nombre le plus petit possible d'ensembles dont se compose une telle famille.

On montre aisément à l'aide de I₁-I₅ que les propositions suivantes sont vérifiées pour des ensembles ouverts et compacts A, B et C quelconques:

$$\text{II}_1. C \subset B \text{ entraîne } h(C, A) \leq h(B, A).$$

$$\text{II}_2. h(B+C, A) \leq h(B, A) + h(C, A).$$

$$\text{II}_3. B \cong C \text{ entraîne } h(B, A) = h(C, A).$$

$$\text{II}_4. h(B, A) \leq h(B, C) \cdot h(C, A).$$

II₅. $\{S_n\}$ étant une suite de sphères compactes concentriques de rayon tendant vers 0, $\varrho(A, B) > 0$ entraîne l'existence d'un N tel que

$$h(A+B, S_n) = h(A, S_n) + h(B, S_n) \quad \text{pour tout } n > N.$$

Supposons, en effet, contrairement à II₃, qu'il existe une suite infinie croissante d'indices $\{n_i\}$ pour lesquels l'égalité en question est en défaut. Il existerait par conséquent une suite d'ensembles $\{G_i\}$ tels que $G_i \cong S_{n_i}$ et que les ensembles $A \cdot G_i$ et $B \cdot G_i$ soient simultanément non vides. Considérons des points arbitraires $a_i \in A \cdot G_i$ et $b_i \in B \cdot G_i$. Les ensembles A et B étant compacts, les suites $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ contiennent respectivement des suites partielles convergentes $\{a_{i_j}\}$ et $\{b_{i_j}\}$. Soient $a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{i_j}$ et $b = \lim_{j \rightarrow \infty} b_{i_j}$. On conclut de I₅ que $a = b$, ce qui est cependant impossible puisqu'on a par hypothèse $\varrho(A, B) > 0$.

Ceci établi, fixons un ensemble ouvert et compact G et une suite $\{S_n\}$ de sphères concentriques de rayon tendant vers 0, situées dans G ,

⁽¹⁾ Voir p. ex. F. Hausdorff [2], p. 130.

donc évidemment compactes. Posons pour tout ensemble ouvert et compact A

$$l_n(A) = \frac{h(A, S_n)}{h(G, S_n)}.$$

On a en vertu de Π_4

$$h(A, S_n) \leq h(A, G) \cdot h(G, S_n) \quad \text{et} \quad h(G, S_n) \leq h(G, A) \cdot h(A, S_n),$$

d'où pour tout $n = 1, 2, \dots$

$$1/h(G, A) \leq l_n(A) \leq h(A, G).$$

Il en résulte que $\{l_n(A)\}$ est une suite bornée aux termes dépassant un certain nombre positif.

§ 4. Faisons intervenir à présent le théorème suivant ⁽¹⁾, où $\{\xi_n\}$ et $\{\eta_n\}$ désignent des suites bornées arbitraires, a et b des nombres réels et les signes \lim , $\lim \sup$ et $\lim \inf$ sont à entendre dans le sens ordinaire:

A toute suite bornée $\{\xi_n\}$ on peut faire correspondre un nombre $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$, dit limite généralisée, de façon que les conditions suivantes soient remplies:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a\xi_n + b\eta_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n + b \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n$,
- 2) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n$,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.

Ces conditions impliquent que la limite généralisée reste la même, quand on change ou supprime dans une suite un nombre fini des termes. La condition 2) implique, en outre, que si la suite $\{\xi_n\}$ est convergente, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$.

Or, posons pour tout ensemble ouvert et compact A

$$(4.1) \quad l(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n(A).$$

On a alors pour des ensembles quelconques A et B ouverts et compacts:

- III₁. $0 < l(A) < +\infty$.
- III₂. $A \subset B$ entraîne $l(A) \leq l(B)$.
- III₃. $A \cong B$ entraîne $l(A) = l(B)$.
- III₄. $l(A+B) \leq l(A) + l(B)$.
- III₅. $q(A, B) > 0$ entraîne $l(A+B) = l(A) + l(B)$.

