de Kaczmarz et Steinhaus, la suite $\bar{x}_n(t)$ lacunaire au sens de Banach coïncide avec la suite $x_n(t)$ toute entière.

De forts résultats concernant les séries trigonométriques, mais ne se rattachant pas directement au sujet de ce travail de Banach sont dus, entre autres, à Zygmund [3, 5], Kolmogoroff [1] et Szidon [1, 3, 5, 6, 8]; ils concernent la convergence en moyenne, la convergence presque partout et la convergence absolue. Parmi les résultats qui ont un certain rapport au sujet dont il est question, il est à noter un théorème de Wiener sur les séries trigonométriques à petites lacunes (c'est-à-dire où $n_{k+1}-n_k \to +\infty$ avec $k \to +\infty$). Suivant ce théorème, si le développement trigonométrique à petites lacunes d'une fonction $f \epsilon L^1$ est de classe L^2 sur un segment, on a $f \epsilon L^2$. Erdös montra que le théorème analogue pour L^p où $p > 2$ est en défaut et Turàn le prouva par des exemples effectifs pour $p > 6$. Plus récemment, ces exemples furent simplifés par Knapowski et même déjà pour tout $p > 3$.

Z. Zahorski

Sur la mesure de Haar, note au livre [6] de Saks, p. 264-272; traduction russe *О мере Хаара*, Успехи Математических Наук, выпуск II, 1936, p. 161-167, et traduction anglaise *On Haar's measure*, note I to the book „Theory of the Integral" by S. Saks, Monografie Matematyczne VII, 1937, p. 314-319*.

La mesure invriante, introduite par Haar en 1932 dans les groupes topologiques (voir Haar [1]), devint une notion aussi fondamentale pour la théorie de ces groupes que la mesure de Lebesgue l'était pour l'analyse. Antérieurement, on connut des applications d'une mesure invariante aux groupes de Lie; elle joua également un rôle essentiel dans un théorème fort important pour la théorie des représentations, à savoir dans celui de Peter et Weyl [1]; Hurwitz [1] commença à l'appliquer déjà en 1894. La notion de mesure de Haar suscita donc d'emblée un vif intérêt, et plusieurs mathématiciens éminents consacrèrent leur travaux à cette notion. La note de Banach en fut le premier; il parut presque aussitôt après celui de Haar.

Le théorème de Haar sur l'existence d'une mesure invariante par rapport aux translations dans un groupe topologique fut établi sous l'hypothèse que ce groupe est un espace métrique, séparable et localement

---

* Voir p. 239.

compact (voir l'exemple 2 dans la note de Banach, p. 245). Banach généralisa ce théorème aux espaces ayant la même structure topologique, mais dans lesquels la congruence était définie axiomatiquement (dans l'exemple 1 de la même note, p. 244), ce qui est un cas essentiellement plus général que celui considéré par Haar. En particulier, déjà le théorème formulé dans l'exemple 1 précité implique celui de Haar, mais pas réciproquement. Notons à ce propos que la condition 4) en est satisfaite en particulier lorsque le groupe dont il s'agit dans l'exemple 1 se compose d'homéomorphies équicontinues.

L'hypothèse de séparabilité n'est pas essentielle dans la note de Banach: tous les raisonnements restent valables sans cette hypothèse si l'on y entend par compacité la bicompacité au lieu de la compacité habituelle (c'est-à-dire définie par la convergence de suites). Plus tard, le théorème de Haar fut généralisé aux groupes localement compacts quelconques (y compris les non-métrisables) et complété par le théorème sur l'unicité de la mesure de Haar (voir par exemple von Neumann [2], Halmos [1], chapitre XI, et Weil [1], § 7, où l'on trouve aussi une bibliographie).

L'idée directrice de toutes les démonstrations de l'existence de la mesure en question est au fond la même. La différence consiste dans le passage à la limite. Haar choisissait une suite partielle convergente et faisait un usage essentiel de l'hypothèse de séparabilité. Banach se servait de la limite généralisée tandis que dans les généralisations non métriques on appliquait le théorème de Tychonoff. Aucune de ces démonstrations n'était effective. La première démonstration effective de l'existence de la mesure de Haar est due à H. Cartan (voir sa note [2] et aussi le livre de Hewitt et Ross [1] contenant une vaste bibliographie du sujet).

Le théorème de Banach se laisse également généraliser aux espaces non métriques: il suffit de modifier convenablement la condition I_5 dans la définition de la convergence (p. 240) et d'appliquer, au lieu de la limite généralisée, le théorème de Tychonoff (comme dans le livre de Halmos [1], p. 254). La condition I_5 pourrait être modifiée par exemple comme suit:

I'_5. *$\{U\}$ étant une classe d'ensembles ouverts dont les fermetures sont compactes et dont l'inersection se réduit à un point, si pour chaque U de cette classe tout entourage d'un point a contient un tel point x et tout entourage d'un point b contient un tel point y que x et y appartiennent à un même ensemble congruent avec U, on a $a = b$.*

Ainsi généralisé, le théorème de Banach implique comme son cas particulier non seulement le théorème de Haar pour les groupes, généralisé comme dans l'exemple 2, mais aussi un théorème plus général sur l'existence d'une mesure invariante localement compacte dans les espaces à structure uniforme soumis au groupe d'homéomorphies équicontinues — théorème que Segal (voir Segal [1], théorème 7), qui s'occupait aussi du problème de l'unicité de cette mesure établit plus tard par une autre voie.

Loomis [1] démontra l'existence et l'unicité de toute mesure qui est la même pour les ensembles congruents, en regardant comme ensembles congruents seulement les sphères pleines compactes de rayon égal situées dans les espaces métriques assujettis à la condition supplémentaire que les sphères de rayon égal s'y laissent toujours couvrir par un même nombre de sphères de rayon x quelconque fixé d'avance. La démonstration de Loomis est effective. Cependant, la congruence chez Loomis et celle chez Banach ne sont pas comparables, les axiomes I_1-I_5 de Banach n'entraînant guère la congruence entre les sphères d'un même rayon. Plus encore, à cette époque Banach ne pouvait pas admettre l'hypothèse de ce genre s'il voulait appliquer son théorème aux groupes. L'admission de cette hypothèse pour les groupes topologiques avec congruence définie par les translations ne devint possible que lors de la publication en 1936 du théorème de Kakutani [1] sur l'existence d'une mesure invariante.

A. Goetz

— et S. Mazur, *Über mehrdeutige stetige Abbildungen*, Studia Mathematica 5 (1934), p. 174-178*.

L'étude des homéomorphies locales prit naissance dans la théorie des surfaces de Riemann des fonctions analytiques et, plus généralement (voir Weyl [1], p. 47), dans celle des surfaces couvrantes („Überlagerungsflächen"). Lorsque, X et Y étant des espaces topologiques, X est pour Y un espace couvrant, il existe une homéomorphie locale $f: X \to Y$. Un des problèmes de cette théorie et celui des conditions pour que la surface couvrante soit unifoliée („einblättrig") ou, en d'autres termes, pour que l'homéomorphie locale f soit une homéomorphie tout court. Le théorème 2 du travail commenté apporte de telles conditions.

Dans le même ordre d'idées, quatre théorèmes suivants furent connus au moment de la publication de ce travail:

Théorème de Carathéodory et Rademacher ([1], Satz II). Soit f une fonction transformant une région plane X simplement connexe en une région plane Y d'une manière continue, localement biunivoque et

* Voir p. 246.