⁽¹⁾ Cf. S. Banach [38], p. 34, et S. Mazur, *Sur les méthodes de sommation*, C. R. du I Congrès des Mathématiciens Polonais, Lwów 1927, p. 102-107 (en polonais).

§ 5. Étant donné à présent un ensemble arbitraire $H \subset E$, désignons par $m^*(H)$ la borne inférieure de tous les nombres $\sum_n l(A_n)$ où $\{A_n\}$ est une suite quelconque d'ensembles ouverts et compacts, telle que $H \subset \sum_n A_n$.

Le nombre $m^*(H)$ portera le nom de *mesure extérieure* de l'ensemble H . Nous allons montrer qu'il satisfait aux conditions suivantes:

1° On a toujours $0 \leq m^*(H)$ et il existe des ensembles H pour lesquels on a $0 < m^*(H) < +\infty$; tels sont en particulier tous les ensembles H ouverts et compacts,

$$2^\circ H_1 \subset H_2 \text{ entraîne } m^*(H_1) \leq m^*(H_2),$$

$$3^\circ H \subset \sum_n H_n \text{ entraîne } m^*(H) \leq \sum_n m^*(H_n),$$

$$4^\circ \varrho(H_1, H_2) > 0 \text{ entraîne } m^*(H_1 + H_2) = m^*(H_1) + m^*(H_2),$$

$$5^\circ H_1 \cong H_2 \text{ entraîne } m^*(H_1) = m^*(H_2).$$

Démonstration. 1° Soit H un ensemble ouvert et compact. On a par définition $m^*(H) \leq l(H) < +\infty$.

D'autre part, il existe évidemment pour tout $\varepsilon > 0$ une suite (finie ou infinie) d'ensembles ouverts et compacts $\{A_n\}$ tels que $H \subset \sum_n A_n$ et $m^*(H) + \varepsilon \geq \sum_n l(A_n)$. Soit S une sphère quelconque contenue dans H .

Comme fermé et compact, l'ensemble \bar{S} , donc à plus forte raison S , se trouve couvert déjà par une suite finie $\{A_{n_i}\}$ extraite de $\{A_n\}$. En vertu de III₂ et III₄ on a donc $l(S) \leq l(\sum_i A_{n_i}) \leq \sum_i l(A_{n_i}) \leq \sum_n l(A_n) \leq m^*(H) + \varepsilon$. Il en résulte, ε étant arbitraire, que $l(S) \leq m^*(H)$, d'où finalement, selon III₁, $0 < m^*(H)$.

2° et 3° sont évidents.

4° $\varrho(H_1, H_2) > 0$ entraîne l'existence de deux ensembles ouverts G_1 et G_2 tels que $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$ et $\varrho(G_1, G_2) > 0$. D'autre part, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une suite d'ensembles ouverts et compacts $\{A_n\}$ tels que

$$(5.1) \quad H_1 + H_2 \subset \sum_n A_n \quad \text{et} \quad m^*(H_1 + H_2) + \varepsilon \geq \sum_n l(A_n).$$

Posons $A'_n = A_n \cdot G_1$ et $A''_n = A_n \cdot G_2$. Les ensembles A'_n et A''_n étant ouverts et compacts et leur distance, tout comme celle de G_1 et G_2 , étant positive, on a en vertu de III₅ et III₂

$$(5.2) \quad l(A'_n) + l(A''_n) = l(A'_n + A''_n) \leq l(A_n).$$

Or, comme d'autre part $H_1 \subset \sum_n A'_n$ et $H_2 \subset \sum_n A''_n$, on a les inégalités $m^*(H_1) \leq \sum_n l(A'_n)$ et $m^*(H_2) \leq \sum_n l(A''_n)$, d'où selon (5.2) $m^*(H_1) + m^*(H_2) \leq \sum_n l(A_n)$. On en tire en vertu de (5.1), ε étant arbitraire,

$m^*(H_1) + m^*(H_2) \leq m^*(H_1 + H_2)$, d'où enfin, selon 3°, $m^*(H_1) + m^*(H_2) = m^*(H_1 + H_2)$.

5° résulte directement de I₃ et III₃.

§ 6. Un ensemble H sera dit *mesurable*, lorsqu'on a pour tout ensemble A

$$m^*(A) = m^*(H \cdot A) + m^*(H - A);$$

la mesure extérieure $m^*(H)$ d'un ensemble H mesurable porte le nom de *mesure* tout court et sera désignée par $m(H)$.

Cette définition (1) est conforme à celle donnée par M. C. Carathéodory dans sa théorie générale de la mesure, où l'on ne postule d'ailleurs que les propriétés 1°-4°, p. 242, de la mesure extérieure. Il en résulte que la mesure qui vient d'être définie remplit tous les théorèmes de sa théorie. En particulier,

(6.1) *Le complémentaire d'un ensemble, ainsi que la somme et le produit d'une suite (finie ou infinie) d'ensembles mesurables, sont des ensembles mesurables.*

(6.2) *Tout ensemble de mesure extérieure nulle est mesurable; ainsi, tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est mesurable.*

(6.3) *Les ensembles ouverts (donc en vertu de (6.1) tous les ensembles boreliens (2)) sont mesurables.*

(6.4) *La mesure de la somme d'une suite (finie ou infinie) d'ensembles mesurables disjoints est égale à la somme des mesures de ces ensembles.*

Pour les démonstrations de ces théorèmes voir C. Carathéodory [1], II, Chap. VI, et H. Hahn [1], Chap. VI, § 5-7.

De plus, étant donnés un ensemble H et un $\varepsilon > 0$ quelconques, il existe par définition du nombre $m^*(H)$ une suite $\{A_n\}$ d'ensembles ouverts et compacts telle que

$$H \subset \sum_n A_n \quad \text{et} \quad m^*(H) + \varepsilon \geq \sum_n \nu(A_n) \geq \sum_n m(A_n) \geq m\left(\sum_n A_n\right).$$

Or, $\sum_n A_n$ étant un ensemble ouvert, il en résulte en vertu de 2°, p. 242, que

(1) cf. aussi th. 11, Chap. II, § 6 de Saks [6].

(2) et plus généralement, tous les ensembles analytiques. On a même le théorème suivant: l'opération (A) de Souslin (cf. p. ex. F. Hausdorff [2], p. 90-93) effectuée sur les ensembles mesurables conduit toujours aux ensembles mesurables. La démonstration de ce théorème, donnée par MM. N. Lusin et W. Sierpiński pour ensembles linéaires, reste valable pour un espace métrique quelconque et pour toute notion de mesure extérieure qui satisfait aux conditions de C. Carathéodory (les conditions 1°-4°, p. 242).

(6.5) *H étant un ensemble quelconque, le nombre $m^*(H)$ est la borne inférieure des mesures des ensembles ouverts contenant H.*

Il s'en suit en vertu de (6.3) que la mesure extérieure $m^*(H)$ est régulière au sens de M. Carathéodory⁽¹⁾. Enfin, comme l'espace E peut être couvert par une suite d'ensembles mesurables de mesure finie (p. ex. par une suite de sphères compactes), on déduit aisément de (6.1)-(6.3) et (6.5) les conditions suivantes de la mesurabilité d'un ensemble:

(6.6) *Pour qu'un ensemble H soit mesurable, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble G_δ contenant H et n'en différant que tout au plus par un ensemble de mesure nulle.*

(6.7) *Pour qu'un ensemble H soit mesurable, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble F_σ contenu dans H et n'en différant que tout au plus par un ensemble de mesure nulle.*

§ 7. Nous allons terminer cette Note par deux exemples des espaces E avec la notion de congruence.

EXEMPLE I. Soit \mathcal{M} une classe de transformations biunivoques et bicontinues T de l'espace entier E en espace entier E , assujettie aux conditions:

- 1) $T \in \mathcal{M}$ entraîne $T^{-1} \in \mathcal{M}$.
- 2) Si $T_1 \in \mathcal{M}$ et $T_2 \in \mathcal{M}$, on a aussi $T_1 T_2 \in \mathcal{M}$.
- 3) Pour tout couple a, b de points de E il existe une transformation $T \in \mathcal{M}$ telle que $T(a) = b$.
- 4) Etant données deux suites convergentes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ de points de E telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

si pour une suite $\{T_n\}$ de transformations appartenant à \mathcal{M} les suites $\{T_n(a_n)\}$ et $\{T_n(b_n)\}$ sont aussi convergentes, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(b_n).$$

Définition. Deux ensembles $A \subset E$ et $B \subset E$ sont congruents, lorsqu'il existe une transformation $T \in \mathcal{M}$ telle que $T(A) = B$ ⁽²⁾.

Il est aisé de vérifier que les conditions I_1 - I_5 se trouvent remplies.

Comme des cas particuliers des tels espaces E on peut citer: l'espace euclidien à n dimensions, où \mathcal{M} est la classe de toutes les translations et rotations; la sphère à 3 dimensions, où la classe \mathcal{M} est celle de toutes les rotations.

⁽¹⁾ Cf. C. Carathéodory [1], p. 258, et H. Hahn [3], p. 433.

⁽²⁾ $T(A)$ désigne la transformé de A , c.-à-d. l'ensemble de tous les points $T(a)$ où $a \in A$.

EXEMPLE II. Soit E un *groupe*, c.-à-d. qu'à tout couple a, b d'éléments de E est assigné un élément ab de E , dit *produit* et assujetti aux conditions:

- 1) $(ab)c = a(bc)$;
- 2) il existe dans E un élément-unité 1 tel que l'on a $1a = a1 = a$ pour tout $a \in E$;
- 3) à tout élément $a \in E$ correspond un élément inverse $a^{-1} \in E$ satisfaisant à l'équation $aa^{-1} = 1$.

Admettons, en outre, que E remplisse les conditions:

- 4) si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$;
- 5) si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-1} = a^{-1}$.

Etant donné un élément $c \in E$ et un ensemble $B \subset E$ quelconques, on désigne par cB l'ensemble de tous les éléments $a \in E$ tels que $a = cb$ où $b \in B$.

Définition. Deux ensembles $A \subset E$ et $B \subset E$ sont *congruents*, lorsqu'il existe un élément $c \in E$ tel que $A = cB$.

On vérifie facilement que les conditions I_1 - I_5 sont remplies⁽¹⁾. Nous allons l'établir en particulier pour la condition I_5 , p. 240.

En conservant les notations, il existe dans E une suite d'éléments $\{c_n\}$ tels que $G_n = c_n S_n$, d'où $S_n = c_n^{-1} G_n$. En désignant donc par s le centre des sphères S_n et en posant $p_n = c_n^{-1} a_n$ et $q_n = c_n^{-1} b_n$, on a $p_n \in S_n$ et $q_n \in S_n$ et par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = s$. Or, $c_n^{-1} = p_n a_n^{-1}$, d'où $q_n = p_n a_n^{-1} b_n$. On en tire par le passage à la limite $s = s a^{-1} b$, d'où $a^{-1} b = 1$ et finalement $a = b$.

Remarque. Il est à observer que pour les espaces E des exemples I et II on peut énoncer le théorème suivant:

Si $A \cong B$ et A est un ensemble mesurable, B est aussi un ensemble mesurable.

On le déduit facilement de (6.7), p. 244, en se rappelant que les ensembles congruents avec des ensembles fermés sont fermés et que les ensembles congruents avec les ensembles de mesure nulle sont d'après 5°, p. 242, et (6.2), p. 243, de mesure nulle.

(1) D'ailleurs la classe des congruences, considérée dans cet exemple, satisfait aussi aux conditions 1)-4) de l'exemple I, qui entraînent, comme il a été déjà observé, les conditions I_1 - I_5 .